Аналог K-свойства Колмогорова для детерминированных эргодических действий и обобщение теоремы Пинскера

Рыжиков Валерий Валентинович

А. Н. Колмогоров ввел в эргодическую теорию фундаментальный инвариант энтропии динамической системы и понятие K-систем. Последние также известны как действия с вполне положительной энтропией. М.С. Пинскер доказал, что K-система независима от системы с нулевой энтропией. Для решения некоторых задач о типичных динамических системах недавно применялась модификация энтропии Кушниренко, названная P-энтропией.

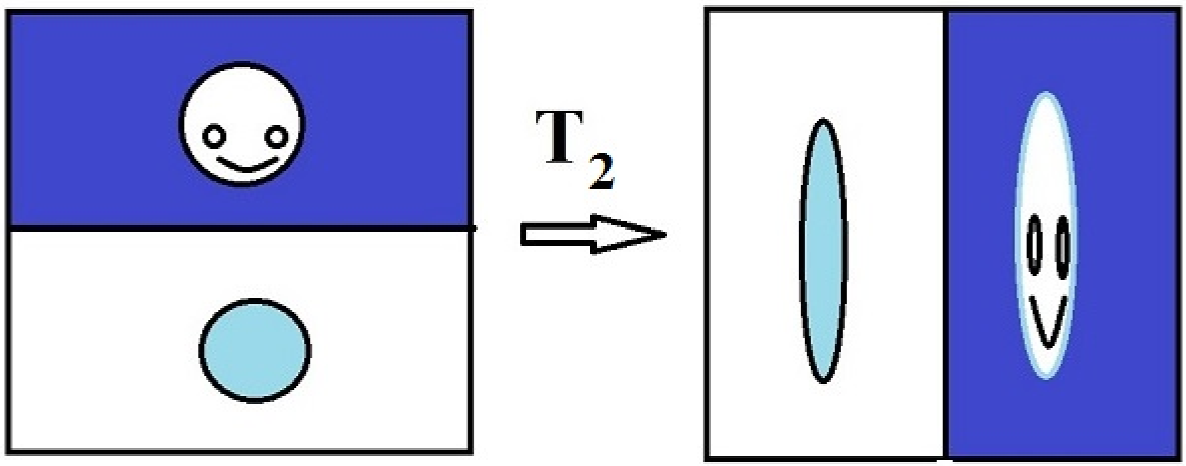
В качестве P рассматривается последовательнось конечных временных подмножеств, например, последовательность расширяющихся прогрессий в группе целых чисел.

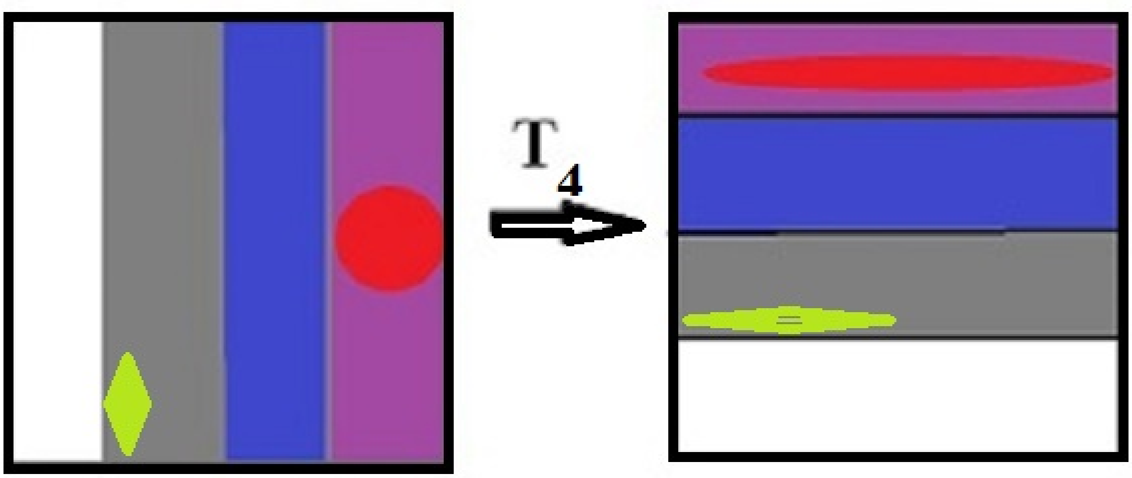
P-энтропия, являясь обобщением классической энтропии, в сочетании с результатами теории присоединений (joinings) приводит к следующему факту.

