

УДК 521.13

ИЗОТРОПНЫЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТНЫЕ УСЛОВИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ–ВРЕМЕНИ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

В.В.Чазов, И.А.Герасимов, О.Д.Соловьева

(ГАИШ)

E-mail: zov@sai.msu.ru

Современные численные теории движения планет Солнечной системы построены с использованием изотропных координатных условий. Международный астрономический союз в своих резолюциях о системах отсчета пространства–времени рекомендует использовать гармонические координатные условия. В статье представлен алгоритм, связывающий оба подхода. Алгоритм основан на решении дифференциальных уравнений, полученных с помощью формулы тензорного преобразования координат.

Пространство–время определяется значениями 10 компонентов метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, каждая из компонентов является функцией координатного времени и трех пространственных координат, индексы α и β принимают значения 0, 1, 2, 3. Квадрат интервала имеет вид $d\tau^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$, по повторяющимся индексам выполняется суммирование, $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, c — скорость света, t — координатное время.

Метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ должны быть найдены в результате решения уравнений поля [1]. Задача имеет малый параметр: отношение скорости пробной частицы к скорости света. Отношение потенциала взаимодействия пробных частиц к квадрату скорости света пропорционально второй степени малого параметра. Решение уравнений поля в постньютоновском приближении со всей необходимой точностью соответствует достаточно медленным движениям небесных тел Солнечной системы и относительно небольшим силам их взаимного притяжения.

Десять компонентов симметричного метрического тензора связаны между собой четырьмя произвольными соотношениями, так называемыми координатными условиями.

Современная теория движения планет, Луны и Солнца [2], построенная в барицентрической системе отсчета, получена численным интегрированием релятивистских уравнений движения, записанных в постньютоновском приближении с помощью изотропных координатных условий [3].

Международный астрономический союз, принимая во внимание факт, что многие работы по теории относительности выполнены при использовании “гармонических” координат, оказавшихся полезными и более простыми для многих типов приложений [4], рекомендует выбор гармонических координатных условий [5].

В статье показано, как учесть разницу между применяемыми изотропными и рекомендуемыми гармоническими координатными условиями.

Обозначим

f – гравитационная постоянная,

m_0 – масса Солнца,

$m_k, k > 0$ – массы планет,

$\mathbf{r}$ – барицентрический вектор положения произвольной точки в пространстве,

$\mathbf{r}_k$ – барицентрический вектор положения объекта с номером k ,

$\mathbf{v}_k$ – барицентрический вектор скорости объекта с номером k ,

v_k^2 – квадрат модуля вектора скорости,

U – потенциал в произвольной точке пространства, создаваемый системой частиц, взаимодействующих по закону Ньютона,

U'_k – потенциал в точке расположения объекта с номером k , создаваемый остальными частицами, взаимодействующими по закону Ньютона,

W – скалярная функция,

$\mathbf{V}$ – векторная функция с компонентами V_1, V_2, V_3 .

Координатные условия гласят

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \quad - \text{изотропный случай,} \\ 4 \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \quad - \text{гармонический случай.} \end{aligned}$$

Изотропная форма представления метрики пространства–времени $N + 1$ взаимодействующих частиц предполагает, что

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}, \\ U'_k &= \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|}, \\ W &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \left(\frac{3}{2} v_k^2 - U'_k \right), \\ \mathbf{V} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \left(7 \mathbf{v}_k + \frac{((\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \right). \end{aligned}$$

Метрика, полученная под гармоническими координатными условиями, отличается от изотропной в выражениях для дополнительных потенциалов

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} (2 v_k^2 - U'_k \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|^3} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{((\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{v}_k)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^2}), \\ \mathbf{V} &= 4 \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

Запишем квадрат интервала

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= c^2 g_{00} dt^2 + 2c g_{0i} dt dx^i \\ &\quad + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_{00} &= +1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4} - \frac{2W}{c^4}, \\ g_{0i} &= \frac{1}{c^3} V_i, \\ g_{ii} &= -1 - \frac{2U}{c^2}, \\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Потенциал U пропорционален v^2 . Выражение W/c^4 имеет порядок v^4/c^4 , а $\mathbf{V}/c^3$ пропорционально v^3/c^3 . Формулы для метрических коэффициентов g_{ij} совпадают для обоих координатных условий. Отличие в коэффициенте g_{00} возникает только в четвертом порядке, а в g_{0i} – в третьем порядке относительно v/c . Из этого следует, что отличия в координатах x^1, x^2, x^3 будут порядка v^2/c^2 , а отличия в координатном времени смогут проявиться на уровне v^4/c^4 .

С помощью тензорного преобразования

$$g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

выведем формулы связи между координатами x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , удовлетворяющими изотропным координатным условиям, и гармоническими координатами x^0, x^1, x^2, x^3 .

