РАЗРУШЕНИЕ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ.

М. О. Корпусов

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Параболические уравнения

II. Псевдопараболические уравнения

Предисловие

В данной книге мы отразили наши недавние продвижения в исследовании разрушения решений нелинейных уравнений параболического и псевдопараболического типов. При этом мы предлагаем дальнейшее развитие оригинального модифицированного метода Х. А. Левина. Наша модификация этого широко известного метода отличается гораздо большей простотой и позволяет получить более тонкие результаты. В частности, применяя модифицированный метод нам удалось в большинстве случаев ослабить условия на начальные данные задачи. Кроме того, применительно к псевдопараболическим уравнениям нам удалось существенно усилить наши же более ранние результаты. Данная монография является четвертым томом в серии книг, посвященных разрушению решений и опубликованных в издательстве УРСС.

Автор искренне признателен С. И. Похожаеву, А. Г. Свешникову и И. А. Шишмареву за полезное обсуждение содержания и тематики книги.

Автор

Введение

В данной монографии мы продолжаем исследования, начатые в работах [17], [6], [7], [8] и посвященные получению достаточных (близких к необходимым) условий разрушения решений начально–краевых задач для нелинейных уравнений псевдопараболического, псевдогиперболического и гиперболического типов. При этом мы продолжаем развивать энергетический метод Х. А. Левина, предложенный и развитый до определенной степени в работах [19], [21], [24], [25] и [4]. Наше развитие энергетического метода Х. А. Левина отличается большей простотой в применении к собственно соболевским уравнениям и, как следует из настоящей монографии, для классических гиперболических уравнений. Отметим, что еще в работе [17] мы этот метод распространили на случай нелинейного оператора по времени, т.,е., например, на случай такой задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u + \triangle_{p_1} u\right) + \triangle u - \triangle_{p_2} u = 0,$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и

$$\triangle_p v \equiv \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \quad \text{при} \quad p > 2.$$

В работе [6] мы распространили энергетический метод Х. А. Левина уже на случай, например, следующего соболевского уравнения со второй производной по времени и с нелинейным эллиптическим оператором при производной по времени первого порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\triangle u - u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - g(x,u)\right) + \triangle u + f(x,u) = 0,$$

для которого метод Х. А. Левина, изложенный в работах [20] и [4], уже неприменим из–за наличия слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - g(x,u)\right).$$

В первой части работы [7] мы рассмотрели, например, такую нелинейную–нелокальную задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - |u|^{q_1} u\right) + \triangle u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u\frac{\partial u}{\partial x_1} +$$

$$+\int\limits_0^t ds\, h(t-s)\triangle u(s) + |u|^{q_2}u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

для которой классический метод Х. А. Левина не работает, в частности, из за наличия слагаемого

$$\int\limits_0^t ds\, h(t-s)\triangle u(s).$$

Во второй части работы [7] мы рассмотрели некоторые нелинейные волновые уравнения, например, такого вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

исследование вопроса разрушения его решения за конечное время тесно связано с изучением некоторого нелокального нелинейного псевдопараболического уравнения, полученного интегрированием по времени.

В работе [8] в первой части мы рассмотрели классические нелинейные уравнения и нелинейные системы уравнений гиперболического типа. Например, классическое уравнение Клейна–Гордона с кубическим источником

$$u_{tt} - \triangle u + u = u^3.$$

Во-второй части монографии [8] мы рассмотрели начально–краевые задачи для модельных нелинейных уравнений псевдогиперболического типа и получили результаты о разрушении в случае произвольной положительной начальной энергии.

Отметим, что существуют три основных метода исследования явления разрушения. Первый метод — это энергетический метод Х. А. Левина [19], [21], [24], [25], [4] и [17]. Второй метод — это метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [15] и, наконец, третий метод — это метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [16].

Данная книга была написана в ходе выполнения проекта РФФИ (грант № 11-01-12018-офи-м-2011). Книга набрана и сверстана в пакете LaTeX 2_ε.

Часть I

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Разрушение решений параболических уравнений с двойной нелинейностью

1. Введение.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о достаточных условиях разрушения слабого решения следующей начально–краевой задачи:

$$\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial t} - \operatorname{div}(h(x,|\nabla u|)\nabla u) + g(x,u) = f(x,u), \tag{1.1}$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)|u|^{p_k-2}u, \tag{1.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{1.3}$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ и Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

К уравнениям вида (1.1) относятся так называемые параболические уравнения с *двойной нелинейностью*. Эти уравнения имеют важные приложения в физике и биологии (см. обзор [5]). Отметим, что вопросами локальной и глобальной во времени разрешимости начально–краевых и начальных задач для уравнений вида (1.1) исследовались в работах [14], [26], [3], [12] и [13]. Отдельно отметим работы В. А. Кондратьева. Вопросами разрушения решений уравнений вида (1.1) исследовались во многих работах. Прежде всего мы отметим классическую работу [22]. Отметим также работу [15], в которой методом нелинейной емкости исследовались различные нелинейные параболические уравнения в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ и были получены результаты о критических показателях.

Отметим, что наша техника получения достаточных условий разрушения слабых решений за конечное время требует предварительного доказательства существования гладких галеркинских приближений к точному решению задачи. Поэтому мы, не претендуя на оригинальность в этом вопросе, докажем существование этих приближений.

2. Постановка задачи.

Прежде всего сформулируем условия на нелинейности задачи (1.1)–(1.3).

Условия на $\varphi(x,u)$**.**

(i)$_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_1$ пусть

$$p_{k_0} = \max_{k\in\overline{1,n}} p_k, \quad p_{k_0} < p^*$$

и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant a_0 > 0$;

(iii)$_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Теперь сформулируем условия на $h(x,s)$.

Условия на функцию $h(x,s)$

(i)$_2$ $h(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_2$ имеет место неравенства для почти всех $x \in \Omega$:

$$c_2 s^{p-2} \leqslant h(x,s) \leqslant c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \tag{1.4}$$

кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ функция $h(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(0,+\infty)$, причем

$$|s h'_s(x,s)| \leqslant c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \tag{1.5}$$

(iii)$_2$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$c_3 \|\nabla v\|_p^p \leqslant \int\limits_\Omega h(x, |\nabla v(x)|)|\nabla v(x)|^2\, dx \leqslant \vartheta_1 \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla v(x)|)\, dx \tag{1.6}$$

при $\vartheta_1 > 0$, где

$$\mathcal{H}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h(x,\sigma)\sigma.$$

(iv)$_2$ функция $h(x,s)$ для почти всех $x \in \Omega$ является равномерно монотонной в следующем смысле:

$$(h(x,|\xi|)\xi - h(x,|\eta|)\eta, \xi - \eta) \geqslant a|\xi - \eta|^p \quad \text{для всех} \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^N. \tag{1.7}$$

Отметим, что в силу условия (1.4) имеем:

$$\operatorname{div}(h(x,|\nabla u|)\nabla u) : \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

где оператор $\operatorname{div}(\cdot)$ понимается в слабом смысле. Именно, имеет место следующее равенство:

$$\langle \operatorname{div}(v), w\rangle_0 = -\int\limits_\Omega dx\,(v, \nabla w), \quad v \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p \geqslant 2$$

для всех $w \in \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Условия на функцию $g(x,s)$

(i)$_3$ $g(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_3$ имеет место неравенство для почти всех $x \in \Omega$:

$$|g(x,s)| \leqslant c_4 + c_5 |s|^{q_1+1} \quad \text{при} \quad q_1 \in [0, p^* - 2); \tag{1.8}$$

(iii)$_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ имеет место следующие неравенства:

$$a\|v\|_{q_1+2}^{q_1+2} \leqslant \int\limits_{\Omega} v(x) g(x, v(x))\, dx \leqslant \vartheta_2 \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x, v(x))\, dx \tag{1.9}$$

где $\vartheta_2 > 0$ и

$$\mathcal{G}(x,s) = \int\limits_0^s g(x,\sigma)\, d\sigma;$$

(iv)$_3$ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_g(\cdot) = g(x,\cdot)$, порожденного функцией $g(x,u)$:

$$\|\mathcal{N}_g(u_1) - \mathcal{N}_g(u_2)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant \mu_1(\mathrm{R}_1) \|u_1 - u_2\|_{q_1+2}, \tag{1.10}$$

где $\mu_1(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_1 = \max\left\{\|u_1\|_{q_1+2}, \|u_2\|_{q_1+2}\right\}.$$

Условия на функцию $f(x,s)$

(i)$_4$ $f(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_4$ имеет место неравенство сверху для почти всех $x \in \Omega$:

$$|f(x,s)| \leqslant c_6 + c_7 |s|^{q_2+1} \quad \text{при} \quad q_2 \in (0, p^* - 2); \tag{1.11}$$

(iii)$_4$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} f(x, v(x)) v(x) \geqslant \vartheta_3 \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, v(x))\, dx \quad \text{при} \quad \vartheta_3 > 0, \tag{1.12}$$

где

$$\mathcal{F}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, f(x,\sigma);$$

(iv)$_4$ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_f(\cdot) = f(x,\cdot)$, порожденного функцией $f(x,u)$:

$$\|\mathcal{N}_f(u_1) - \mathcal{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}_2) \|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \tag{1.13}$$

где $\mu_2(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_2 = \max\left\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\right\}.$$

Здесь мы использовали стандартное обозначение

$$p^* = \begin{cases} Np/(N-p), & \text{при } N > p; \\ +\infty, & \text{при } N \leqslant p, \end{cases}$$

причем, очевидно, что $p^* > 2$ при $p \geqslant 2$.

Теперь мы дадим определение слабого обобщенного решения, в классической постановке имеющий вид (1.1)–(1.3).

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.3) *назовем функцию*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$
$$\left(|u|^{p_k/2}\right)^{'} \in \mathbb{L}^2(Q_T), \quad Q_T = (0,T)\times\Omega,$$

удовлетворяющую следующему равенству:

$$\int\limits_0^T \Biggl[\int\limits_\Omega \left[u^{'} + \sum_{k=1}^n (p_k - 1)\frac{2}{p_k} a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)^{'}\right] w(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega h(x,|\nabla u|)(\nabla u, \nabla w)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega [g(x,u) - f(x,u)]w(x)\,dx\Biggr]\psi(t)\,dt = 0 \quad (1.14)$$

для всех $w(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *и всех* $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ *при некотором* $T > 0$,

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Замечание 1. Отметим, что после возможного изменения на подмножестве множества $[0,T]$ нулевой меры Лебега слабое обобщенное решение в смысле определения 1 принадлежит классу

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^2(\Omega))$$

и поэтому начальное условие имеет смысл.

3. Локальная разрешимость.

Доказательство локальной во времени разрешимости задачи (1.1)–(1.3), понимаемой в слабом обобщенном смысле определения 1, проведем в несколько шагов используя метод Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [14].

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Пусть $\{w_j(x)\}$ — это галеркинский базис банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, который можно выбрать ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Введем галеркинские приближения следующего вида:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi(x, u_m)}{\partial t} w_j(x)\, dx + \int\limits_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|)(\nabla u_m, \nabla w_j)\, dx + \\ + \int\limits_{\Omega} [g(x, u_m) - f(x, u_m)] w_j\, dx = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.15}$$

где

$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]), \quad T_m > 0.$$

Кроме того, предположим, что

$$u_{m0} = u_m(x)(0) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k(x) \to u_0(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.16}$$

Шаг 2. Локальная разрешимость галеркинских приближений.

С учетом выбора базиса систему уравнений (1.15) можно переписать в следующем виде:

$$\mathrm{A}(c_m) \frac{dc_m}{dt} = f_1(c_m) + f_2(c_m) + f_3(c_m), \quad c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm})^t, \tag{1.17}$$

где

$$\mathrm{A}(c_m) = \|a_{kj}(c_m)\|_{k,j=1,1}^{m,m}, \tag{1.18}$$

$$a_{kj} = \delta_{kj} + \sum_{l=1}^{n} (p_l - 1) \int\limits_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l - 2} w_k(x) w_j(x)\, dx, \tag{1.19}$$

$$f_{1j}(c_m) = -\int\limits_{\Omega} \left(h(x, |\nabla u_m|) \nabla u_m, \nabla w_j\right)\, dx, \tag{1.20}$$

$$f_{2j}(c_m) = -\int\limits_{\Omega} g(x, u_m) w_j\, dx, \quad f_{3j}(c_m) = \int\limits_{\Omega} f(x, u_m) w_j\, dx. \tag{1.21}$$

Докажем обратимость матрицы $\mathrm{A}(c_m)$. Действительно, рассмотрим соответствующую квадратичную форму:

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj} \xi^k \xi^j = |\xi|^2 + \sum_{l=1}^{n} (p_l - 1) \int\limits_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l - 2} |\eta(x)|^2\, dx, \tag{1.22}$$

где

$$|\xi|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\xi^k|^2, \quad \eta(x) = \sum_{k=1}^{m} w_k(x) \xi^k.$$

$\{w_k(x)\}$ — это галеркинский базис в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, так как это семейство является галеркинским базисом в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и имеет место непрерывное и плотное вложение

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Поэтому для того чтобы $\eta(x) = \vartheta$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы
$$\xi = (0, ..., 0).$$

Поэтому из (1.22) приходим к выводу о том, что
$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj}\xi^k\xi^j = 0,$$
тогда и только тогда, когда $\xi = (0, ..., 0)$. Следовательно, эта квадратичная форма является положительно определенной и в силу критерия Сильвестра приходим к выводу о том, что
$$\det\|a_{kj}\|_{k,j=1,1}^{m,m} > 0 \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Используя результат параграфа 6 Приложения, можно доказать непрерывность обратной матрицы
$$\mathrm{A}^{-1}(c_m)$$
относительно столбца c_m.

Пусть
$$u_m^1 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^1 w_k, \quad u_m^2 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^2 w_k,$$
$$c_m^1 = (c_{m1}^1, ..., c_{mm}^1)^t, \quad c_m^2 = (c_{m1}^2, ..., c_{mm}^2)^t.$$

Справедливо следующее неравенство:
$$|f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)| \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla w_j| \left| h(x, |\nabla u_m^1|)\nabla u_m^1 - h(x, |\nabla u_m^2|)\nabla u_m^2 \right| dx. \tag{1.23}$$

Пусть
$$s_1 = |\nabla u_m^1|, \quad s_2 = |\nabla u_m^2|.$$

Потребуем сначала, чтобы $s_1 < s_2$, тогда имеет место следующая цепочка неравенств:
$$\begin{aligned}\left| h(x, s_1)\nabla u_m^1 - h(x, s_2)\nabla u_m^2 \right| &\leqslant \\ \leqslant |h(x, s_1) - h(x, s_2)||\nabla u_m^1| &+ |h(x, s_2)||\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \leqslant \\ \leqslant |h_s^{'}(x, s_3)||s_1 - s_2||\nabla u_m^1| &+ |h(x, s_2)||\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|,\end{aligned} \tag{1.24}$$
где $s_3 \in [s_1, s_2]$. Продолжим цепочку неравенств (1.24).
$$\begin{aligned}&\left| h(x, s_1)\nabla u_m^1 - h(x, s_2)\nabla u_m^2 \right| \leqslant \\ &\leqslant |s_3 h_s^{'}(x, s_3)||s_1 - s_2|s_3^{-1}|\nabla u_m^1| + |h(x, s_2)||\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \leqslant \\ &\leqslant [c_1 + c_2 s_2^{p-2}]|s_1 - s_2|s_1^{-1}|\nabla u_m^1| + [c_1 + c_2 s_2^{p-2}]|\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant 2[c_1 + c_2 s_2^{p-2}]|\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|. \quad (1.25)$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $s_2 < s_1$. Итак, из (1.23) и (1.25) получаем следующую цепочку неравенств:

$$|f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_\Omega |\nabla w_j| \left[c_1 + c_2 \max\left\{|\nabla u_m^1|^{p-2}, |\nabla u_m^2|^{p-2}\right\}\right] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant d_{mj}^1 |c_m^1 - c_m^2|, \quad (1.26)$$

$$d_{mj}^1 = 2\int\limits_\Omega |\nabla w_j|^2 \left[c_1 + c_2 \max\left\{|\nabla u_m^1|^{p-2}, |\nabla u_m^2|^{p-2}\right\}\right] dx.$$

Итак, мы получили следующее неравенство:

$$|f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)| \leqslant d_{mj}^1 |c_m^1 - c_m^2|, \quad j = \overline{1,m}. \quad (1.27)$$

Рассмотрим теперь функцию $f_2(c_m)$. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|f_{2j}(c_m^1) - f_{2j}(c_m^2)| \leqslant \int\limits_\Omega \left|\mathcal{N}_g(u_m^1) - \mathcal{N}_g(u_m^2)\right| |w_j|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega \left|\mathcal{N}_g(u_m^1) - \mathcal{N}_g(u_m^2)\right|^{(q_1+2)/(q_1+1)} dx\right)^{(q_1+1)/(q_1+2)} \times$$
$$\times \left(\int\limits_\Omega |w_j|^{q_1+2}\, dx\right)^{1/(q_1+2)} \leqslant d_{mj}^2 \mu_1(\mathrm{R}_{m1}) \left(\int\limits_\Omega |u_m^1 - u_m^2|^{q_1+2}\, dx\right)^{1/(q_1+2)} \leqslant$$
$$\leqslant (d_{mj}^2)^2 \mu_1(\mathrm{R}_{m1}) |c_m^1 - c_m^2|, \quad (1.28)$$

где

$$d_{mj}^2 = \left(\int\limits_\Omega |w_j|^{q_1+2}\, dx\right)^{1/(q_1+2)},$$

$\mathrm{R}_{m1} = \max\left\{\|u_m^1\|_{q_1+2}, \|u_m^2\|_{q_1+2}\right\}$. Итак, в силу (1.28) мы пришли к следующей оценке:

$$|f_{2j}(c_m^1) - f_{2j}(c_m^2)| \leqslant (d_{mj}^2)^2 \mu_1(\mathrm{R}_{m1}) |c_m^1 - c_m^2|. \quad (1.29)$$

Аналогичным образом приходим к выводу, что имеет место следующее неравенство:

$$|f_{3j}(c_m^1) - f_{3j}(c_m^2)| \leqslant (d_{mj}^3)^2 \mu_2(\mathrm{R}_{m2}) |c_m^1 - c_m^2|, \quad (1.30)$$

где
$$d_{mj}^3 = \left(\int\limits_{\Omega} |w_j|^{q_2+2}\,dx\right)^{1/(q_2+2)},$$
$\mathrm{R}_{m2} = \max\left\{\|u_m^1\|_{q_2+2}, \|u_m^2\|_{q_2+2}\right\}$.

Таким образом, в силу теоремы Пеано система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.17) имеет решение класса
$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m])$$
при некотором $T_m > 0$ и $k \in \overline{1, m}$.

Шаг 3. Априорные оценки.

Умножим обе части равенства (1.15) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. После очевидных преобразований получим следующее равенство:
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\right] + \\ + \int\limits_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx + \int\limits_{\Omega} g(x, u_m)u_m\,dx = \\ = \int\limits_{\Omega} f(x, u_m)u_m\,dx. \quad (1.31)$$

Из этого равенства с учетом условий на функции $h(x, s)$, $g(x, s)$ и $f(x, s)$ мы получим следующее неравенство:
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\right] + \\ + c_3\|\nabla u_m\|_p^p \leqslant c_6 \int\limits_{\Omega} |u_m|\,dx + c_7 \int\limits_{\Omega} |u_m|^{q_2+2}\,dx \quad (1.32)$$

Используя арифметическое неравенство Гельдера, получим следующее неравенство:
$$c_3|u_m| \leqslant \frac{q_2+1}{q_2+2} c_3^{(q_2+2)/(q_2+1)} + \frac{|u_m|^{q_2+2}}{q_2+2}. \quad (1.33)$$

Из неравенств (1.32) и (1.33) получим следующее неравенство:
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\right] +$$

$$+ c_3\|\nabla u_m\|_p^p \leqslant c_8 + c_9 \int\limits_\Omega |u_m|^{q_2+2}\, dx. \quad (1.34)$$

Сначала рассмотрим случай, когда

$$p_{k_0} \geqslant q_2 + 2, \quad (1.35)$$

тогда в силу условий на функцию $\varphi(x,u)$ из неравенства (1.34) получим следующее неравенство:

$$a_0 \frac{p_{k_0}-1}{p_{k_0}} \|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leqslant \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\, dx + \\ + c_8 T + c_9 \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega |u_m|^{q_2+2}\, dx. \quad (1.36)$$

В силу начального условия и неравенства (1.35) мы из (1.36) получим неравенство вида

$$\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leqslant d + c_{10} \int\limits_0^t ds \|u_m\|_{p_{k_0}}^{(q_2+2)/p_{k_0}}, \quad (1.37)$$

из которого в силу неравенства Гронуолла–Беллмана–Бихари [1] мы получим следующую априорную оценку:

$$\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leqslant c_{11}(T) < +\infty \quad (1.38)$$

для всех $T > 0$, причем постоянная c_{11} не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь мы должны рассмотреть другой случай

$$p_{k_0} < q_2 + 2. \quad (1.39)$$

С этой целью нам нужно воспользоваться следующим интерполяционным неравенством (см. [10] стр. 79):

$$\|v\|_{q_2+2} \leqslant c_{12}\|\nabla v\|_p^\alpha \|v\|_{p_{k_0}}^{1-\alpha}, \quad (1.40)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{p_{k_0}} - \frac{1}{q_2+2}\right)\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p_{k_0}}\right)^{-1}. \quad (1.41)$$

Теперь мы сформулируем условия на параметры p, N, q_2 и p_{k_0}, при выполнении которых имеет место интерполяционное неравенство (1.40).

Условия на параметры нелинейностей.

Потребуем выполнения условия

$$q_2 + 2 \in (p_{k_0}, p^*], \quad (1.42)$$

где мы использовали стандартное обозначение

$$p^* = \begin{cases} Np/(N-p), & \text{при } N > p\,; \\ +\infty, & \text{при } N \leqslant p\,. \end{cases}$$

Возведем обе части интерполяционного неравенства (1.40) в степень $q_2 + 2$ и получим неравенство

$$\|v\|_{q_2+2}^{q_2+2} \leqslant c_{13} \|\nabla v\|_p^{\alpha(q_2+2)} \|v\|_{p_{k_0}}^{(1-\alpha)(q_2+2)}, \tag{1.43}$$

в котором потребуем выполнения условия, что

$$\alpha(q_2+2) < p,$$

из которого сразу же получим следующее неравенство:

$$p > \frac{q_2+2}{N+p_{k_0}} N. \tag{1.44}$$

Тогда при выполнении условий (1.42) и (1.44) с учетом неравенства Юнга с параметром из неравенства (1.43) приходим к следующему интерполяционному неравенству:

$$\|v\|_{q_2+2}^{q_2+2} \leqslant \varepsilon \|\nabla v\|_p^p + c_{14}(\varepsilon) \|v\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0} r}, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.45}$$

где выполнено неравенство

$$r = \frac{(q_2+2)p(1-\alpha)}{p_{k_0}(p - \alpha(q_2+2))}.$$

Из неравенства (1.34) с учетом интерполяционного неравенства (1.45) получим следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\, dx\right] + \\ + (c_3 - c_9\varepsilon)\|\nabla u_m\|_p^p \leqslant c_8 + c_{15}(\varepsilon)\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0} r}, \tag{1.46}$$

в котором положим, чтобы

$$\varepsilon = \frac{c_3}{2c_9}.$$

Тогда из (1.34) интегрируя по времени получим следующее неравенство:

$$a_0 \frac{p_{k_0} - 1}{p_{k_0}} \|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\, dx +$$

$$+ c_8 T + c_{16} \int\limits_0^t ds \|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0} r}. \quad (1.47)$$

В силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари найдется такое малое $T > 0$, что имеет место следующая априорная оценка:

$$\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leqslant c_{16}(T) < +\infty, \quad (1.48)$$

где постоянная $c_{16}(T)$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Во всех рассмотренных случаях из (1.34) получим еще одну априорную оценку

$$\int\limits_0^T \|\nabla u_m\|_p^p \, dt \leqslant c_{17}(T) < +\infty, \quad (1.49)$$

причем при условии

$$p_{k_0} \geqslant q_2 + 2$$

величина $T > 0$ сколь угодно велика и фиксирована, а в случае

$$q_2 + 2 > p_{k_0}, \quad p > \frac{q_2 + 2}{N + p_{k_0}} N$$

величина $T > 0$ достаточно мала.

Теперь умножим обе части равенства (1.15) на функцию $c'_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда после ряда очевидных преобразований получим следующее равенство:

$$\|u'_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int\limits_\Omega a_l(x)(u'_m)^2 |u_m|^{p_l - 2} \, dx +$$
$$+ \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) \, dx + \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_m) \, dx = \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_m) \, dx. \quad (1.50)$$

Интегрируя по времени это неравенство, мы получим следующее неравенство:

$$\int\limits_0^t ds \|u'_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega a_l(x)(u'_m)^2 |u_m|^{p_l - 2} \, dx +$$
$$+ \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) \, dx \leqslant E_m(0) + \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_m) \, dx, \quad (1.51)$$

где

$$E_m(0) = \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) \, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_{0m}) \, dx - \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_{0m}) \, dx.$$

В силу начального условия и теоремы М. А. Красносельского для операторов Немыцкого приходим к выводу о том, что

$$E_m(0) \to E(0) = \int_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|)\, dx + \int_\Omega \mathcal{G}(x, u_0)\, dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x, u_0)\, dx.$$

Теперь заметим, что в силу арифметического неравенства Гельдера и условий роста (1.11) приходим из (1.51) к неравенству

$$\int_0^T dt \|u_m'\|_2^2 + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_0^T dt \int_\Omega a_l(x)(u_m')^2 |u_m|^{p_l-2}\, dx + \\ + c_3 \|\nabla u_m\|_p^p \leqslant d_1 + d_2 \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2}.$$

Далее надо рассмотреть опять два случая:

$$p_{k_0} \geqslant q_2 + 2 \quad \text{и} \quad p_{k_0} < q_2 + 2.$$

Во втором случае нужно опять воспользоваться интерполяционным неравенством (1.45). Затем, в обоих случаях нужно применить априорные оценки (1.38) и (1.48). В результате в обоих случаях получим еще две априорные оценки

$$\int_0^T dt \|u_m'\|_2^2 \leqslant c_{18}(T) < +\infty, \tag{1.52}$$

$$\|\nabla u_m\|_p \leqslant c_{19}(T) < +\infty, \tag{1.53}$$

$$\int_0^T dt \int_\Omega a_l(x)(u_m')^2 |u_m|^{p_l-2}\, dx \leqslant c_{20}(T) < +\infty \quad \text{при} \quad l = \overline{1, n}, \tag{1.54}$$

причем в зависимости от полученных ранее условий либо $T > 0$ сколь угодно велико фиксировано либо $T > 0$ достаточно мало.

Шаг 4. Предельный переход.

Из полученных априорных оценок вытекает, что

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \tag{1.55}$$

$$u_m' \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \tag{1.56}$$

$$a_l^{1/2}(x) \left(|u_m|^{p_l/2}\right)' \rightharpoonup \chi_l \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T), \quad Q_T = (0, T) \times \Omega, \quad l = \overline{1, n}. \tag{1.57}$$

Теперь заметим, что в силу полученных ранее априорных оценок последовательность

$$\{u_m\} \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N} \text{ ограничена в} \quad \mathbb{W}, \tag{1.58}$$

где
$$W \equiv \left\{v: \ v \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \ v^{'} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))\right\}.$$

Поэтому в силу условий (1.8) и (1.11) имеет место вполне непрерывные вложения
$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega). \tag{1.59}$$

В силу известной теоремы Обэна–Лионса найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую здесь и далее будем обозначать как исходную последовательность, что
$$\int\limits_0^T \|u_m - u\|_{q_1+2}^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$
$$\int\limits_0^T \|u_m - u\|_{q_2+2}^2 \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Но тогда, очевидно, найдется такая подпоследовательность $\{u_m\}$, что
$$u_m \to u \text{ сильно в } \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \cap \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \text{ для п.в. } t \in [0,T]. \tag{1.60}$$

Аналогичным образом можно доказать, что
$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{k_0}}(\Omega) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]. \tag{1.61}$$

Кроме того, в силу условия роста (1.4) имеем
$$\mathbb{A}(u_m) \equiv -\operatorname{div}(h(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m) \rightharpoonup \chi \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{p}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)). \tag{1.62}$$

В силу (1.61) имеем, что
$$|u_m|^{p_l-2}u_m \to |u|^{p_l-2}u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_l^{'}}(\Omega) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]. \tag{1.63}$$

Более того, можно доказать, что
$$|u_m|^{p_l-2}u_m \to |u|^{p_l-2}u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_l^{'}}(Q_T). \tag{1.64}$$

Для этого достаточно рассмотреть банахово пространство
$$W_1 \equiv \left\{v: \ v \in \mathbb{L}^{p_{k_0}}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \ v^{'} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))\right\},$$

которое вполне непрерывно вложено в $\mathbb{L}^{p_{k_0}}(Q_T)$. И, следовательно, из равномерного по $m \in \mathbb{N}$ вложения последовательности $\{u_m\}$ в пространство $\mathbb{W}_1$ приходим к выводу о том, что
$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{k_0}}(Q_T). \tag{1.65}$$

В частности, имеем
$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_l/2}(Q_T). \tag{1.66}$$

Стало быть,

$$a_l^{1/2}|u_m|^{p_l/2} \to a_l^{1/2}|u|^{p_l/2} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^1(Q_T). \tag{1.67}$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(a_l^{1/2}|u_m|^{p_l/2}\right)' \overset{*}{\rightharpoonup} \left(a_l^{1/2}|u|^{p_l/2}\right)' \quad * -\text{слабо в} \quad \mathcal{D}'(Q_T). \tag{1.68}$$

Из сравнения (1.57) и (1.67) приходим к выводу о том, что

$$a_l^{1/2}\left(|u_m|^{p_l/2}\right)' \rightharpoonup a_l^{1/2}\left(|u|^{p_l/2}\right)' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T), \quad l = \overline{1,n}. \tag{1.69}$$

Наконец, в силу предельного свойства (1.60) и условий роста (1.8) и (1.11) из теоремы М. А. Красносельского о операторах Немыцкого приходим к выводу о том, что

$$g(x,u_m) \to g(x,u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega), \tag{1.70}$$

$$f(x,u_m) \to f(x,u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \tag{1.71}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Заметим теперь, что имеет место вложение

$$\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^{q_2+2}(Q_T), \quad Q_T = (0,T)\times\Omega.$$

и, значит, в силу полученных ранее априорных оценок последовательность $\{f(x,u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничены в

$$\{f(x,u_m)\} \subset \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T).$$

Теперь в силу свойства (1.9) мы сразу из неравенства (1.31) же получаем, что последовательность $\{g(x,u_m)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в

$$\{g(x,u_m)\} \subset \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(Q_T).$$

Кроме того, в силу равномерной по $m \in \mathbb{N}$ ограниченности последовательностей

$$\{|u_m|^{p_l-2}u_m\} \subset \mathbb{L}^{p_l'}(0,T;\mathbb{L}^{p_l'}(\Omega)), \tag{1.72}$$

и леммы Лионса [14] приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности, что

$$|u_m|^{p_l-2}u_m \rightharpoonup |u|^{p_l-2}u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_l'}(Q_T), \tag{1.73}$$

$$f(x,u_m) \rightharpoonup f(x,u) \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T), \tag{1.74}$$

$$g(x,u_m) \rightharpoonup g(x,u) \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(Q_T). \tag{1.75}$$

Теперь наша задача доказать, что в предельном равенстве (1.62) имеет место следующее равенство:

$$\chi = -\operatorname{div}(h(x,|\nabla u|)\nabla u). \tag{1.76}$$

Для этого нам нужно воспользоваться методом монотонности [14].

Перепишем галеркинские приближения (1.15) в следующем виде

$$\left\langle u_m' + \sum_{k=1}^{n}(p_k-1)\frac{2}{p_k}a_k(x)|u_m|^{p_k/2-2}u_m\left(|u_m|^{p_k/2}\right)' - \right.$$
$$\left. - \operatorname{div}(h(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m) + g(x,u_m) - f(x,u_m),\ w_j\right\rangle = 0 \quad (1.77)$$

для всех $j=\overline{1,m}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Умножим теперь обе части равенства (1.77) на функцию $\psi(t)\in\in\mathcal{D}(0,T)$ и проинтегрировав по $t\in[0,T]$ полученное равенство, перейдем к пределу при $m\to+\infty$. В результате получим следующее равенство:

$$\int_0^T\left\langle u' + \sum_{k=1}^{n}(p_k-1)\frac{2}{p_k}a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)' + \right.$$
$$\left. + \chi + g(x,u) - f(x,u),\ w\right\rangle\psi(t)\,dt = 0, \quad (1.78)$$

из которого в свою очередь в силу основной леммы вариационного исчисления получим равенство

$$\left\langle u' + \sum_{k=1}^{n}(p_k-1)\frac{2}{p_k}a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)' + \right.$$
$$\left. + \chi + g(x,u) - f(x,u),\ w\right\rangle = 0 \quad \text{для почти всех} \quad t\in[0,T] \quad (1.79)$$

для всех $w\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В доказательстве нуждается только следующее предельное выражение:

$$\int_{Q_T} a_k(x)|u_m|^{p_k/2-2}u_m\left(|u_m|^{p_k/2}\right)' w\,dt\,dx \to$$
$$\to \int_{Q_T} a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)' w\,dt\,dx,$$

но это следствие того, что

$$u_m\to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_k}(Q_T)$$

и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского об операторе Немыцкого

$$|u_m|^{p_k/2-2}u_m \to |u|^{p_k/2-2}u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{2p_k/(p_k-2)}(Q_T).$$

И, кроме того,

$$\left(|u_m|^{p_k/2}\right)' \rightharpoonup \left(|u|^{p_k/2}\right)' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T).$$

И, наконец, в силу исходных условий имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega) \subset \mathbb{L}^{p_k}(\Omega).$$

Возьмем в равенстве (1.79)

$$w = u(x)(t),$$

проинтегрировать по $t \in (0,T)$ и после интегрирования по частям воспользовавшись результатом параграфа 7 Приложения, получить следующее равенство:

$$\int\limits_0^T \langle \chi, u\rangle \, dt = \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega [f(x,u) - g(x,u)]\, u\, dx\, dt + \Psi(0) - \Psi(T), \tag{1.80}$$

где

$$\Psi(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x)(t)\, dx + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u(x)(t)|^{p_l}\, dx. \tag{1.81}$$

Теперь мы рассмотрим следующее выражение:

$$\mathrm{X}_m \equiv \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}(u_m) - \mathbb{A}(v), u_m - v\rangle\,, \tag{1.82}$$

где

$$\mathbb{A}(v) = -\operatorname{div}(h(x, |\nabla v|)\nabla v).$$

В силу свойства (1.7) имеем

$$\mathrm{X}_m \geqslant 0.$$

В силу этого имеет место следующее неравенство:

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle - \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}(u_m), v\rangle - \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}(v), u_m - v\rangle\,. \tag{1.83}$$

Теперь умножим обе части равенства (1.77) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$, тогда после интегрирования по времени получим следующее равенство:

$$\int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle = \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega [f(x,u_m) - g(x,u_m)]\, u_m\, dx\, dt + \Psi_m(0) - \Psi_m(T), \tag{1.84}$$

где

$$\Psi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_m^2(x)(t)\,dx + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_m(x)(t)|^{p_l}\,dx. \qquad (1.85)$$

Из явного функционала $\Psi_m(t)$ следует, что он для каждого фиксированного $t \in [0,T]$ является дифференцируемым по Фреше и его производная Фреше является монотонным оператором, поэтому этот функционал является слабо полунепрерывным снизу. С другой стороны, ранее нами было доказано, что

$$u_m(x)(t) \to u(x)(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{k_0}}(\Omega) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T].$$

Поэтому из равенства (1.84), (1.73)–(1.75) и начального условия вытекает, что имеет место следующее предельное неравенство:

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle \leqslant \int\limits_0^T dt\int\limits_{\Omega}[f(x,u)-g(x,u)]\,u\,dx\,dt + \Psi(0) - \Psi(T), \qquad (1.86)$$

из которого в силу (1.80) получим следующее неравенство:

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \chi, u\rangle\,. \qquad (1.87)$$

А из неравенства (1.83) вытекает следующее неравенство:

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \chi, u\rangle - \int\limits_0^T dt\,\langle \chi, v\rangle - \int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(v), u-v\rangle = \int\limits_0^T dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(v), u-v\rangle\,, \qquad (1.88)$$

из которого стандартным образом заключаем, что имеет место равенство (1.76). Заметим, что в силу свойства (1.7) равномерной монотонности оператора $\mathbb{A}(v)$ и того, что нами фактически доказано, что

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(u), u\rangle\,,$$

мы приходим к выводу о том, что

$$0 \leqslant \limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u|^p\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Стало быть, мы пришли к выводу о том, что для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ имеет место следующее предельное свойство:

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]. \qquad (1.89)$$

Теперь мы можем умножить обе части равенства (1.15) на функцию $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ относительно скобок двойственности между $\mathcal{D}(0,T)$ и $\mathcal{D}'(0,T)$, перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить, что предельная функция $u(x)(t)$ является решением уравнения (1.14) при некотором $T > 0$. Значит, существование слабого обобщенного решения доказано.

Используя стандартный алгоритм продолжения слабого обобщенного решения во времени с учетом замечания 1 приходим к следующему утверждению:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия на функции $\varphi(x,s)$, $h(x,s)$, $g(x,s)$ и $f(x,s)$. Если выполнено условие*

$$p_{k_0} \geqslant q_2 + 2,$$

тогда для любого

$$u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

существует глобальное слабое обобщенное решение класса

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\left(|u|^{p_k/2}\right)' \in \mathbb{L}^2(Q_T)$$

для всех $T > 0$. Если выполнено условие (1.42), *а также условие*

$$p > \frac{q_2+2}{N+p_{k_0}}N,$$

то для любого

$$u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\left(|u|^{p_k/2}\right)' \in \mathbb{L}^2(Q_T),$$

где $T \in (0,T_0)$ и найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0) > 0$, что либо $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|\nabla u\|_p = +\infty.$$

4. Разрушение за конечное время.