Теорема (В. В. Рыжиков, Ж.-П. Тувено, 2023). Действие с вполне положительной P-энтропией и действие с нулевой P-энтропией независимы.

Примеры, показывающие содержательность обобщения теоремы Пинскера, широко присутствуют среди детерминированных гауссовских и пуассоновских систем.

Задача, которую цитировали Халмош и Улам.





Автоморфизм T_2 изоморфен T_4 ?

В 1958 г. задача решена А.Н. Колмогоровым, что положило начало совешенно новому энтропийному направлению в теории динамических систем.

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 119, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

НОВЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ТРАНЗИТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

РЕШЕНИЕ : $h(T_4) = 2, \;\; h(T_2) = 1.$

Отметим, что Д.Орнстейн (1975) доказал, что других решений, кроме энтропийного, нет. А.М. Степин обобщил результат Орнстейна на действия счетных групп (1975).

Появившись в 1958 году, колмогоровская теория стремительнно развивалась благодаря участию в энтропийном движении выдающихся математиков, среди которых Пинскер, Рохлин, Синай, Гуревич, Каток, Степин, Орнстейн, Вейс, Шилдс, Тувено, Каликов. Появились разные типы энтропии, среди авторов новых подходов Вершик, Динабург, Кушниренко, Оселедец, Довнарович, Л.Боуэн, Сьюард и многие другие исследователи.

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 133, № 5

МАТЕМАТИКА

М. С. ПИНСКЕР

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И НУЛЕВОЙ ЭНТРОПИЕЙ*

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 IV 1960)

Структурная теорема Т. Остина (Measure concentration and the weak Pinsker property, Publ. Math. IHES, 128:1, 2018) о слабом свойстве Пинскера утверждает, что всякий K-автоморфизм T изоморфен $B \times K$, $h(K) < \varepsilon$, а B – бернуллиевский автоморфизм.

Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ - стандартное вероятностное пространство, и пусть T - обратимое преобразование,
T называется K-автоморфизмом,
если существует под-сигма-алгебра $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, такая, что

(1) $\mathcal{K} \subset T\mathcal{K}$

(2) $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathcal{K} = \mathcal{B}$

(3) $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \mathcal{K} = \{X, \varnothing\}$

Энтропия разбиения и энтропия автоморфизма. Пусть $\xi = \{A_1, \ldots, A_n\}$,

$$H(\xi) = \sum_1^n \mu(A_i) \log_2 \frac{1}{\mu(A_i)}.$$

$$h_j(T, \xi) = \frac{1}{|P_j|} H(\bigvee_{p \in P_j} T^p \xi),$$

$$h_P(T, \xi) = \limsup_j \, h_j(T, \xi),$$

$$h_P(T) = \sup_\xi h_P(T, \xi).$$

При $P_j = \{1, 2, \ldots, j\}$ получаем классическую энтропию автоморфизма

$$h(T, \xi) = h_{\{P_j\}}(T, \xi).$$

K-свойство Колмогорова эквивалентно тому, что для всех $\xi \neq \{\emptyset, X\}$ выполнено $h(T, \xi) > 0$ (Пинскер, 1960).

Также Пинскер доказал, что K-автоморфизмы дизъюнктны (независимы) с автоморфизмами нулевой энтропии (их также называют детерминированными).

Сформулируем его теорему следующим образом: если $h(S) = 0$, а для T выполнено $h(T, \xi) > 0$ для всех нетривиальных разбиений ξ, всякие два фактора, изоморфные S и T соответственно, будут независимы.

Теорема (Рыжиков, Thouvenot, 2023). В формулировке теоремы Пинскера классическую энтропию h можно заменить на h_P, где $P = \{P_j\}$ – последовательность конечных множеств P_j возрастающей мощности.

1967 г. сентябрь—октябрь т. XXII, вып. 5 (137)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.9

О МЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ ТИПА ЭНТРОПИИ

А. Г. Кушниренко

В этой работе Кушниренко применил обобщение энтропии, по сути совпадающее с h_P-энтропией, показав неизоморфность потока орициклов своему декартовому квадрату.

В нашем случае h_P-энтропия позволяет не только различать детерминированные системы с одинаковыми спектральными свойствами, например, гауссовские и пуассоновские системы с лебеговской компонентой в спектре, но и обнаруживать их дизъюнктность как максимальное в выражение метрического неизоморфизма.

СПАСИБО