Закон преобразования ищем в виде

$$\begin{aligned} x^0 &= x'^0 + \delta x^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \\ x^1 &= x'^1 + \delta x^1(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \\ x^2 &= x'^2 + \delta x^2(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \\ x^3 &= x'^3 + \delta x^3(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \end{aligned}$$

причем вариация $\delta x^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ имеет четвертый порядок, а вариация $\delta x^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ – второй порядок относительно отношения v/c .

Подставим соотношения для координат в формулу преобразования, выполним разложение правой и левой частей равенства в ряд Тейлора и приравняем величины одинакового порядка малости. В результате получим

следующие дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^3} (V'_i(x') - V_i(x')), \\ \frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^j} &= 0, \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^4} (W'(x') - W(x')) \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \cdot \delta x^i(x'^0), \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^j} &= 0.\end{aligned}$$

Зависимость функций δx^0 и δx^i от координат исчезает, а интегрирование по переменной x'^0 приводит к определенным интегралам

$$\begin{aligned}\delta x^i(t') &= \frac{1}{c^2} \int_{t'_0}^{t'} (V'_i(x') - V_i(x')) dt', \\ \delta t(t') &= \frac{1}{c^4} \int_{t'_0}^{t'} (W'(x') - W(x') \\ &\quad - c^2 \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \cdot \delta x^i(t')) dt' .\end{aligned}$$

Выражения, стоящие под знаком интеграла, суть известные функции координат и времени и вычисляются на основе численной теории движения Солнца, Луны и планет [2].

Существует два способа выполнения расчетов. В первом фиксирована точка с координатами x , y , z , и поправки на каждый следующий момент времени вычисляются именно для этой точки. Второй способ состоит в вычислении вариаций $\delta t(t')$, $\delta x^i(t')$ вдоль траектории движения небесного тела или космического аппарата.

Расчеты показали, что значения вариаций очень малы. Для пространственно-временной траектории Земли, например, они не превосходят 3 метра на интервале 100 лет. Рис. иллюстрирует результаты вычислений. Начальная точка совпадает с эпохой 2000.0, январь, 1.5.

Общий вывод состоит в следующей рекомендации. В прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения пробной частицы на основе “гармонических” координатных условий, а при вычислении возмущающих сил использовать “изотропные” координаты Солнца, Луны и планет.

Список литературы

- [1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.,1973.
- [2] *Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G. and Folkner W.F.* JPL Planetary and Lunar Ephemeris, DE405/LE405. /JPL Inter office Memorandum. 1998. № 312.F-98-048. P.1-28.
- [3] *P.Kenneth Seidelmann. Ed.* Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. Sausalito, California. 1992.
- [4] *Копейкин С.М.* //Астрон.ж. 1986. **62**. № 5. С.889.
- [5] Resolutions of the XXIVth General Assembly. /Internat. Astron. Union, Information bulletin. 2001. № 88. P.28.

Isotropic and harmonic coordinates conditions in space–time of the Solar system, by V.V.Chazov, I.A.Gerasimov, O.D.Solov’eva.

Abstract. *Recent numerical ephemerides of the Solar system planets are constructed by using isotropic coordinates. Resolution of the International Astronomical Union recommends to use harmonic coordinates. The algorithm for combining both approaches, based on the solve of differential equations obtained with tensor transformation formula, is presented.*

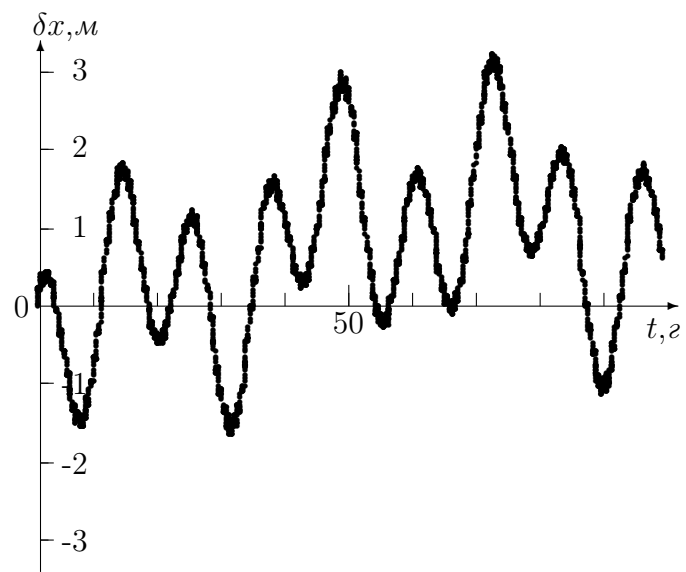


Рис. Вариация