Воспользоваться сразу построенным решением для вывода достаточных условий разрушения решений нельзя, поскольку для их вывода требуется большая гладкость. Однако, галеркинские приближения нужными свойствами гладкости обладают:

$$u_m(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2p_{k_0}}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx, \quad (1.90)$$

$$\mathrm{J}_m(t) \equiv \int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2(s)\,ds + \sum_{l=1}^n (p_l-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m'|^2|u_m|^{p_l-2}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx. \quad (1.91)$$

Справедлива следующая важная лемма:

Л е м м а 1. *Имеет место следующее дифференциальное неравенство*:

$$\left(\Phi_m'\right)^2 \leqslant p_{k_0}\Phi_m \mathrm{J}_m \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,T], \quad (1.92)$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k\in\overline{1,n}} p_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Прежде всего имеем следующее равенство:

$$\Phi_m' = \frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\|u_m\|_2^2(s)\,ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx. \quad (1.93)$$

Теперь заметим, что имеют место следующие оценки:

$$\left|\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\|u_m\|_2^2(s)\,ds\right| \leqslant \int\limits_0^t\int\limits_\Omega |u_m||u_m'|\,dx\,ds \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^t \|u_m\|_2\|u_m'\|_2\,ds \leqslant \left(\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2\,ds\right)^{1/2}, \quad (1.94)$$

$$\left|\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant (p_l-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l-2}|u_m||u_m^{'}|\,dx\,ds \leqslant$$
$$\leqslant (p_l-1)\int\limits_0^t\left(\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l-2}|u_m^{'}|^2\,dx\right)^{1/2} ds \leqslant$$
$$\leqslant (p_l-1)\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l-2}|u_m^{'}|^2\,dx\,ds\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds\right)^{1/2}. \tag{1.95}$$

Таким образом, из равенства (1.93) с учетом неравенств (1.94) и (1.95) получаем следующую оценку:

$$\left(\Phi_m^{'}\right)^2 \leqslant \Bigg(\left(\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^t \|u_m^{'}\|_2^2\,ds\right)^{1/2} +$$
$$+\sum_{l=1}^n (p_l-1)\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l-2}|u_m^{'}|^2\,dx\,ds\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds\right)^{1/2}+$$
$$+\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^n\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx\Bigg)^2, \tag{1.96}$$

из которого возводя в квадрат правую часть и группируя нужным образом множители и используя неравенство

$$2ab \leqslant a^2+b^2,$$

получим следующее неравенство:

$$\left(\Phi_m^{'}\right)^2 \leqslant \Bigg(\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n (p_l-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_0^t\|u_m^{'}\|_2^2\,ds+\sum_{l=1}^{n}(p_l-1)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_m|^{p_l-2}|u_m^{'}|^2\,dx\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx\Bigg). \quad (1.97)$$

Пусть теперь

$$p_{k_0}=\max_{k\in\overline{1,n}}p_k,$$

тогда из неравенства (1.97) с учетом обозначений (1.90) и (1.91) получим следующее неравенство:

$$\left(\Phi_m^{'}\right)^2\leqslant p_{k_0}\Bigg(\frac{1}{p_{k_0}}\int\limits_0^t\|u_m\|_2^2\,ds+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_{k_0}}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds+$$

$$+\frac{1}{2p_{k_0}}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx\Bigg)\mathrm{J_m}\leqslant$$

$$\leqslant p_{k_0}\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^t\|u_m\|_2^2\,ds+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds+$$

$$+\frac{1}{2p_{k_0}}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx\Bigg)\mathrm{J_m}=$$

$$=p_{k_0}\Phi_m\mathrm{J}_m. \quad (1.98)$$

Лемма доказана.

Теперь мы займемся выводом энергетических равенств. Прежде всего умножим равенство (1.15) на c_{mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$ и тогда получим с учетом обозначения (1.90) следующее равенство:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2}+\int\limits_{\Omega}h(x,|\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}g(x,u_m)u_m\,dx=\int\limits_{\Omega}f(x,u_m)u_m\,dx. \quad (1.99)$$

Теперь умножим обе части равенства (1.15) на c'_{mj} и просуммируем по $j=\overline{1,n}$ и в результате получим следующее равенство:

$$\frac{d\mathrm{J}_m}{dt}+\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_m|)\,dx+\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_m)\,dx=\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_m)\,dx. \tag{1.100}$$

Теперь проинтегрируем по времени равенство (1.100) и получим следующее равенство:

$$\mathrm{J}_m+\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_m|)\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_m)\,dx-E_m(0)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_m)\,dx, \tag{1.101}$$

где

$$E_m(0)\equiv\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx+ \\ +\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_{0m}|)\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_{0m})\,dx-\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_{0m})\,dx. \tag{1.102}$$

Теперь воспользуемся неравенством (1.12) и получим из (1.101) неравенство

$$\vartheta_3\mathrm{J}_m+\vartheta_3\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_m|)\,dx+\vartheta_3\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_m)\,dx- \\ -\vartheta_3E_m(0)\leqslant\int\limits_{\Omega}f(x,u_m)u_m\,dx, \tag{1.103}$$

Из неравенств (1.99) и (1.103) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2}+\int\limits_{\Omega}h(x,|\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx+ \\ +\int\limits_{\Omega}g(x,u_m)u_m\,dx\geqslant\vartheta_3\mathrm{J}_m+\vartheta_3\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_m|)\,dx+\vartheta_3\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_m)\,dx- \\ -\vartheta_3E_m(0). \tag{1.104}$$

Воспользуемся неравенствами (1.6) и (1.9) и получим оценку следующего вида:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2}+\vartheta_3E_m(0)\geqslant(\vartheta_3-\vartheta_1)\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_m|)\,dx+$$

$$+ (\vartheta_3 - \vartheta_2)\int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_m)\, dx + \vartheta_3 \mathrm{J}_m. \qquad (1.105)$$

Потребуем теперь выполнения условий

$$\vartheta_3 \geqslant \vartheta_1, \quad \vartheta_3 \geqslant \vartheta_2$$

и тогда получим из неравенства (1.105) следующую оценку:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2} + \vartheta_3 E_m(0) \geqslant \vartheta_3 \mathrm{J}_m. \qquad (1.106)$$

Из неравенств (1.92) и (1.106) мы приходим к следующему искомому дифференциальному неравенству:

$$\Phi_m \Phi_m^{''} - \alpha(\Phi_m^{'})^2 + \beta\Phi_m \geqslant 0, \qquad (1.107)$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta_3}{p_{k_0}}, \quad \beta = \vartheta_3 E_m(0). \qquad (1.108)$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$\vartheta_3 > p_{k_0}, \quad p_{k_0} = \max_{l=\overline{1,n}} p_l. \qquad (1.109)$$

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть следующие два случая:

$$\beta > 0 \quad \text{и} \quad \beta \leqslant 0.$$

Рассмотрим сначала первый более сложный случай. Воспользуемся результатом теоремы 10 параграфа 4 Приложения и получим, что при выполнении условия

$$\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\, dx > \frac{2\vartheta_3}{2\vartheta_3 - p_{k_0}} E_m(0) > 0 \qquad (1.110)$$

имеет место неравенство

$$\Phi_m(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_m^{1-\alpha}(0) - A_m t\right]^{1/(\alpha-1)}}, \qquad (1.111)$$

где

$$A_m^2 = (\alpha-1)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi_m^{'}(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi_m(0)\right] > 0. \qquad (1.112)$$

Условие (1.110) можно переписать в следующем виде

$$\int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_{0m})\, dx > \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|)\, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_{0m})\, dx +$$

$$+\frac{p_{k_0}}{2\vartheta_3}\left(\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx\right), \quad p_{k_0}<\vartheta_3, \tag{1.113}$$

которое нужно дополнить рассматриваемым условием $\beta>0$, т.е. следующим условием:

$$\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx+ \\ +\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_{0m}|)\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_{0m})\,dx>\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_{0m})\,dx. \tag{1.114}$$

Теперь мы рассмотрим более простой случай, когда $\beta\leqslant 0$, т.е. условие

$$\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_{0m})\,dx\geqslant\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx+ \\ +\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_{0m}|)\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_{0m})\,dx. \tag{1.115}$$

Тогда имеет место неравенство (1.111), в котором нужно положить $\beta=$ $=0$.

Теперь наша задача перейти к пределу при $m\to+\infty$ для некоторой итоговой подпоследовательности $\{u_m\}$. С этой целью заметим, что имеет место предельное свойство (1.63) и свойство (1.72). Следовательно,

$$\Phi_m(t)\to\Phi(t) \quad \text{при} \quad m\to+\infty \quad \text{для п.в.} \quad t\in[0,T], \tag{1.116}$$

где

$$\Phi(t)\equiv\frac{1}{2}\int\limits_0^t\|u\|_2^2\,ds+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u|^{p_l}\,dx\,ds+ \\ +\frac{1}{2p_{k_0}}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx. \tag{1.117}$$

Переходя к пределу при $m\to+\infty$ в неравенстве (1.111), получим, что

$$\Phi(t)\geqslant\frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0)-At\right]^{1/(\alpha-1)}}, \tag{1.118}$$

где

$$A^2=(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0)\right)^2-\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right]>0. \tag{1.119}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия на функции* $\varphi(x,s)$, $h(x,s)$, $g(x,s)$ *и* $f(x,s)$. *Пусть, кроме того, выполнена вторая группа условий из теоремы* 1, *тогда при условии*

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x,u_0)\,dx > \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x,|\nabla u_0|)\,dx + \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x,u_0)\,dx + \\ + \frac{p_{k_0}}{2\vartheta_3}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right), \tag{1.120}$$

$$p_{k_0} < \vartheta_3, \quad \vartheta_3 \geqslant \vartheta_1, \quad \vartheta_3 \geqslant \vartheta_2 \tag{1.121}$$

слабое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) *не существует глобально во времени и имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|\nabla u\|_p = +\infty$$

и имеет место оценка сверху

$$T_0 \leqslant T_\infty = \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где постоянная $A > 0$ *определена формулой* (1.119),

$$\beta = \begin{cases} \vartheta_3 E(0), & \text{при} \quad E(0) > 0; \\ 0, & \text{при} \quad E(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$E(0) \equiv \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx + \\ + \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x,|\nabla u_0|)\,dx + \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x,u_0)\,dx - \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x,u_0)\,dx.$$

§ 2. Разрушение решений параболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью

1. Введение.

В этом параграфе мы рассмотрим начально–краевую задачу для параболического уравнения высокого порядка с двойной нелинейностью следующего вида:

$$\frac{\partial \varphi(x,u)}{\partial t} + \triangle h_1(x,\triangle u) - \operatorname{div}(h_2(x,|\nabla u|)\nabla u) + \operatorname{div}(h_3(x,|\nabla u|)\nabla u) = 0, \tag{2.1}$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)|u|^{p_k-2}u, \tag{2.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{2.3}$$

причем ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 2$ и имеет гладкую границу $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

2. Постановка задачи.

Прежде всего сформулируем условия на функции $\varphi(x,s)$, $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ и $h_3(x,s)$.

Условия на $\varphi(x,u)$.

$(\mathrm{i})_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

$(\mathrm{ii})_1$ пусть

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k, \quad p_{k_0} < q_3^*$$

и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant a_0 > 0$;

$(\mathrm{iii})_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Условия на $h_1(x,s)$

$(\mathrm{i})_2$ $h_1(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

$(\mathrm{ii})_2$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_1(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и имеют место условия роста

$$|h_1(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_1-1}, \quad |h'_{1s}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_1-2} \tag{2.4}$$

при $q_1 \geqslant 2$;

$(\mathrm{iii})_2$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)$ имеют место неравенства

$$a\int_\Omega |\triangle v|^{q_1}\,dx \leqslant \int_\Omega h_1(x,\triangle v(x))\triangle v(x)\,dx \leqslant \vartheta_1 \int_\Omega \mathcal{H}_1(x,\triangle v(x))\,dx, \tag{2.5}$$

где $\vartheta_1 > 0$, $a > 0$ и

$$\mathcal{H}_1(x,s) = \int_0^s d\sigma\, h_1(x,\sigma);$$

$(\mathrm{iv})_2$ для почти всех $x \in \Omega$ имеет место свойство монотонности, понимаемой в следующем смысле:

$$(h_1(x,s_1) - h_1(x,s_2))(s_1 - s_2) \geqslant 0 \; \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{2.6}$$

Условия на функцию $h_2(x,s)$

$(\mathrm{i})_3$ $h_2(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является каратеодориевой функцией;

$(\mathrm{ii})_3$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_2(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$ и имеют место следующие неравенства

$$0 \leqslant h_2(x,s) \leqslant c_3 + c_4 s^{q_2-2}, \quad |h'_{2s}(x,s)s| \leqslant c_3 + c_4 s^{q_2-2} \tag{2.7}$$

при $q_2 \in [2, q_1^*)$;

$(\mathrm{iii})_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{1,q_2}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$b\|v\|_{q_2}^{q_2} \leqslant \int_\Omega h_2(x, |\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx \leqslant \vartheta_2 \int_\Omega dx\, \mathcal{H}_2(x, |\nabla v|) \tag{2.8}$$

при $\vartheta_2 > 0$, $b > 0$, где

$$\mathcal{H}_2(x, s) = \int_0^s d\sigma\, h_2(x, \sigma)\sigma.$$

Условия на функцию $h_3(x,s)$

$(\mathrm{i})_4$ $h_3(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является каратеодориевой функцией;

$(\mathrm{ii})_4$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_3(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$ и имеют место следующие неравенства

$$0 \leqslant h_3(x,s) \leqslant c_5 + c_6 s^{q_3-2}, \quad |h'_{3s}(x,s)s| \leqslant c_5 + c_6 s^{q_3-2} \tag{2.9}$$

при $q_3 \in (2, q_1^*)$;

$(\mathrm{iii})_4$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{1,q_3}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_\Omega h_3(x, |\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx \geqslant \vartheta_3 \int_\Omega dx\, \mathcal{H}_3(x, |\nabla v|) \tag{2.10}$$

при $\vartheta_3 > 0$, где

$$\mathcal{H}_3(x, s) = \int_0^s d\sigma\, h_3(x, \sigma)\sigma.$$

Здесь использовано следующее стандартное обозначение:

$$q^* = \begin{cases} Nq/(N-q), & \text{при } N > q; \\ +\infty, & \text{при } N \leqslant q. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что в силу условий на функции $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ и $h_3(x,s)$ имеют место следующие свойства:

$$\triangle h_1(x, \triangle v) : \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-2,q_1'}(\Omega), \quad q_1' = q_1/(q_1 - 1),$$

$$\operatorname{div}(h_2(x, |\nabla v|)\nabla v) : \mathbb{W}_0^{1,q_2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q_2'}(\Omega), \quad q_2' = q_2/(q_2 - 1),$$

$$\operatorname{div}(h_3(x, |\nabla v|)\nabla v) : \mathbb{W}_0^{1,q_3}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q_3'}(\Omega), \quad q_3' = q_3/(q_3 - 1)$$

и эти операторы непрерывны в соответствующих сильных топологиях.

Дадим определение слабого обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3).

Определение 2. *Слабым обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.3) *назовем функцию*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\left(|u|^{p_k/2}\right)' \in \mathbb{L}^2(Q_T), \quad Q_T = (0,T)\times\Omega,$$

удовлетворяющую равенству

$$\int\limits_0^T \Bigg[\int\limits_\Omega \left[u' + \sum_{k=1}^n (p_k-1)\frac{2}{p_k} a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)'\right] w(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega h_1(x,\triangle u)\triangle w(x)\,dx + \int\limits_\Omega h_2(x,|\nabla u|)(\nabla u,\nabla w)\,dx - \\ - \int\limits_\Omega h_3(x,|\nabla u|)(\nabla u,\nabla w)\,dx\Bigg]\psi(t)\,dt = 0, \quad (2.11)$$

для всех $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ *и всех* $w(x) \in \mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega)$,

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega). \quad (2.12)$$

Замечание 2. Из определения 2 вытекает, что после возможного изменения на подмножестве множества $[0,T]$ нулевой меры Лебега слабое обобщенное решение принадлежит классу

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

3. Локальная разрешимость.

Для доказательства локальной во времени разрешимости галеркинских приближений воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методом компактности и методом монотонности [14]. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Выберем в банаховом, сепарабельном пространстве $\mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega)$ галеркинский базис $\{w_j\}$, который, очевидно, можно выбрать ортонормированным в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Пусть

$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_m]), \quad T_m > 0.$$

Введем в рассмотрение галеркинские приближения.

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial\varphi(x,u_m)}{\partial t} w_j(x)\,dx + \int\limits_\Omega h_1(x,\triangle u_m)\triangle w_j(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega h_2(x,|\nabla u_m|)\left(\nabla u_m,\nabla w_j(x)\right)\,dx - \\ - \int\limits_\Omega h_3(x,|\nabla u_m|)\left(\nabla u_m,\nabla w_j(x)\right)\,dx = 0, \quad j=\overline{1,m}, \quad (2.13)$$

где
$$\varphi(x, u_m) = u_m + \sum_{l=1}^{n} a_l(x)|u_m|^{p_l-2}u_m.$$
Кроме того, добавим начальные условия
$$u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0)w_k(x) \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega). \tag{2.14}$$

Шаг 2. Локальная разрешимость.

Перепишем систему уравнения Галеркинских приближений (2.13) в следующем виде:
$$\mathrm{A}(c_m)\frac{dc_m}{dt} = f_1(c_m) + f_2(c_m) + f_3(c_m), \quad c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm})^t, \tag{2.15}$$
где
$$\mathrm{A}(c_m) = \|a_{kj}(c_m)\|_{k,j=1,1}^{m,m}, \tag{2.16}$$
$$a_{kj} = \delta_{kj} + \sum_{l=1}^{n}(p_l - 1)\int_{\Omega} a_l(x)|u_m|^{p_l-2}w_k(x)w_j(x)\,dx, \tag{2.17}$$
$$f_{1j} = -\int_{\Omega} h_1(x, \triangle u_m)\triangle w_j,$$
$$f_{2j} = -\int_{\Omega} h_2(x, |\nabla u_m|)\,(\nabla u_m, \nabla w_j)\;dx,$$
$$f_{3j} = \int_{\Omega} h_3(x, |\nabla u_m|)\,(\nabla u_m, \nabla w_j)\;dx.$$
Введем ряд обозначений, необходимых нам для дальнейшего.
$$u_m^1 = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}^1(t)w_k(x), \quad u_m^2 = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}^2(t)w_k(x),$$
$$c_m^1 = (c_{m1}^1, ..., c_{mm}^1)^t, \quad c_m^2 = (c_{m1}^2, ..., c_{mm}^2)^t.$$
Докажем, что при сформулированных условиях $(\mathrm{ii})_1$, $(\mathrm{ii})_2$ и $(\mathrm{ii})_3$ на функции $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ и $h_3(x,s)$ имеет место ограниченная липшиц–непрерывность относительно c_m введенных функций f_{1j}, f_{2j} и f_{3j}. Действительно, рассмотрим последовательно соответствующие функции. Справедлива следующая цепочка неравенств:
$$\left|f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)\right| \leqslant \int_{\Omega} |\triangle w_j|\left|h_1(x, \triangle u_m^1) - h_1(x, \triangle u_m^2)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \int_{\Omega} |\triangle w_j||\triangle u_m^1 - \triangle u_m^2|\,dx+$$

$$+ c_2 \int\limits_\Omega |\triangle w_j| \max\left\{|\triangle u_m^1|^{p_1-2}, |\triangle u_m^2|^{p_1-2}\right\} |\triangle u_m^1 - \triangle u_m^2|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sum_{k=1}^n |c_{mk}^1 - c_{mk}^2| \int\limits_\Omega |\triangle w_j||\triangle w_k|\, dx +$$

$$+ c_2 \sum_{k=1}^n |c_{mk}^1 - c_{mk}^2| \int\limits_\Omega |\triangle w_j||\triangle w_k| \max\left\{|\triangle u_m^1|^{p_1-2}, |\triangle u_m^2|^{p_1-2}\right\} dx \tag{2.18}$$

Теперь воспользуемся неравенством Гельдера и получим следующую оценку:

$$\int\limits_\Omega |\triangle w_j||\triangle w_k| \max\left\{|\triangle u_m^1|^{p_1-2}, |\triangle u_m^2|^{p_1-2}\right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\|\triangle u^1\|_{p_1}^{p_1-2}, \|\triangle u^2\|_{p_1}^{p_1-2}\right\} \left(\int\limits_\Omega |\triangle w_k|^{p_1}\, dx\right)^{1/p_1} \left(\int\limits_\Omega |\triangle w_j|^{p_1}\, dx\right)^{1/p_1}$$

Таким образом, приходим к оценке

$$\left|f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)\right| \leqslant a_{1mj}|c_m^1 - c_m^2|. \tag{2.19}$$

Рассмотрим теперь функцию $f_{2j}(c_m)$. Действительно, пусть

$$s_1 = |\nabla u_m^1|, \quad s_2 = |\nabla u_m^2|.$$

Потребуем сначала, чтобы $s_1 < s_2$, тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left|h_2(x,s_1)\nabla u_m^1 - h_2(x,s_2)\nabla u_m^2\right| \leqslant$$
$$\leqslant |h_2(x,s_1) - h_2(x,s_2)||\nabla u_m^1| + |h_2(x,s_2)||\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \leqslant$$
$$\leqslant |h_{2s}^{'}(x,s_3)||s_1 - s_2||\nabla u_m^1| + |h_2(x,s_2)||\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|, \tag{2.20}$$

где $s_3 \in [s_1, s_2]$. Продолжим цепочку неравенств (2.20).

$$\left|h_2(x,s_1)\nabla u_m^1 - h_2(x,s_2)\nabla u_m^2\right| \leqslant$$
$$\leqslant |s_3 h_{2s}^{'}(x,s_3)||s_1 - s_2|s_3^{-1}|\nabla u_m^1| + |h_2(x,s_2)||\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \leqslant$$
$$\leqslant [c_1 + c_2 s_2^{p_2-2}]|s_1 - s_2|s_1^{-1}|\nabla u_m^1| + [c_1 + c_2 s_2^{p_2-2}]|\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \leqslant$$
$$\leqslant 2[c_1 + c_2 s_2^{p_2-2}]|\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|. \tag{2.21}$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $s_2 < s_1$. Итак, из (2.20) и (2.21) получаем следующую цепочку неравенств:

$$|f_{2j}(c_m^1) - f_{2j}(c_m^2)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_\Omega |\nabla w_j| \left[c_1 + c_2 \max\left\{|\nabla u_m^1|^{p_2-2}, |\nabla u_m^2|^{p_2-2}\right\}\right] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \leqslant$$
$$\leqslant a_{2mj}|c_m^1 - c_m^2|, \quad (2.22)$$
$$a_{2mj} = 2\int\limits_\Omega |\nabla w_j|^2[c_1 + c_2 \max\left\{|\nabla u_m^1|^{p_2-2}, |\nabla u_m^2|^{p_2-2}\right\}]\, dx.$$

Итак, мы получили следующее неравенство:

$$|f_{2j}(c_m^1) - f_{2j}(c_m^2)| \leqslant a_{2mj}|c_m^1 - c_m^2|, \quad j = \overline{1, m}. \qquad (2.23)$$

Совершенно аналогичным образом доказывается, что в силу свойства $(\mathrm{ii})_3$ имеет место следующее неравенство:

$$|f_{3j}(c_m^1) - f_{3j}(c_m^2)| \leqslant a_{3mj}|c_m^1 - c_m^2|, \quad j = \overline{1, m}. \qquad (2.24)$$

Теперь заметим, что в силу результата Шага 2 предыдущего параграфа вытекает, что матрица $\mathrm{A}(c_m)$ обратима и обратная матрица $\mathrm{A}^{-1}(c_m)$ непрерывна относительно столбца c_m.

Итак, из (2.19), (2.23) и (2.24) в силу теоремы Пеано для систем обыкновенных дифференциальных уравнений существует единственное решение системы уравнений (2.14) класса

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]) \quad \text{при некотором} \quad T_m > 0.$$

Шаг 3. Априорные оценки. Для вывода априорных оценок умножим обе части равенства (2.13) на c_{mj} и просуммировать по $j = \overline{1, m}$ и получить с учетом (2.5), (2.8) и (2.9) следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\, dx\right] +$$
$$+ a\int\limits_\Omega |\triangle u_m|^{q_1}\, dx + b\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^{q_2}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant c_5 \int\limits_\Omega |\nabla u_m|^2\, dx + c_6\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^{q_3}\, dx. \quad (2.25)$$

Воспользуемся теперь арифметическим неравенством Гельдера и получим неравенство

$$c_5|\nabla u_m|^2 \leqslant \frac{q_3 - 2}{q_3} c_5^{q_3/(q_3-2)} + |\nabla u_m|^{q_3},$$

поскольку по условию $q_3 > 2$. И тогда из (2.25) получим следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\right]+ \\ +a\int\limits_{\Omega}|\triangle u_m|^{q_1}\,dx+b\int\limits_{\Omega}|\nabla u_m|^{q_2}\,dx\leqslant \\ \leqslant c_7+c_8\int\limits_{\Omega}|\nabla u_m|^{q_3}\,dx. \quad (2.26)$$

Теперь мы воспользуемся интерполяционным неравенством (6.8) 7 параграфа Приложения и потребуем выполнения неравенств

$$4q_1+2N>(2+N)q_3,\quad q_3\leqslant 2^*. \quad (2.27)$$

Из интерполяционного неравенства (6.8) и неравенства (2.26) мы сразу же получим следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\right]+ \\ +a\int\limits_{\Omega}|\triangle u_m|^{q_1}\,dx+b\int\limits_{\Omega}|\nabla u_m|^{q_2}\,dx\leqslant \\ \leqslant c_7+c_8\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\triangle u_m|^{q_1}\,dx+c_9(\varepsilon)\left(\int\limits_{\Omega}|u_m|^{p_{k_0}}\,dx\right)^{r_2}. \quad (2.28)$$

Наконец, интегрируя по времени обе части последнего неравенства, получим с учетом свойств функции $\varphi(x,s)$ следующее неравенство:

$$a_0\frac{p_{k_0}-1}{p_{k_0}}\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}}+(a-c_8\varepsilon)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|\triangle u_m|^{q_1}\,dx\,dt+b\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|\nabla u_m|^{q_2}\,dx\,dt\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx+ \\ +c_7T+\mathrm{c}_9\int\limits_0^t ds\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}r_2}(s)\,ds, \quad (2.29)$$

в котором положим

$$\varepsilon=\frac{a}{2c_8}.$$

В результате получим следующее неравенство:

$$\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leqslant c_{10}(T) + \int\limits_0^t ds \|u_m\|_{p_{k_0}}^{r_2 p_{k_0}}, \quad r_2 > 0, \tag{2.30}$$

из которого в силу теоремы Гроноулла–Беллмана–Бихари [1] получим первую априорную оценку

$$\|u_m\|_{p_{k_0}} \leqslant c_{11}(T) < +\infty \tag{2.31}$$

при достаточно малом $T > 0$, где постоянная c_{11} не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, отсюда и из неравенства (2.29) получим еще две априорные оценки

$$\int\limits_0^T \|\triangle u_m\|_{q_1}^{q_1} \, dt \leqslant c_{12}(T) < +\infty, \tag{2.32}$$

$$\int\limits_0^T \|\nabla u_m\|_{q_2}^{q_2} \, dt \leqslant c_{13}(T) < +\infty \tag{2.33}$$

при достаточно малом $T > 0$ и постоянные c_{12} и c_{13} не зависят от $m \in \in \mathbb{N}$.

Теперь возьмемся выводом следующего набора априорных оценок. С этой целью умножим обе части равенства (2.13) на $c_{mj}^{'}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. После очевидных преобразований мы получим следующую оценку:

$$\begin{gathered} \|u_m^{'}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int\limits_\Omega a_l(x)(u_m^{'})^2 |u_m|^{p_l - 2} \, dx + \\ + \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m) \, dx + \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|) \, dx = \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_m|) \, dx. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Теперь проинтегрируем по времени $t \in [0, T]$ обе части последнего равенства, тогда получим следующее неравенство:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^t \|u_m^{'}\|_2^2 \, ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_l(x)(u_m^{'})^2 |u_m|^{p_l - 2} \, dx \, ds + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m) \, dx + \\ + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|) \, dx \leqslant E_m(0) + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_m|) \, dx, \end{gathered} \tag{2.35}$$

где

$$E_m(0) \equiv \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_{0m})\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_{0m}|)\,dx - \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_{0m}|)\,dx.$$

Теперь мы воспользуемся свойствами (2.5), (2.8) и (2.10) и получим следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_0^t \|u_m^{'}\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)(u_m^{'})^2|u_m|^{p_l-2}\,dx\,ds +$$

$$+ \frac{a}{\vartheta_1}\int\limits_\Omega |\triangle u_m|^{q_1}\,dx + \frac{b}{\vartheta_2}\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^{q_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant E_m(0) + \frac{1}{\vartheta_3}\int\limits_\Omega h_3(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant E_m(0) + \frac{c_5}{\vartheta_3}\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx + \frac{c_6}{\vartheta_3}\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^{q_3}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant E_m(0) + c_{14} + c_{15}\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^{q_3}\,dx, \quad (2.36)$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались арифметическим неравенством Гельдера. Далее нам нужно опять воспользоваться интерполяционным неравенством (6.8) 7 параграфа Приложения, учесть априорную оценку (2.31) и получить следующие априорные оценки:

$$\int\limits_0^T \|u_m^{'}\|_2^2\,dt \leqslant c_{16}(T) < +\infty, \quad (2.37)$$

$$\|\triangle u_m\|_{q_1} \leqslant c_{17}(T) < +\infty, \quad (2.38)$$

$$\|\nabla u_m\|_{q_2} \leqslant c_{18}(T) < +\infty \quad (2.39)$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left(a_k^{1/2}(x)\left(|u_m|^{p_k/2}\right)^{'}\right)^2\,dx\,dt \leqslant c_{19}(T) < +\infty \quad (2.40)$$

при достаточно малом $T > 0$, где постоянные c_{16}, c_{17}, c_{18} и c_{19} не зависят от $m \in \mathbb{N}$. В силу априорной оценки (2.38) мы сразу же получаем еще одну априорную оценку

$$\|\mathbb{A}(u_m)\|_* \leqslant c_{20}(T) < +\infty, \quad (2.41)$$

где мы использовали следующие обозначения:

$$\mathbb{A}(v) \equiv \triangle h_1(x, \triangle v) \quad (2.42)$$

$$\|w\|_* = \sup_{\|\triangle z\|_{q_1}\leqslant 1} |\langle w, z\rangle|\,,$$

а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-2,q_1'}(\Omega)$.

Шаг 4. Предельный переход.

Из априорных оценок (2.31), (2.37), (2.38), (2.39) и (2.41) приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$, что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^{p_{k_0}}(\Omega)), \tag{2.43}$$

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega)), \tag{2.44}$$

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}^{1,q_2}_0(\Omega)), \tag{2.45}$$

$$u_m' \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)). \tag{2.46}$$

$$\mathbb{A}(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}^{-2,q_1'}(\Omega)), \tag{2.47}$$

$$\left(a_k^{1/2}|u_m|^{p_k/2}\right)' \rightharpoonup \chi_k \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T). \tag{2.48}$$

Введем обозначение.

$$\mathbb{W} \equiv \left\{v|\ v\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega)),\ v'\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))\right\}.$$

Ясно, что в силу априорных оценок имеем

$$\{u_m\}\subset\mathbb{W} \quad \text{равномерно по} \quad m\in\mathbb{N}.$$

Поэтому в силу исходных условий, что

$$q_2, q_3 \in [2, q_1^*)$$

в силу широко известной теоремы Обэна–Лионса [14] приходим к выводу, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{W}^{1,q_2}_0(\Omega)\cap\mathbb{W}^{1,q_3}_0(\Omega)). \tag{2.49}$$

Отсюда в частности легко следует, что некоторая подпоследовательность $\{u_m\}$ сходится почти всюду в $Q_T = (0,T)\times\Omega$.

Точно также как и в предыдущем параграфе доказывается, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{k_0}}(Q_T), \tag{2.50}$$

а также точно также доказывается, что

$$\left(a_k^{1/2}|u_m|^{p_k/2}\right)' \rightharpoonup \left(a_k^{1/2}|u|^{p_k/2}\right)' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T). \tag{2.51}$$

Кроме того, из априорной оценки (2.38) и условий на q_2, q_3 мы приходим к выводу о том, что

$$\{h_2(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m\} \quad \text{равномерно по} \quad m\in\mathbb{N} \quad \text{ограничена в} \quad \mathbb{L}^{q_2'}(Q_T), \tag{2.52}$$

$\{h_3(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m\}$ равномерно по $m\in\mathbb{N}$ ограничена в $\mathbb{L}^{q_3'}(Q_T)$. (2.53)

А из свойства (2.49) вытекает, что

$$u_m\to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}^{1,q_2}_0(\Omega)\cap\mathbb{W}^{1,q_3}_0(\Omega) \quad \text{для почти всех} \quad t\in[0,T]. \tag{2.54}$$

Значит, в силу теоремы М. А. Красносельского об операторе Немыцкого и условий роста (2.7), (2.9) приходим к выводу о том, что для почти всех $t\in[0,T]$ имеем

$$h_2(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m\to h_2(x,|\nabla u|)\nabla u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q_2'}(\Omega)\times\cdots\times\mathbb{L}^{q_2'}(\Omega), \tag{2.55}$$

$$h_3(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m\to h_3(x,|\nabla u|)\nabla u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q_3'}(\Omega)\times\cdots\times\mathbb{L}^{q_3'}(\Omega). \tag{2.56}$$

Перепишем галеркинские приближения (2.13) в следующем виде

$$\Big\langle u_m' + \sum_{k=1}^{n}(p_k-1)\frac{2}{p_k}a_k(x)|u_m|^{p_k/2-2}u_m\left(|u_m|^{p_k/2}\right)' - \\ - \triangle h_1(x,\triangle u_m) - \operatorname{div}(h_2(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m) + \\ + \operatorname{div}(h_3(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m),\ w_j\Big\rangle = 0 \tag{2.57}$$

для всех $j=\overline{1,m}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-2,q_1'}(\Omega)$.

Умножим теперь обе части равенства (2.57) на функцию $\psi(t)\in\in\mathcal{D}(0,T)$ и проинтегрировав по $t\in[0,T]$ полученное равенство, перейдем к пределу при $m\to+\infty$. В результате получим следующее равенство:

$$\int_0^T\Big\langle u' + \sum_{k=1}^{n}(p_k-1)\frac{2}{p_k}a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)' + \\ + \chi - \operatorname{div}(h_2(x,|\nabla u|)\nabla u) + \operatorname{div}(h_3(x,|\nabla u|)\nabla u),\ w\Big\rangle\psi(t)\,dt = 0, \tag{2.58}$$

из которого в свою очередь в силу основной леммы вариационного исчисления получим равенство

$$\Big\langle u' + \sum_{k=1}^{n}(p_k-1)\frac{2}{p_k}a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)' + \\ + \chi - \operatorname{div}(h_2(x,|\nabla u|)\nabla u) + \operatorname{div}(h_3(x,|\nabla u|)\nabla u),\ w\Big\rangle = 0 \tag{2.59}$$

для почти всех $t\in[0,T]$ и для всех $w\in\mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega)$.

Теперь наша задача доказать, что в предельном свойстве (2.47)

$$\chi = \triangle h_1(x, \triangle u). \tag{2.60}$$

Для этого мы воспользуемся методом монотонности [14]. С этой целью возьмем в равенстве (2.60) в качестве w само решение $u(x)(t)$ и тогда после некоторых преобразований и результата параграфа 7 Приложения мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_0^T \langle \chi, u \rangle = \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega \left[h_3(x, |\nabla u|)|\nabla u|^2 - h_2(x, |\nabla u|)|\nabla u|^2 \right] u\, dx\, dt + \\ + \Psi(0) - \Psi(T), \tag{2.61}$$

где

$$\Psi(t) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_\Omega u^2(x)(t)\, dx + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x) |u(x)(t)|^{p_l}\, dx. \tag{2.62}$$

Теперь мы рассмотрим следующее выражение:

$$\mathrm{X}_m \equiv \int\limits_0^T dt \left\langle \mathbb{A}(u_m) - \mathbb{A}(v), u_m - v \right\rangle, \tag{2.63}$$

где

$$\mathbb{A}(v) = \triangle h_1(x, \triangle v).$$

В силу свойства (2.6) имеем

$$\mathrm{X}_m \geqslant 0.$$

В силу этого имеет место следующее неравенство:

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt \left\langle \mathbb{A}(u_m), u_m \right\rangle - \int\limits_0^T dt \left\langle \mathbb{A}(u_m), v \right\rangle - \int\limits_0^T dt \left\langle \mathbb{A}(v), u_m - v \right\rangle. \tag{2.64}$$

Теперь умножим обе части равенства (2.13) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда после интегрирования по времени получим следующее равенство:

$$\int\limits_0^T dt \left\langle \mathbb{A}(u_m), u_m \right\rangle = \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega \left[h_3(x, |\nabla u_m|) - h_2(x, |\nabla u_m|) \right] |\nabla u_m|^2\, dx\, dt + \\ + \Psi_m(0) - \Psi_m(T), \tag{2.65}$$

где

$$\Psi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_m^2(x)(t)\,dx + \sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_m(x)(t)|^{p_l}\,dx. \tag{2.66}$$

Из явного функционала $\Psi_m(t)$ следует, что он для каждого фиксированного $t \in [0,T]$ является дифференцируемым по Фреше и его производная Фреше является монотонным оператором. Поэтому этот функционал является слабо полунепрерывным снизу. С другой стороны, ранее нами было доказано, что

$$u_m(x)(t) \to u(x)(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{k_0}}(\Omega) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]$$

и, кроме того, имеют место предельные свойства (2.54). Поэтому из равенства (2.66) и начального условия вытекает, что имеет место следующее предельное неравенство:

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega} \left[h_3(x,|\nabla u|) - h_2(x,|\nabla u|)\right]|\nabla u|^2\,dx\,dt + \Psi(0) - \Psi(T). \tag{2.67}$$

Из этого неравенства и равенства (2.61) мы получим, что имеет место следующее предельное свойство:

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle \leqslant \int\limits_0^T \langle \chi, u\rangle\;dt. \tag{2.68}$$

А из неравенства (2.64) вытекает следующее неравенство:

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \chi, u\rangle - \int\limits_0^T dt\,\langle \chi, v\rangle - \int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}(v), u-v\rangle = \int\limits_0^T dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(v), u-v\rangle\,, \tag{2.69}$$

из которого стандартным образом заключаем, что имеет место равенство (2.60).

Таким образом, нами доказано существование слабого обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3) в смысле определения 2. Используя стандартный алгоритм продолжения слабого решения во времени, получим, что имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия на функции* $\varphi(x,s)$, $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ *и* $h_3(x,s)$ *и, кроме того, при выполнении условий*

$$4q_1 + 2N > (2+N)q_3, \quad q_3 \leqslant 2^*$$

для любого

$$u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)$$

существует слабое обобщенное решение $u(x)(t)$, для которого

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)), \quad u^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\left(|u|^{p_k/2}\right)^{'} \in \mathbb{L}^2(Q_T),$$

причем $T \in (0,T_0)$ и $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеем

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|\triangle u\|_{q_1} = +\infty.$$

4. Разрушение решения.

Воспользоваться сразу построенным решением для вывода достаточных условий разрушения решений нельзя, поскольку для их вывода требуется большая гладкость. Однако, галеркинские приближения нужными свойствами гладкости обладают:

$$u_m(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2p_{k_0}}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx, \quad (2.70)$$

$$\mathrm{J}_m(t) \equiv \int\limits_0^t \|u_m^{'}\|_2^2(s)\,ds + \sum_{l=1}^n (p_l-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m^{'}|^2|u_m|^{p_l-2}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx. \quad (2.71)$$

В силу утверждения леммы 1, доказанной в предыдущем параграфе имеет место следующее неравенство:

$$\left(\Phi_m^{'}\right)^2 \leqslant p_{k_0}\Phi_m\mathrm{J}_m \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \quad (2.72)$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k\in\overline{1,n}} p_k.$$

Для вывода первого энергетического равенства умножим обе части равенства (2.13) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$ и получим равенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \int\limits_\Omega h_1(x, \triangle u_m)\triangle u_m \, dx + \int\limits_\Omega h_2(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2 \, dx = \\ = \int\limits_\Omega h_3(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2 \, dx. \quad (2.73)$$

Теперь умножим обе части равенства (2.13) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и получим второе энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m) \, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|) \, dx\right) = \\ = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_m|) \, dx. \quad (2.74)$$

Проинтегрировав последнее равенство по времени мы получим следующее равенство:

$$\mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m) \, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|) \, dx - E_m(0) = \\ = \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_m|) \, dx, \quad (2.75)$$

где

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l} \, dx + \\ + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_{0m}) \, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_{0m}|) \, dx - \\ - \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_{0m}|) \, dx. \quad (2.76)$$

Теперь мы воспользуемся свойством (2.10) и получим из равенства (2.75) неравенство

$$\vartheta_3 \mathrm{J}_m + \vartheta_3 \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m) \, dx + \vartheta_3 \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|) \, dx - \\ - \vartheta_3 E_m(0) \leqslant \int\limits_\Omega h_3(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2 \, dx. \quad (2.77)$$

Из этого неравенства и равенства (2.73) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \int_\Omega h_1(x, \triangle u_m)\triangle u_m\, dx + \int_\Omega h_2(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \vartheta_3 \mathrm{J}_m + \vartheta_3 \int_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m)\, dx + \vartheta_3 \int_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|)\, dx - \vartheta_3 E_m(0). \tag{2.78}$$

Воспользуемся свойствами (2.5) и (2.8) и получим из (2.78) неравенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \vartheta_3 E_m(0) \geqslant \vartheta_3 \mathrm{J}_m +$$
$$+ (\vartheta_3 - \vartheta_1) \int_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m)\, dx + (\vartheta_3 - \vartheta_2) \int_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|)\, dx, \tag{2.79}$$

из которого при условиях, что

$$\vartheta_3 \geqslant \vartheta_1, \quad \vartheta_3 \geqslant \vartheta_2$$

в свою очередь вытекает неравенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \vartheta_3 E_m(0) \geqslant \vartheta_3 \mathrm{J}_m. \tag{2.80}$$

Из неравенств (2.72) и (2.80) мы приходим к следующему искомому дифференциальному неравенству:

$$\Phi_m \Phi_m^{''} - \alpha(\Phi_m^{'})^2 + \beta\Phi_m \geqslant 0, \tag{2.81}$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta_3}{p_{k_0}}, \quad \beta = \vartheta_3 E_m(0). \tag{2.82}$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$\vartheta_3 > p_{k_0}, \quad p_{k_0} = \max_{l=\overline{1,n}} p_l. \tag{2.83}$$

Далее рассуждая как и в предыдущем параграфе мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия на функции* $\varphi(x, s)$, $h_1(x, s)$, $h_2(x, s)$ *и* $h_3(x, s)$. *Пусть, кроме того, выполнены все условия из теоремы* 3, *тогда при условии*

$$\int_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_0|)\, dx > \int_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_0)\, dx + \int_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_0|)\, dx +$$

$$+\frac{p_{k_0}}{2\vartheta_3}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right), \quad (2.84)$$

$$p_{k_0}<\vartheta_3, \quad \vartheta_3\geqslant\vartheta_1, \quad \vartheta_3\geqslant\vartheta_2 \quad (2.85)$$

слабое обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) *не существует глобально во времени и имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0}\|\triangle u\|_{q_1}=+\infty$$

и имеет место оценка сверху

$$T_0\leqslant T_\infty=\Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где

$$A^2=(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0)\right)^2-\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right]>0,$$

$$\Phi(t)\equiv\frac{1}{2}\int\limits_0^t\|u\|_2^2\,ds+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u|^{p_l}\,dx\,ds+$$
$$+\frac{1}{2p_{k_0}}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx,$$

$$\alpha=\frac{\vartheta_3}{p_{k_0}}, \quad \beta=\begin{cases}\vartheta_3E(0), & \text{при} \quad E(0)>0;\\ 0, & \text{при} \quad E(0)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$E(0)=\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}_1(x,\triangle u_0)\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}_2(x,|\nabla u_0|)\,dx-\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}_3(x,|\nabla u_0|)\,dx.$$

§ 3. Разрушение решений нелокального параболического уравнения с двойной нелинейностью и с энергией Дирихле

1. Введение.

Прежде всего сформулируем начально–краевую задачу, которую мы будем в дальнейшем изучать.

$$\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial t}-\chi(\|\nabla u\|_2^2)\triangle u=f(x,u), \quad (3.1)$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)|u|^{p_k-2}u, \tag{3.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{3.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

Отметим, что параболическое уравнение с подобной нелокальной нелинейностью было рассмотрено в работе [18]. В этой работе изучался вопрос о глобальной разрешимости. Мы же в этом разделе рассмотрим вопрос о достаточных условиях разрушения за конечное время.

2. Постановка задачи.

В доказательстве локальной разрешимости задачи (3.1)–(3.3) имеются большие трудности. Поэтому мы поступим следующим образом: доказательство разрешимости проведем для случая $\varphi(x,u) = u$, а результат о разрушении получим для общего случая.

Прежде всего сформулируем условия на функции $\chi(s)$ и $f(x,s)$.

Условия на функцию $\chi(s)$

$(\mathrm{i})_2$ $\chi(s) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty))$;

$(\mathrm{ii})_2$ для всех $s \in \mathbb{R}^1_+$ выполнены следующие условия роста:

$$c_1 \leqslant \chi(s) \leqslant c_1 + c_2 s^{q_1}, \quad |s\chi'(s)| \leqslant c_2 s^{q_1} \quad \text{при} \quad q_1 \geqslant 1; \tag{3.4}$$

$(\mathrm{iii})_2$ для всех $s \in \mathbb{R}^1_+$ выполнено неравенство

$$\chi(s)s \leqslant \frac{\vartheta_1}{2}\int\limits_0^s d\sigma\chi(\sigma) \quad \text{при} \quad \vartheta_1 > 0; \tag{3.5}$$

$(\mathrm{iv})_2$ функция $\chi(s)$ является ограничено липшиц–непрерывной:

$$|\chi(s_1) - \chi(s_2)| \leqslant \mu_1(\mathrm{R}_1)|s_1 - s_2|, \quad \mathrm{R}_1 = \max\{s_1^{q_1-1}, s_2^{q_1-1}\}, \tag{3.6}$$

где функция $\mu_1(\cdot)$ является неубывающей функцией своего аргумента, ограниченная на компактах.

Условия на функцию $f(x,s)$

$(\mathrm{i})_3$ $f(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией и для почти всех $x \in \partial\Omega$ имеем $f(x,0) = 0$;

$(\mathrm{ii})_3$ имеет место неравенство сверху для почти всех $x \in \Omega$:

$$|f(x,s)| \leqslant c_3 + c_4|s|^{q_2+1}, \quad |f_s'(x,s)| \leqslant c_4|s|^{q_2} \quad \text{при} \quad q_2 \in (4/3, 2]; \tag{3.7}$$

$(\mathrm{iii})_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega f(x,v(x))v(x) \geqslant \vartheta_2 \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x,v(x))\,dx \quad \text{при} \quad \vartheta_2 > 0, \tag{3.8}$$

где

$$\mathcal{F}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, f(x,\sigma);$$

$(\mathrm{iv})_3$ имеет место ограниченная липшиц–непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_f(\cdot) = f(x,\cdot)$, порожденного функцией $f(x,u)$:

$$\|\mathcal{N}_f(u_1) - \mathcal{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}_2)\|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \qquad (3.9)$$

где $\mu_2(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента и

$$\mathrm{R}_2 = \max\left\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\right\}.$$

Теперь мы дадим определение слабого обобщенного решения задачи, в классической постановке имеющий следующий вид:

Определение 3. *Слабым обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) *назовем функцию* $u(x)(t)$, *которая удовлетворяет свойствам, что*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

причем имеет место равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[u^{'} - \chi(\|\nabla u\|_2^2)\triangle u - f(x,u)\right] v(x)(t)\,dx\,dt = 0, \qquad (3.10)$$

для всех

$$v(x)(t) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)),$$
$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega).$$

Замечание 3. Из определения слабого обобщенного решения вытекает, что после изменения на подмножестве множества $[0,T]$ нулевой меры Лебега слабое обобщенное решение $u(x)(t)$ принадлежит классу

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Можно доказать, что определение 3 эквивалентно следующему определению:

Определение 4. *Слабым обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) *назовем функцию* $u(x)(t)$, *которая удовлетворяет свойствам, что*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

причем имеет место равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[u^{'} - \chi(\|\nabla u\|_2^2)\triangle u - f(x,u)\right] w(x)\psi(t)\,dx\,dt = 0, \qquad (3.11)$$

для всех
$$w(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \quad \psi(t) \in \mathcal{D}(0,T),$$
$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega).$$

3. Локальная разрешимость.

Теперь наша задача — это доказать локальную разрешимость в слабом обобщенном смысле. С этой целью воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методом компактности [14]. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Прежде всего выберем базис $\{w_j\}$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ как решение задачи на собственные функции и собственные значения
$$\triangle w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad w_j|_{\partial\Omega} = 0,$$
причем в силу гладкости границы имеем
$$\{w_j\} \subset \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega).$$
Ясно, что этот базис пространства $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ можно выбрать ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Пусть
$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_m]), \quad T_m > 0.$$
Рассмотрим следующую систему галеркинских уравнений:
$$\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial u_m}{\partial t} - \chi(\|\nabla u_m\|_2^2)\triangle u_m - f(x,u_m)\right] w_j(x)\,dx = 0 \tag{3.12}$$
для всех $j = \overline{1,m}$. Кроме того, потребуем выполнения начальных условий
$$u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k(x) \to u_0(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega). \tag{3.13}$$

Шаг 2. Локальная разрешимость.

Перепишем систему уравнений Галеркина (3.12) в следующем эквивалентном виде:
$$\mathrm{A}(c_m)\frac{dc_m}{dt} = f_1(c_m) + f_2(c_m), \quad c_m = (c_{m1}, \ldots, c_{mm})^t, \tag{3.14}$$
где
$$\mathrm{A}(c_m) = \|a_{kj}(c_m)\|^{m,m}_{k,j=1,1}, \tag{3.15}$$
$$a_{kj} = \delta_{kj}, \tag{3.16}$$

$$f_{1j}(c_m) = -\varphi(\|\nabla u_m\|_2^2)\int\limits_\Omega (\nabla u_m, \nabla w_j), \quad f_{2j}(c_m) = \int\limits_\Omega f(x, u_m) w_j.$$

В силу свойств (3.6) и (3.9), нетрудно доказать ограниченную липшиц–непрерывность функций $f_{1j}(c_m)$ и $f_{2j}(c_m)$. И тем самым, из теоремы Коши приходим к выводу о существовании единственного решения системы уравнений (3.12) в классе

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]) \quad \text{при некотором} \quad T_m > 0.$$

Шаг 3. Априорные оценки. Для вывода априорных оценок воспользуемся равенством (3.12), которое умножим на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим следующее равенство:

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + \chi(\|\nabla u_m\|_2^2)\|\nabla u_m\|_2^2 = \int\limits_\Omega f(x, u_m) u_m \, dx, \tag{3.17}$$

где

$$\Psi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\|u_m\|_2^2.$$

Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_\Omega f(x, u_m) u_m \, dx\right| \leqslant c_3 \int\limits_\Omega |u_m| \, dx + c_4 \int\limits_\Omega |u_m|^{q_2+2} \, dx \leqslant c_5 + c_6 \int\limits_\Omega |u_m|^{q_2+2} \, dx,$$

где мы воспользовались арифметическим неравенством Гельдера. Из оценки (3.5) и последней цепочки неравенств из (3.17) получим следующее неравенство

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + c_1\|\nabla u_m\|_2^2 \leqslant c_5 + c_6 \int\limits_\Omega |u_m|^{q_2+2} \, dx. \tag{3.18}$$

Воспользуемся интеполяционным неравенством (1.45):

$$\|v\|_{q_2+2}^{q_2+2} \leqslant \varepsilon\|\nabla v\|_2^2 + c_{10}(\varepsilon)\|v\|_2^{2r}, \quad \varepsilon > 0, \quad r = \frac{(q_2+2)(1-\alpha)}{(2-\alpha(q_2+2))} \tag{3.19}$$

при условии, что

$$q_2 > \frac{4}{3}.$$

Причем интерполяционное неравенство (3.19) имеет место при выполнении условий:

$$q_2 + 2 \in (2, 2^*), \quad 2^* = \begin{cases} 2N/(N-2), & \text{при } N > 2\,; \\ +\infty, & \text{при } N \leqslant 2. \end{cases} \tag{3.20}$$

Из неравенства (3.18) и интерполяционного неравенства (3.19) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + c_1\|\nabla u_m\|_2^2 \leqslant c_5 + c_6\varepsilon\|\nabla u_m\|_2^2 + c_{11}(\varepsilon)\|u_m\|_2^{2r}, \tag{3.21}$$

из которого, как и ранее, при $\varepsilon = c_1/(2c_6)$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 \leqslant \Psi_m(0) + c_5T + c_{12}\int\limits_0^t ds\|u_m\|_2^{2r}, \quad r > 1. \tag{3.22}$$

В силу теоремы Гроноулла–Беллмана–Бихари [1] из последнего неравенства вытекают следующие априорные оценки:

$$\|u_m\|_2^2 \leqslant c_{13}(T) < +\infty, \tag{3.23}$$

$$\int\limits_0^T \|\nabla u_m\|_2^2\, dt \leqslant c_{14}(T) < +\infty \tag{3.24}$$

для некоторого малого $T > 0$, причем постоянные $c_{13}(T) > 0$, $c_{14}(T) > > 0$ и не зависят от $m \in \mathbb{N}$. Теперь мы умножим обе части равенства (3.12) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\|u'_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \chi(s)\, ds = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_m)\, dx. \tag{3.25}$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по времени и получим после ряды упрощений следующее неравенство:

$$\int\limits_0^t \|u'_m\|_2^2\, ds + \frac{c_1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(c_1\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{q_1+1}\|\nabla u_{0m}\|_2^{2(q_1+1)}\right) - \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_{0m})\, dx +$$
$$+ \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_m)\, dx \leqslant d + c_{15} + c_{16}\|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2}. \tag{3.26}$$

Теперь надо воспользоваться интерполяционным неравенством (3.19), а также полученными ранее априорной оценкой (3.23) и в результате получим следующие априорные оценки:

$$\int\limits_0^T \|u'_m\|_2^2\, dt \leqslant c_{17}(T) < +\infty, \tag{3.27}$$

$$\|\nabla u_m\|_2^2 \leqslant c_{18}(T) < +\infty, \tag{3.28}$$

где $T > 0$ достаточно малое.

Для дальнейшего заметим, что на банаховом пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ одной из возможных эквивалентных норм является следующая:

$$\|u\| \equiv \left(\int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |\triangle u|^2 \right] \, dx \right)^{1/2}$$

и в дальнейшем мы будем использовать это обозначение. Теперь воспользуемся специальным выбором базиса и получим, что равенство (3.12) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u_m}{\partial t} - \chi(\|\nabla u_m\|_2^2) \triangle u_m - f(x, u_m) \right] \triangle w_j(x) \, dx = 0 \tag{3.29}$$

при $j = \overline{1, m}$. Умножим обе части равенства (3.29) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда в результате интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 + \chi(\|\nabla u_m\|_2^2) \|\triangle u_m\|_2^2 = - \int\limits_{\Omega} f(x, u_m) \triangle u_m \, dx. \tag{3.30}$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f(x, u_m) \triangle u_m \, dx. \tag{3.31}$$

Стандартным образом, используя арифметическое неравенство Гельдера и неравенство Гельдера, получим оценку для этого интеграла

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(x, u_m) \triangle u_m \, dx \right| \leqslant c_{17}(\varepsilon) + \varepsilon \|\triangle u_m\|_2^2 + c_{18}(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} |u_m|^{2q_2+2} \, dx$$

для всех $\varepsilon > 0$. Из последнего неравенства в силу вложения

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega) \quad \text{при} \quad q_2 \in (0, 2],$$

приходим к итоговому неравенству

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(x, u_m) \triangle u_m \, dx \right| \leqslant c_{17}(\varepsilon) + \varepsilon \|\triangle u_m\|_2^2 + c_{19}(\varepsilon) \|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2}. \tag{3.32}$$

Из неравенств (3.30) и (3.32) приходим к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 + (c_1 - \varepsilon) \|\triangle u_m\|_2^2 \leqslant c_{17}(\varepsilon) + c_{19}(\varepsilon) \|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2}, \tag{3.33}$$

из которого при
$$\varepsilon = \frac{c_1}{2}$$
получим еще одну априорную оценку
$$\int\limits_0^T \|\triangle u_m\|_2^2 \, dt \leqslant c_{20}(T) < +\infty \tag{3.34}$$
для достаточно малого $T > 0$.

Шаг 4. Предельный переход.

Из априорных оценок (3.27), (3.28) и (3.34) вытекает, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеют место предельные свойства
$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \tag{3.35}$$
$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \tag{3.36}$$
$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)). \tag{3.37}$$
Прежде всего заметим, что в силу априорных оценок итоговая на данный момент последовательность $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве
$$\mathbb{W} \equiv \left\{ v \middle| \, v \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \; v^{'} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)) \right\}.$$
Поэтому в силу известной теоремы Обэна–Лионса [14] имеет место вполне непрерывное вложение
$$\mathbb{W} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$
Значит, для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ имеем
$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)) \tag{3.38}$$
и, стало быть,
$$u_m(x)(t) \to u(x)(t) \quad \text{для п.в.} \quad (t,x) \in Q_T = (0,T) \times \Omega. \tag{3.39}$$
Теперь заметим, что последовательность
$$\{f(x,u_m)\}$$
равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в $\mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega)$, поэтому в силу леммы Лионса [14] имеем
$$f(x,u_m) \rightharpoonup f(x,u) \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T). \tag{3.40}$$
Теперь умножим обе части равенства (3.12) на $\psi(t) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(0,T)$ и проинтегрируем по $t \in [0,T]$, после чего перейдем к пределу при $m \to \to +\infty$ для получившегося выражения с учетом свойств (3.37), (3.38) и (3.40) и получим, что построенная функция $u(x)(t)$ является слабым обобщенным решением задачи (3.1)–(3.3) при $\varphi(x,u) = u$. Используя

стандартный алгоритм продолжения слабых решений во времени, получим, что справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия на функции $\chi(s)$ и $f(x,s)$. Тогда для любого*

$$u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$$

существует слабое обобщенное решение в смысле определения 3, *причем*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)),$$
$$u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad T \in (0,T_0),$$

причем либо $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|u\| = +\infty.$$

4. Разрушение за конечное время.

Разрушение за конечное время будем доказывать для общей задачи (3.1)–(3.3), хотя локальную разрешимость мы доказали только для случая $\varphi(x,u) = u$. Поэтому прежде всего рассмотрим дополнительные условия на функцию $\varphi(x,s)$.

Условия на $\varphi(x,u)$.

(i)$_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_1$ пусть

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k,$$

и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant a_0 > 0$;

(iii)$_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Решение задачи понимается в следующем смысле:

Определение 5. *Слабым обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) *назовем функцию $u(x)(t)$, которая удовлетворяет свойствам, что*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$

причем имеет место равенство

$$\int_0^T \int_\Omega \Big[\varphi'(x,u) - \chi(\|\nabla u\|_2^2)\triangle u - f(x,u)\Big]\, v(x)(t)\, dx\, dt = 0, \tag{3.41}$$

для всех

$$v(x)(t) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)),$$
$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega).$$

Причем для вывода необходимого дифференциального неравенства, из которого вытекают достаточные условия разрушения слабого решения за конечное время, мы используем построенные галеркинские приближения. Однако, в данном случае мы их построили только для функции $\varphi(x,u) = u$. Поэтому в общем случае мы будем доказывать разрушение классического решения рассматриваемой задачи, решение которой принадлежит к классу

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)),$$

удовлетворяющую равенству (3.41). Прежде всего введем следующие обозначения:

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u|^{p_l}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2p_{k_0}}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx, \quad (3.42)$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \int\limits_0^t \|u^{'}\|_2^2(s)\,ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u^{'}|^2|u|^{p_l-2}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx. \quad (3.43)$$

В силу утверждения леммы 1, доказанной ранее имеет место следующее неравенство:

$$\left(\Phi^{'}\right)^2 \leqslant p_{k_0}\Phi\mathrm{J} \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \quad (3.44)$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k.$$

Прежде всего возьмем в качестве функции $v(x)(t)$ в равенстве (3.41)

$$v(x)(t) = \begin{cases} u(x)(s), & \text{если } s \in [0,t]; \\ 0, & \text{если } s \in (t,T], \end{cases}$$

тогда после интегрирования по частям и дифференцирования по времени в рассматриваемом классе получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \chi(\|\nabla u\|_2^2)\|\nabla u\|_2^2 = \int\limits_\Omega f(x,u)u\,dx. \quad (3.45)$$

Теперь возьмем в качестве $v(x)(t)$ в равенстве (3.41)

$$v(x)(t) = \begin{cases} u^{'}(x)(s), & \text{если } s \in [0,t]; \\ 0, & \text{если } s \in (t,T], \end{cases}$$

тогда после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\mathrm{J} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u\|_2^2} \chi(s)\,ds - E(0) = \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x,u)\,dx. \tag{3.46}$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \chi(s)\,ds - \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x,u_0)\,dx. \tag{3.47}$$

Теперь воспользуемся неравенством (3.8) и получим следующее неравенство:

$$\vartheta_2\mathrm{J} + \frac{\vartheta_2}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u\|_2^2} \chi(s)\,ds - \vartheta_2 E(0) \leqslant \int\limits_\Omega f(x,u)u\,dx. \tag{3.48}$$

Из этого неравенства и неравенства (3.45) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \chi(\|\nabla u\|_2^2)\|\nabla u\|_2^2 \geqslant \vartheta_2\mathrm{J} + \frac{\vartheta_2}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u\|_2^2} \chi(s)\,ds - \vartheta_2 E(0). \tag{3.49}$$

Наконец воспользуемся неравенством (3.5) и получим в итоге следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \vartheta_2 E(0) \geqslant \vartheta_2\mathrm{J} + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u\|_2^2} \chi(s)\,ds, \tag{3.50}$$

из которого при выполнении условия, что

$$\vartheta_2 \geqslant \vartheta_1$$

получим

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \vartheta_2 E(0) \geqslant \vartheta_2\mathrm{J}. \tag{3.51}$$

Из этого неравенства и неравенства (3.44) получим искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi^{''} - \alpha(\Phi^{'})^2 + \beta\Phi \geqslant 0, \tag{3.52}$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta_2}{p_{k_0}}, \quad \beta = \vartheta_2 E_m(0). \tag{3.53}$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$\vartheta_2 > p_{k_0}, \quad p_{k_0} = \max_{l=\overline{1,n}} p_l. \tag{3.54}$$

Далее рассуждая как и в предыдущем параграфе мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия на функции $\varphi(x,s)$, $\chi(s)$ и $f(x,s)$. Тогда при условии*

$$\int_\Omega \mathcal{F}(x,u_0)\,dx > \frac{1}{2}\int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \chi(s)\,ds + \\ + \frac{p_{k_0}}{2\vartheta_2}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right), \tag{3.55}$$

$$p_{k_0} < \vartheta_2, \quad \vartheta_2 \geqslant \vartheta_1 \tag{3.56}$$

классическое решение задачи (3.1)–(3.3) *не существует глобально во времени и имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty$$

и имеет место оценка сверху

$$T \leqslant T_0 \leqslant T_\infty = \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right] > 0,$$

$$\alpha = \frac{\vartheta_2}{p_{k_0}}, \quad \beta = \begin{cases}\vartheta_2 E(0), & \textit{при} \quad E(0) > 0;\\ 0, & \textit{при} \quad E(0) \leqslant 0,\end{cases}$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx + \\ + \frac{1}{2}\int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2}\chi(s)\,ds - \int_\Omega \mathcal{F}(x,u_0)\,dx.$$

§ 4. Разрушение решений параболического уравнения с двойной нелинейностью и нелокальным источником

1. Ведение.

Рассмотрим следующую начально–краевую задачу:

$$\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial t} - \operatorname{div}(h(x,|\nabla u|)\nabla u) = g(x,u) + f_1(x,u)\int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds, \tag{4.1}$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_l(x)|u|^{p_l-2}u, \tag{4.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{4.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

Данная задача была рассмотрена для конкретных функций $f_1(x,u)$ и $f_2(t,x,u)$ в работе [23].

2. Постановка задачи.

Прежде всего сформулируем условия на функции $\varphi(x,s)$, $h(x,s)$, $g(x,s)$, $f_1(x,s)$ и $f_2(t,x,s)$.

Условия на $\varphi(x,u)$**.**

(i)$_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_1$ пусть
$$p_{k_0} = \max_{k\in\overline{1,n}} p_k, \quad p_{k_0} \in (2, p^*],$$
и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant a_0 > 0$;

(iii)$_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Условия на функцию $h(x,s)$

(i)$_2$ $h(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_2$ имеет место неравенства для почти всех $x \in \Omega$:
$$c_2 s^{p-2} \leqslant h(x,s) \leqslant c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \tag{4.4}$$
кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ функция $h(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(0,+\infty)$, причем
$$|sh'_s(x,s)| \leqslant c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \tag{4.5}$$

(iii)$_2$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:
$$0 \leqslant \int\limits_\Omega h(x,|\nabla v(x)|)|\nabla v(x)|^2\,dx \leqslant \vartheta_1 \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x,|\nabla v(x)|)\,dx \tag{4.6}$$
при $\vartheta_1 > 0$, где
$$\mathcal{H}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h(x,\sigma)\sigma.$$

Условия на функцию $g(x,s)$

(i)$_3$ $g(x,s):\Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_3$ имеет место неравенство для почти всех $x\in\Omega$:

$$|g(x,s)|\leqslant c_4+c_5|s|^{q_1+1} \quad \text{при} \quad q_1+2\in(2,p^*]; \tag{4.7}$$

(iii)$_3$ для любых $v(x)\in\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ имеет место следующие неравенства:

$$\int\limits_\Omega v(x)g(x,v(x))\,dx\geqslant\vartheta_2\int\limits_\Omega \mathcal{G}(x,v(x))\,dx\geqslant 0, \tag{4.8}$$

где $\vartheta_2>0$ и

$$\mathcal{G}(x,s)=\int\limits_0^s g(x,\sigma)\,d\sigma;$$

Условия на функцию $f_1(x,s)$

(i)$_4$ $f_1(x,s):\Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_4$ имеет место неравенство сверху для почти всех $x\in\Omega$:

$$|f_1(x,s)|\leqslant c_6+c_7|s|^{q_2+1} \quad \text{при} \quad q_2+2\in(2,p^*]; \tag{4.9}$$

(iii)$_4$ для почти всех $x\in\Omega$ имеет место следующее неравенство:

$$f_1(x,s)s\geqslant\vartheta_3\mathcal{F}_1(x,s)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad \vartheta_3>0, \tag{4.10}$$

где

$$\mathcal{F}_1(x,s)=\int\limits_0^s d\sigma\, f_1(x,\sigma);$$

Условия на функцию $f_2(t,x,s)$

(i)$_5$ $f_2(t,x,s):\mathbb{R}^1_+\times\Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_5$ $f_2(t,x,s)\geqslant 0$ для всех $t\in\mathbb{R}^1_+$, почти всех $x\in\Omega$ и всех $s\in\mathbb{R}^1$.

Здесь мы использовали стандартное обозначение

$$p^*=\begin{cases} Np/(N-p), & \text{при } N>p\,;\\ +\infty, & \text{при } N\leqslant p\,,\end{cases}$$

причем, очевидно, что $p^*>2$ при $p\geqslant 2$.

Дадим определение сильного обобщенного решения задачи (4.1)–(4.3).

О п р е д е л е н и е 6. *Сильным обобщенным решением задачи* (4.1)–(4.3) *назовем функцию* $u(x)(t)$ *класса*

$$u(x)(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)) \quad \textit{при некотором} \quad T>0,$$

удовлетворяющую следующему равенству:

$$\langle D(u),w\rangle=0 \quad \textit{для всех} \quad t\in[0,T], \quad w\in\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega), \tag{4.11}$$

где

$$D(u) = \frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial t} - \operatorname{div}(h(x,|\nabla u|)\nabla u) - g(x,u) - f_1(x,u)\int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds,$$

а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— скобки двойственности между банаховыми пространствами* $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

3. Разрушение решений задачи за конечное время.

Прежде всего предположим, что найдется такое $T > 0$, что существует сильное обобщенное решение задачи (4.1)–(4.3) в смысле определения 6.

Займемся выводом достаточных условий разрушения сильного обобщенного решения за конечное время. Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u|^{p_l}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2p_{k_0}}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx, \quad (4.12)$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \int\limits_0^t \|u'\|_2^2(s)\,ds + \sum_{l=1}^n (p_l-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u'|^2|u|^{p_l-2}\,dx\,ds + \\ + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx. \quad (4.13)$$

В силу доказанной ранее леммы 1 имеет место следующее дифференциальное неравенство:

$$\left(\Phi'\right)^2 \leqslant p_{k_0}\Phi\mathrm{J} \quad \text{для всех} \quad t\in[0,T], \quad (4.14)$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k\in\overline{1,n}} p_k.$$

Возьмем в равенстве (4.11)

$$w = u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$$

и в результате интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \int\limits_\Omega h(x,|\nabla u|)|\nabla u|^2\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} g(x,u)u\,dx + \int\limits_{\Omega} f_1(x,u)u \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))ds\,dx. \quad (4.15)$$

Теперь возьмем в равенстве (4.11)

$$w = u^{'}(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$$

и в результате получим следующее равенство:

$$\frac{d\mathrm{J}}{dt} + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x,|\nabla u|)\,dx =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x,u)\,dx + \int\limits_{\Omega} f_1(x,u)u^{'} \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx. \quad (4.16)$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} f_1(x,u)u^{'} \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx =$$

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}_1(x,u) \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx - \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}_1(x,u) f_2(t,x,u)\,dx. \quad (4.17)$$

В силу условия (4.10) и условия $f_2(t,x,z) \geqslant 0$ приходим из (4.17) следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} f_1(x,u)u^{'} \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx \leqslant \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}_1(x,u) \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx.$$

Итак, отсюда и из (4.16) получим неравенство

$$\frac{d\mathrm{J}}{dt} + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x,|\nabla u|)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x,u)\,dx + \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}_1(x,u) \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx \quad (4.18)$$

Проинтегрируем по времени последнее неравенство и получим, что имеет место следующее неравенство:

$$\mathrm{J} + \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x,|\nabla u|)\,dx - E(0) \leqslant$$

$$
\leqslant \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x,u)\,dx + \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}_1(x,u) \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx, \quad (4.19)
$$

где

$$
E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx + \\
+ \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|)\,dx - \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x,u_0)\,dx. \quad (4.20)
$$

Теперь воспользуемся свойствами (4.8) и (4.10) и получим следующее неравенство:

$$
\mathrm{J} + \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u|)\,dx - E(0) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{\vartheta_2} \int\limits_{\Omega} g(x,u)u\,dx + \frac{1}{\vartheta_3} \int\limits_{\Omega} f_1(x,u)u \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx. \quad (4.21)
$$

Пусть

$$
\vartheta = \min\{\vartheta_2, \vartheta_3\},
$$

тогда из (4.21) получим следующее неравенство:

$$
\vartheta \mathrm{J} + \vartheta \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u|)\,dx - \vartheta E(0) \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{\Omega} g(x,u)u\,dx + \int\limits_{\Omega} f_1(x,u)u \int\limits_0^t f_2(s,x,u(s))\,ds\,dx. \quad (4.22)
$$

Теперь отсюда и из (4.15) получим следующее неравенство:

$$
\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \int\limits_{\Omega} h(x, |\nabla u|)|\nabla u|^2\,dx \geqslant \vartheta \mathrm{J} + \vartheta \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u|)\,dx - \vartheta E(0). \quad (4.23)
$$

Воспользуемся неравенством (4.6) и получим неравенство

$$
\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \vartheta E(0) \geqslant \vartheta \mathrm{J} + (\vartheta - \vartheta_1) \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u|)\,dx, \quad (4.24)
$$

из которого при выполнении условия

$$
\vartheta \geqslant \vartheta_1
$$

получим неравенство

$$\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \vartheta E(0) \geqslant \vartheta \mathrm{J}. \tag{4.25}$$

Из неравенств (4.14) и (4.25) мы приходим к следующему искомому дифференциальному неравенству:

$$\Phi\Phi^{''} - \alpha(\Phi^{'})^2 + \beta\Phi \geqslant 0, \tag{4.26}$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta}{p_{k_0}}, \quad \beta = \vartheta E(0). \tag{4.27}$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$\vartheta > p_{k_0}, \quad p_{k_0} = \max_{l=\overline{1,n}} p_l. \tag{4.28}$$

Далее стандартным образом приходим к следующему утверждению:
Теорема 7. *Пусть выполнены все условия на функции* $\varphi(x,s)$, $h(x,s)$, $g(x,s)$, $f_1(x,s)$ *и* $f_2(t,x,s)$. *Тогда при условии*

$$\int\limits_\Omega \mathcal{G}(x,u_0)\,dx > \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x,|\nabla u_0|)\,dx + \\ + \frac{p_{k_0}}{2\vartheta}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right), \tag{4.29}$$

$$p_{k_0} < \vartheta, \quad \vartheta \geqslant \vartheta_1, \quad \vartheta = \min\{\vartheta_2, \vartheta_3\}, \tag{4.30}$$

сильное обобщенное решение задачи (4.1)–(4.3) *не существует глобально во времени и имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty$$

и имеет место оценка сверху

$$T \leqslant T_0 \leqslant T_\infty = \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right],$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx + \\ + \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x,|\nabla u_0|)\,dx - \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x,u_0)\,dx.$$

$$\alpha = \frac{\vartheta}{p_{k_0}}, \quad \beta = \begin{cases} \vartheta E(0), & \text{при} \quad E(0) > 0; \\ 0, & \text{при} \quad E(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

§ 5. Разрушение решений одного параболического уравнения нелинейной теплопроводности с двойной нелинейностью

1. Введение. Теперь мы рассмотрим одну задачу из теории горения (см. [16]) с двойной нелинейностью следующего вида:

$$\frac{\partial \varphi(x,u)}{\partial t} - \triangle \left(|u|^{q_1} u\right) = |u|^{q_2} u, \tag{5.1}$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{l=1}^{n} a_l(x) |u|^{p_l - 2} u, \tag{5.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{5.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$, $q_1, q_2 > 0$.

2. Постановка задачи.

Как обычно, предположим, что выполнены следующие условия

Условия на $\varphi(x,u)$**.**

(i)$_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$;

(ii)$_1$ пусть

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k,$$

и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant a_0 > 0$;

(iii)$_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Решение задачи (5.1)–(5.3) будем понимать в классическом смысле

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})) \quad \text{при некотором} \quad T > 0.$$

3. Разрушение за конечное время.

Прежде всего предположим, что найдется некоторое $T > 0$, для которого существует классическое решение задачи (5.1)–(5.3).

Введем ряд обозначений.

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{q_1+2} \int_0^t \|u\|_{q_1+2}^{q_1+2} \, ds + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{q_1 + p_l} \int_0^t \int_\Omega a_l(x) |u|^{p_l + q_1} \, dx \, ds + \\ + \frac{1}{(q_1+2)(q_1+p_{k_0})} \|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \\ + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{(q_1+p_l)(q_1+p_{k_0})} \int_\Omega a_l(x) |u_0|^{p_l+q_1} \, dx, \tag{5.4}$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |u|^{q_1} (u')^2 \, dx \, ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_l(x) |u|^{q_1+p_l-2} (u')^2 \, dx \, ds +$$
$$+ \frac{1}{q_1+2} \|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{q_1+p_l} \int\limits_\Omega a_l(x) |u_0|^{p_l+q_1} \, dx. \quad (5.5)$$

Справедлива следующая лемма:
Л е м м а 2. *Для всех* $t \in [0, T]$ *имеет место следующее неравенство*:

$$(\Phi')^2 \leqslant (q_1 + p_{k_0}) \Phi \mathrm{J}, \quad p_{k_0} = \max_{k=\overline{1,n}} p_k. \quad (5.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 1.

Л е м м а д о к а з а н а.

Приступим к выводу энергетических равенств. Действительно, сначала умножим обе части уравнения (5.1) на $|u|^{q_1} u$ и проинтегрируем по области Ω. После интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \int\limits_\Omega |\nabla(|u|^{q_1} u)|^2 \, dx = \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}. \quad (5.7)$$

Теперь умножим обе части уравнения (5.1) на

$$(|u|^{q_1} u)'$$

и проинтегрируем по области Ω, тогда после интегрирования по частям, получим следующее равенство:

$$(q_1+1) \frac{d\mathrm{J}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega |\nabla(|u|^{q_1} u)|^2 \, dx = \frac{q_1+1}{q_1+q_2+2} \frac{d}{dt} \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}, \quad (5.8)$$

из которого после ряда преобразований получим следующее равенство:

$$(q_1+q_2+2) \frac{d\mathrm{J}}{dt} + \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2} \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega |\nabla(|u|^{q_1} u)|^2 \, dx = \frac{d}{dt} \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}, \quad (5.9)$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по времени и получим после ряда преобразований следующее равенство:

$$(q_1+q_2+2)\mathrm{J} + \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2} \int\limits_\Omega |\nabla(|u|^{q_1} u)|^2 \, dx - E(0) = \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}, \quad (5.10)$$

где

$E(0) \equiv$

$$\equiv (q_1+q_2+2)\left(\frac{1}{q_1+2}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2}+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{q_1+p_l}\int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l+q_1}\,dx\right)+$$
$$+\frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}\int\limits_{\Omega}|\nabla(|u_0|^{q_1}u_0)|^2\,dx-\|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2} \quad (5.11)$$

Из неравенств (5.7) и (5.10) получим следующее равенство:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}+E(0)=(q_1+q_2+2)\mathrm{J}+\left(\frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}-1\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla(|u|^{q_1}u)|^2\,dx. \quad (5.12)$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$q_2 \geqslant q_1,$$

тогда из (5.12) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}+E(0)\geqslant (q_1+q_2+2)\mathrm{J}. \quad (5.13)$$

Из неравенств (5.6) и (5.13) получим искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi^{''}-\alpha(\Phi^{'})^2+\beta\Phi\geqslant 0, \quad (5.14)$$

где

$$\alpha=\frac{q_1+q_2+2}{q_1+p_{k_0}},\quad \beta=E(0). \quad (5.15)$$

Прежде всего потребуем выполнения условия, что

$$q_2+2>p_{k_0},$$

тогда, очевидно, $\alpha>1$. Теперь нам нужно рассмотреть случаи $E(0)>0$ и случай $E(0)\leqslant 0$.

Рассмотрим первый случай, поскольку он сложнее. Воспользуемся результатом теоремы 10 Приложения и получим, что при выполнении условий

$$\Phi(0)>0,\quad \Phi^{'}(0)>\left(\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right)^{1/2}>0 \quad (5.16)$$

имеет место разрушение за конечное время. Рассмотрим подробнее второе неравенство в (5.16). После ряда преобразований оно приводится к следующему виду:

$$\|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}>\frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}\int\limits_{\Omega}|\nabla(|u_0|^{q_1}u_0)|^2\,dx+$$
$$+\frac{q_1+p_{k_0}}{2}\left(\frac{1}{q_1+2}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2}+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{q_1+p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l+q_1}\,dx\right). \quad (5.17)$$

Случай $E(0) \leqslant 0$ значительно проще. И результат о разрушении получается из тех же формул приложения, в которых формально нужно положить $\beta = 0$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 8. *Пусть выполнены условия на функцию $\varphi(x,s)$, тогда при выполнении начального условия*

$$\|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2} > \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}\int\limits_\Omega |\nabla(|u_0|^{q_1}u_0)|^2\,dx + \\ + \frac{q_1+p_{k_0}}{2}\left(\frac{1}{q_1+2}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{q_1+p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l+q_1}\,dx\right)$$

и условий

$$q_2 \geqslant q_1, \quad q_2 + 2 > p_{k_0}$$

время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно найдется такое T_0, что

$$T \leqslant T_0 \leqslant T_\infty = \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1}$$

и имеет место предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow T_0}\Phi(t) = +\infty,$$

где

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right],$$

$$\alpha = \frac{q_1+q_2+2}{q_1+p_{k_0}}, \quad \beta = \begin{cases} E(0), & \textit{при} \quad E(0) > 0; \\ 0, & \textit{при} \quad E(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$E(0) \equiv \\ \equiv (q_1+q_2+2)\left(\frac{1}{q_1+2}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{q_1+p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l+q_1}\,dx\right) + \\ + \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}\int\limits_\Omega |\nabla(|u_0|^{q_1}u_0)|^2\,dx - \|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}.$$

4. Замечание.

Заметим, что в точности также как и для задачи (5.1)–(5.3) можно получить результат и для следующей задачи:

$$\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial t} - \mathrm{div}(|\nabla(|u|^{q_1}u)|^{p-2}\nabla(|u|^{q_1}u)) = |u|^{q_2}u, \qquad (5.18)$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{l=1}^{n} a_l(x)|u|^{p_l-2}u, \tag{5.19}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{5.20}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$, $q_1, q_2 > 0$.

§ 6. Разрушение решений параболического уравнения с нелинейным граничным условием и с двойной нелинейностью

1. Введение.

В этом параграфе мы рассмотрим следующую начально–краевую задачу:

$$\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial t} - \triangle u = f(x,u), \tag{6.1}$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)|u|^{p_k-2}u, \tag{6.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_x} + g(x,u)\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{6.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

2. Постановка задачи.

Введем условия на функции $\varphi(x,s)$, $g(x,s)$ и $f(x,s)$.

Условия на $\varphi(x,s)$**.**

(i)$_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_1$ пусть

$$p_{k_0} = \max_{k\in\overline{1,n}} p_k, \quad p_{k_0} < 6$$

и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant \underline{a_0} > 0$;

(iii)$_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Условия на функцию $g(x,s)$

(i)$_2$ $g(x,s) : \partial\Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_2$ имеет место неравенство для почти всех $x \in \Omega$:

$$|g(x,s)| \leqslant c_4 + c_5|s|^{q_1+1} \quad \text{при} \quad q_1 \in [0,2); \tag{6.4}$$

(iii)$_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\partial\Omega)$ имеет место следующие неравенства:

$$a\|v\|^{q_1+2}_{\partial\Omega,q_1+2} \leqslant \int\limits_{\partial\Omega} v(x)g(x,v(x))\,d\Gamma \leqslant \vartheta_1 \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,v(x))\,d\Gamma \tag{6.5}$$

где $\vartheta_1 > 0$ и

$$\mathcal{G}(x,s) = \int\limits_0^s g(x,\sigma)\,d\sigma;$$

(iv)$_2$ имеет место ограниченная липшиц–непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_g(\cdot) = g(x,\cdot)$, порожденного функцией $g(x,u)$:

$$\|\mathcal{N}_g(u_1) - \mathcal{N}_g(u_2)\|_{\partial\Omega,(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant \mu_1(\mathrm{R}_1)\|u_1 - u_2\|_{\partial\Omega,q_1+2}, \quad (6.6)$$

где $\mu_1(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_1 = \max\left\{\|u_1\|_{\partial\Omega,q_1+2}, \|u_2\|_{\partial\Omega,q_1+2}\right\}.$$

Условия на функцию $f(x,s)$

(i)$_3$ $f(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_3$ имеет место неравенство сверху для почти всех $x \in \Omega$:

$$|f(x,s)| \leqslant c_6 + c_7|s|^{q_2+1} \quad \text{при} \quad q_2 \in (0,4); \qquad (6.7)$$

(iii)$_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega f(x,v(x))v(x) \geqslant \vartheta_2 \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x,v(x))\,dx \quad \text{при} \quad \vartheta_2 > 0, \qquad (6.8)$$

где

$$\mathcal{F}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, f(x,\sigma);$$

(iv)$_3$ имеет место ограниченная липшиц–непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_f(\cdot) = f(x,\cdot)$, порожденного функцией $f(x,u)$:

$$\|\mathcal{N}_f(u_1) - \mathcal{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}_2)\|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \qquad (6.9)$$

где $\mu_2(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_2 = \max\left\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\right\}.$$

Теперь дадим определение слабого обобщенного решения.

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (6.1)–(6.3) *назовем функцию* $u(x)(t)$, *удовлетворяющую условиям*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^1(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$$

и равенству

$$\int\limits_\Omega \varphi'(x,u)w(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} g(x,u)w(x)\,d\Gamma +$$

$$+\int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla w)\, dx - \int\limits_{\Omega} f(x,u) w\, dx = 0 \quad \textit{для почти всех} \quad t \in [0,T] \tag{6.10}$$

для всех $w(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, *причем выполнено начальное условие*

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega).$$

З а м е ч а н и е 4. Из определения слабого решения вытекает, что после возможного изменения на подмножестве множества $[0,T]$ нулевой меры Лебега

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{L}^2(\Omega))$$

и, стало быть, начальное условие имеет смысл.

3. Разрушение решений.

Пусть существует слабое обобщенное решение рассматриваемой задачи в классе

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; \mathbb{H}^1(\Omega)) \quad \text{при некотором} \quad T > 0.$$

Введем обозначения.

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u\|_2^2\, ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} a_l(x) |u|^{p_l}\, dx\, ds + \\ + \frac{1}{2p_{k_0}} \|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_{k_0} p_l} \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l}\, dx, \tag{6.11}$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \int\limits_0^t \|u'\|_2^2(s)\, ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} a_l(x) |u'|^2 |u|^{p_l - 2}\, dx\, ds + \\ + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l}\, dx. \tag{6.12}$$

Имеет место следующее дифференциальное неравенство:

$$\left(\Phi'\right)^2 \leqslant p_{k_0} \Phi \mathrm{J} \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \tag{6.13}$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k.$$

Теперь мы возьмем в равенстве (6.10)

$$w = u(x)(t).$$

В результате получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \int\limits_{\partial\Omega} g(x,u)u\,d\Gamma + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x,u)u\,dx. \tag{6.14}$$

Теперь возьмем в равенстве (6.10)

$$w = u^{'}(x)(t).$$

В результате получим второе энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{J} + \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,u)\,d\Gamma + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx\right) = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x,u)\,dx. \tag{6.15}$$

Проинтегрируем по времени обе части последнего равенства. Получим следующее выражение:

$$\mathrm{J} + \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,u)\,d\Gamma + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx - E(0) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x,u)\,dx, \tag{6.16}$$

где

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l}\int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx + \\ + \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,u_0)\,d\Gamma + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^2\,dx - \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x,u_0)\,dx. \tag{6.17}$$

Из равенства (6.16) с учетом свойства (6.8) получим следующее неравенство:

$$\vartheta_2\mathrm{J} + \vartheta_2\int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,u)\,d\Gamma + \frac{\vartheta_2}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx - \vartheta_2 E(0) \leqslant \int\limits_{\Omega} f(x,u)u\,dx. \tag{6.18}$$

Теперь из этого неравенства и равенства (6.14) мы получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \int\limits_{\partial\Omega} g(x,u)u\,d\Gamma + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx \geqslant \\ \geqslant \vartheta_2\mathrm{J} + \vartheta_2\int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,u)\,d\Gamma + \frac{\vartheta_2}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx - \vartheta_2 E(0). \tag{6.19}$$

Теперь мы воспользуемся свойством (6.5) и получим, что

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \vartheta_2 E(0) \geqslant \vartheta_2\mathrm{J} +$$

$$+ (\vartheta_2 - \vartheta_1) \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,u)\, d\Gamma + \left(\frac{\vartheta_2}{2} - 1\right) \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx. \quad (6.20)$$

Теперь потребуем, чтобы были выполнены следующие условия:

$$\vartheta_2 \geqslant \vartheta_1, \quad \vartheta_2 \geqslant 2.$$

Тогда из неравенства (6.20) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \vartheta_2 E(0) \geqslant \vartheta_2 \mathrm{J}. \quad (6.21)$$

Теперь из неравенств (6.13) и (6.21) мы получим искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi^{''} - \alpha(\Phi^{'})^2 + \beta\Phi \geqslant 0, \quad (6.22)$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta_2}{p_{k_0}}, \quad \beta = \vartheta_2 E(0). \quad (6.23)$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$\vartheta_2 > p_{k_0}, \quad p_{k_0} = \max_{l=\overline{1,n}} p_l. \quad (6.24)$$

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть следующие два случая:

$$\beta > 0 \quad \text{и} \quad \beta \leqslant 0.$$

Рассмотрим сначала первый более сложный случай. Воспользуемся результатом теоремы 10 параграфа 4 Приложения и получим, что при выполнении условия

$$\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_0|^{p_l}\, dx > \frac{2\vartheta_2}{2\vartheta_2 - p_{k_0}} E(0) > 0 \quad (6.25)$$

имеет место неравенство

$$\Phi(t) \geqslant \frac{1}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (6.26)$$

где

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right] > 0. \quad (6.27)$$

Условие (6.25) можно переписать в следующем виде

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x,u_0)\, dx > \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^2\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{G}(x,u_0)\, d\Gamma +$$

$$+\frac{p_{k_0}}{2\vartheta_2}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right),\quad p_{k_0}<\vartheta_3,\quad (6.28)$$

которое нужно дополнить рассматриваемым условием $\beta>0$, т. е. следующим условием:

$$\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\mathcal{G}(x,u_0)\,d\Gamma>\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_0)\,dx.\quad (6.29)$$

Теперь мы рассмотрим более простой случай, когда $\beta\leqslant 0$, т. е. условие

$$\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_0)\,dx\geqslant\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\mathcal{G}(x,u_0)\,d\Gamma.\quad (6.30)$$

Тогда имеет место неравенство (6.26), в котором нужно положить $\beta=$ $=0$. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть выполнены все условия на функции* $\varphi(x,s)$, $g(x,s)$ *и* $f(x,s)$. *Тогда при условии*

$$\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_0)\,dx>\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\mathcal{G}(x,u_0)\,d\Gamma+ \\ +\frac{p_{k_0}}{2\vartheta_2}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right),\quad (6.31)$$

$$p_{k_0}<\vartheta_2,\quad \vartheta_2\geqslant\vartheta_1,\quad \vartheta_2\geqslant 2\quad (6.32)$$

слабое обобщенное решение задачи (6.1)–(6.3) *не существует глобально во времени и имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_\infty}\|u\|=+\infty$$

и имеет место оценка сверху

$$T\leqslant T_\infty=\Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где постоянная $A>0$ *определена формулой* (6.27),

$$\beta=\begin{cases}\vartheta_2E(0), & \textit{при}\quad E(0)>0;\\ 0, & \textit{при}\quad E(0)\leqslant 0,\end{cases}$$

Глава 2

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Разрушение решений систем параболических уравнений с двойной нелинейностью

1. Введение.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о достаточных условиях разрушения слабого решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \varphi_1(x,u)}{\partial t} - \operatorname{div}(h_1(x,|\nabla u|)\nabla u) + g_1(x,u) = f_1(x,u,v), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \varphi_2(x,v)}{\partial t} - \operatorname{div}(h_2(x,|\nabla v|)\nabla v) + g_2(x,v) = f_2(x,u,v), \tag{1.2}$$

$$\varphi_1(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n_1} a_{1k}(x)|u|^{p_{1k}-2}u, \tag{1.3}$$

$$\varphi_2(x,v) = v + \sum_{k=1}^{n_2} a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}-2}v, \tag{1.4}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \tag{1.5}$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \leqslant 6$ и Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

2. Постановка задачи.

Прежде всего введем условия на функции $\varphi_1(x,s)$, $\varphi_2(x,s)$, $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$, $g_1(x,s)$, $g_2(x,s)$, $f_1(x,s_1,s_2)$ и $f_2(x,s_1,s_2)$.

Условия на $\varphi_1(x,s)$.

$(\mathrm{i})_1$ $a_{1k}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_{1k}(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

$(\mathrm{ii})_1$ пусть

$$p_{1k_0} = \max_{k \in \overline{1,n_1}} p_{1k}, \quad p_{1k_0} < r_1^*$$

и при этом $a_{1k_0}(x) \geqslant a_{10} > 0$;

$(\mathrm{iii})_1$ $p_{1k} > 2$ для всех $k = \overline{1,n_1}$;

Условия на $\varphi_2(x,s)$.

$(\mathrm{i})_2$ $a_{2k}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_{2k}(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

$(\mathrm{ii})_2$ пусть

$$p_{2k_0} = \max_{k \in \overline{1,n_2}} p_{2k}, \quad p_{2k_0} < r_2^*$$

и при этом $a_{2k_0}(x) \geqslant a_{20} > 0$;

(iii)$_2$ $p_{2k} > 2$ для всех $k = \overline{1, n_2}$;

Условия на функцию $h_1(x,s)$

(i)$_3$ $h_1(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_3$ имеет место неравенства для почти всех $x \in \Omega$:

$$c_2 s^{r_1-2} \leqslant h_1(x,s) \leqslant c_1 + c_2 s^{r_1-2} \quad \text{при} \quad r_1 \geqslant 2, \quad 4 < r_1^* < +\infty, \tag{1.6}$$

кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_1(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(0,+\infty)$, причем

$$|sh'_{1s}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2 s^{r_1-2} \quad \text{при} \quad r_1 \geqslant 2, \quad 4 < r_1^* < +\infty, \tag{1.7}$$

(iii)$_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,r_1}_0(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$c_3 \|\nabla v\|^{r_1}_{r_1} \leqslant \int\limits_\Omega h_1(x, |\nabla v(x)|)|\nabla v(x)|^2\, dx \leqslant \vartheta_{11} \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, |\nabla v(x)|)\, dx \tag{1.8}$$

при $\vartheta_{11} > 0$, где

$$\mathcal{H}_1(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h_1(x,\sigma)\sigma.$$

(iv)$_3$ функция $h_1(x,s)$ для почти всех $x \in \Omega$ является равномерно монотонной в следующем смысле:

$$(h_1(x,|\xi|)\xi - h_1(x,|\eta|)\eta, \xi - \eta) \geqslant a|\xi - \eta|^{r_1} \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{1.9}$$

Условия на функцию $h_2(x,s)$

(i)$_4$ $h_2(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_4$ имеет место неравенства для почти всех $x \in \Omega$:

$$c_2 s^{r_2-2} \leqslant h_2(x,s) \leqslant c_1 + c_2 s^{r_2-2} \quad \text{при} \quad r_2 \geqslant 2, \quad 4 < r_2^* < +\infty, \tag{1.10}$$

кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_2(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(0,+\infty)$, причем

$$|sh'_{2s}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2 s^{r_2-2} \quad \text{при} \quad r_2 \geqslant 2, \quad 4 < r_2^* < +\infty, \tag{1.11}$$

(iii)$_4$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,r_2}_0(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$c_3 \|\nabla v\|^{r_2}_{r_2} \leqslant \int\limits_\Omega h_2(x, |\nabla v(x)|)|\nabla v(x)|^2\, dx \leqslant \vartheta_{12} \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla v(x)|)\, dx \tag{1.12}$$

при $\vartheta_{12} > 0$, где

$$\mathcal{H}_2(x, s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h_2(x, \sigma)\sigma.$$

(iv)$_4$ функция $h_2(x, s)$ для почти всех $x \in \Omega$ является равномерно монотонной в следующем смысле:

$$(h_2(x, |\xi|)\xi - h_2(x, |\eta|)\eta, \xi - \eta) \geqslant a|\xi - \eta|^{r_2} \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{1.13}$$

Условия на функцию $g_1(x, s)$

(i)$_5$ $g_1(x, s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_5$ имеет место неравенство для почти всех $x \in \Omega$:

$$|g(x, s)| \leqslant c_4 + c_5|s|^{q_{11}+1} \quad \text{при} \quad q_{11} \in [0, r_1^* - 2); \tag{1.14}$$

(iii)$_5$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_{11}+2}(\Omega)$ имеет место следующие неравенства:

$$a\|v\|_{q_{11}+2}^{q_{11}+2} \leqslant \int\limits_\Omega v(x) g_1(x, v(x))\, dx \leqslant \vartheta_{21} \int\limits_\Omega \mathcal{G}_1(x, v(x))\, dx \tag{1.15}$$

где $\vartheta_{21} > 0$ и

$$\mathcal{G}_1(x, s) = \int\limits_0^s g_1(x, \sigma)\, d\sigma;$$

(iv)$_5$ имеет место ограниченная липшиц–непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_{g_1}(\cdot) = g_1(x, \cdot)$, порожденного функцией $g_1(x, u)$:

$$\|\mathcal{N}_{g_1}(u_1) - \mathcal{N}_{g_1}(u_2)\|_{(q_{11}+2)/(q_{11}+1)} \leqslant \mu_{11}(\mathrm{R}_{11})\|u_1 - u_2\|_{q_{11}+2}, \tag{1.16}$$

где $\mu_{11}(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_{11} = \max\{\|u_1\|_{q_{11}+2}, \|u_2\|_{q_{11}+2}\}.$$

Условия на функцию $g_2(x, s)$

(i)$_6$ $g_2(x, s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_6$ имеет место неравенство для почти всех $x \in \Omega$:

$$|g(x, s)| \leqslant c_4 + c_5|s|^{q_{12}+1} \quad \text{при} \quad q_{12} \in [0, r_2^* - 2); \tag{1.17}$$

(iii)$_6$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_{12}+2}(\Omega)$ имеет место следующие неравенства:

$$a\|v\|_{q_{12}+2}^{q_{12}+2} \leqslant \int\limits_\Omega v(x) g_2(x, v(x))\, dx \leqslant \vartheta_{22} \int\limits_\Omega \mathcal{G}_2(x, v(x))\, dx \tag{1.18}$$

где $\vartheta_{22} > 0$ и

$$\mathcal{G}_2(x, s) = \int\limits_0^s g_2(x, \sigma)\, d\sigma;$$

(iv)$_6$ имеет место ограниченная липшиц–непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_{g_2}(\cdot) = g_2(x,\cdot)$, порожденного функцией $g_2(x,u)$:

$$\|\mathcal{N}_{g_2}(u_1) - \mathcal{N}_{g_2}(u_2)\|_{(q_{12}+2)/(q_{12}+1)} \leqslant \mu_{12}(\mathrm{R}_{12})\|u_1 - u_2\|_{q_{12}+2}, \quad (1.19)$$

где $\mu_{12}(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_{12} = \max\{\|u_1\|_{q_{12}+2}, \|u_2\|_{q_{12}+2}\}.$$

Условия на функцию $f_1(x, s_1, s_2)$

(i)$_7$ $f_1(x,s_1,s_2) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_7$ имеет место неравенство сверху для почти всех $x \in \Omega$:

$$|f_1(x,s_1,s_2)| \leqslant c_7|s_1|^{q_{21}+1}|s_2|^{q_{22}+2}, \quad (1.20)$$

при $q_{21} \in (0, {r_1}^*/2 - 2)$, $q_{22} \in (0, {r_2}^*/2 - 2)$;

(iii)$_7$ Предположим, что имеет место следующее неравенство

$$|f_1(x,u_1,v_1) - f_1(x,u_2,v_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |v_1 - v_2|\omega_1|u_1|^{q_{21}+1} + |u_1 - u_2|\omega_2|v_2|^{q_{22}+2}, \quad (1.21)$$

где

$$\omega_1 = c_8(|v_1| + |v_2|)^{q_{22}+1}, \quad \omega_2 = c_8(|u_1| + |u_2|)^{q_{21}}.$$

Условия на функцию $f_2(x, s_1, s_2)$

(i)$_8$ $f_2(x,s_1,s_2) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_8$ имеет место неравенство сверху для почти всех $x \in \Omega$:

$$|f_2(x,s_1,s_2)| \leqslant c_7|s_1|^{q_{21}+2}|s_2|^{q_{22}+1} \quad (1.22)$$

при $q_{21} \in (0, {r_1}^*/2 - 2)$, $q_{22} \in (0, {r_2}^*/2 - 2)$;

$$|f_2(x,u_1,v_1) - f_2(x,u_2,v_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |u_1 - u_2|\omega_3|v_1|^{q_{22}+1} + |v_1 - v_2|\omega_4|u_2|^{q_{21}+2}, \quad (1.23)$$

где

$$\omega_3 = c_8(|u_1| + |u_2|)^{q_{21}+1}, \quad \omega_4 = c_8(|v_1| + |v_2|)^{q_{22}}.$$

Условия на функции $f_1(x, s_1, s_2)$ **и** $f_2(x, s_1, s_2)$

(i)$_9$ функция $\mathcal{F}(x,u,v)$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_9$ имеет место следующее условие роста

$$|\mathcal{F}(x,s_1,s_2)| \leqslant c_9|s_1|^{q_{21}+2}|s_2|^{q_{22}+2}; \quad (1.24)$$

(iii)$_9$ функция $\mathcal{F}(x,u,v)$ для почти всех $x \in \Omega$ дифференцируемая по Фреше, причем

$$\mathcal{F}_u'(x,u,v) = f_1(x,u,v), \quad \mathcal{F}_v'(x,u,v) = f_2(x,u,v). \quad (1.25)$$

(vi)$_9$ найдется такое $\vartheta > 0$, что имеет место неравенство

$$\vartheta \mathcal{F}(x, s_1, s_2) \leqslant f_1(x, s_1, s_2)s_1 + f_2(x, s_1, s_2)s_2 \tag{1.26}$$

для всех $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1$ и для почти всех $x \in \Omega$.

Теперь дадим определение слабого обобщенного решения задачи (1.1)–(1.5).

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.5) *назовем функции* $u(x)(t)$ *и* $v(x)(t)$, *удовлетворяющие свойствам*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)), \quad v(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)),$$
$$u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad v'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)),$$
$$\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)' \in \mathbb{L}^2(Q_T), \quad \left(|v|^{p_{2k}/2}\right)' \in \mathbb{L}^2(Q_T)$$

и равенствам

$$\int\limits_0^T \Bigg[\int\limits_\Omega \left[u' + \sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u|^{p_{1k}/2-2}u\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)'\right] w_1(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega h_1(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w_1(x))\,dx + \\ + \int\limits_\Omega g_1(x,u)w_1(x)\,dx - \int\limits_\Omega f_1(x,u,v)w_1(x)\,dx\Bigg]\psi_1(t)\,dt = 0, \tag{1.27}$$

$$\int\limits_0^T \Bigg[\int\limits_\Omega \left[v' + \sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}/2-2}v\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)'\right] w_2(x)\,dx + \\ + \int\limits_\Omega h_2(x, |\nabla v|)(\nabla v, \nabla w_2(x))\,dx + \\ + \int\limits_\Omega g_2(x,v)w_2(x)\,dx - \int\limits_\Omega f_2(x,u,v)w_2(x)\,dx\Bigg]\psi_2(t)\,dt = 0, \tag{1.28}$$

для всех $w_1(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)$, $w_2(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)$, $\psi_1(t) \in \mathcal{D}(0,T)$, $\psi_2(t) \in \mathcal{D}(0,T)$, *причем выполнены начальные условия*

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega), \quad v(x)(0) = v_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega). \tag{1.29}$$

Замечание 1. Из определения слабого решения вытекает, что после возможного изменения на подмножестве множества $[0, T]$ нулевой меры

Лебега слабое обобщенное решение исходной задачи принадлежит следующему классу:

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad v(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{L}^2(\Omega)).$$

И поэтому соответствующие начальные условия имеют место.

3. Локальная разрешимость.

Теперь мы приступим к изучению слабой обобщенной разрешимости системы уравнений (1.1)–(1.5), понимаемой в слабом смысле определения 1. С этой целью воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [14]. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Пусть $\{w_{1j}(x)\}$ — это галеркинский базис банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)$, который можно выбрать ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, а $\{w_{2j}(x)\}$ — это галеркинский базис банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)$, который тоже можно выбрать ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Рассмотрим систему галеркинских приближений следующего вида:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial \varphi_1(x,u_m)}{\partial t} w_{1j}(x)\,dx + \int\limits_\Omega h_1(x,|\nabla u_m|)(\nabla u_m, \nabla w_{1j})\,dx + \\ + \int\limits_\Omega [g_1(x,u_m) - f_1(x,u_m,v_m)] w_{1j}\,dx = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.30}$$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial \varphi_2(x,v_m)}{\partial t} w_{2j}(x)\,dx + \int\limits_\Omega h_2(x,|\nabla v_m|)(\nabla v_m, \nabla w_{2j})\,dx + \\ + \int\limits_\Omega [g_2(x,v_m) - f_2(x,u_m,v_m)] w_{2j}\,dx = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.31}$$

где

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_{1mk}(t) w_{1k}(x), \quad v_m = \sum_{k=1}^m c_{2mk}(t) w_{2k}(x),$$
$$c_{1mk}(t),\ c_{2mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_m]) \quad \text{при} \quad T_m > 0.$$

Кроме того, предположим, что

$$u_{m0} = u_m(x)(0) = \sum_{k=1}^m c_{1mk}(0) w_{1k}(x) \to u_0(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega), \tag{1.32}$$

$$v_{m0} = v_m(x)(0) = \sum_{k=1}^m c_{2mk}(0) w_{2k}(x) \to v_0(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega). \tag{1.33}$$

Шаг 2. Локальная разрешимость.

С учетом выбора базиса систему уравнений (1.30) можно переписать в следующем виде:

$$\mathrm{A}_1(c_{1m})\frac{dc_{1m}}{dt} = f_{11}(c_{1m}) + f_{21}(c_{1m}) + f_{31}(c_{1m}, c_{2m}), \tag{1.34}$$
$$c_{1m} = (c_{1m1}, ..., c_{1mm})^t, \quad c_{2m} = (c_{2m1}, ..., c_{2mm})^t,$$

где

$$\mathrm{A}_1(c_{1m}) = \|a_{1kj}(c_{1m})\|_{k,j=1,1}^{m,m}, \tag{1.35}$$

$$a_{1kj} = \delta_{kj} + \sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l} - 1)\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m|^{p_{1l}-2}w_{1k}(x)w_{1j}(x)\,dx, \tag{1.36}$$

$$f_{11j}(c_{1m}) = -\int\limits_\Omega (h_1(x, |\nabla u_m|)\nabla u_m, \nabla w_{1j})\,dx, \tag{1.37}$$

$$f_{21j}(c_{1m}) = -\int\limits_\Omega g_1(x, u_m)w_{1j}\,dx, \quad f_{31j}(c_{1m}, c_{2m}) = \int\limits_\Omega f_1(x, u_m, v_m)w_{1j}\,dx. \tag{1.38}$$

А систему уравнений (1.31) с учетом выбора базиса можно переписать в следующем виде:

$$\mathrm{A}_2(c_{2m})\frac{dc_{2m}}{dt} = f_{12}(c_{2m}) + f_{22}(c_{2m}) + f_{32}(c_{1m}, c_{2m}), \tag{1.39}$$
$$c_{1m} = (c_{1m1}, ..., c_{1mm})^t, \quad c_{2m} = (c_{2m1}, ..., c_{2mm})^t,$$

где

$$\mathrm{A}_2(c_{2m}) = \|a_{2kj}(c_{2m})\|_{k,j=1,1}^{m,m}, \tag{1.40}$$

$$a_{2kj} = \delta_{kj} + \sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l} - 1)\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m|^{p_{2l}-2}w_{2k}(x)w_{2j}(x)\,dx, \tag{1.41}$$

$$f_{12j}(c_{2m}) = -\int\limits_\Omega (h_2(x, |\nabla v_m|)\nabla v_m, \nabla w_{2j})\,dx, \tag{1.42}$$

$$f_{22j}(c_{2m}) = -\int\limits_\Omega g_2(x, v_m)w_{2j}\,dx, \quad f_{32j}(c_{1m}, c_{2m}) = \int\limits_\Omega f_2(x, u_m, v_m)w_{2j}\,dx. \tag{1.43}$$

Непрерывность функций $f_{11}(c_{1m})$, $f_{21}(c_{1m})$, $f_{12}(c_{2m})$ и $f_{22}(c_{2m})$ относительно аргументов доказывается точно также, как и в первом параграфе первой главы. Сложность представляют только оставшиеся функции $f_{31}(c_{1m}, c_{2m})$ и $f_{32}(c_{1m}, c_{2m})$. Докажем их непрерывность по совокупности переменных.

Пусть

$$u_1 = \sum_{k=1}^m c_{1mk}^1(t)w_{1k}(x), \quad u_2 = \sum_{k=1}^m c_{1mk}^2(t)w_{1k}(x),$$

$$v_1 = \sum_{k=1}^{m} c^1_{2mk}(t) w_{2k}(x), \quad v_2 = \sum_{k=1}^{m} c^2_{2mk}(t) w_{2k}(x).$$

Рассмотрим, например, функцию $f_{31}(c_{1m}, c_{2m})$. Итак, в силу неравенства (1.21) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left| f_{31j}(c^1_{1m}, c^1_{2m}) - f_{31j}(c^2_{1m}, c^2_{2m}) \right| \leqslant$$
$$\leqslant c_8 \int\limits_{\Omega} |v_1 - v_2| \max\{|v_1|^{q_{22}+1}, |v_2|^{q_{22}+1}\} |u_1|^{q_{21}+1} |w_{1j}|\, dx +$$
$$+ c_8 \int\limits_{\Omega} |u_1 - u_2| \max\{|u_1|^{q_{21}}, |u_2|^{q_{21}}\} |v_2|^{q_{22}+2} |w_{1j}|\, dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \quad (1.44)$$

Теперь в свою очередь рассмотрим интеграл I_1. Итак, воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера и получим следующую оценку:

$$\mathrm{I}_1 = c_8 \int\limits_{\Omega} |v_1 - v_2| \max\{|v_1|^{q_{22}+1}, |v_2|^{q_{22}+1}\} |u_1|^{q_{21}+1} |w_{1j}|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |v_1 - v_2|^{s_1}\, dx \right)^{1/s_1} \left(\int\limits_{\Omega} \max\left\{ |v_1|^{s_2(q_{22}+1)}, |v_2|^{s_2(q_{22}+1)} \right\} dx \right)^{1/s_2} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\Omega} |u_1|^{s_3(q_{21}+1)}\, dx \right)^{1/s_3} \left(\int\limits_{\Omega} |w_{1j}|^{s_4}\, dx \right)^{1/s_4}, \quad (1.45)$$

где

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = 1. \quad (1.46)$$

Итак, теперь возьмем

$$s_1 = r_2^*, \quad s_4 = r_1^*, \quad (1.47)$$

где мы использовали стандартное обозначение

$$r^* = \begin{cases} Nr/(N-r), & \text{при } N > r\,; \\ +\infty, & \text{при } N \leqslant r\,. \end{cases}$$

А относительно параметров s_2 и s_3 предположим, что

$$s_2(q_{22}+1) \leqslant r_2^*, \quad s_3(q_{21}+1) \leqslant r_1^*. \quad (1.48)$$

Ясно, что такие $s_1 > 1$ и $s_2 > 1$ существуют, поскольку

$$q_{22} + 2 < r_2^*, \quad q_{21} + 2 < r_1^*. \quad (1.49)$$

Положим, что

$$s_2 = s_3 = s$$

и подставим в равенство (1.46) тогда получим, что
$$s = \frac{2r_1^* r_2^*}{r_1^* r_2^* - r_1^* - r_2^*}. \tag{1.50}$$
Заметим, что
$$r_1^* > r_1 \geqslant 2, \quad r_2^* > r_2 \geqslant 2.$$
Подставляя (1.50) в (1.48) с учетом того, что $s_1 = s_2 = s$ получим следующие неравенства:
$$r_2^* + (2q_{22} + 3)r_1^* \leqslant r_1^* r_2^*, \quad r_1^* + (2q_{21} + 3)r_2^* \leqslant r_1^* r_2^*. \tag{1.51}$$
Потребуем теперь выполнения следующих неравенств:
$$r_2^* + 3r_1^* < r_1^* r_2^*, \quad r_1^* + 3r_2^* < r_1^* r_2^*, \tag{1.52}$$
тогда при их выполнении, очевидно, найдутся такие $q_{21}, q_{22} > 0$, что будут выполнены неравенства (1.51). Таким образом, приходим к следующим неравенствам:
$$r_1^* > \frac{r_2^*}{r_2^* - 3}, \quad r_2^* > \frac{r_1^*}{r_1^* - 3}. \tag{1.53}$$
Докажем совместность этих условий. С этой целью рассмотрим частный, но важный случай, когда $r_1 = r_2 = 2$. Пусть при этом $N = 3$. Тогда оба условия (1.53) примут один и тот же вид
$$\frac{2N}{N-2} > \frac{2N}{2N - 3(N-2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2N - 3(N-2) > N - 2 \Rightarrow N + 2 > 3N - 6 \Rightarrow N < 4.$$
В частности, при $r_1 = r_2 = 2$ и $N = 3$ из (1.51) получим, что
$$q_{21}, q_{22} \in (0, 1]. \tag{1.54}$$
Рассмотрим теперь интеграл I_2.
$$\mathrm{I}_2 = c_8 \int\limits_\Omega |u_1 - u_2| \max\{|u_1|^{q_{21}}, |u_2|^{q_{21}}\} |v_2|^{q_{22}+2} |w_{1j}| \, dx. \tag{1.55}$$
Имеет место следующая оценка:
$$\mathrm{I}_2 \leqslant c_8 \left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^{s_1} \, dx \right)^{1/s_1} \left(\int\limits_\Omega \max\{|u_1|^{s_2 q_{21}}, |u_2|^{s_2 q_{21}}\} \, dx \right)^{1/s_2} \times \\ \times \left(\int\limits_\Omega |v_2|^{s_3(q_{22}+2)} \, dx \right)^{1/s_3} \left(\int\limits_\Omega |w_{1j}|^{s_4} \, dx \right)^{1/s_4}, \tag{1.56}$$

где
$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}=1. \tag{1.57}$$
Положим, что
$$s_1=r_1^*, \quad s_2q_{21}=r_1^*, \quad s_4=r_1^*. \tag{1.58}$$
Тогда из (1.57) с учетом (1.58) мы получим следующее равенство:
$$s_3=\frac{r_1^*}{r_1^*-q_{21}-2}, \tag{1.59}$$
причем потребуем выполнения условия, что
$$s_3(q_{22}+2)\leqslant r_2^*,$$
из которого получим неравенство
$$r_1^*(q_{22}+2)+r_2^*(q_{21}+2)\leqslant r_2^*r_1^*. \tag{1.60}$$
Проверим выполнимость этого условия. Действительно, положим $r_1 = r_2 = 2$ и $N=3$, тогда получим условие, что
$$q_{22}+q_{21}\leqslant 2.$$
Стало быть, из неравенств (1.51) и (1.56) при выполнении условий (1.51) и (1.60) вытекают следующие неравенства:
$$\mathrm{I}_1\leqslant d_1(c^1_{1m},c^2_{1m},c^1_{2m},c^2_{2m})|c^1_{2m}-c^2_{2m}|, \tag{1.61}$$
$$\mathrm{I}_2\leqslant d_2(c^1_{1m},c^2_{1m},c^1_{2m},c^2_{2m})|c^1_{1m}-c^2_{1m}|. \tag{1.62}$$

Теперь рассмотрим вопрос о непрерывности по совокупности переменных функции $f_{32}(c_{1m},c_{2m})$. Действительно, в силу (1.28) имеет место следующее неравенство:
$$\begin{gathered}\left|f_{32j}(c^1_{1m},c^1_{2m})-f_{32j}(c^2_{1m},c^2_{2m})\right|\leqslant\\ \leqslant c_8\int\limits_\Omega |u_1-u_2|\max\{|u_1|^{q_{21}+1},|u_2|^{q_{21}+1}\}|v_1|^{q_{22}+1}|w_{2j}|\,dx+\\ +c_8\int\limits_\Omega |v_1-v_2|\max\{|v_1|^{q_{22}},|v_2|^{q_{22}}\}|u_2|^{q_{21}+2}|w_{2j}|\,dx=\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4.\end{gathered} \tag{1.63}$$
Рассмотрим сначала интеграл I_3. Действительно, имеет место следующая оценка:
$$\mathrm{I}_3=c_8\int\limits_\Omega |u_1-u_2|\max\{|u_1|^{q_{21}+1},|u_2|^{q_{21}+1}\}|v_1|^{q_{22}+1}|w_{2j}|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant c_8\left(\int\limits_\Omega |u_1-u_2|^{s_1}\,dx\right)^{1/s_1}\left(\int\limits_\Omega \max\{|u_1|^{s_2(q_{21}+1)},|u_2|^{s_2(q_{21}+1)}\}\,dx\right)^{1/s_2}\times$$

$$\times \left(\int_\Omega |v_1|^{s_3(q_{22}+1)}\, dx \right)^{1/s_3} \left(\int_\Omega |w_{2j}|^{s_4}\, dx \right)^{1/s_4}, \tag{1.64}$$

где

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = 1, \tag{1.65}$$

в котором положим, что

$$s_1 = r_1^*, \quad s_4 = r_2^* \tag{1.66}$$

и потребуем выполнения следующих неравенств:

$$s_2(q_{21}+1) \leqslant r_1^*, \quad s_3(q_{22}+1) \leqslant r_2^*. \tag{1.67}$$

Положим, что

$$s_2 = s_3 = s,$$

тогда из (1.65) вытекает равенство

$$s = \frac{2r_1^* r_2^*}{r_1^* r_2^* - r_1^* - r_2^*}. \tag{1.68}$$

Подставляя это выражение в неравенства (1.67) получим как и для интеграла I_1 следующие условия:

$$r_2^* + (2q_{22}+3)r_1^* \leqslant r_1^* r_2^*, \quad r_1^* + (2q_{21}+3)r_2^* \leqslant r_1^* r_2^*. \tag{1.69}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_4.

$$\mathrm{I}_4 = c_8 \int_\Omega |v_1 - v_2| \max\{|v_1|^{q_{22}}, |v_2|^{q_{22}}\} |u_2|^{q_{21}+2} |w_{2j}|\, dx. \tag{1.70}$$

Из обобщенного неравенства Гельдера мы получим, что имеет место следующая оценка:

$$\mathrm{I}_4 \leqslant c_8 \left(\int_\Omega |v_1 - v_2|^{s_1}\, dx \right)^{1/s_1} \left(\int_\Omega \max\{|v_1|^{s_2 q_{22}}, |v_2|^{s_2 q_{22}}\}\, dx \right)^{1/s_2} \times$$

$$\times \left(\int_\Omega |u_2|^{s_3(q_{21}+2)}\, dx \right)^{1/s_3} \left(\int_\Omega |w_{2j}|^{s_4}\, dx \right)^{1/s_4}, \tag{1.71}$$

где

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = 1, \tag{1.72}$$

в котором положим, что

$$s_1 = r_2^*, \quad s_4 = r_2^*, \quad s_2 q_{22} = r_2^* \tag{1.73}$$

и после подстановки в (1.72) мы получим следующее равенство:

$$s_3 = \frac{r_2^*}{r_2^* - q_{22} - 2}. \tag{1.74}$$

Теперь потребуем, чтобы имело место следующее неравенство:

$$s_3(q_{21} + 2) \leqslant r_1^*. \tag{1.75}$$

Из неравенства (1.75) с учетом (1.74) получим искомое неравенство

$$r_1^*(q_{22} + 2) + r_2^*(q_{21} + 2) \leqslant r_2^* r_1^*. \tag{1.76}$$

Стало быть, из неравенств (1.64) и (1.71) при выполнении условий (1.69) и (1.76) вытекают следующие неравенства:

$$\mathrm{I}_3 \leqslant d_3(c_{1m}^1, c_{1m}^2, c_{2m}^1, c_{2m}^2)|c_{1m}^1 - c_{1m}^2|, \tag{1.77}$$

$$\mathrm{I}_4 \leqslant d_4(c_{1m}^1, c_{1m}^2, c_{2m}^1, c_{2m}^2)|c_{2m}^1 - c_{2m}^2|. \tag{1.78}$$

Следовательно, вектор-функции $f_{31}(c_{1m}, c_{2m})$ и $f_{32}(c_{1m}, c_{2m})$ непрерывны по совокупности переменных.

Далее заметим, что в силу результата первого параграфа первой главы матрицы

$$\mathrm{A}_1(c_{1m}) \quad \text{и} \quad \mathrm{A}_2(c_{2m})$$

обратимы и соответствующие обратные матрицы являются непрерывными относительно соответствующих столбцов.

Таким образом, после обращения указанных матриц получим из (1.34) и (1.39) систему типа Коши–Ковалевской, которая в силу теоремы Пеано имеет решение класса

$$c_{1m}(t), c_{2m}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]) \quad \text{при некотором} \quad T_m > 0.$$

Шаг 3. Априорные оценки.

Для вывода априорных оценок умножим сначала равенство (1.30) на c_{1mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, а равенство (1.31) на c_{2mj} и тоже просуммируем по $j = \overline{1, m}$. После чего сложим получившиеся равенства и тогда получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_m(t)}{dt} + \int\limits_\Omega h_1(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx + \int\limits_\Omega h_2(x, |\nabla v_m|)|\nabla v_m|^2\,dx + \\ + \int\limits_\Omega [g_1(x, u_m)u_m + g_2(x, v_m)v_m]\,dx = \\ = \int\limits_\Omega [f_1(x, u_m, v_m)u_m + f_2(x, u_m, v_m)v_m]\,dx, \end{aligned} \tag{1.79}$$

где

$$\Psi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v_m\|_2^2 + \\ + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m|^{p_{1l}}\,dx + \\ + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m|^{p_{2l}}\,dx. \quad (1.80)$$

Рассмотрим отдельно правую часть равенства (1.79). Действительно, в силу свойств (1.20) и (1.27) мы получим следующую оценку:

$$\left|\int\limits_\Omega [f_1(x,u_m,v_m)u_m + f_2(x,u_m,v_m)v_m]\,dx\right| \leqslant 2c_7 \int\limits_\Omega |u_m|^{q_{21}+2}|v_m|^{q_{22}+2}\,dx \leqslant \\ \leqslant \frac{2c_7}{s_1}\int\limits_\Omega |u_m|^{s_1(q_{21}+2)}\,dx + \frac{2c_7}{s_2}\int\limits_\Omega |v_m|^{s_2(q_{22}+2)}\,dx = \\ = \frac{2c_7}{s_1}\mathrm{K}_1 + \frac{2c_7}{s_2}\mathrm{K}_2, \quad (1.81)$$

где

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1.$$

Рассмотрим каждый из двух интегралов K_1 и K_2 по отдельности. Сначала интеграл K_1. С этой целью воспользуемся интерполяционным неравенством (1.45) из первого параграфа первой главы.

$$\mathrm{K}_1 = \int\limits_\Omega |u_m|^{s_1(q_{21}+2)}\,dx \leqslant \varepsilon\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + c_{14}(\varepsilon)\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}m_1}, \quad (1.82)$$

которое выполнено при условиях

$$s_1(q_{21}+2) \in (p_{1k_0}, r_1^*], \quad r_1 > \frac{s_1(q_{21}+2)}{N+p_{1k_0}}N, \quad (1.83)$$

где

$$m_1 = \frac{s_1(q_{21}+2)r_1(1-\alpha_1)}{p_{1k_0}(r_1 - \alpha_1 s_1(q_{21}+2))},$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{p_{1k_0}} - \frac{1}{s_1(q_{21}+2)}\right)\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{p_{1k_0}}\right)^{-1}.$$

Заметим, что если потребовать выполнения условия, что

$$q_{21} + 2 > p_{1k_0}, \quad (1.84)$$

то найдется такое $s_1 > 1$, что будет выполнено первое условие из (1.83).

Аналогичным образом для интеграла K_2 вытекает следующая оценка:

$$K_2 = \int\limits_{\Omega} |v_m|^{s_2(q_{22}+2)}\,dx \leqslant \varepsilon \|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2} + c_{14}(\varepsilon)\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}m_2}, \tag{1.85}$$

которое выполнено при условиях

$$s_2(q_{22}+2) \in (p_{2k_0}, r_2^*], \quad r_2 > \frac{s_2(q_{22}+2)}{N+p_{2k_0}}N, \tag{1.86}$$

где

$$m_2 = \frac{s_2(q_{22}+2)r_2(1-\alpha_2)}{p_{2k_0}(r_2-\alpha_2 s_2(q_{22}+2))},$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{1}{p_{2k_0}} - \frac{1}{s_2(q_{22}+2)}\right)\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{p_{2k_0}}\right)^{-1}.$$

Заметим, что если потребовать выполнения условия, что

$$q_{22}+2 > p_{2k_0}, \tag{1.87}$$

то найдется такое $s_2 > 1$, что будет выполнено первое условие из (1.86).

Теперь мы потребуем, чтобы

$$s_1 = s_2 = 2,$$

тогда для справедливости интерполяционных неравенств (1.82) и (1.85) надо потребовать выполнения следующую совокупность условий

Условия на нелинейности.

$$2(q_{21}+2) \in (p_{1k_0}, r_1^*], \quad r_1 > \frac{2(q_{21}+2)}{N+p_{1k_0}}N, \tag{1.88}$$

$$2(q_{22}+2) \in (p_{2k_0}, r_2^*], \quad r_2 > \frac{2(q_{22}+2)}{N+p_{2k_0}}N. \tag{1.89}$$

Теперь мы в силу условий (1.8), (1.12), (1.15), (1.18), а также в силу интерполяционных неравенств (1.82) и (1.85) из оценки (1.81) и из равенства (1.79) получим следующее неравенство:

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + c_3\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + c_3\|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2} + a\|u_m\|_{q_{11}+2}^{q_{11}+2} + a\|v_m\|_{q_{12}+2}^{q_{12}+2} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + c_{14}(\varepsilon)\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}m_1} + \varepsilon\|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2} + c_{14}(\varepsilon)\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}m_2}, \tag{1.90}$$

в котором мы выберем параметр $\varepsilon = c_3/2$ и получим неравенство

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + \frac{c_3}{2}\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + \frac{c_3}{2}\|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2} + a\|u_m\|_{q_{11}+2}^{q_{11}+2} + a\|v_m\|_{q_{12}+2}^{q_{12}+2} \leqslant \\ \leqslant c_{14}(\varepsilon)\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}m_1} + c_{14}(\varepsilon)\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}m_2}, \tag{1.91}$$

из которого в свою очередь получим следующее неравенство:

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} \leqslant c_{14}(\varepsilon)\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}m_1} + c_{14}(\varepsilon)\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}m_2}. \qquad (1.92)$$

Проинтегрируем по времени последнее неравенство и в силу свойств функций $\varphi_1(x,s)$ и $\varphi_2(x,s)$ получим следующее неравенство:

$$\frac{p_{1k_0}-1}{p_{1k_0}}a_{10}\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}} + \frac{p_{2k_0}-1}{p_{2k_0}}a_{20}\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}} \leqslant$$
$$\leqslant \Psi_m(0) + c_{14}(\varepsilon)\int\limits_0^t \left[\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}m_1} + \|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}m_2}\right] ds, \qquad (1.93)$$

из которого сразу же получаем, что в силу начальных условий (1.32) и (1.33) имеет место оценка

$$\Psi_m(0) \leqslant d < +\infty,$$

где $d > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Итак, из (1.93) в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [1] мы приходим к следующей априорной оценке:

$$\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}} + \|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}} \leqslant c_{15}(T) < +\infty, \qquad (1.94)$$

при достаточно малом $T > 0$, где $c_{15}(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. С учетом этой априорной оценки из (1.91) получим еще две априорные оценки

$$\int\limits_0^T \left[\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + \|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2}\right] dt \leqslant c_{16}(T) < +\infty, \qquad (1.95)$$

$$\|u_m\|_{q_{11}}^{q_{11}} + \|v_m\|_{q_{12}}^{q_{12}} \leqslant c_{17}(T) < +\infty, \qquad (1.96)$$

при достаточно малом $T > 0$, где $c_{16}(T) > 0$, $c_{17}(T) > 0$ и не зависят от $m \in \mathbb{N}$.

Приступим к выводу других априорных оценок. С этой целью умножим обе части равенства (1.30) на c'_{1mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (1.31) на c'_{2mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства с учетом свойств функций, входящих в наши уравнения, мы получим следующее равенство:

$$\|u'_m\|_2^2 + \|v'_m\|_2^2 +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int\limits_\Omega |u_m|^{p_{1l}-2}|u'_m|^2\,dx + \sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int\limits_\Omega |v_m|^{p_{2l}-2}|v'_m|^2\,dx +$$

$$+\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{\Omega}\left(\mathcal{H}_1(x,|\nabla u_m|)+\mathcal{H}_2(x,|\nabla v_m|)+\mathcal{G}_1(x,u_m)+\mathcal{G}_2(x,v_m)\right)\,dx\right]= \\ =\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_m,v_m)\,dx, \quad (1.97)$$

из которого получаем следующее равенство:

$$\int\limits_0^t\left[\|u_m'\|_2^2+\|v_m'\|_2^2\right]\,ds+ \\ +\sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|u_m|^{p_{1l}-2}|u_m'|^2\,dx\,ds+ \\ +\sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|v_m|^{p_{2l}-2}|v_m'|^2\,dx\,ds+ \\ +\int\limits_{\Omega}\left(\mathcal{H}_1(x,|\nabla u_m|)+\mathcal{H}_2(x,|\nabla v_m|)+\mathcal{G}_1(x,u_m)+\mathcal{G}_2(x,v_m)\right)\,dx- \\ -E_m(0)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_m,v_m)\,dx, \quad (1.98)$$

где

$$E_m(0)=\int\limits_{\Omega}\biggl(\mathcal{H}_1(x,|\nabla u_{0m}|)+\mathcal{H}_2(x,|\nabla v_{0m}|)+ \\ +\mathcal{G}_1(x,u_{0m})+\mathcal{G}_2(x,v_{0m})\biggr)\,dx-\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_{0m},v_{0m})\,dx. \quad (1.99)$$

Теперь заметим, что в силу начальных условий (1.32) и (1.33), соответствующих условий роста и теоремы М. А. Красносельского имеет место предельное свойство

$$E_m(0)\to E(0) \quad \text{при} \quad m\to+\infty,$$

где

$$E(0)=\int\limits_{\Omega}\biggl(\mathcal{H}_1(x,|\nabla u_0|)+\mathcal{H}_2(x,|\nabla v_0|)+ \\ +\mathcal{G}_1(x,u_0)+\mathcal{G}_2(x,v_0)\biggr)\,dx-\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_0,v_0)\,dx. \quad (1.100)$$

Теперь мы в силу условий (1.8), (1.12), (1.15), (1.18), а также в силу интерполяционных неравенств (1.82) и (1.85) из равенства (1.98) получим следующее неравенство:

$$\int\limits_0^t \left[\|u'_m\|_2^2 + \|v'_m\|_2^2\right] ds + \sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |u_m|^{p_{1l}-2}|u'_m|^2\,dx\,ds + \sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |v_m|^{p_{2l}-2}|v'_m|^2\,dx\,ds + c_3\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + c_3\|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2} + a\|u_m\|_{q_{11}+2}^{q_{11}+2} + a\|u_m\|_{q_{12}+2}^{q_{12}+2} \leqslant d + \varepsilon\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + c_{14}(\varepsilon)\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}m_1} + \varepsilon\|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2} + c_{14}(\varepsilon)\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}m_2}. \quad (1.101)$$

В силу априорной оценки (1.94) при выборе $\varepsilon = c_3/2$ мы приходим к следующим двум априорным оценкам:

$$\|\nabla u_m\|_{r_1}^{r_1} + \|\nabla v_m\|_{r_2}^{r_2} \leqslant c_{18}(T) < +\infty, \quad (1.102)$$

$$\int\limits_0^T \left[\|u'_m\|_2^2 + \|v'_m\|_2^2\right] dt \leqslant c_{19}(T) < +\infty, \quad (1.103)$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[\left(a_{1k}^{1/2}\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)'\right)^2 + \left(a_{2k}^{1/2}\left(|v_m|^{p_{2k}/2}\right)'\right)^2\right] dt\,dx \leqslant c_{20}(T) < +\infty \quad (1.104)$$

при достаточно малом $T > 0$, где $c_{18}(T) > 0$, $c_{19}(T) > 0$ и $c_{20}(T) > 0$ не зависят от $m \in \mathbb{N}$.

4. Предельный переход.

Прежде всего из априорных оценок (1.94), (1.96), (1.102) и (1.103) вытекает, что существует такая подпоследовательности $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$, что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * \text{−слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)), \quad (1.105)$$

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad * \text{−слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)), \quad (1.106)$$

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * \text{−слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^{q_{11}+2}(\Omega)), \quad (1.107)$$

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad * \text{−слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^{q_{12}+2}(\Omega)), \quad (1.108)$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (1.109)$$

$$v_m' \rightharpoonup v' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \tag{1.110}$$

$$\mathbb{A}_1(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_1 \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}^{-1,r_1^*}(\Omega)), \tag{1.111}$$

$$\mathbb{A}_2(v_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_2 \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}^{-1,r_2^*}(\Omega)), \tag{1.112}$$

$$a_{1k}^{1/2}\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)' \rightharpoonup \chi_{3k}, \quad a_{2k}^{1/2}\left(|v_m|^{p_{2k}/2}\right)' \rightharpoonup \chi_{4k} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T), \tag{1.113}$$

где

$$\mathbb{A}_1(u) = -\operatorname{div}(h_1(x,|\nabla u|)\nabla u), \quad \mathbb{A}_2(v) = -\operatorname{div}(h_2(x,|\nabla v|)\nabla v). \tag{1.114}$$

Введем следующие банаховы пространства:

$$\mathbb{W}_1 \equiv \left\{u: \ u \in \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)), \ u' \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))\right\}, \tag{1.115}$$

$$\mathbb{W}_2 \equiv \left\{v: \ v \in \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)), \ v' \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))\right\}. \tag{1.116}$$

при $p > 1$. В силу полученных ранее априорных оценок последовательность $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{W}_1$, а последовательность $\{v_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{W}_2$. Заметим, что в силу теоремы Обэна–Лионса [14] имеют место вполне непрерывные вложения

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{L}^{z_1}(\Omega)), \quad \mathbb{W}_2 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{L}^{z_2}(\Omega)) \tag{1.117}$$

при $z_1 \in (2, r_1^*)$, $z_2 \in (2, r_2^*)$. Поэтому отсюда следует, что существуют такие подпоследовательности $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{L}^{z_1}(\Omega)) \quad \text{при} \quad z_1 \in (2, r_1^*), \tag{1.118}$$

$$v_m \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{L}^{z_2}(\Omega)) \quad \text{при} \quad z_2 \in (2, r_2^*). \tag{1.119}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что некоторые подпоследовательности $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$ обладают следующими свойствами:

$$u_m \to u, \quad v_m \to v \quad \text{для почти всех} \quad (t,x) \in Q_T \equiv (0,T)\times\Omega. \tag{1.120}$$

Ясно, что в силу каратеодориевости функций $f_1(x,s_1,s_2)$ и $f_2(x,s_1,s_2)$ из предельных свойств (1.120) вытекает, что

$$f_1(x,u_m,v_m) \to f_1(x,u,v) \quad \text{и} \quad f_1(x,u_m,v_m) \to f_1(x,u,v) \tag{1.121}$$

при $m \to +\infty$. Для дальнейшего нам нужно рассмотреть следующие интегралы:

$$\mathrm{J}_1 = \int\limits_\Omega f_1(x,u_m,v_m)w_{1j}\,dx, \quad \mathrm{J}_2 = \int\limits_\Omega f_2(x,u_m,v_m)w_{1j}\,dx. \tag{1.122}$$

Рассмотрим каждый из этих интегралов. Итак, справедливо следующее неравенство:

$$|\mathrm{J}_1| \leqslant c_7 \left(\int\limits_{\Omega} |u_m|^{s_1(q_{21}+1)}\,dx\right)^{1/s_1} \left(\int\limits_{\Omega} |v_m|^{s_2(q_{22}+2)}\,dx\right)^{1/s_2} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\Omega} |w_{1j}|^{s_3}\,dx\right)^{1/s_3}, \quad (1.123)$$

где

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}=1. \quad (1.124)$$

Положим в равенстве (1.124)

$$s_3=r_1^*, \quad (q_{21}+1)s_1=r_1^*, \quad (q_{22}+2)s_2 \leqslant r_2^*. \quad (1.125)$$

Тогда получим из (1.124), что имеет место следующее явное выражение для s_2 :

$$\frac{1}{s_2}=1-\frac{q_{21}+2}{r_1^*}. \quad (1.126)$$

Теперь из (1.125) и (1.126) получим неравенство

$$r_1^*(q_{22}+2)+r_2^*(q_{21}+2) \leqslant r_1^* r_2^*. \quad (1.127)$$

Следовательно, при выполнении условия (1.127) приходим к выводу, что имеет место цепочка неравенств

$$\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |f_1(x,u_m,v_m)|^{s_4}\,dx\,dt\right)^{1/s_4} \leqslant$$
$$\leqslant c_7 \left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |u_m|^{s_1(q_{21}+1)}\,dx\,dt\right)^{1/s_1} \left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |v_m|^{s_2(q_{22}+2)}\,dx\,dt\right)^{1/s_2} \leqslant$$
$$\leqslant c_{20} \left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |\nabla u_m|^{r_1}\,dx\,dt\right)^{(q_{21}+1)/r_1} \left(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} |\nabla v_m|^{r_2}\,dx\,dt\right)^{(q_{22}+2)/r_2} \leqslant$$
$$\leqslant c_{21}(T) < +\infty \quad (1.128)$$

при

$$s_4=\frac{r_1^*}{r_1^*-1}, \quad r_1^* < +\infty,$$

где $c_{21}(T) > 0$ в силу априорной оценки (1.102) и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом получаем, что

$$\left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |f_2(x, u_m, v_m)|^{s_5}\, dx\, dt\right)^{1/s_5} \leqslant c_{22}(T) < +\infty \tag{1.129}$$

при

$$s_5 = \frac{r_2^*}{r_2^* - 1}, \quad r_2^* < +\infty,$$

где $c_{22}(T) > 0$ в силу априорной оценки (1.102) и не зависит от $m \in \in \mathbb{N}$. Таким образом, из предельных свойств (1.121) и оценок (1.128), (1.129) получим в силу леммы Лионса [14] получим, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega f_1(x, u_m, v_m) w_{1j}(x)\psi_1(t)\, dx\, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f_1(x, u, v) w_{1j}(x)\psi_1(t)\, dx\, dt, \tag{1.130}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega f_2(x, u_m, v_m) w_{2j}(x)\psi_2(t)\, dx\, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f_2(x, u, v) w_{2j}(x)\psi_2(t)\, dx\, dt \tag{1.131}$$

для всех $\psi_1(t), \psi_2(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, поскольку, очевидно, что

$$w_{1j}(x)\psi_1(t) \in \mathbb{L}^{r_1^*}(Q_T), \quad w_{2j}(x)\psi_2(t) \in \mathbb{L}^{r_2^*}(Q_T).$$

Кроме того, понятно, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{1l}}(Q_T), \tag{1.132}$$

$$v_m \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{2l}}(Q_T). \tag{1.133}$$

Теперь заметим, что при выполнении условий, что

$$2(q_{21} + 2) < r_1^*, \quad 2(q_{22} + 2) < r_2^*$$

в силу предельных свойств (1.118) и (1.119) получим, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{2(q_{21}+2)}(Q_T), \tag{1.134}$$

$$v_m \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{2(q_{22}+2)}(Q_T). \tag{1.135}$$

Теперь воспользуемся условиями роста (1.20) и (1.27) и теоремы М. А. Красносельского об операторе Немыцкого получим, что имеют место следующие предельные свойства:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega f_1(x, u_m, v_m) u_m\, dx\, dt \to \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f_1(x, u, v) u\, dx\, dt, \tag{1.136}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f_2(x,u_m,v_m)v_m\,dx\,dt\to\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f_2(x,u,v)v\,dx\,dt. \tag{1.137}$$

Точно также как в первом параграфе первой главы доказывается, что имеют место следующие предельные свойства:

$$a_{1k}^{1/2}\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)^{'}\rightharpoonup a_{1k}^{1/2}\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)^{'}\quad\text{слабо в}\quad \mathbb{L}^2(Q_T), \tag{1.138}$$

$$a_{2k}^{1/2}\left(|v_m|^{p_{1k}/2}\right)^{'}\rightharpoonup a_{2k}^{1/2}\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)^{'}\quad\text{слабо в}\quad \mathbb{L}^2(Q_T). \tag{1.139}$$

Теперь наша задача доказать, что в предельных равенствах (1.111) и (1.112) имеют место следующие равенства:

$$\chi_1=-\operatorname{div}(h_1(x,|\nabla u|)\nabla u),\quad \chi_2=-\operatorname{div}(h_2(x,|\nabla v|)\nabla v) \tag{1.140}$$

Для этого нам нужно воспользоваться методом монотонности [14]. Перепишем галеркинские приближения (1.30) и (1.31) в следующем виде

$$\Bigg\langle u_m^{'}+\sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u_m|^{p_{1k}/2-2}u_m\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)^{'}-\\ -\operatorname{div}(h_1(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m)+g_1(x,u_m)-f_1(x,u_m,v_m),\ w_{1j}\Bigg\rangle_1=0 \tag{1.141}$$

$$\Bigg\langle v_m^{'}+\sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v_m|^{p_{2k}/2-2}v_m\left(|v_m|^{p_{2k}/2}\right)^{'}-\\ -\operatorname{div}(h_2(x,|\nabla v_m|)\nabla v_m)+g_2(x,v_m)-f_2(x,u_m,v_m),\ w_{2j}\Bigg\rangle_2=0 \tag{1.142}$$

для всех $j=\overline{1,m}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,r_1^{'}}(\Omega)$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,r_2^{'}}(\Omega)$.

Умножим теперь обе части равенства (1.141) на функцию $\psi_1(t)\in\in\mathcal{D}(0,T)$ и проинтегрировав по $t\in[0,T]$ полученное равенство, перейдем к пределу при $m\to+\infty$. В результате получим следующее равенство:

$$\int\limits_0^T\Bigg\langle u^{'}+\sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u|^{p_{1k}/2-2}u\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)^{'}+$$

$$+ \chi_1 + g_1(x,u) - f_1(x,u,v),\ w_{1j} \Big\rangle_1 \psi_1(t)\,dt = 0, \quad (1.143)$$

из которого в свою очередь в силу основной леммы вариационного исчисления получим равенство

$$\Big\langle u' + \sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)' +$$
$$+ \chi_1 + g_1(x,u) - f_1(x,u,v),\ w\Big\rangle_1 = 0 \quad \text{для почти всех} \quad t\in[0,T] \quad (1.144)$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)$.

Умножим теперь обе части равенства (1.142) на функцию $\psi_2(t) \in \in \mathcal{D}(0,T)$ и проинтегрировав по $t \in [0,T]$ полученное равенство, перейдем к пределу при $m \to +\infty$. В результате получим следующее равенство:

$$\int_0^T \Big\langle v' + \sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}/2-2}v\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)' +$$
$$+ \chi_2 + g_2(x,v) - f_2(x,u,v),\ w_{2j}\Big\rangle_2 \psi_2(t)\,dt = 0, \quad (1.145)$$

из которого в свою очередь в силу основной леммы вариационного исчисления получим равенство

$$\Big\langle v' + \sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}/2-2}v\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)' +$$
$$+ \chi_2 + g_2(x,v) - f_2(x,u,v),\ w\Big\rangle_2 = 0 \quad \text{для почти всех} \quad t\in[0,T] \quad (1.146)$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)$.

Таким образом, мы можем взять в равенстве (1.144)

$$w = u(x)(t),$$

проинтегрировать по $t \in (0,T)$ и после интегрирования по частям в силу результата параграфа 7 Приложения получить следующее равенство:

$$\int_0^T \langle \chi_1, u\rangle_1\, dt = \int_0^T dt \int_\Omega [f_1(x,u,v) - g_1(x,u)]\,u\,dx\,dt + \Psi_1(0) - \Psi_1(T), \quad (1.147)$$

где

$$\Psi_1(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x)(t)\,dx + \sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u(x)(t)|^{p_{1l}}\,dx. \tag{1.148}$$

А в равенстве (1.146) взять

$$w = v(x)(t),$$

проинтегрировать по $t \in (0,T)$ и после интегрирования по частям в силу результата параграфа 7 Приложения получить следующее равенство:

$$\int\limits_0^T \langle\chi_2, v\rangle_2\,dt = \int\limits_0^T dt\int\limits_{\Omega}[f_2(x,u,v) - g_2(x,v)]\,v\,dx\,dt + \Psi_2(0) - \Psi_2(T), \tag{1.149}$$

где

$$\Psi_2(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} v^2(x)(t)\,dx + \sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|v(x)(t)|^{p_{2l}}\,dx. \tag{1.150}$$

Теперь мы рассмотрим следующие выражения:

$$\mathrm{X}_{1m} \equiv \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_1(u_m) - \mathbb{A}_1(z_1), u_m - z_1\rangle_1\,, \tag{1.151}$$

$$\mathrm{X}_{2m} \equiv \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_2(v_m) - \mathbb{A}_2(z_2), v_m - z_2\rangle_2\,, \tag{1.152}$$

где

$$\mathbb{A}_1(z) = -\operatorname{div}(h_1(x,|\nabla z|)\nabla z), \quad \mathbb{A}_2(z) = -\operatorname{div}(h_2(x,|\nabla z|)\nabla z).$$

В силу свойств (1.9) и (1.13) имеем

$$\mathrm{X}_{1m} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{X}_{2m} \geqslant 0.$$

В силу этого имеет место следующие неравенства:

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_1(u_m), u_m\rangle_1 - \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_1(u_m), z_1\rangle_1 - \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_1(z_1), u_m - z_1\rangle_1\,, \tag{1.153}$$

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_2(v_m), v_m\rangle_2 - \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_2(v_m), z_2\rangle_2 - \int\limits_0^T dt\,\langle\mathbb{A}_2(z_2), v_m - z_2\rangle_2\,. \tag{1.154}$$

Теперь умножим обе части равенства (1.30) на c_{1mj}, а обе части равенства (1.31) на c_{2mj} и просуммируем полученные равенства по $j = \overline{1, m}$. В результате получим следующие равенства:

$$\int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_1(u_m), u_m \rangle_1 = \\ = \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega [f_1(x, u_m, v_m) - g_1(x, u_m)]\, u_m\, dx\, dt + \Psi_{1m}(0) - \Psi_{1m}(T), \tag{1.155}$$

$$\int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_2(v_m), v_m \rangle_2 = \\ = \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega [f_2(x, u_m, v_m) - g_2(x, v_m)]\, v_m\, dx\, dt + \Psi_{2m}(0) - \Psi_{2m}(T), \tag{1.156}$$

где

$$\Psi_{1m}(t) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_\Omega u_m^2(x)(t)\, dx + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l} - 1}{p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x) |u_m(x)(t)|^{p_{1l}}\, dx, \tag{1.157}$$

$$\Psi_{2m}(t) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_\Omega v_m^2(x)(t)\, dx + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l} - 1}{p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x) |v_m(x)(t)|^{p_{2l}}\, dx. \tag{1.158}$$

С другой стороны, ранее нами было доказано, что

$$u_m(x)(t) \to u(x)(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{1k_0}}(\Omega) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T],$$
$$v_m(x)(t) \to u(x)(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{2k_0}}(\Omega) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T],$$

Поэтому из равенств (1.155), (1.156) и начальных условий вытекает, что имеет место следующее предельное неравенство:

$$\limsup_{m \to +\infty} \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_1(u_m), u_m \rangle_1 \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega [f_1(x, u, v) - g_1(x, u)]\, u\, dx\, dt + \Psi_1(0) - \Psi_1(T), \tag{1.159}$$

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}_2(v_m), v_m\rangle_2 \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega [f_2(x,u,v) - g_2(x,v)]\, v\, dx\, dt + \Psi_2(0) - \Psi_2(T), \quad (1.160)$$

из которых в силу (1.147) и (1.149) получим следующие неравенства:

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}_1(u_m), u_m\rangle_1 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \chi_1, u\rangle_1\,, \quad (1.161)$$

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}_2(v_m), v_m\rangle_2 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \chi_2, v\rangle_2\,. \quad (1.162)$$

А из неравенств (1.153) и (1.154) вытекают следующие неравенства:

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \chi_1, u\rangle_1 - \int\limits_0^T dt\,\langle \chi_1, z_1\rangle_1 -$$
$$- \int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}_1(z_1), u - z_1\rangle_1 = \int\limits_0^T dt\,\langle \chi - \mathbb{A}(z_1), u - z_1\rangle_1\,, \quad (1.163)$$

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\,\langle \chi_2, v\rangle_2 - \int\limits_0^T dt\,\langle \chi_2, z_2\rangle_2 -$$
$$- \int\limits_0^T dt\,\langle \mathbb{A}_2(z_2), v - z_2\rangle_2 = \int\limits_0^T dt\,\langle \chi_2 - \mathbb{A}(z_2), v - z_2\rangle_2\,. \quad (1.164)$$

Далее стандартным образом из выражений (1.163) и (1.164) вытекает, что

$$\chi_1 = -\operatorname{div}(h_1(x, |\nabla u|)\nabla u), \quad \chi_2 = -\operatorname{div}(h_2(x, |\nabla v|)\nabla v). \quad (1.165)$$

Таким образом, умножив обе части равенства (1.30) на $\psi_1(t)$, а равенство (1.31) на $\psi_2(t)$ и проинтегрировав по времени, после чего переходя к пределу при $m \to +\infty$ для итоговых на данный момент подпоследовательностей $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$ получим, что предельные функции $u(x)(t)$ и $v(x)(t)$ являются слабым решением системы уравнений (1.1)–(1.5) в смысле определения 1. Далее используя стандартный алгоритм продолжения решения во времени приходим к следующему результату:

Теорема 1. *Пусть выполнены все условия на функции, входящие в рассматриваемую систему уравнений. Тогда при дополнительных условиях, что*

$$r_2^* + (2q_{22}+3)r_1^* \leqslant r_1^* r_2^*, \quad r_1^* + (2q_{21}+3)r_2^* \leqslant r_1^* r_2^*,$$
$$r_1^*(q_{22}+2) + r_2^*(q_{21}+2) \leqslant r_2^* r_1^*,$$
$$2(q_{21}+2) \in (p_{1k_0}, r_1^*), \quad r_1 > \frac{2(q_{21}+2)}{N+p_{1k_0}}N,$$
$$2(q_{22}+2) \in (p_{2k_0}, r_2^*), \quad r_2 > \frac{2(q_{22}+2)}{N+p_{2k_0}}N,$$

для любых $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)$, $v_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)$ *найдется такое* $T_0 = T_0(u_0, v_0) > 0$, *что для всех* $T \in (0, T_0)$ *существует слабое обобщенное решение* $u(x)(t)$ *и* $v(x)(t)$ *такое, что*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{1,r_1}(\Omega)), \quad v(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{1,r_2}(\Omega)),$$
$$u^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad v^{'}(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)).$$
$$\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)^{'}, \quad \left(|v|^{p_{2k}/2}\right)^{'} \in \mathbb{L}^2(Q_T).$$

Причем либо $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \left[\|\nabla u\|_{r_1} + \|\nabla v\|_{r_2}\right] = +\infty.$$

5. Разрушение решения.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \|u_m\|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|v_m\|_2^2\,ds +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int_0^t \int_\Omega a_{1l}(x)|u_m|^{p_{1l}}\,dx\,ds + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int_0^t \int_\Omega a_{2l}(x)|v_m|^{p_{2l}}\,dx\,ds +$$
$$+ \frac{1}{2p_0}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_0 p_{1l}} \int_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{2p_0}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_0 p_{2l}} \int_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx, \quad (1.166)$$

$$\mathrm{J}_m(t) \equiv \int_0^t \|u_m^{'}\|_2^2(s)\,ds + \int_0^t \|v_m^{'}\|_2^2(s)\,ds +$$

$$+\sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m^{'}|^2|u_m|^{p_{1l}-2}\,dx\,ds+$$

$$+\sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m^{'}|^2|v_m|^{p_{2l}-2}\,dx\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx, \quad (1.167)$$

где

$$p_0=\max\{p_{1k_0},p_{2k_0}\}.$$

Справедлива следующая важная лемма, доказательство которой в точности повторяет доказательство леммы 1 первой главы.

Л е м м а 1. *Имеет место следующее дифференциальное неравенство*:

$$\left(\Phi_m^{'}\right)^2\leqslant p_0\Phi_m\mathrm{J}_m\quad\textit{для всех}\quad t\in[0,T], \quad (1.168)$$

где

$$p_0=\max\{p_{1k_0},p_{2k_0}\}.$$

Для вывода достаточных условий разрушения слабого обобщенного решения задачи (1.1)–(1.5) в смысле определения 1 сначала умножим обе части равенства (1.30) на c_{1mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (1.31) на c_{2mj} и просуммируем по $j=$ $=\overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства и получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2}+\int\limits_\Omega h_1(x,|\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx+\int\limits_\Omega h_2(x,|\nabla v_m|)|\nabla v_m|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega g_1(x,u_m)u_m\,dx+\int\limits_\Omega g_2(x,v_m)v_m\,dx=$$

$$=\int\limits_\Omega[f_1(x,u_m,v_m)u_m+f_2(x,u_m,v_m)v_m]\,dx. \quad (1.169)$$

Для вывода второго энергетического равенства сначала умножим равенство (1.30) на $c_{1mj}^{'}$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (1.31) на $c_{2mj}^{'}$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства и получим следующее выражение:

$$\frac{d}{dt}\Big[\mathrm{J}_m + \int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{H}_1(x, |\nabla u_m|) + \mathcal{H}_2(x, |\nabla v_m|) + \\ + \mathcal{G}_1(x, u_m) + \mathcal{G}_2(x, v_m)\Big)\, dx\Big] = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m, v_m)\, dx. \quad (1.170)$$

Теперь мы проинтегрируем по времени последнее равенство и получим следующее равенство:

$$\mathrm{J}_m + \int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{H}_1(x, |\nabla u_m|) + \mathcal{H}_2(x, |\nabla v_m|) + \\ + \mathcal{G}_1(x, u_m) + \mathcal{G}_2(x, v_m)\Big)\, dx - E_m(0) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m, v_m)\, dx, \quad (1.171)$$

где

$$E_m(0) \equiv \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\, dx + \\ + \frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\, dx + \\ + \int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{H}_1(x, |\nabla u_{0m}|) + \mathcal{H}_2(x, |\nabla v_{0m}|) + \\ + \mathcal{G}_1(x, u_{0m}) + \mathcal{G}_2(x, v_{0m})\Big)\, dx - \int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}, v_{0m})\, dx \quad (1.172)$$

Теперь из неравенства (1.26) получим следующее неравенство:

$$\vartheta \mathrm{J}_m + \vartheta\int\limits_{\Omega}\Big(\mathcal{H}_1(x, |\nabla u_m|) + \mathcal{H}_2(x, |\nabla v_m|) + \\ + \mathcal{G}_1(x, u_m) + \mathcal{G}_2(x, v_m)\Big)\, dx - \vartheta E_m(0) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\Omega} \left[f_1(x, u_m, v_m)u_m + f_2(x, u_m, v_m)v_m\right]\, dx. \quad (1.173)$$

Отсюда и из равенства (1.169) мы получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \int\limits_{\Omega} h_1(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\, dx + \int\limits_{\Omega} h_2(x, |\nabla v_m|)|\nabla v_m|^2\, dx + \\ + \int\limits_{\Omega} g_1(x, u_m)u_m\, dx + \int\limits_{\Omega} g_2(x, v_m)v_m\, dx \geqslant \vartheta \mathrm{J}_m +$$

$$+\vartheta\int\limits_{\Omega}\Bigl(\mathcal{H}_1(x,|\nabla u_m|)+\mathcal{H}_2(x,|\nabla v_m|)+$$
$$+\mathcal{G}_1(x,u_m)+\mathcal{G}_2(x,v_m)\Bigr)\,dx-\vartheta E_m(0). \quad (1.174)$$

Теперь из условий (1.8), (1.12), (1.15) и (1.18) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2}+\vartheta E_m(0)\geqslant \vartheta \mathrm{J}_m+$$
$$+(\vartheta-\vartheta_{11})\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}_1(x,|\nabla u_m|)\,dx+(\vartheta-\vartheta_{12})\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}_2(x,|\nabla v_m|)\,dx+$$
$$+(\vartheta-\vartheta_{21})\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}_1(x,u_m)\,dx+(\vartheta-\vartheta_{22})\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}_2(x,v_m)\,dx, \quad (1.175)$$

из которого при выполнении условий, что

$$\vartheta\geqslant\vartheta_{11},\quad \vartheta\geqslant\vartheta_{12},\quad \vartheta\geqslant\vartheta_{21},\quad \vartheta\geqslant\vartheta_{22},$$

мы получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2}+\vartheta E_m(0)\geqslant \vartheta \mathrm{J}_m. \quad (1.176)$$

Из неравенств (1.168) и (1.176) мы приходим к искомому дифференциальному неравенству

$$\Phi_m^{''}\Phi_m-\alpha(\Phi_m^{'})^2+\beta\Phi_m\geqslant 0, \quad (1.177)$$

где

$$\alpha=\frac{\vartheta}{p_0},\quad \beta=\vartheta E_m(0).$$

Предположим, что выполнено условие

$$\vartheta>p_0.$$

Ясно, что нужно рассмотреть два случая

$$\beta>0,\quad \beta\leqslant 0.$$

Рассмотрим сначала более сложный случай $\beta>0$. В силу результата теоремы 10 Приложения имеем, что при выполнении условий

$$\Phi_m^{'}(0)>\left(\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi_m(0)\right)^{1/2}>0 \quad (1.178)$$

имеет место разрушение решения. Условие (1.178) примет следующий вид:

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}, v_{0m})\,dx > \frac{p_0}{2\vartheta}\left(\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\,dx + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx\right) +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{H}_1(x, |\nabla u_{0m}|) + \mathcal{H}_2(x, |\nabla v_{0m}|) + \mathcal{G}_1(x, u_{0m}) + \mathcal{G}_2(x, v_{0m})\Big)\,dx. \tag{1.179}$$

Случай $\beta \leqslant 0$ получается из предыдущего случая, если во всех формулах положить $\beta = 0$. При этом имеет место следующая оценка:

$$\Phi_m(t) \geqslant \frac{1}{\left[\Phi_m^{1-\alpha}(0) - A_m t\right]^{1/(\alpha-1)}}, \tag{1.180}$$
$$A_m^2 = (\alpha-1)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi_m'(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi_m(0)\right] > 0.$$

Теперь осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (1.180). Таким образом, мы пришли к следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда при выполнении условий, что*

$$\vartheta \geqslant \vartheta_{11}, \quad \vartheta \geqslant \vartheta_{12}, \quad \vartheta \geqslant \vartheta_{21}, \quad \vartheta \geqslant \vartheta_{22}, \quad \vartheta > p_0, \quad p_0 = \max\{p_{1k_0}, p_{2k_0}\},$$

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0, v_0)\,dx > \frac{p_0}{2\vartheta}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\|v_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx\right) +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \Big(\mathcal{H}_1(x, |\nabla u_0|) + \mathcal{H}_2(x, |\nabla v_0|) + \mathcal{G}_1(x, u_0) + \mathcal{G}_2(x, v_0)\Big)\,dx$$

время $T_0 = T_0(u_0, v_0)$ *из теоремы* 1 *конечно и, следовательно, имеет место предельное свойство*

$$\lim_{t \uparrow T_0} [\|\nabla u\|_{r_1} + \|\nabla v\|_{r_2}] = +\infty,$$

причем

$$T_0 \leqslant \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1},$$

где

$$\Phi(0) = \frac{1}{2p_0}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_0 p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2p_0}\|v_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_0p_{2l}}\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx,$$

$$\Phi^{'}(0)=\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|v_0\|_2^2+$$
$$+\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|u_0|^{p_{2l}}\,dx,$$
$$A^2=(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2-\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right]>0,$$
$$\alpha=\frac{\vartheta}{p_0},\quad \beta=\begin{cases}\vartheta E(0), & \textit{при}\quad E(0)>0;\\ 0, & \textit{при}\quad E(0)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$E(0)\equiv\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\|v_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx+$$
$$+\int\limits_\Omega\Big(\mathcal{H}_1(x,|\nabla u_0|)+\mathcal{H}_2(x,|\nabla v_0|)+$$
$$+\mathcal{G}_1(x,u_0)+\mathcal{G}_2(x,v_0)\Big)\,dx-\int\limits_\Omega\mathcal{F}(x,u_0,v_0)\,dx.$$

§ 2. Разрушение решений одной системы уравнений с двойной нелинейностью и нелокальным источником

1. Введение.

В этом параграфе мы изучим вопрос о разрушении решения следующей начально–краевой задачи для системы уравнений с двойной нелинейностью и нелокальным источником:

$$\frac{\partial\varphi_1(x,u)}{\partial t}-\triangle u=u\int\limits_\Omega v^2\,dx, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\varphi_2(x,v)}{\partial t}-\triangle v=v\int\limits_\Omega u^2\,dx, \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(x,u)=u+\sum_{k=1}^{n_1}a_{1k}(x)|u|^{p_{1k}-2}u, \tag{2.3}$$

$$\varphi_2(x, v) = v + \sum_{k=1}^{n_2} a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}-2}v, \tag{2.4}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \tag{2.5}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$.

2. Постановка задачи.

Прежде всего введем условия на функции $\varphi_1(x, s)$ и $\varphi_2(x, s)$.

Условия на $\varphi_1(x, s)$.

(i)$_1$ $a_{1k}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_{1k}(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_1$ пусть

$$p_{1k_0} = \max_{k \in \overline{1, n_1}} p_{1k}, \quad p_{1k_0} < 2^*$$

и при этом $a_{1k_0}(x) \geqslant a_{10} > 0$;

(iii)$_1$ $p_{1k} > 2$ для всех $k = \overline{1, n_1}$;

Условия на $\varphi_2(x, s)$.

(i)$_2$ $a_{2k}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_{2k}(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_2$ пусть

$$p_{2k_0} = \max_{k \in \overline{1, n_2}} p_{2k}, \quad p_{2k_0} < 2^*$$

и при этом $a_{2k_0}(x) \geqslant a_{20} > 0$;

(iii)$_2$ $p_{2k} > 2$ для всех $k = \overline{1, n_2}$;

Дадим определение слабого обобщенного решения задачи, в классическом смысле имеющей вид (2.1)–(2.5).

Определение 2. *Слабым обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.5) *называются функции* $u(x)(t)$ *и* $v(x)(t)$ *такие, что*

$$u(x)(t), v(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1_0(\Omega)),$$
$$u'(x)(t), v'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)),$$

удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\left\langle\left\langle \frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi_1(x, u)w_1(x)\,dx + \int_\Omega (\nabla u, \nabla w_1)\,dx - {} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_\Omega v^2\,dx \int_\Omega u w_1\,dx,\ \psi_1(t)\right\rangle\right\rangle = 0, \tag{2.6}$$

$$\left\langle\left\langle \frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi_2(x, v)w_2(x)\,dx + \int_\Omega (\nabla v, \nabla w_2)\,dx - {} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_\Omega u^2\,dx \int_\Omega v w_2\,dx,\ \psi_2(t)\right\rangle\right\rangle = 0 \tag{2.7}$$

и начальным условиям

$$u_0(x) = u(x)(0) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega), \quad v_0(x) = v(x)(0) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \tag{2.8}$$

для любых $w_1(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $w_2(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $\psi_1(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ *и* $\psi_2(t) \in \mathcal{D}(0,T)$, *где* $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ *— это скобки двойственности между пространством основных функций* $\mathcal{D}(0,T)$ *и соответствующим пространством распределений* $\mathcal{D}'(0,T)$.

Замечание 2. Из определения 2 вытекает, что после возможного изменения на подмножестве множества $[0,T]$ слабое обобщенное решение принадлежит классу

$$u(x)(t), v(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{L}^2(\Omega))$$

и, значит, начальные (2.8) имеют смысл.

3. Локальная разрешимость.

Доказательство локальной разрешимости проведем в несколько шагов, воспользовавшись методом Галеркина в сочетании с методом компактности.

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Сначала выберем в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ базис $\{w_j\}$, который можно выбрать ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Введем следующие обозначения:

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} c_{1mj}(t) w_j(x), \quad v_m = \sum_{j=1}^{m} c_{2mj}(t) w_j(x),$$
$$c_{1mj}(t), c_{2mj}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_m]), \quad T_m > 0.$$

Рассмотрим следующую систему галеркинских приближений:

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_1(x,u_m)}{\partial t} w_j(x)\,dx + \int_\Omega (\nabla u_m, \nabla w_j)\,dx - \int_\Omega v_m^2\,dx \int_\Omega u_m w_j\,dx = 0, \tag{2.9}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_2(x,v_m)}{\partial t} w_j(x)\,dx + \int_\Omega (\nabla v_m, \nabla w_j)\,dx - \int_\Omega u_m^2\,dx \int_\Omega v_m w_j\,dx = 0, \tag{2.10}$$

которую дополним начальными условиями

$$u_{0m} = u_m(x)(0) = \sum_{k=1}^{m} c_{1mk}(0) w_k(x) \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}^1_0(\Omega), \tag{2.11}$$

$$v_{0m} = v_m(x)(0) = \sum_{k=1}^{m} c_{2mk}(0) w_k(x) \to v_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}^1_0(\Omega). \tag{2.12}$$

Шаг 2. Априорные оценки.

Для вывода априорных оценок умножим обе части равенства (2.9) на c_{1mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (2.10) на c_{2mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства и получим следующее уравнение:

$$\frac{d\Psi_m}{dt}+\|\nabla u_m\|_2^2+\|\nabla v_m\|_2^2=2\int\limits_{\Omega}u_m^2\,dx\int\limits_{\Omega}v_m^2\,dx, \tag{2.13}$$

где

$$\Psi_m(t)\equiv\frac{1}{2}\|u_m\|_2^2+\frac{1}{2}\|v_m\|_2^2+ \\ +\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_{\Omega}a_{1l}(x)|u_m|^{p_{1l}}\,dx+ \\ +\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_{\Omega}a_{2l}(x)|v_m|^{p_{2l}}\,dx. \tag{2.14}$$

Из равенства (2.13) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{p_{1k_0}-1}{p_{1k_0}}\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0}}+\frac{p_{2k_0}-1}{p_{2k_0}}\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0}}\leqslant \\ \leqslant\Psi_m(0)+c_1\int\limits_0^t\left[\|u_m\|_{p_{1k_0}}^4+\|v_m\|_{p_{2k_0}}^4\right]ds. \tag{2.15}$$

Введем следующее обозначение:

$$p_0=\max\{p_{1k_0},p_{2k_0}\}.$$

Надо рассмотреть два случая

$$4>p_0 \quad \text{и} \quad p_{1k_0},p_{2k_0}\geqslant 4.$$

В первом случае мы из неравенства (2.15) получим следующую априорную оценку

$$\|u_m\|_{p_{1k_0}}+\|v_m\|_{p_{2k_0}}\leqslant c_2(T)<+\infty \tag{2.16}$$

при достаточно малом $T>0$. А во–втором случае получим, что имеет место априорная оценка

$$\|u_m\|_{p_{1k_0}}+\|v_m\|_{p_{2k_0}}\leqslant c_3(T)<+\infty \tag{2.17}$$

при любом фиксированном $T>0$.

Приступим к выводу следующих априорных оценок. С этой целью умножим обе части равенства (2.9) умножим на c'_{1mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (2.10) на c'_{2mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства. В результате получим следующее равенство:

$$\|u_m'\|_2^2+\|v_m'\|_2^2+$$
$$+\sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int\limits_{\Omega}|u_m|^{p_{1l}-2}|u_m'|^2\,dx+\sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int\limits_{\Omega}|v_m|^{p_{2l}-2}|v_m'|^2\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u_m\|_2^2+\|\nabla v_m\|_2^2\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{\Omega}u_m^2\,dx\int\limits_{\Omega}v_m^2\,dx\right], \quad (2.18)$$

из которого интегрированием по времени мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_0^t\left[\|u_m'\|_2^2+\|v_m'\|_2^2\right]\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\|\nabla u_m\|_2^2+\|\nabla v_m\|_2^2\right]-E_m(0)\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u_m^2\,dx\int\limits_{\Omega}v_m^2\,dx, \quad (2.19)$$

где

$$E_m(0)=\frac{1}{2}\left[\|\nabla u_{0m}\|_2^2+\|\nabla v_{0m}\|_2^2\right]-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u_{0m}^2\,dx\int\limits_{\Omega}v_{0m}^2\,dx.$$

С учетом априорных оценок (2.16) и (2.17) из неравенства (2.19) с учетом начальных условий (2.11) и (2.12) получим следующие априорные оценки:

$$\int\limits_0^T\left[\|u_m'\|_2^2+\|v_m'\|_2^2\right]\,dt\leqslant c_4(T)<+\infty, \quad (2.20)$$

$$\|\nabla u_m\|_2^2+\|\nabla v_m\|_2^2\leqslant c_5(T)<+\infty, \quad (2.21)$$

причем при условии $4>p_0$ время $T>0$ достаточно мало, а при условии $p_{1k_0},p_{2k_0}\geqslant 4$ время $T>0$ произвольное фиксированное.

Шаг 3. Предельный переход.

Из полученных априорных оценок (2.16), (2.17), (2.20) и (2.21) вытекает, что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m\overset{*}{\rightharpoonup}u \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (2.22)$$
$$v_m\overset{*}{\rightharpoonup}v \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (2.23)$$
$$u_m'\rightharpoonup u' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (2.24)$$
$$v_m'\rightharpoonup v' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)). \quad (2.25)$$

Причем как и в предыдущем параграфе можно доказать, что

$$u_m\to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{1l_1}}(Q_T), \quad (2.26)$$
$$v_m\to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{2l_2}}(Q_T) \quad (2.27)$$

при $l_1=\overline{1,n_1}$ и $l_2=\overline{1,n_2}$.

Ясно, что в силу полученных априорных оценок последовательности $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничены в банаховом пространстве $\mathbb{H}^1(Q_T)$ при $Q_T = (0,T) \times \Omega$. В силу вполне непрерывного вложения

$$\mathbb{H}^1(Q_T) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^2(Q_T)$$

найдутся такие подпоследовательности $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T), \tag{2.28}$$

$$v_m \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T). \tag{2.29}$$

С учетом полученных предельных свойств (2.22)–(2.29) мы получим, что предельные функции $u(x)(t)$ и $v(x)(t)$ являются слабым обобщенным решением задачи (2.1)–(2.5).

Используя стандартный алгоритм продолжения решения во времени мы получим, что имеет место следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия на функции* $\varphi_1(x,s)$ *и* $\varphi_2(x,s)$. *Тогда для любых*

$$u_0(x), v_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$$

найдется такой момент времени $T_0 = T_0(u_0, v_0) > 0$, *что для всех* $T \in (0, T_0)$ *существует слабое обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.5) *в смысле определения 2, причем либо* $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \left[\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 \right] = +\infty,$$

причем при условии $p_{1k_0}, p_{2k_0} \geqslant 4$ *время* $T_0 = +\infty$.

4. Разрушение решений.

Приступим к выводу достаточных условий разрушения слабого обобщенного решения за конечное время. С этой целью как обычно воспользуемся галеркинскими приближениями (2.9) и (2.10).

Введем обозначения.

$$\begin{gathered}
\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|v_m\|_2^2\,ds + \\
+ \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m|^{p_{1l}}\,dx\,ds + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m|^{p_{2l}}\,dx\,ds + \\
+ \frac{1}{2p_0}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_0 p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\,dx + \\
+ \frac{1}{2p_0}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_0 p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx,
\end{gathered} \tag{2.30}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_m(t) \equiv \int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2(s)\,ds + \int\limits_0^t \|v_m'\|_2^2(s)\,ds + \\
&+ \sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m'|^2|u_m|^{p_{1l}-2}\,dx\,ds + \\
&+ \sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m'|^2|v_m|^{p_{2l}-2}\,dx\,ds + \\
&+ \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\,dx + \\
&+ \frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx. \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

В силу результата леммы 1 имеет место следующее неравенство:

$$
\left(\Phi_m'\right)^2 \leqslant p_0\Phi_m\mathrm{J}_m \quad \text{для всех} \quad t\in[0,T], \qquad (2.32)
$$

где

$$
p_0 = \max\{p_{1k_0}, p_{2k_0}\}.
$$

Умножим равенство (2.9) на c_{1mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (2.10) на c_{2mj} и тоже просуммируем по $j=\overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства. В результате с учетом введенных обозначений получим первое энергетическое равенство.

$$
\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \|\nabla u_m\|_2^2 + \|\nabla v_m\|_2^2 = 2\int\limits_\Omega u_m^2\,dx\int\limits_\Omega v_m^2\,dx. \qquad (2.33)
$$

Для вывода второго энергетического равенства умножим обе части равенства (2.9) на c_{1mj}' и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. затем умножим обе части равенства (2.10) на c_{2mj}' и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства и получим следующее равенство:

$$
\frac{d}{dt}\left[\mathrm{J}_m + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v_m\|_2^2\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int\limits_\Omega u_m^2\,dx\int\limits_\Omega v_m^2\,dx\right]. \qquad (2.34)
$$

Теперь проинтегрируем обе части этого равенства по времени и получим следующее равенство:

$$
\mathrm{J}_m + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v_m\|_2^2 - E_m(0) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_m^2\,dx\int\limits_\Omega v_m^2\,dx, \qquad (2.35)
$$

где

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v_{0m}\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u_{0m}^2\,dx \int_\Omega v_{0m}^2\,dx. \quad (2.36)$$

Из равенств (2.33) и (2.35) получим следующее равенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \|\nabla u_m\|_2^2 + \|\nabla v_m\|_2^2 =$$
$$= 4\mathrm{J}_m + 2\|\nabla u_m\|_2^2 + 2\|\nabla v_m\|_2^2 - 4E_m(0), \quad (2.37)$$

из которого сразу же получаем неравенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + 4E_m(0) \geqslant 4\mathrm{J}_m. \quad (2.38)$$

Из неравенств (2.32) и (2.38) получим искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi_m\Phi_m^{''} - \alpha(\Phi_m^{'})^2 + \beta\Phi_m \geqslant 0, \quad (2.39)$$

где

$$\alpha = \frac{4}{p_0}, \quad \beta = 4E_m(0).$$

Точно также как и в предыдущем параграфе приходим к следующему результату:

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3. *Тогда при выполнении условий, что*

$$4 > p_0, \quad p_0 = \max\{p_{1k_0}, p_{2k_0}\},$$

$$\int_\Omega u_0^2\,dx \int_\Omega v_0^2\,dx > \frac{p_0}{4}\Bigg(\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int_\Omega a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\|v_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int_\Omega a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx\Bigg) + \|\nabla u_0\|_2^2 + \|\nabla v_0\|_2^2$$

время $T_0 = T_0(u_0, v_0)$ *из теоремы* 3 *конечно и, следовательно, имеет место предельное свойство*

$$\lim_{t\uparrow T_0}\Big[\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2\Big] = +\infty,$$

причем

$$T_0 \leqslant \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где

$$\Phi(0) = \frac{1}{2p_0}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_0 p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx + \\ + \frac{1}{2p_0}\|v_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_0 p_{2l}} \int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx,$$

$$\Phi^{'}(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v_0\|_2^2 + \\ + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|u_0|^{p_{2l}}\,dx,$$

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right] > 0,$$

$$\alpha = \frac{4}{p_0}, \quad \beta = \begin{cases} 4E(0), & \textit{при} \quad E(0) > 0; \\ 0, & \textit{при} \quad E(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx + \\ + \frac{1}{2}\|v_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx + \\ + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_0^2\,dx \int\limits_{\Omega} v_0^2\,dx.$$

§ 3. Разрушение решений систем нелинейных параболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью

1. Ведение.

В этом параграфе мы рассмотрим следующую систему уравнений высокого порядка

$$\frac{\partial\varphi_1(x,u)}{\partial t} + \triangle h_{11}(x,\triangle u) - \\ - \operatorname{div}(h_{21}(x,|\nabla u|)\nabla u) = -\operatorname{div}\left(h\left(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\right)\nabla u\right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_2(x,v)}{\partial t} + \triangle h_{12}(x,\triangle v) -$$
$$- \operatorname{div}(h_{22}(x,|\nabla v|)\nabla v) = -\operatorname{div}\left(h\left(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\right)\nabla v\right), \quad (3.2)$$

$$\varphi_1(x,u) = u + \sum_{l=1}^{n_1} a_{1l}(x)|u|^{p_{1l}-2}u, \quad (3.3)$$

$$\varphi_2(x,v) = v + \sum_{l=1}^{n_2} a_{2l}(x)|v|^{p_{2l}-2}v, \quad (3.4)$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = v\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad (3.5)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in \in (0,1]$.

2. Постановка задачи.

Прежде всего введем условия на функции $\varphi_1(x,s)$, $\varphi_2(x,s)$, $h_{11}(x,s)$, $h_{12}(x,s)$, $h_{21}(x,s)$, $h_{22}(x,s)$ и $h(x,s)$.

Условия на $\varphi_1(x,s)$**.**

(i)$_1$ $a_{1k}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_{1k}(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_1$ пусть
$$p_{1k_0} = \max_{k\in\overline{1,n_1}} p_{1k}, \quad p_{1k_0} < q^*$$
и при этом $a_{1k_0}(x) \geqslant a_{10} > 0$;

(iii)$_1$ $p_{1k} > 2$ для всех $k = \overline{1,n_1}$;

Условия на $\varphi_2(x,s)$**.**

(i)$_2$ $a_{2k}(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_{2k}(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_2$ пусть
$$p_{2k_0} = \max_{k\in\overline{1,n_2}} p_{2k}, \quad p_{2k_0} < q^*$$
и при этом $a_{2k_0}(x) \geqslant a_{20} > 0$;

(iii)$_2$ $p_{2k} > 2$ для всех $k = \overline{1,n_2}$;

Условия на $h_{11}(x,s)$

(i)$_3$ $h_{11}(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_3$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_{11}(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и имеют место условия роста
$$|h_{11}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_{11}-1}, \quad |h'_{11s}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_{11}-2} \quad (3.6)$$
при $q_{11} \geqslant 2$;

(iii)$_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega)$ имеют место неравенства
$$a\int_\Omega |\triangle v|^{q_{11}}\,dx \leqslant \int_\Omega h_{11}(x,\triangle v(x))\triangle v(x)\,dx \leqslant \vartheta_{11}\int_\Omega \mathcal{H}_{11}(x,\triangle v(x))\,dx, \quad (3.7)$$

где $\vartheta_{11} > 0$, $a > 0$ и

$$\mathcal{H}_{11}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h_{11}(x,\sigma);$$

(iv)$_3$ для почти всех $x \in \Omega$ имеет место свойство монотонности, понимаемой в следующем смысле:

$$(h_{11}(x,s_1) - h_{11}(x,s_2))(s_1 - s_2) \geqslant 0 \;\forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{3.8}$$

Условия на $h_{12}(x,s)$

(i)$_4$ $h_{12}(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_4$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_{12}(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и имеют место условия роста

$$|h_{12}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_{12}-1}, \quad |h'_{12s}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_{12}-2} \tag{3.9}$$

при $q_{12} \geqslant 2$;

(iii)$_4$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)$ имеют место неравенства

$$a\int\limits_\Omega |\triangle v|^{q_{12}}\, dx \leqslant \int\limits_\Omega h_{12}(x,\triangle v(x))\triangle v(x)\, dx \leqslant \vartheta_{12}\int\limits_\Omega \mathcal{H}_{12}(x,\triangle v(x))\, dx, \tag{3.10}$$

где $\vartheta_{12} > 0$, $a > 0$ и

$$\mathcal{H}_{12}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h_{12}(x,\sigma);$$

(iv)$_4$ для почти всех $x \in \Omega$ имеет место свойство монотонности, понимаемой в следующем смысле:

$$(h_{12}(x,s_1) - h_{12}(x,s_2))(s_1 - s_2) \geqslant 0 \;\forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{3.11}$$

Условия на функцию $h_{21}(x,s)$

(i)$_5$ $h_{21}(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_5$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_{21}(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$ и имеют место следующие неравенства

$$0 \leqslant h_{21}(x,s) \leqslant c_3 + c_4 s^{q_{21}-2}, \quad |h'_{21s}(x,s)s| \leqslant c_3 + c_4 s^{q_{21}-2} \tag{3.12}$$

при $q_{21} \in [2, q^*_{11})$;

(iii)$_5$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{1,q_{21}}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$b\|v\|_{q_{21}}^{q_{21}} \leqslant \int\limits_\Omega h_{21}(x,|\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx \leqslant \vartheta_{21}\int\limits_\Omega dx\, \mathcal{H}_{21}(x,|\nabla v|) \tag{3.13}$$

при $\vartheta_{21} > 0$, $b > 0$, где

$$\mathcal{H}_{21}(x,s) = \int_0^s d\sigma\, h_{21}(x,\sigma)\sigma.$$

Условия на функцию $h_{22}(x,s)$

(i)$_6$ $h_{22}(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_6$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_{22}(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$ и имеют место следующие неравенства

$$0 \leqslant h_{22}(x,s) \leqslant c_3 + c_4 s^{q_{22}-2}, \quad |h'_{22s}(x,s)s| \leqslant c_3 + c_4 s^{q_{22}-2} \tag{3.14}$$

при $q_{22} \in [2, q^*_{12})$;

(iii)$_6$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,q_{22}}_0(\Omega)$ имеет место неравенство

$$b\|v\|^{q_{22}}_{q_{22}} \leqslant \int_\Omega h_{22}(x, |\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx \leqslant \vartheta_{22} \int_\Omega dx\, \mathcal{H}_{22}(x, |\nabla v|) \tag{3.15}$$

при $\vartheta_{22} > 0$, $b > 0$, где

$$\mathcal{H}_{22}(x,s) = \int_0^s d\sigma\, h_{22}(x,\sigma)\sigma.$$

Условия на функцию $h(x,s)$

(i)$_7$ $h(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_7$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$ и имеют место следующие неравенства

$$0 \leqslant h(x,s) \leqslant c_7 + c_8 s^{q-2}, \quad |h'_s(x,s)s| \leqslant c_7 + c_8 s^{q-2} \tag{3.16}$$

при $q \in (2, 2^*)$;

(iii)$_7$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,q}_0(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_\Omega h(x, |\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx \geqslant \vartheta \int_\Omega dx\, \mathcal{H}(x, |\nabla v|) \tag{3.17}$$

при $\vartheta > 0$, где

$$\mathcal{H}(x,s) = \int_0^s d\sigma\, h(x,\sigma)\sigma.$$

Здесь использовано следующее стандартное обозначение:

$$q^* = \begin{cases} Nq/(N-q), & \text{при } N > q; \\ +\infty, & \text{при } N \leqslant q. \end{cases}$$

Дадим определение слабого обобщенного решения задачи (3.1)–(3.5).

Определение 3. *Слабым обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.5) *назовем функции* $u(x)(t)$ *и* $v(x)(t)$ *такие, что*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega)), \quad v(x)(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)),$$
$$u(x)(t), v(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)),$$
$$\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)', \quad \left(|v|^{p_{2k}/2}\right)' \in \mathbb{L}^2(Q_T),$$

удовлетворяющие равенствам

$$\int\limits_0^T \left[\int\limits_\Omega \left[u' + \sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u|^{p_{1k}/2-2}u\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)'\right] w_1(x)\,dx + \right.$$
$$+\int\limits_\Omega h_{11}(x,\triangle u)\triangle w_1\,dx +$$
$$+\int\limits_\Omega h_{21}(x,|\nabla u|)(\nabla u,\nabla w_1)\,dx -$$
$$\left. -\int\limits_\Omega h(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)(\nabla u,\nabla w_1)\,dx\right]\psi_1(t)\,dt = 0, \quad (3.18)$$

$$\int\limits_0^T \left[\int\limits_\Omega \left[v' + \sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}/2-2}v\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)'\right] w_2(x)\,dx + \right.$$
$$+\int\limits_\Omega h_{12}(x,\triangle v)\triangle w_2\,dx +$$
$$+\int\limits_\Omega h_{22}(x,|\nabla v|)(\nabla v,\nabla w_2)\,dx -$$
$$\left. -\int\limits_\Omega h(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\,)(\nabla v,\nabla w_2)\,dx\right]\psi_2(t)\,dt = 0 \quad (3.19)$$

для всех $w_1 \in \mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega)$, $w_2 \in \mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)$, $\psi_1(t),\psi_2(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ *и начальным условиям*

$$u_0(x) = u(x)(0) \in \mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega), \quad v_0(x) = v(x)(0) \in \mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega).$$

Замечание 3. Из определения слабого обобщенного решения рассматриваемой задачи вытекает, что после возможного изменения на подмножестве из отрезка $[0,T]$ нулевой меры Лебега функции $u(x)(t)$ и $v(x)(t)$ принадлежат классу

$$u(x)(t), v(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Стало быть, начальные условия имеют смысл.

3. Локальная разрешимость.

Для доказательства слабой обобщенной разрешимости локально по времени мы воспользуемся методом галеркина в сочетании с методами компактности и монотонности [14]. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Прежде всего выберем галеркинский базис $\{w_{1j}\}$ в банаховом пространстве $\mathbb{W}^{2,q_{11}}_0(\Omega)$ и галеркинский базис $\{w_{2j}\}$ в банаховом пространстве $\mathbb{W}^{2,q_{12}}_0(\Omega)$. Оба галеркинских базисов, очевидно, можно выбрать ортонормированными в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Пусть

$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{1mk}(t) w_{1k}(x), \quad v_m(x)(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{2mk}(t) w_{2k}(x).$$

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений галеркинских приближений:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial \varphi_1(x,u_m)}{\partial t} w_{1j}(x)\,dx + \int_\Omega h_{11}(x, \triangle u_m)\triangle w_{1j}\,dx +{}\\ + \int_\Omega h_{21}(x, |\nabla u_m|)(\nabla u_m, \nabla w_{1j})\,dx -{}\\ - \int_\Omega h(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\,)(\nabla u_m, \nabla w_{1j})\,dx = 0,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial \varphi_2(x,v_m)}{\partial t} w_{2j}(x)\,dx + \int_\Omega h_{12}(x, \triangle v_m)\triangle w_{2j}\,dx +{}\\ + \int_\Omega h_{22}(x, |\nabla v_m|)(\nabla v_m, \nabla w_{2j})\,dx -{}\\ - \int_\Omega h(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\,)(\nabla v_m, \nabla w_{2j})\,dx = 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

при $j = \overline{1,m}$. Данную систему уравнений дополним начальными условиями

$$u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_{1mk}(0) w_{1k}(x) \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}^{2,q_{11}}_0(\Omega), \tag{3.22}$$

$$v_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_{2mk}(0) w_{2k}(x) \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega). \tag{3.23}$$

Шаг 2. Локальная разрешимость системы галеркинских приближений.

Перепишем систему уравнения Галеркинских приближений (3.20), (3.21) в следующем виде:

$$\mathrm{A}_1(c_{1m}) \frac{dc_{1m}}{dt} = f_{11}(c_{1m}) + f_{21}(c_{1m}) + f_{31}(c_{1m}, c_{2m}), \tag{3.24}$$

$$\mathrm{A}_2(c_{2m}) \frac{dc_{2m}}{dt} = f_{12}(c_{2m}) + f_{22}(c_{2m}) + f_{32}(c_{1m}, c_{2m}), \tag{3.25}$$

где

$$c_{1m} = (c_{1m1}, ..., c_{1mm})^t, \quad c_{2m} = (c_{2m1}, ..., c_{2mm})^t,$$

$$\mathrm{A}_1(c_{1m}) = \|a_{1kj}(c_{1m})\|_{k,j=1,1}^{m,m}, \quad \mathrm{A}_2(c_{2m}) = \|a_{2kj}(c_{2m})\|_{k,j=1,1}^{m,m}, \tag{3.26}$$

$$a_{1kj} = \delta_{kj} + \sum_{l=1}^{n_1} (p_{1l} - 1) \int_\Omega a_{1l}(x) |u_m|^{p_{1l}-2} w_{1k}(x) w_{1j}(x)\, dx, \tag{3.27}$$

$$a_{2kj} = \delta_{kj} + \sum_{l=1}^{n_2} (p_{2l} - 1) \int_\Omega a_{2l}(x) |v_m|^{p_{2l}-2} w_{2k}(x) w_{2j}(x)\, dx, \tag{3.28}$$

$$f_{11j} = -\int_\Omega h_{11}(x, \triangle u_m) \triangle w_{1j}, \quad f_{12j} = -\int_\Omega h_{12}(x, \triangle v_m) \triangle w_{2j},$$

$$f_{21j} = -\int_\Omega h_{21}(x, |\nabla u_m|) \left(\nabla u_m, \nabla w_{1j}\right)\, dx,$$

$$f_{22j} = -\int_\Omega h_{22}(x, |\nabla v_m|) \left(\nabla v_m, \nabla w_{2j}\right)\, dx,$$

$$f_{31j} = \int_\Omega h(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\,) \left(\nabla u_m, \nabla w_{1j}\right)\, dx,$$

$$f_{32j} = \int_\Omega h(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\,) \left(\nabla v_m, \nabla w_{2j}\right)\, dx.$$

Введем ряд обозначений, необходимых нам для дальнейшего.

$$u_m^1 = \sum_{k=1}^{m} c_{1mk}^1(t) w_{1k}(x), \quad u_m^2 = \sum_{k=1}^{m} c_{1mk}^2(t) w_{1k}(x),$$

$$v_m^1 = \sum_{k=1}^{m} c_{2mk}^1(t) w_{2k}(x), \quad v_m^2 = \sum_{k=1}^{m} c_{2mk}^2(t) w_{2k}(x),$$

$$c_{1m}^1 = (c_{1m1}^1, ..., c_{1mm}^1)^t, \quad c_{1m}^2 = (c_{1m1}^2, ..., c_{1mm}^2)^t,$$

$$c^1_{2m} = (c^1_{2m1}, ..., c^1_{2mm})^t, \quad c^2_{2m} = (c^2_{2m1}, ..., c^2_{2mm})^t.$$

Как и во втором параграфе первой главы можно доказать, что в силу введенных условий на функции имеют место ограниченная липшиц–непрерывность функций f_{11j}, f_{12j}, f_{21j} и f_{22j}. Поэтому осталось доказать ограниченную липшиц–непрерывность по совокупности переменных функций f_{31j} и f_{32j}. Рассмотрим, например, функцию f_{31j}.

Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}|f_{31j}(c^1_{1m}, c^1_{2m}) - f_{31j}(c^2_{1m}, c^2_{2m})| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\Omega |\nabla w_{1j}| \Big| h(x, \sqrt{|\nabla u^1_m|^2 + |\nabla v^1_m|^2}\,)\nabla u^1_m - \\ - h(x, \sqrt{|\nabla u^2_m|^2 + |\nabla v^2_m|^2}\,)\nabla u^2_m \Big|\, dx. \quad (3.29)\end{aligned}$$

Пусть

$$s_1 = \sqrt{|\nabla u^1_m|^2 + |\nabla v^1_m|^2}\,, \quad s_2 = \sqrt{|\nabla u^2_m|^2 + |\nabla v^2_m|^2}\,.$$

Потребуем сначала, чтобы $s_1 < s_2$, тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\Big| h(x,s_1)\nabla u^1_m - h(x,s_2)\nabla u^2_m \Big| \leqslant \\ \leqslant |h(x,s_1) - h(x,s_2)||\nabla u^1_m| + |h(x,s_2)||\nabla u^1_m - \nabla u^2_m| \leqslant \\ \leqslant |h'_s(x,s_3)||s_1 - s_2||\nabla u^1_m| + |h(x,s_2)||\nabla u^1_m - \nabla u^2_m|, \quad (3.30)\end{aligned}$$

где $s_3 \in [s_1, s_2]$. Продолжим цепочку неравенств (3.30).

$$\begin{aligned}\Big| h(x,s_1)\nabla u^1_m - h(x,s_2)\nabla u^2_m \Big| \leqslant \\ \leqslant |s_3 h'_s(x,s_3)||s_1 - s_2|s_3^{-1}|\nabla u^1_m| + |h(x,s_2)||\nabla u^1_m - \nabla u^2_m| \leqslant \\ \leqslant [c_1 + c_2 s_2^{p-2}]|s_1 - s_2|s_1^{-1}|\nabla u^1_m| + [c_1 + c_2 s_2^{p-2}]|\nabla u^1_m - \nabla u^2_m| \leqslant \\ \leqslant 2[c_1 + c_2 s_2^{p-2}]\Big[|\nabla u^1_m - \nabla u^2_m| + |\nabla v^1_m - \nabla v^2_m|\Big]. \quad (3.31)\end{aligned}$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $s_2 < s_1$. Итак, из (3.29) и (3.31) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}|f_{31j}(c^1_{1m}, c^1_{2m}) - f_{31j}(c^2_{1m}, c^2_{2m})| \leqslant \\ \leqslant 2\int\limits_\Omega |\nabla w_{1j}| \Big[c_1 + c_2 \times \\ \times \max\Big\{ \Big(|\nabla u^1_m|^2 + |\nabla v^1_m|^2\Big)^{(q-2)/2}, \Big(|\nabla u^2_m|^2 + |\nabla v^2_m|^2\Big)^{(q-2)/2} \Big\}\Big] \times\end{aligned}$$

$$
\times \left[|\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| + |\nabla v_m^1 - \nabla v_m^2|\right] dx \leqslant
$$

$$
\leqslant d_{mj}^1 \left[|c_{1m}^1 - c_{1m}^2| + |c_{2m}^1 - c_{2m}^2|\right], \quad (3.32)
$$

Итак, мы получили следующее неравенство:

$$
|f_{31j}(c_{1m}^1, c_{2m}^1) - f_{31j}(c_{1m}^2, c_{2m}^2)| \leqslant d_{mj}^1 \left[|c_{1m}^1 - c_{1m}^2| + |c_{2m}^1 - c_{2m}^2|\right]. \quad (3.33)
$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$
|f_{32j}(c_{1m}^1, c_{2m}^1) - f_{32j}(c_{1m}^2, c_{2m}^2)| \leqslant d_{mj}^2 \left[|c_{1m}^1 - c_{1m}^2| + |c_{2m}^1 - c_{2m}^2|\right]. \quad (3.34)
$$

Относительно матриц $\mathrm{A}_1(c_{1m})$ и $\mathrm{A}_2(c_{2m})$ можно в точности также как и во втором параграфе первой главы доказать их обратимость и непрерывность этих обратных матриц $\mathrm{A}_1^{-1}(c_{1m})$ и $\mathrm{A}_2^{-1}(c_{2m})$ относительно соответствующих столбцов. Итак, из теоремы Пеано вытекает существование решения системы уравнений (3.24) и (3.25) в классе

$$
c_{1mk}(t), c_{2mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]) \quad \text{при некотором} \quad T_m > 0.
$$

Шаг 3. Априорные оценки.

Для вывода априорных оценок сначала умножим равенство (3.20) на c_{1mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. Затем умножим равенство (3.21) на c_{2mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. После чего сложим получившиеся равенства. В результате получим следующее равенство:

$$
\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + \int\limits_\Omega h_{11}(x, \triangle u_m)\triangle u_m \, dx + \int\limits_\Omega h_{12}(x, \triangle v_m)\triangle v_m \, dx +
$$

$$
+ \int\limits_\Omega h_{21}(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2 \, dx + \int\limits_\Omega h_{22}(x, |\nabla v_m|)|\nabla v_m|^2 \, dx =
$$

$$
= \int\limits_\Omega h\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right)\left(|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2\right) dx, \quad (3.35)
$$

где

$$
\Psi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v_m\|_2^2 +
$$

$$
+ \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l} - 1}{p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m|^{p_{1l}} \, dx +
$$

$$
+ \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l} - 1}{p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m|^{p_{2l}} \, dx. \quad (3.36)
$$

Из равенства (3.35) с учетом условий на функции получим следующее неравенство:

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + a\|\triangle u_m\|_{q_{11}}^{q_{11}} + a\|\triangle v_m\|_{q_{12}}^{q_{12}} \leqslant$$
$$\leqslant c_7 \int\limits_\Omega \left(|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2\right) dx + c_8 \int\limits_\Omega \left(|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2\right)^{q/2} dx, \quad (3.37)$$

из которого в силу арифметического неравенства Гельдера получим

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + a\|\triangle u_m\|_{q_{11}}^{q_{11}} + a\|\triangle v_m\|_{q_{12}}^{q_{12}} \leqslant$$
$$\leqslant c_9 + c_{10} \int\limits_\Omega \left(|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2\right)^{q/2} dx. \quad (3.38)$$

Отсюда используя неравенство вида $(a+b)^q \leqslant c(q)(a^q + b^q)$ при $a, b \geqslant 0$ и $q > 2$, мы получим следующее неравенство:

$$\frac{d\Psi_m(t)}{dt} + a\|\triangle u_m\|_{q_{11}}^{q_{11}} + a\|\triangle v_m\|_{q_{12}}^{q_{12}} \leqslant$$
$$\leqslant c_9 + c_{11} \int\limits_\Omega |\nabla u_m|^q \, dx + c_{11} \int\limits_\Omega |\nabla v_m|^q \, dx. \quad (3.39)$$

Теперь мы воспользуемся интерполяционным неравенством (6.8) из Приложения. Действительно, имеет место первое интерполяционное неравенство

$$\|\nabla u_m\|_q^q \leqslant \varepsilon \|\triangle u_m\|_{q_{11}}^{q_{11}} + c(\varepsilon)\|u_m\|_{p_{1k_0}}^{p_{1k_0} r_{21}} \quad (3.40)$$

при условиях, что

$$4q_{11} + 2N > (2+N)q, \quad q \leqslant 2^*.$$

Аналогичным образом получается второе интерполяционное неравенство

$$\|\nabla v_m\|_q^q \leqslant \varepsilon \|\triangle v_m\|_{q_{12}}^{q_{12}} + c(\varepsilon)\|v_m\|_{p_{2k_0}}^{p_{2k_0} r_{22}} \quad (3.41)$$

при условиях, что

$$4q_{12} + 2N > (2+N)q, \quad q \leqslant 2^*.$$

Из неравенства (3.39) с учетом интерполяционных неравенств (3.40) и (3.41) стандартным образом как и во втором параграфе первой главы получим следующую априорную оценку:

$$\|u_m\|_{p_{1k_0}} + \|v_m\|_{p_{2k_0}} \leqslant c_{12}(T) < +\infty \quad (3.42)$$

при достаточно малом $T > 0$.

Теперь займемся выводом следующих априорных оценок. С этой целью умножим обе части равенства (3.20) на $c_{1mj}^{'}$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (3.21) на c'_{2mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. После чего сложим получившиеся равенства. В итоге получим следующее равенство:

$$\|u'_m\|_2^2+\|v'_m\|_2^2+ \\ +\sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int_\Omega |u_m|^{p_{1l}-2}|u'_m|^2\,dx+\sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int_\Omega |v_m|^{p_{2l}-2}|v'_m|^2\,dx+ \\ +\frac{d}{dt}\int_\Omega [\mathcal{H}_{11}(x,\triangle u_m)+\mathcal{H}_{12}(x,\triangle v_m)]\,dx+ \\ +\frac{d}{dt}\int_\Omega [\mathcal{H}_{12}(x,|\nabla u_m|)+\mathcal{H}_{22}(x,|\nabla v_m|)]\,dx= \\ =\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathcal{H}\left(x,\sqrt{|\nabla u_m|^2+|\nabla v_m|^2}\right)\,dx. \quad (3.43)$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по времени и после ряда очевидных упрощений получим следующее неравенство:

$$\int_0^t \left[\|u'_m\|_2^2+\|v'_m\|_2^2\right]\,ds+ \\ +\sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1)\int_0^t\int_\Omega |u_m|^{p_{1l}-2}|u'_m|^2\,dx\,ds+ \\ +\sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1)\int_0^t\int_\Omega |v_m|^{p_{2l}-2}|v'_m|^2\,dx\,ds+ \\ +\int_\Omega [\mathcal{H}_{11}(x,\triangle u_m)+\mathcal{H}_{12}(x,\triangle v_m)]\,dx+ \\ +\int_\Omega [\mathcal{H}_{12}(x,|\nabla u_m|)+\mathcal{H}_{22}(x,|\nabla v_m|)]\,dx\leqslant \\ \leqslant E_m(0)+\int_\Omega \mathcal{H}\left(x,\sqrt{|\nabla u_m|^2+|\nabla v_m|^2}\right)\,dx, \quad (3.44)$$

где

$$E_m(0)=\int_\Omega [\mathcal{H}_{11}(x,\triangle u_{0m})+\mathcal{H}_{12}(x,\triangle v_{0m})]\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left[\mathcal{H}_{12}(x,|\nabla u_{0m}|)+\mathcal{H}_{22}(x,|\nabla v_{0m}|)\right]\,dx-$$
$$-\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}\left(x,\sqrt{|\nabla u_{0m}|^2+|\nabla v_{0m}|^2}\right)\,dx.$$

В силу начальных условий (3.22) и (3.23), условий на функции, интерполяционных неравенств (3.40) и (3.41) мы получим из неравенства (3.44) еще три априорные оценки

$$\int\limits_0^T\left[\|u_m^{'}\|_2^2+\|v_m^{'}\|_2^2\right]\,dt\leqslant c_{13}(T)<+\infty, \tag{3.45}$$
$$\|\triangle u_m\|_{q_{11}}+\|\triangle v_m\|_{q_{12}}\leqslant c_{14}(T)<+\infty, \tag{3.46}$$
$$\|\nabla u_m\|_{q_{21}}+\|\nabla v_m\|_{q_{22}}\leqslant c_{15}(T)<+\infty, \tag{3.47}$$
$$\int\limits_0^T\left[\left(a_{1k}^{1/2}\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)^{'}\right)^2+\left(a_{2k}^{1/2}\left(|v_m|^{p_{2k}/2}\right)^{'}\right)^2\right]\,dt\leqslant c_{16}(T)<+\infty \tag{3.48}$$

при достаточно малом $T>0$.

Шаг 4. Предельный переход. Из априорных оценок (3.45) и (3.46) вытекает, что для некоторых подпоследовательностей $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$ имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m\overset{*}{\rightharpoonup}u\quad *-\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^{\infty}(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega)), \tag{3.49}$$
$$v_m\overset{*}{\rightharpoonup}v\quad *-\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^{\infty}(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)), \tag{3.50}$$
$$u_m^{'}\rightharpoonup u^{'}\quad\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \tag{3.51}$$
$$v_m^{'}\rightharpoonup v^{'}\quad\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \tag{3.52}$$
$$\mathbb{A}_1(u_m)\overset{*}{\rightharpoonup}\chi_1\quad *-\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^{\infty}(0,T;\mathbb{W}^{-2,q_{11}^{'}}(\Omega)), \tag{3.53}$$
$$\mathbb{A}_2(v_m)\overset{*}{\rightharpoonup}\chi_2\quad *-\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^{\infty}(0,T;\mathbb{W}^{-2,q_{12}^{'}}(\Omega)), \tag{3.54}$$
$$a_{1k}^{1/2}\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)^{'}\rightharpoonup\chi_{3k}\quad\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^2(Q_T), \tag{3.55}$$
$$a_{2k}^{1/2}\left(|v_m|^{p_{2k}/2}\right)^{'}\rightharpoonup\chi_{4k}\quad\text{слабо в}\quad\mathbb{L}^2(Q_T), \tag{3.56}$$

где

$$\mathbb{A}_1(z)=\triangle h_{11}(x,\triangle z),\quad\mathbb{A}_2(z)=\triangle h_{12}(x,\triangle z).$$

Рассмотрим следующие банаховы пространства:

$$\mathbb{W}_1\equiv\left\{w:\ w\in\mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega)),\quad w^{'}\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))\right\},$$
$$\mathbb{W}_2\equiv\left\{w:\ w\in\mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)),\quad w^{'}\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))\right\}$$

при произвольном $p>1$. В силу теоремы Обэна–Лионса [14] имеют место вполне непрерывные вложения

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{q_{21}}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q_{21}}(\Omega)), \quad \mathbb{W}_2 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{q_{22}}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q_{22}}(\Omega)), \tag{3.57}$$

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{q}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega)), \quad \mathbb{W}_2 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{q}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega)), \tag{3.58}$$

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{p_{1k_0}}(Q_T), \quad \mathbb{W}_2 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^{p_{2k_0}}(Q_T), \quad Q_T=(0,T)\times\Omega. \tag{3.59}$$

В силу полученных априорных оценок (3.45) и (3.46) имеют место равномерные по $m\in\mathbb{N}$ вложения

$$\{u_m\}\subset\mathbb{W}_1, \quad \{v_m\}\subset\mathbb{W}_2.$$

Поэтому из (3.57)–(3.59) вытекает существование таких подпоследовательностей $\{u_m\}$ и $\{v_m\}$, что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m\to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q_{21}}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q_{21}}(\Omega)), \tag{3.60}$$

$$v_m\to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q_{22}}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q_{22}}(\Omega)), \tag{3.61}$$

$$u_m\to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega)), \tag{3.62}$$

$$v_m\to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega)), \tag{3.63}$$

$$u_m\to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{1k_0}}(Q_T), \tag{3.64}$$

$$v_m\to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{2k_0}}(Q_T). \tag{3.65}$$

Кроме того, как и ранее доказывается, что имеют место следующие предельные свойства:

$$a_{1k}^{1/2}\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)' \rightharpoonup a_{1k}^{1/2}\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T), \tag{3.66}$$

$$a_{2k}^{1/2}\left(|v_m|^{p_{2k}/2}\right)' \rightharpoonup a_{2k}^{1/2}\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T). \tag{3.67}$$

Теперь мы перепишем галеркинские приближения (3.20) и (3.21) в следующем виде

$$\Biggl\langle u_m' + \sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u_m|^{p_{1k}/2-2}u_m\left(|u_m|^{p_{1k}/2}\right)' + \\ + \triangle h_{11}(x,\triangle u_m) - \operatorname{div}(h_{21}(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m) + \\ + \operatorname{div}\left(h\left(x,\sqrt{|\nabla u_m|^2+|\nabla v_m|^2}\right)\nabla u_m\right), w_{1j}\Biggr\rangle_1 = 0, \tag{3.68}$$

$$\Biggl\langle v_m' + \sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v_m|^{p_{2k}/2-2}v_m\left(|v_m|^{p_{2k}/2}\right)' + \\ + \triangle h_{12}(x,\triangle v_m) - \operatorname{div}(h_{22}(x,|\nabla v_m|)\nabla v_m) +$$

$$+ \operatorname{div}\left(h\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right)\nabla v_m\right), w_{2j}\Big\rangle_2 = 0, \quad (3.69)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ — это скобки двойственностей между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-2,q'_{11}}(\Omega)$, а также $\mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-2,q'_{12}}(\Omega)$, соответственно. Теперь умножим обе части равенства (3.68) на $\psi_1(t) \in \in \mathcal{D}(0,T)$, а равенство (3.69) на $\psi_2(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ и проинтегрируем по времени. После чего перейдем к пределу при $m \to +\infty$ и получим следующие равенства:

$$\int\limits_0^T \Big\langle u' + \sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u|^{p_{1k}/2-2}u\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)' +$$
$$+ \chi_1 - \operatorname{div}(h_{21}(x,|\nabla u|)\nabla u) +$$
$$+ \operatorname{div}\left(h\left(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\right)\nabla u\right), w_{1j}\Big\rangle_1 \psi_1(t)\,dt = 0, \quad (3.70)$$

$$\int\limits_0^T \Big\langle v' + \sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}/2-2}v\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)' +$$
$$+ \chi_2 - \operatorname{div}(h_{22}(x,|\nabla v|)\nabla v) +$$
$$+ \operatorname{div}\left(h\left(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\right)\nabla v\right), w_{2j}\Big\rangle_2 \psi_2(t)\,dt = 0. \quad (3.71)$$

Воспользовавшись основной леммой вариационного исчисления, мы получим следующие равенства:

$$\Big\langle u' + \sum_{k=1}^{n_1}(p_{1k}-1)\frac{2}{p_{1k}}a_{1k}(x)|u|^{p_{1k}/2-2}u\left(|u|^{p_{1k}/2}\right)' +$$
$$+ \chi_1 - \operatorname{div}(h_{21}(x,|\nabla u|)\nabla u) +$$
$$+ \operatorname{div}\left(h\left(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\right)\nabla u\right), w_1\Big\rangle_1 = 0, \quad (3.72)$$

$$\Big\langle v' + \sum_{k=1}^{n_2}(p_{2k}-1)\frac{2}{p_{2k}}a_{2k}(x)|v|^{p_{2k}/2-2}v\left(|v|^{p_{2k}/2}\right)' +$$
$$+ \chi_2 - \operatorname{div}(h_{22}(x,|\nabla v|)\nabla v) +$$
$$+ \operatorname{div}\left(h\left(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\right)\nabla v\right), w_2\Big\rangle_2 = 0 \quad (3.73)$$

для почти всех $t \in [0,T]$ и всех $w_1 \in \mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega)$ и всех $w_2 \in \mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)$.

Теперь наша задача доказать, что в предельных свойствах (3.53) и (3.54)

$$\chi_1 = \triangle h_{11}(x, \triangle u), \quad \chi_2 = \triangle h_{12}(x, \triangle v). \tag{3.74}$$

Для этого мы воспользуемся методом монотонности [14].

С этой целью возьмем в равенстве (3.72) $w_1 = u(x)(t)$, а в равенстве (3.73) $w_2 = v(x)(t)$. Тогда в силу результата параграфа 7 Приложения получим следующие равенства:

$$\int\limits_0^T dt\langle \chi_1, u\rangle_1\, dt = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega h_{21}(x, |\nabla u|)|\nabla u|^2\, dx\, dt + \\ + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega h\left(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\right)|\nabla u|^2\, dx\, dt + \Psi_1(0) - \Psi_1(T), \tag{3.75}$$

$$\int\limits_0^T dt\langle \chi_2, v\rangle_2\, dt = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega h_{22}(x, |\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx\, dt + \\ + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega h\left(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}\right)|\nabla v|^2\, dx\, dt + \Psi_2(0) - \Psi_2(T), \tag{3.76}$$

где

$$\Psi_1(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2(x)(t)\, dx + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u(x)(t)|^{p_{1l}}\, dx, \tag{3.77}$$

$$\Psi_2(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega v^2(x)(t)\, dx + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v(x)(t)|^{p_{2l}}\, dx. \tag{3.78}$$

Теперь мы рассмотрим следующие выражения:

$$\mathrm{X}_{1m} \equiv \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_1(u_m) - \mathbb{A}_1(z_1), u_m - z_1\rangle_1\,, \tag{3.79}$$

$$\mathrm{X}_{2m} \equiv \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_2(v_m) - \mathbb{A}_2(z_2), v_m - z_2\rangle_2\,. \tag{3.80}$$

В силу свойств (3.8) и (3.11) имеют место свойства

$$\mathrm{X}_{1m} \geqslant 0, \quad \mathrm{X}_{2m} \geqslant 0.$$

В силу этого имеет место следующие неравенства:

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_1(u_m), u_m \rangle_1 - \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_1(u_m), z_1 \rangle_1 - \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_1(z_1), u_m - z_1 \rangle_1 \,, \tag{3.81}$$

$$0 \leqslant \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_2(v_m), v_m \rangle_2 - \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_2(v_m), z_2 \rangle_2 - \int\limits_0^T dt\, \langle \mathbb{A}_2(z_2), v_m - z_2 \rangle_2 \,. \tag{3.82}$$

Теперь умножим обе части равенства (3.20) на c_{1mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. Затем умножим обе части равенства (3.21) на c_{2mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. После чего проинтегрируем обе части во времени. Тогда получим следующие равенства:

$$\int\limits_0^T dt \langle \mathbb{A}_1(u_m), u_m \rangle_1 \, dt = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega h_{21}(x, |\nabla u_m|) |\nabla u_m|^2 \, dx \, dt + \\ + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega h\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right) |\nabla u_m|^2 \, dx \, dt + \Psi_{1m}(0) - \Psi_{1m}(T), \tag{3.83}$$

$$\int\limits_0^T dt \langle \mathbb{A}_2(v_m), v_m \rangle_2 \, dt = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega h_{22}(x, |\nabla v_m|) |\nabla v_m|^2 \, dx \, dt + \\ + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega h\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right) |\nabla v_m|^2 \, dx \, dt + \Psi_{2m}(0) - \Psi_{2m}(T), \tag{3.84}$$

где

$$\Psi_{1m}(t) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_\Omega u_m^2(x)(t) \, dx + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l} - 1}{p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x) |u_m(x)(t)|^{p_{1l}} \, dx, \tag{3.85}$$

$$\Psi_{2m}(t) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_\Omega v_m^2(x)(t) \, dx + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l} - 1}{p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x) |v_m(x)(t)|^{p_{2l}} \, dx. \tag{3.86}$$

В силу предельных свойств (3.60)–(3.65) приходим к выводу о том, что имеют место следующие предельные свойства:

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\langle\mathbb{A}_1(u_m),u_m\rangle_1\,dt=-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega h_{21}(x,|\nabla u|)|\nabla u|^2\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega h\left(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\right)|\nabla u|^2\,dx\,dt+\Psi_1(0)-\Psi_1(T),\quad(3.87)$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\langle\mathbb{A}_2(v),v\rangle_2\,dt=-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega h_{22}(x,|\nabla v|)|\nabla v|^2\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega h\left(x,\sqrt{|\nabla u|^2+|\nabla v|^2}\right)|\nabla v|^2\,dx\,dt+\Psi_2(0)-\Psi_2(T).\quad(3.88)$$

Из сравнения (3.87) и (3.88) с (3.75) и (3.76) получим предельное равенство

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\langle\mathbb{A}_1(u_m),u_m\rangle_1\,dt=\int\limits_0^T dt\langle\chi_1,u\rangle_1\,dt,$$
$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\langle\mathbb{A}_2(v_m),v_m\rangle_2\,dt=\int\limits_0^T dt\langle\chi_2,v\rangle_2\,dt.$$

Теперь перейдем к пределу при $m\to+\infty$ в равенствах (3.81) и (3.82) и получим неравенства

$$\int\limits_0^T dt\,\langle\chi_1-\mathbb{A}_1(z_1),u-z_1\rangle_1\geqslant 0,\quad\int\limits_0^T dt\,\langle\chi_2-\mathbb{A}(z_2),v-z_2\rangle_2\geqslant 0.$$

Из этих неравенств стандартным образом доказываем, что

$$\chi_1=\triangle h_{11}(x,\triangle u),\quad\chi_2=\triangle h_{12}(x,\triangle v).$$

Используя стандартный алгоритм продолжения слабых решений во времени, получим следующий результат:

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены условия на функции и, кроме того, имеют место условия*

$$4q_{11}+2N>(2+N)q,\quad 4q_{12}+2N>(2+N)q.$$

Тогда для любых

$$u_0(x)\in\mathbb{W}_0^{2,q_{11}}(\Omega),v_0(x)\in\mathbb{W}_0^{2,q_{12}}(\Omega)$$

найдется такое $T_0 = T_0(u_0, v_0) > 0$, *что для каждого* $T \in (0, T_0)$ *существует слабое обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.5), *причем либо* $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0} [\|\triangle u\|_{q_{11}} + \|\triangle v\|_{q_{12}}] = +\infty.$$

4. Разрушение решений.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|v_m\|_2^2\, ds +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m|^{p_{1l}}\, dx\, ds + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m|^{p_{2l}}\, dx\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2p_0}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_0 p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\, dx +$$
$$+ \frac{1}{2p_0}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_0 p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\, dx, \quad (3.89)$$

$$\mathrm{J}_m(t) \equiv \int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2(s)\, ds + \int\limits_0^t \|v_m'\|_2^2(s)\, ds +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n_1}(p_{1l}-1) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_m'|^2 |u_m|^{p_{1l}-2}\, dx\, ds +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n_2}(p_{2l}-1) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_m'|^2 |v_m|^{p_{2l}-2}\, dx\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\, dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\, dx, \quad (3.90)$$

где

$$p_0 = \max\{p_{1k_0}, p_{2k_0}\}.$$

Справедлива следующая важная лемма, доказательство которой в точности повторяет доказательство леммы 1 первой главы.

Лемма 2. *Имеет место следующее дифференциальное неравенство*:

$$\left(\Phi_m'\right)^2 \leqslant p_0 \Phi_m \mathrm{J}_m \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,T], \tag{3.91}$$

где

$$p_0 = \max\{p_{1k_0}, p_{2k_0}\}.$$

Для вывода достаточных условий разрушения решений воспользуемся системой галеркинских приближений (3.20), (3.21). С этой целью сначала умножим равенство (3.20) на c_{1mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. После чего умножим равенство (3.21) на c_{2mj} и тоже просуммируем по $j = \overline{1,m}$. Получившиеся равенства сложим. В результате получим первое энергетическое равенство.

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \int\limits_\Omega h_{11}(x, \triangle u_m)\triangle u_m\,dx + \int\limits_\Omega h_{12}(x, \triangle v_m)\triangle v_m\,dx + \\ + \int\limits_\Omega h_{21}(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx + \int\limits_\Omega h_{22}(x, |\nabla v_m|)|\nabla v_m|^2\,dx = \\ = \int\limits_\Omega h\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right)\left(|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2\right)\,dx. \tag{3.92}$$

Для вывода второго энергетического равенства умножим обе части равенства (3.20) на c_{1mj}' и просуммируем по $j = \overline{1,m}$, затем умножим равенство (3.21) на c_{2mj}' и тоже просуммируем по $j = \overline{1,m}$ и сложим получившиеся равенства. Тогда получим второе энергетическое равенство.

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega [\mathcal{H}_{11}(x, \triangle u_m) + \mathcal{H}_{12}(x, \triangle v_m)]\,dx + \right. \\ \left. + \int\limits_\Omega [\mathcal{H}_{21}(x, |\nabla u_m|) + \mathcal{H}_{22}(x, |\nabla v_m|)]\,dx\right] = \\ = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{H}\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right)\,dx. \tag{3.93}$$

Теперь проинтегрируем по времени последнее равенство и получим следующее выражение:

$$\mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega [\mathcal{H}_{11}(x, \triangle u_m) + \mathcal{H}_{12}(x, \triangle v_m)]\,dx + \\ + \int\limits_\Omega [\mathcal{H}_{21}(x, |\nabla u_m|) + \mathcal{H}_{22}(x, |\nabla v_m|)]\,dx - E_m(0) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right) dx, \quad (3.94)$$

где

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l}-1}{p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\, dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{p_{2l}-1}{p_{2l}} \int\limits_{\Omega} a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} [\mathcal{H}_{11}(x, \triangle u_{0m}) + \mathcal{H}_{12}(x, \triangle v_{0m})]\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} [\mathcal{H}_{21}(x, |\nabla u_{0m}|) + \mathcal{H}_{22}(x, |\nabla v_{0m}|)]\, dx -$$
$$- \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}\left(x, \sqrt{|\nabla u_{0m}|^2 + |\nabla v_{0m}|^2}\right) dx. \quad (3.95)$$

Теперь воспользуемся неравенством (3.17) и получим из равенства (3.94) следующее неравенство:

$$\vartheta \mathrm{J}_m + \vartheta \int\limits_{\Omega} [\mathcal{H}_{11}(x, \triangle u_m) + \mathcal{H}_{12}(x, \triangle v_m)]\, dx +$$
$$+ \vartheta \int\limits_{\Omega} [\mathcal{H}_{21}(x, |\nabla u_m|) + \mathcal{H}_{22}(x, |\nabla v_m|)]\, dx - \vartheta E_m(0) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} h\left(x, \sqrt{|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2}\right)\left(|\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2\right) dx, \quad (3.96)$$

Теперь отсюда и из (3.92) получим следующее неравенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \int\limits_{\Omega} h_{11}(x, \triangle u_m)\triangle u_m\, dx + \int\limits_{\Omega} h_{12}(x, \triangle v_m)\triangle v_m\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} h_{21}(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\, dx + \int\limits_{\Omega} h_{22}(x, |\nabla v_m|)|\nabla v_m|^2\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \vartheta \mathrm{J}_m + \vartheta \int\limits_{\Omega} [\mathcal{H}_{11}(x, \triangle u_m) + \mathcal{H}_{12}(x, \triangle v_m)]\, dx +$$
$$+ \vartheta \int\limits_{\Omega} [\mathcal{H}_{21}(x, |\nabla u_m|) + \mathcal{H}_{22}(x, |\nabla v_m|)]\, dx - \vartheta E_m(0) \quad (3.97)$$

С учетом условий (3.7), (3.10), (3.13) и (3.15) мы из (3.97) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \vartheta E_m(0) \geqslant \vartheta \mathrm{J}_m + \\ + (\vartheta - \vartheta_{11}) \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}_{11}(x, \triangle u_m)\, dx + (\vartheta - \vartheta_{12}) \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}_{12}(x, \triangle v_m)\, dx + \\ + (\vartheta - \vartheta_{21}) \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}_{21}(x, |\nabla u_m|)\, dx + (\vartheta - \vartheta_{22}) \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}_{22}(x, |\nabla u_m|)\, dx. \quad (3.98)$$

Потребуем выполнения условий

$$\vartheta \geqslant \vartheta_{11}, \quad \vartheta \geqslant \vartheta_{12}, \quad \vartheta \geqslant \vartheta_{21}, \quad \vartheta \geqslant \vartheta_{22}.$$

Тогда из условий (3.7), (3.10), (3.13) и (3.15) получим из (3.98) следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \vartheta E_m(0) \geqslant \vartheta \mathrm{J}_m. \quad (3.99)$$

С учетом неравенства (3.91) мы приходим к искомому дифференциальному неравенству.

$$\Phi_m^{''}\Phi_m - \alpha(\Phi_m^{'})^2 + \beta\Phi_m \geqslant 0, \quad (3.100)$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta}{p_0}, \quad \beta = \vartheta E_m(0).$$

Предположим, что выполнено условие

$$\vartheta > p_0, \quad p_0 = \max\{p_{1k_0}, p_{2k_0}\}.$$

Ясно, что нужно рассмотреть два случая

$$\beta > 0, \quad \beta \leqslant 0.$$

Рассмотрим сначала более сложный случай $\beta > 0$. В силу результата теоремы 10 Приложения имеем, что при выполнении условий

$$\Phi_m^{'}(0) > \left(\frac{2\beta}{2\alpha - 1}\Phi_m(0)\right)^{1/2} > 0 \quad (3.101)$$

имеет место разрушение решения. Условие (3.101) примет следующий вид:

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{H}\left(x, \sqrt{|\nabla u_{0m}|^2 + |\nabla v_{0m}|^2}\right) dx > \\ > \frac{p_0}{2\vartheta}\left(\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n_1} \frac{p_{1l} - 1}{p_{1l}} \int\limits_{\Omega} a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\, dx + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx\Bigg)+$$
$$+\int\limits_\Omega\Big(\mathcal{H}_{11}(x,\triangle u_{0m})+\mathcal{H}_{12}(x,\triangle v_{0m})+$$
$$+\mathcal{H}_{21}(x,|\nabla u_{0m}|)+\mathcal{H}_{22}(x,|\nabla v_{0m}|)\Big)\,dx. \qquad (3.102)$$

Случай $\beta\leqslant 0$ получается из предыдущего случая, если во всех формулах положить $\beta=0$. При этом имеет место следующая оценка:

$$\Phi_m(t)\geqslant\frac{1}{\left[\Phi_m^{1-\alpha}(0)-A_mt\right]^{1/(\alpha-1)}}, \qquad (3.103)$$
$$A_m^2=(\alpha-1)^2\Phi_m^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi_m'(0)\right)^2-\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi_m(0)\right]>0.$$

Теперь осталось перейти к пределу при $m\to+\infty$ в неравенстве (3.103). Таким образом, мы пришли к следующей теореме:

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия теоремы* 5. *Тогда при выполнении условий, что*

$$\vartheta\geqslant\vartheta_{11},\quad \vartheta\geqslant\vartheta_{12},\quad \vartheta\geqslant\vartheta_{21},\quad \vartheta\geqslant\vartheta_{22},\quad \vartheta>p_0,\quad p_0=\max\{p_{1k_0},p_{2k_0}\},$$

$$\int\limits_\Omega\mathcal{H}\left(x,\sqrt{|\nabla u_{0m}|^2+|\nabla v_{0m}|^2}\right)\,dx>$$
$$>\frac{p_0}{2\vartheta}\Bigg(\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_\Omega a_{1l}(x)|u_{0m}|^{p_{1l}}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\|v_{0m}\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_\Omega a_{2l}(x)|v_{0m}|^{p_{2l}}\,dx\Bigg)+$$
$$+\int\limits_\Omega\Big(\mathcal{H}_{11}(x,\triangle u_{0m})+\mathcal{H}_{12}(x,\triangle v_{0m})+$$
$$+\mathcal{H}_{21}(x,|\nabla u_{0m}|)+\mathcal{H}_{22}(x,|\nabla v_{0m}|)\Big)\,dx.$$

время $T_0=T_0(u_0,v_0)$ *из теоремы* 5 *конечно и, следовательно, имеет место предельное свойство*

$$\lim_{t\uparrow T_0}\left[\|\triangle u\|_{q_{11}}+\|\triangle v\|_{q_{12}}\right]=+\infty,$$

причем

$$T_0\leqslant\Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где

$$\Phi(0)=\frac{1}{2p_0}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_0p_{1l}}\int\limits_{\Omega}a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx+ \\ +\frac{1}{2p_0}\|v_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_0p_{2l}}\int\limits_{\Omega}a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx,$$

$$\Phi^{'}(0)=\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|v_0\|_2^2+ \\ +\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_{\Omega}a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_{\Omega}a_{2l}(x)|u_0|^{p_{2l}}\,dx,$$

$$A^2=(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2-\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right]>0,$$

$$\alpha=\frac{\vartheta}{p_0},\quad \beta=\begin{cases}\vartheta E(0), & \textit{при}\quad E(0)>0;\\ 0, & \textit{при}\quad E(0)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$E(0)=\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_1}\frac{p_{1l}-1}{p_{1l}}\int\limits_{\Omega}a_{1l}(x)|u_0|^{p_{1l}}\,dx+ \\ +\frac{1}{2}\|v_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{p_{2l}-1}{p_{2l}}\int\limits_{\Omega}a_{2l}(x)|v_0|^{p_{2l}}\,dx+ \\ +\int\limits_{\Omega}[\mathcal{H}_{11}(x,\triangle u_0)+\mathcal{H}_{12}(x,\triangle v_0)]\,dx+ \\ +\int\limits_{\Omega}[\mathcal{H}_{21}(x,|\nabla u_0|)+\mathcal{H}_{22}(x,|\nabla v_0|)]\,dx- \\ -\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}\left(x,\sqrt{|\nabla u_0|^2+|\nabla v_0|^2}\right)\,dx.$$

Часть II

ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 3

ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

§ 1. Разрушение решений псевдопараболического уравнения с двойной нелинейностью

1. Введение.

В этом параграфе мы рассмотрим следующую начально–краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle u - \varphi(x,u)) + \operatorname{div}(h(x,|\nabla u|)\nabla u) - g(x,u) + f(x,u) = 0, \quad (1.1)$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)|u|^{p_k-2}u, \quad (1.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (1.3)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

2. Постановка задачи.

Прежде всего введем условия на функции $\varphi(x,s)$, $h(x,s)$, $g(x,s)$ и $f(x,s)$.

Условия на $\varphi(x,s)$.

$(\mathrm{i})_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$;

$(\mathrm{ii})_1$ пусть

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k, \quad p_{k_0} < p^*$$

и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant a_0 > 0$;

$(\mathrm{iii})_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Теперь сформулируем условия на $h(x,s)$.

Условия на функцию $h(x,s)$

$(\mathrm{i})_2$ $h(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

$(\mathrm{ii})_2$ имеет место неравенства для почти всех $x \in \Omega$:

$$c_2 s^{p-2} \leqslant h(x,s) \leqslant c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \quad (1.4)$$

кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ функция $h(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(0,+\infty)$, причем

$$|s h_s^{'}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2, \quad (1.5)$$

$(\mathrm{iii})_2$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$c_3\|\nabla v\|_p^p \leqslant \int\limits_{\Omega} h(x, |\nabla v(x)|)|\nabla v(x)|^2 \, dx \leqslant \vartheta_1 \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla v(x)|) \, dx \tag{1.6}$$

при $\vartheta_1 > 0$, где

$$\mathcal{H}(x, s) = \int\limits_0^s d\sigma \, h(x, \sigma)\sigma.$$

$(\mathrm{iv})_2$ функция $h(x, s)$ для почти всех $x \in \Omega$ является равномерно монотонной в следующем смысле:

$$(h(x, |\xi|)\xi - h(x, |\eta|)\eta, \xi - \eta) \geqslant a|\xi - \eta|^p \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{1.7}$$

Отметим, что в силу условия (1.4) имеем:

$$\mathrm{div}(h(x, |\nabla u|)\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

где оператор $\mathrm{div}(\cdot)$ понимается в слабом смысле. Именно, имеет место следующее равенство:

$$\langle \mathrm{div}(v), w \rangle_0 = -\int\limits_{\Omega} dx \, (v, \nabla w), \quad v \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p \geqslant 2$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Условия на функцию $g(x, s)$

$(\mathrm{i})_3$ $g(x, s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

$(\mathrm{ii})_3$ имеет место неравенство для почти всех $x \in \Omega$:

$$|g(x, s)| \leqslant c_4 + c_5|s|^{q_1+1} \quad \text{при} \quad q_1 \in [0, p^* - 2); \tag{1.8}$$

$(\mathrm{iii})_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ имеет место следующие неравенства:

$$a\|v\|_{q_1+2}^{q_1+2} \leqslant \int\limits_{\Omega} v(x)g(x, v(x)) \, dx \leqslant \vartheta_2 \int\limits_{\Omega} \mathcal{G}(x, v(x)) \, dx \tag{1.9}$$

где $\vartheta_2 > 0$ и

$$\mathcal{G}(x, s) = \int\limits_0^s g(x, \sigma) \, d\sigma;$$

$(\mathrm{iv})_3$ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_g(\cdot) = g(x, \cdot)$, порожденного функцией $g(x, u)$:

$$\|\mathcal{N}_g(u_1) - \mathcal{N}_g(u_2)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leqslant \mu_1(\mathrm{R}_1)\|u_1 - u_2\|_{q_1+2}, \tag{1.10}$$

где $\mu_1(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_1 = \max\left\{\|u_1\|_{q_1+2}, \|u_2\|_{q_1+2}\right\}.$$

Условия на функцию $f(x,s)$

$(\mathrm{i})_4$ $f(x,s):\Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

$(\mathrm{ii})_4$ имеет место неравенство сверху для почти всех $x\in\Omega$:

$$|f(x,s)| \leqslant c_6 + c_7|s|^{q_2+1} \quad \text{при} \quad q_2\in(0,p^*-2); \tag{1.11}$$

$(\mathrm{iii})_4$ для любых $v(x)\in\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega f(x,v(x))v(x) \geqslant \vartheta_3 \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x,v(x))\,dx \quad \text{при} \quad \vartheta_3>0, \tag{1.12}$$

где

$$\mathcal{F}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, f(x,\sigma);$$

$(\mathrm{iv})_4$ имеет место ограниченная липшиц–непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_f(\cdot)=f(x,\cdot)$, порожденного функцией $f(x,u)$:

$$\|\mathcal{N}_f(u_1)-\mathcal{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}_2)\|u_1-u_2\|_{q_2+2}, \tag{1.13}$$

где $\mu_2(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$\mathrm{R}_2 = \max\left\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\right\}.$$

Здесь мы использовали стандартное обозначение

$$p^* = \begin{cases} Np/(N-p), & \text{при } N>p;\\ +\infty, & \text{при } N\leqslant p,\end{cases}$$

причем, очевидно, что $p^*>2$ при $p\geqslant 2$.

Дадим определение слабого обобщенного решения.

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.3) *назовем функцию* $u(x)(t)$, *удовлетворяющую свойствам*

$$u(x)(t)\in\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)), \quad u'(x)(t)\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)),$$

$$\left(|u|^{p_k/2}\right)'\in\mathbb{L}^2(Q_T),$$

удовлетворяющую равенству

$$\int\limits_0^T\Bigl[\int\limits_\Omega\left(\nabla u',\nabla w\right)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left[u^{'}+\sum_{k=1}^{n}(p_k-1)\frac{2}{p_k}a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u\left(|u|^{p_k/2}\right)^{'}\right]w(x)\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}h(x,|\nabla u|)(\nabla u,\nabla w)\,dx+\int\limits_{\Omega}[g(x,u)-f(x,u)]\,w\,dx\Bigg]\psi(t)\,dt=0 \qquad (1.14)$$

для всех $w\in\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ *и всех* $\psi(t)\in\mathcal{D}(0,T)$, *причем выполнено начальное условие*

$$u(x)(0)=u_0(x)\in\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega).$$

Замечание 1. Из определения слабого обобщенного решения следует, что после возможного изменения на подмножестве множества $[0,T]$ нулевой меры Лебега слабое обобщенное решение принадлежит классу

$$u(x)(t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{H}^1_0(\Omega)).$$

3. Локальная разрешимость.

Доказательство локальной разрешимости в слабом обобщенном смысле мы проведем в несколько шагов, воспользовавшись методом Галеркина в сочетании с методами компактности и монотонности [14].

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Прежде всего выберем в сепарабельном банаховом пространстве $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ галеркинский базис $\{w_j\}$. Пусть

$$u_m(x)(t)=\sum_{k=1}^{m}c_{mk}(t)w_k(x),\quad c_{mk}(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T_m]),\quad T_m>0.$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int\limits_{\Omega}\left[(\nabla u_m^{'},\nabla w_j)+\varphi^{'}(x,u_m)w_j\right]\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}h(x,|\nabla u_m|)(\nabla u_m,\nabla w_j)\,dx+\int\limits_{\Omega}[g(x,u_m)-f(x,u_m)]\,w_j\,dx=0 \qquad (1.15)$$

при $j=\overline{1,m}$, которое дополним начальным условием

$$u_{0m}=u_m(x)(0)=\sum_{k=1}^{m}c_{mk}(0)w_k\to u_0\quad\text{сильно в}\quad\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega).$$

Шаг 2. Локальная разрешимость.

Перепишем систему уравнений (1.15) в следующем эквивалентном виде:

$$\mathrm{A}(c_m)\frac{dc_m}{dt}=f_1(c_m)+f_2(c_m)+f_3(c_m),\quad c_m=(c_{m1},...,c_{mm})^t, \qquad (1.16)$$

где
$$\mathrm{A}(c_m) = \|a_{kj}(c_m)\|^{m,m}_{k,j=1,1}, \tag{1.17}$$

$$a_{kj} = \int\limits_{\Omega} [(\nabla w_k, \nabla w_j) + w_k w_j]\, dx +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} (p_l - 1) \int\limits_{\Omega} a_l(x)|u_m|^{p_l-2} w_k(x) w_j(x)\, dx, \tag{1.18}$$

$$f_{1j}(c_m) = -\int\limits_{\Omega} (h(x, |\nabla u_m|)\nabla u_m, \nabla w_j)\, dx, \tag{1.19}$$

$$f_{2j}(c_m) = -\int\limits_{\Omega} g(x, u_m) w_j\, dx, \quad f_{3j}(c_m) = \int\limits_{\Omega} f(x, u_m) w_j\, dx. \tag{1.20}$$

Точно также как и в первом параграфе первой главы можно доказать, что матрица $\mathrm{A}(c_m)$ обратима и обратная матрица $\mathrm{A}^{-1}(c_m)$ непрерывна относительно столбца c_m. Наконец, в точности также доказывается ограниченная липшиц–непрерывность вектор–функций $f_1(c_m)$, $f_2(c_m)$ и $f_3(c_m)$. Поэтому в силу теоремы Пеано система уравнений (1.16) имеет решение класса

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]) \quad \text{при некотором} \quad T_m > 0.$$

Шаг 3. Априорные оценки.

Априорные оценки в данном случае выводятся в точности также как и в первом параграфе первой главы. При этом опять нужно рассмотреть следующие два случая:

$$p_{k_0} \geqslant q_2 + 2 \tag{1.21}$$

и
$$q_2 + 2 \in (p_{k_0}, p^*], \quad p > \frac{q_2 + 2}{N + p_{k_0}} N. \tag{1.22}$$

При этом получаются следующие априорные оценки:

$$\|\nabla u_m\|_p \leqslant c_8(T) < +\infty, \tag{1.23}$$

$$\int\limits_0^T \|\nabla u'_m\|_2^2\, dt \leqslant c_9(T) < +\infty, \tag{1.24}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \left(a_k^{1/2} \left(|u_m|^{p_k/2} \right)' \right)^2 dx\, dt \leqslant c_{10}(T) < +\infty, \tag{1.25}$$

причем в случае (1.21) величина $T > 0$ сколь угодно велика, а в случае (1.22) величина $T > 0$ достаточно мала.

Шаг 4. Предельный переход.

Точно также как и в первом параграфе первой главы устанавливается, что имеют место предельные свойства

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{\infty}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \tag{1.26}$$

$$u_m^{'} \rightharpoonup u^{'} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \tag{1.27}$$

$$|u_m|^{p_l-2}u_m \rightharpoonup |u|^{p_l-2}u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{p_l^{'}}(Q_T), \tag{1.28}$$

$$f(x,u_m) \rightharpoonup f(x,u) \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T), \tag{1.29}$$

$$g(x,u_m) \rightharpoonup g(x,u) \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(Q_T), \tag{1.30}$$

$$\mathbb{A}(u_m) \equiv -\operatorname{div}(h(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m) \rightharpoonup \chi \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^{p}(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \tag{1.31}$$

$$a_k^{1/2}\left(|u_m|^{p_k/2}\right)^{'} \rightharpoonup a_k^{1/2}\left(|u|^{p_k/2}\right)^{'} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T). \tag{1.32}$$

Далее можно точно также воспользоваться методом монотонности, воспользовавшись тем, что из априорной оценки (1.23) вытекает, что

$$u_m(T) \rightharpoonup u(T) \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{H}_0^1(\Omega) \tag{1.33}$$

и поэтому имеет место предельное свойство

$$\liminf_{m\to+\infty}\|\nabla u_m(T)\|_2^2 \geqslant \|\nabla u(T)\|_2^2.$$

И получить, что

$$\chi = -\operatorname{div}(h(x,|\nabla u|)\nabla u).$$

Наконец, из свойства (1.7) вытекает, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Откуда сразу же вытекает, что существует такая подпоследовательность $\{u_m\}$, что

$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{для почти всех} \quad t\in[0,T]. \tag{1.34}$$

Если теперь умножить равенство (1.15) на $\psi(t)\in\mathbb{L}^1(0,T)$, проинтегрировать получившееся равенство по времени и перейти к пределу при $m\to+\infty$ для итоговой на данный момент подпоследовательности $\{u_m\}$ мы получим, что предельная функция $u(x)(t)$ является слабым обобщенным решением нашей задачи. Используя стандартный алгоритм продолжения слабых решений во времени мы получим, что справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия на функции $\varphi(x,s)$, $h(x,s)$, $g(x,s)$ и $f(x,s)$. Тогда для любых $u_0(x)\in\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ при условиях*

$$q_2+2\in(p_{k_0},p^*), \quad p>\frac{q_2+2}{N+p_{k_0}}N$$

найдется такое $T_0 = T_0(u_0) > 0$, *что для всех* $T \in (0, T_0)$ *существует слабое обобщенное решение* $u(x)(t)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_p = +\infty.$$

В случае же

$$p_{k_0} \geqslant q_2 + 2$$

слабое обобщенное решение существует глобально во времени.

4. Разрушение за конечное время.

Введем обозначения.

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\nabla u_m\|_2^2\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\, ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\, dx\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2p_{k_0}}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2p_{k_0}}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_{k_0} p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\, dx, \quad (1.35)$$

$$\mathrm{J}_m(t) \equiv \int\limits_0^t \|\nabla u_m'\|_2^2(s)\, ds + \int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2(s)\, ds +$$
$$+ \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_l(x)|u_m'|^2 |u_m|^{p_l - 2}\, dx\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\, dx. \quad (1.36)$$

Справедлива следующая важная лемма:

Л е м м а 1. *Имеет место следующее дифференциальное неравенство*:

$$\left(\Phi_m'\right)^2 \leqslant p_{k_0} \Phi_m \mathrm{J}_m \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T], \quad (1.37)$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k.$$

Доказательство этой леммы почти дословно повторяет доказательство леммы 1 из первой главы первого параграфа.

Теперь мы займемся выводом энергетических равенств. Прежде всего умножим равенство (1.15) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и тогда получим с учетом обозначения (1.35) следующее равенство:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2} + \int\limits_\Omega h(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx + \\ + \int\limits_\Omega g(x, u_m)u_m\,dx = \int\limits_\Omega f(x, u_m)u_m\,dx. \quad (1.38)$$

Теперь умножим обе части равенства (1.15) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, n}$ и в результате получим следующее равенство:

$$\frac{d\mathrm{J}_m}{dt} + \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|)\,dx + \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_m)\,dx = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_m)\,dx. \quad (1.39)$$

Теперь проинтегрируем по времени равенство (1.39) и получим следующее равенство:

$$\mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_m)\,dx - E_m(0) = \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_m)\,dx, \quad (1.40)$$

где

$$E_m(0) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx + \\ + \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_{0m})\,dx - \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_{0m})\,dx. \quad (1.41)$$

Теперь воспользуемся неравенством (1.12) и получим из (1.40) неравенство

$$\vartheta_3\mathrm{J}_m + \vartheta_3\int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|)\,dx + \vartheta_3\int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_m)\,dx - \\ - \vartheta_3 E_m(0) \leqslant \int\limits_\Omega f(x, u_m)u_m\,dx, \quad (1.42)$$

Из неравенств (1.38) и (1.42) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2} + \int\limits_\Omega h(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx + \\ + \int\limits_\Omega g(x, u_m)u_m\,dx \geqslant \vartheta_3\mathrm{J}_m + \vartheta_3\int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|)\,dx + \vartheta_3\int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_m)\,dx - \\ - \vartheta_3 E_m(0). \quad (1.43)$$

Воспользуемся неравенствами (1.6) и (1.9) и получим оценку следующего вида:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2}+\vartheta_3 E_m(0)\geqslant(\vartheta_3-\vartheta_1)\int\limits_\Omega \mathcal{H}(x,|\nabla u_m|)\,dx+ \\ +(\vartheta_3-\vartheta_2)\int\limits_\Omega \mathcal{G}(x,u_m)\,dx+\vartheta_3 \mathrm{J}_m. \quad (1.44)$$

Потребуем теперь выполнения условий

$$\vartheta_3\geqslant\vartheta_1,\quad \vartheta_3\geqslant\vartheta_2$$

и тогда получим из неравенства (1.44) следующую оценку:

$$\frac{d^2\Phi_m(t)}{dt^2}+\vartheta_3 E_m(0)\geqslant\vartheta_3 \mathrm{J}_m. \quad (1.45)$$

Из неравенств (1.37) и (1.45) мы приходим к следующему искомому дифференциальному неравенству:

$$\Phi_m\Phi_m^{''}-\alpha(\Phi_m^{'})^2+\beta\Phi_m\geqslant 0, \quad (1.46)$$

где

$$\alpha=\frac{\vartheta_3}{p_{k_0}},\quad \beta=\vartheta_3 E_m(0). \quad (1.47)$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$\vartheta_3>p_{k_0},\quad p_{k_0}=\max_{l=\overline{1,n}} p_l. \quad (1.48)$$

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть следующие два случая:

$$\beta>0 \quad \text{и} \quad \beta\leqslant 0.$$

Рассмотрим сначала первый более сложный случай. Воспользуемся результатом теоремы 10 параграфа 4 Приложения и получим, что при выполнении условия

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2+ \\ +\sum_{l=1}^n\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx>\frac{2\vartheta_3}{2\vartheta_3-p_{k_0}}E_m(0)>0 \quad (1.49)$$

имеет место неравенство

$$\Phi_m(t)\geqslant\frac{1}{\left[\Phi_m^{1-\alpha}(0)-A_m t\right]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (1.50)$$

где

$$A_m^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi_m'(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi_m(0) \right] > 0. \tag{1.51}$$

Условие (1.49) можно переписать в следующем виде

$$\int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_{0m})\, dx > \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|)\, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_{0m})\, dx + \\ + \frac{p_{k_0}}{2\vartheta_3} \biggl(\frac{1}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \\ + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x) |u_{0m}|^{p_l}\, dx \biggr), \quad p_{k_0} < \vartheta_3, \tag{1.52}$$

которое нужно дополнить рассматриваемым условием $\beta > 0$, т. е. следующим условием:

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x) |u_{0m}|^{p_l}\, dx + \\ + \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|)\, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_{0m})\, dx > \int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_{0m})\, dx. \tag{1.53}$$

Теперь мы рассмотрим более простой случай, когда $\beta \leqslant 0$, т. е. условие

$$\int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, u_{0m})\, dx \geqslant \frac{1}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x) |u_{0m}|^{p_l}\, dx + \\ + \int\limits_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|)\, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{G}(x, u_{0m})\, dx. \tag{1.54}$$

Тогда имеет место неравенство (1.50), в котором нужно положить $\beta = 0$.

Теперь наша задача перейти к пределу при $m \to +\infty$ для некоторой итоговой подпоследовательности $\{u_m\}$. С этой целью заметим, что имеет место предельное свойство (1.34) и априорная оценка (1.23). Следовательно,

$$\Phi_m(t) \to \Phi(t) \quad \text{при} \quad m \to +\infty \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T], \tag{1.55}$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_0^t \|\nabla u\|_2^2\, ds + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \|u\|_2^2\, ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a_l(x) |u|^{p_l}\, dx\, ds +$$

$$+\frac{1}{2p_{k_0}}\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{1}{2p_{k_0}}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx. \quad (1.56)$$

Переходя к пределу при $m\to+\infty$ в неравенстве (1.50), получим, что

$$\Phi(t)\geqslant\frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0)-At\right]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (1.57)$$

где

$$A^2=(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2-\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right]>0. \quad (1.58)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:
Теорема 2. *Пусть выполнены все условия на функции* $\varphi(x,s)$, $h(x,s)$, $g(x,s)$ *и* $f(x,s)$. *Пусть, кроме того, выполнена первая группа условий из теоремы* 1, *тогда при условии*

$$\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_0)\,dx>\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_0|)\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_0)\,dx+$$
$$+\frac{p_{k_0}}{2\vartheta_3}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right), \quad (1.59)$$

$$p_{k_0}<\vartheta_3,\quad \vartheta_3\geqslant\vartheta_1,\quad \vartheta_3\geqslant\vartheta_2 \quad (1.60)$$

слабое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) *не существует глобально во времени и имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0}\|\nabla u\|_p=+\infty$$

и имеет место оценка сверху

$$T_0\leqslant T_\infty=\Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

где постоянная $A>0$ *определена формулой* (1.58),

$$\beta=\begin{cases}\vartheta_3E(0), & \textit{при}\quad E(0)>0;\\ 0, & \textit{при}\quad E(0)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$E(0)\equiv\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2+\sum_{l=1}^{n}\frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_{\Omega}a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\mathcal{H}(x,|\nabla u_0|)\,dx+\int\limits_{\Omega}\mathcal{G}(x,u_0)\,dx-\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_0)\,dx.$$

§ 2. Разрушение решений псевдопараболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью

1. Введение.

В этом параграфе мы рассмотрим следующую начально–краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle u - \varphi(x,u)\right) - \triangle h_1(x, \triangle u) + \\ + \operatorname{div}(h_2(x, |\nabla u|)\nabla u) = \operatorname{div}(h_3(x, |\nabla u|)\nabla u), \quad (2.1)$$

$$\varphi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)|u|^{p_k-2}u, \quad (2.2)$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (2.3)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

2. Постановка задачи.

Прежде всего сформулируем условия на функции $\varphi(x,s)$, $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ и $h_3(x,s)$.

Условия на $\varphi(x,u)$.

(i)$_1$ $a_k(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)$_1$ пусть

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1,n}} p_k, \quad p_{k_0} < q_3^*$$

и при этом $a_{k_0}(x) \geqslant \underline{a_0} > 0$;

(iii)$_1$ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1,n}$;

Условия на $h_1(x,s)$

(i)$_2$ $h_1(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_2$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_1(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$ и имеют место условия роста

$$|h_1(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_1-1}, \quad |h_{1s}^{'}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{q_1-2} \quad (2.4)$$

при $q_1 \geqslant 2$;

(iii)$_2$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)$ имеют место неравенства

$$a\int_\Omega |\triangle v|^{q_1}\,dx \leqslant \int_\Omega h_1(x, \triangle v(x))\triangle v(x)\,dx \leqslant \vartheta_1 \int_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle v(x))\,dx, \quad (2.5)$$

где $\vartheta_1 > 0$, $a > 0$ и

$$\mathcal{H}_1(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h_1(x,\sigma);$$

(iv)$_2$ для почти всех $x \in \Omega$ имеет место свойство монотонности, понимаемой в следующем смысле:

$$(h_1(x,s_1) - h_1(x,s_2))(s_1 - s_2) \geqslant 0 \ \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{2.6}$$

Условия на функцию $h_2(x,s)$

(i)$_3$ $h_2(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_3$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_2(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$ и имеют место следующие неравенства

$$0 \leqslant h_2(x,s) \leqslant c_3 + c_4 s^{q_2-2}, \quad |h'_{2s}(x,s)s| \leqslant c_3 + c_4 s^{q_2-2} \tag{2.7}$$

при $q_2 \in [2, 2^*)$;

(iii)$_3$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,q_2}_0(\Omega)$ имеет место неравенство

$$b\|v\|^{q_2}_{q_2} \leqslant \int\limits_\Omega h_2(x,|\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx \leqslant \vartheta_2 \int\limits_\Omega dx\, \mathcal{H}_2(x,|\nabla v|) \tag{2.8}$$

при $\vartheta_2 > 0$, $b > 0$, где

$$\mathcal{H}_2(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h_2(x,\sigma)\sigma.$$

Условия на функцию $h_3(x,s)$

(i)$_4$ $h_3(x,s) : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ является каратеодориевой функцией;

(ii)$_4$ для почти всех $x \in \Omega$ функция $h_3(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$ и имеют место следующие неравенства

$$0 \leqslant h_3(x,s) \leqslant c_5 + c_6 s^{q_3-2}, \quad |h'_{3s}(x,s)s| \leqslant c_5 + c_6 s^{q_3-2} \tag{2.9}$$

при $q_3 \in (2, q_1^*)$;

(iii)$_4$ для любых $v(x) \in \mathbb{W}^{1,q_3}_0(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega h_3(x,|\nabla v|)|\nabla v|^2\, dx \geqslant \vartheta_3 \int\limits_\Omega dx\, \mathcal{H}_3(x,|\nabla v|) \tag{2.10}$$

при $\vartheta_3 > 0$, где

$$\mathcal{H}_3(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, h_3(x,\sigma)\sigma.$$

Здесь использовано следующее стандартное обозначение:

$$q^* = \begin{cases} Nq/(N-q), & \text{при } N > q; \\ +\infty, & \text{при } N \leqslant q. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что в силу условий на функции $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ и $h_3(x,s)$ имеют место следующие свойства:

$$\triangle h_1(x, \triangle v) : \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-2,q_1'}(\Omega), \quad q_1' = q_1/(q_1-1),$$
$$\operatorname{div}(h_2(x, |\nabla v|)\nabla v) : \mathbb{W}_0^{1,q_2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q_2'}(\Omega), \quad q_2' = q_2/(q_2-1),$$
$$\operatorname{div}(h_3(x, |\nabla v|)\nabla v) : \mathbb{W}_0^{1,q_3}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,q_3'}(\Omega), \quad q_3' = q_3/(q_3-1)$$

и эти операторы непрерывны в соответствующих сильных топологиях.

Дадим определение слабого обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3).

Определение 2. *Слабым обобщенным решением задачи* (2.1)–(2.3) *назовем функцию*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T; \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0,T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\left(|u|^{p_k/2}\right)' \in \mathbb{L}^2(Q_T),$$

удовлетворяющую равенству

$$\int_0^T \Biggl[\int_\Omega \left(\nabla u', \nabla w\right) dx + \\ + \int_\Omega \left[u' + \sum_{k=1}^n (p_k - 1)\frac{2}{p_k} a_k(x)|u|^{p_k/2-2}u \left(|u|^{p_k/2}\right)' \right] w(x)\, dx + \\ + \int_\Omega h_1(x, \triangle u)\triangle w(x)\, dx + \\ + \int_\Omega h_2(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w)\, dx - \int_\Omega h_3(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w)\, dx \Biggr] \psi(t)\, dt = 0, \tag{2.11}$$

для всех $\psi(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ *и всех* $w(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)$,

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega). \tag{2.12}$$

Замечание 2. Из определения 2 вытекает, что после возможного изменения на подмножестве множества $[0,T]$ нулевой меры Лебега слабое обобщенное решение принадлежит классу

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

3. Локальная разрешимость.

Для доказательства локальной во времени разрешимости воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами компактности и монотонности [14]. При этом доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Постановка галеркинских приближений.

Выберем в банаховом, сепарабельном пространстве $\mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)$ галеркинский базис $\{w_j\}$. Пусть

$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]), \quad T_m > 0.$$

Введем в рассмотрение галеркинские приближения.

$$\int_\Omega \left[(\nabla u_m^{'}, \nabla w_j) + \varphi^{'}(x, u_m) w_j(x) \right] \, dx + \int_\Omega h_1(x, \triangle u_m) \triangle w_j(x) \, dx +$$
$$+ \int_\Omega h_2(x, |\nabla u_m|) \left(\nabla u_m, \nabla w_j(x) \right) \, dx -$$
$$- \int_\Omega h_3(x, |\nabla u_m|) \left(\nabla u_m, \nabla w_j(x) \right) \, dx = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.13)$$

где

$$\varphi(x, u_m) = u_m + \sum_{l=1}^{n} a_l(x) |u_m|^{p_l - 2} u_m.$$

Кроме того, добавим начальные условия

$$u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k(x) \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega). \quad (2.14)$$

Шаг 2. Локальная разрешимость.

Перепишем систему уравнения Галеркинских приближений (2.13) в следующем виде:

$$\mathrm{A}(c_m) \frac{dc_m}{dt} = f_1(c_m) + f_2(c_m) + f_3(c_m), \quad c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm})^t, \quad (2.15)$$

где

$$\mathrm{A}(c_m) = \| a_{kj}(c_m) \|_{k,j=1,1}^{m,m}, \quad (2.16)$$

$$a_{kj} = \int_\Omega \left[(\nabla w_k, \nabla w_j) + w_k w_j \right] \, dx +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} (p_l - 1) \int_\Omega a_l(x) |u_m|^{p_l - 2} w_k(x) w_j(x) \, dx, \quad (2.17)$$

$$f_{1j} = -\int\limits_{\Omega} h_1(x, \triangle u_m)\triangle w_j,$$

$$f_{2j} = -\int\limits_{\Omega} h_2(x, |\nabla u_m|)\,(\nabla u_m, \nabla w_j)\;dx,$$

$$f_{3j} = \int\limits_{\Omega} h_3(x, |\nabla u_m|)\,(\nabla u_m, \nabla w_j)\;dx.$$

Как и во втором параграфе первой главы можно доказать ограниченную липшиц–непрерывность вектор–функций $f_1(c_m)$, $f_2(c_m)$ и $f_3(c_m)$, а также обратимость матрицы $\mathrm{A}(c_m)$ и непрерывность относительно столбца c_m обратной матрицы $\mathrm{A}^{-1}(c_m)$. Значит, в силу теоремы Пеано имеет место локальная разрешимость в классе

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]) \quad \text{при некотором} \quad T_m > 0.$$

Шаг 3. Априорные оценки.

Априорные оценки выводятся точно также как и во втором параграфе первой главы. При этом при выполнении условий

$$4q_1 + 2N > (2+N)q_3, \quad q_3 \leqslant 2^*$$

имеют место следующие априорные оценки:

$$\|\triangle u_m\|_{q_1} \leqslant c_7(T) < +\infty, \tag{2.18}$$

$$\int\limits_0^T \|\nabla u_m\|_2^2\,dt \leqslant c_8(T) < +\infty, \tag{2.19}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \left(a_k^{1/2}\left(|u_m|^{p_k/2}\right)'\right)^2 dx\,dt \leqslant c_9(T) < +\infty, \tag{2.20}$$

где время $T > 0$ достаточно мало.

Шаг 4. Предельный переход.

Из априорных оценок (2.18) и (2.19) приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$, что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)), \tag{2.21}$$

$$u_m' \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)). \tag{2.22}$$

$$\mathbb{A}(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-2,q_1'}(\Omega)), \tag{2.23}$$

$$a_k^{1/2}\left(|u_m|^{p_k/2}\right)' \rightharpoonup a_k^{1/2}\left(|u|^{p_k/2}\right)' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(Q_T), \tag{2.24}$$

$$\mathbb{A}(v) \equiv \triangle h_1(x, \triangle v).$$

Далее используя теорему Обэна–Лионса [14] можно доказать, что для почти всех $t \in [0,T]$

$$h_2(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m \to h_2(x,|\nabla u|)\nabla u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q_2'}(\Omega)\times\cdots\times\mathbb{L}^{q_2'}(\Omega), \tag{2.25}$$

$$h_3(x,|\nabla u_m|)\nabla u_m \to h_3(x,|\nabla u|)\nabla u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{q_3'}(\Omega)\times\cdots\times\mathbb{L}^{q_3'}(\Omega), \tag{2.26}$$

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^{p_{k_0}}(Q_T), \quad Q_T=(0,T)\times\Omega. \tag{2.27}$$

А используя метод монотонности можно доказать, что имеет место равенство

$$\chi = \triangle h_1(x,\triangle u). \tag{2.28}$$

Теперь нужно умножить обе части равенства (2.13) на $\psi(t)\in\mathbb{L}^1(0,T)$, проинтегрировать по времени и перейти к пределу при $m\to+\infty$ для итоговой на данный момент подпоследовательности $\{u_m\}$ и получить, что предельная функция $u(x)(t)$ является слабым обобщенным решением рассматриваемой задачи. Далее используя стандартный алгоритм продолжения слабых решений во времени мы получим, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия на функции $\varphi(x,s)$, $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ и $h_3(x,s)$ и, кроме того, при выполнении условий*

$$4q_1+2N>(2+N)q_3,$$

для любого

$$u_0(x)\in\mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)$$

существует слабое обобщенное решение $u(x)(t)$, для которого

$$u(x)(t)\in\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega)), \quad u'(x)(t)\in\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$\left(|u|^{p_k/2}\right)'\in\mathbb{L}^2(Q_T),$$

причем $T\in(0,T_0)$ и $T_0=+\infty$ либо $T_0<+\infty$ и в последнем случае имеем

$$\limsup_{t\uparrow T_0}\|\triangle u\|_{q_1}=+\infty.$$

4. Разрушение решения.

Воспользоваться сразу построенным решением для вывода достаточных условий разрушения решений нельзя, поскольку для их вывода требуется большая гладкость. Однако, галеркинские приближения нужными свойствами гладкости обладают:

$$u_m(x)(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\nabla u_m\|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_m\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m|^{p_l}\,dx\,ds+$$
$$+\frac{1}{2p_{k_0}}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2p_{k_0}}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx, \quad (2.29)$$

$$\mathrm{J}_m(t) \equiv \int\limits_0^t \|\nabla u_m'\|_2^2(s)\,ds + \int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2(s)\,ds+$$
$$+\sum_{l=1}^n (p_l-1)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u_m'|^2|u_m|^{p_l-2}\,dx\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\,dx. \quad (2.30)$$

В силу утверждения леммы 1, доказанной в предыдущем параграфе имеет место следующее неравенство:

$$\left(\Phi_m'\right)^2 \leqslant p_{k_0}\Phi_m \mathrm{J}_m \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \quad (2.31)$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k\in\overline{1,n}} p_k.$$

Для вывода первого энергетического равенства умножим обе части равенства (2.13) на c_{mj} и просуммируем по $j=\overline{1,m}$ и получим равенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \int\limits_\Omega h_1(x,\triangle u_m)\triangle u_m\,dx + \int\limits_\Omega h_2(x,|\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx =$$
$$= \int\limits_\Omega h_3(x,|\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\,dx. \quad (2.32)$$

Теперь умножим обе части равенства (2.13) на c_{mj}' и просуммируем по $j=\overline{1,m}$ и получим второе энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x,\triangle u_m)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x,|\nabla u_m|)\,dx\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x,|\nabla u_m|)\,dx. \quad (2.33)$$

Проинтегрировав последнее равенство по времени мы получим следующее равенство:

$$\mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m)\, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|)\, dx - E_m(0) = \\ = \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_m|)\, dx, \quad (2.34)$$

где

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int\limits_\Omega a_l(x)|u_{0m}|^{p_l}\, dx + \\ + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_{0m})\, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_{0m}|)\, dx - \\ - \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_{0m}|)\, dx. \quad (2.35)$$

Теперь мы воспользуемся свойством (2.10) и получим из равенства (2.34) неравенство

$$\vartheta_3 \mathrm{J}_m + \vartheta_3 \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m)\, dx + \vartheta_3 \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|)\, dx - \\ - \vartheta_3 E_m(0) \leqslant \int\limits_\Omega h_3(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\, dx. \quad (2.36)$$

Из этого неравенства и равенства (2.32) получим следующее неравенство:

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \int\limits_\Omega h_1(x, \triangle u_m)\triangle u_m\, dx + \int\limits_\Omega h_2(x, |\nabla u_m|)|\nabla u_m|^2\, dx \geqslant \\ \geqslant \vartheta_3 \mathrm{J}_m + \vartheta_3 \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m)\, dx + \vartheta_3 \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|)\, dx - \vartheta_3 E_m(0). \\ (2.37)$$

Воспользуемся свойствами (2.5) и (2.8) и получим из (2.37) неравенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \vartheta_3 E_m(0) \geqslant \vartheta_3 \mathrm{J}_m + \\ + (\vartheta_3 - \vartheta_1) \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_m)\, dx + (\vartheta_3 - \vartheta_2) \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_m|)\, dx, \quad (2.38)$$

из которого при условиях, что

$$\vartheta_3 \geqslant \vartheta_1, \quad \vartheta_3 \geqslant \vartheta_2$$

в свою очередь вытекает неравенство

$$\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \vartheta_3 E_m(0) \geqslant \vartheta_3 \mathrm{J}_m. \tag{2.39}$$

Из неравенств (2.31) и (2.39) мы приходим к следующему искомому дифференциальному неравенству:

$$\Phi_m \Phi_m^{''} - \alpha(\Phi_m^{'})^2 + \beta\Phi_m \geqslant 0, \tag{2.40}$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta_3}{p_{k_0}}, \quad \beta = \vartheta_3 E_m(0). \tag{2.41}$$

Теперь потребуем выполнения условия, что

$$\vartheta_3 > p_{k_0}, \quad p_{k_0} = \max_{l=\overline{1,n}} p_l. \tag{2.42}$$

Далее рассуждая как и в предыдущем параграфе мы приходим к следующему утверждению:
Теорема 4. *Пусть выполнены все условия на функции* $\varphi(x,s)$, $h_1(x,s)$, $h_2(x,s)$ *и* $h_3(x,s)$. *Пусть, кроме того, выполнены все условия из теоремы* 3, *тогда при условии*

$$\int_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_0|)\,dx > \int_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_0)\,dx + \int_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_0|)\,dx +$$

$$+ \frac{p_{k_0}}{2\vartheta_3}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l - 1}{p_l}\int_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx\right), \tag{2.43}$$

$$p_{k_0} < \vartheta_3, \quad \vartheta_3 \geqslant \vartheta_1, \quad \vartheta_3 \geqslant \vartheta_2 \tag{2.44}$$

слабое обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) *не существует глобально во времени и имеет место предельное свойство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|\triangle u\|_{q_1} = +\infty$$

и имеет место оценка сверху

$$T_0 \leqslant T_\infty = \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1},$$

где

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1}\Phi(0)\right] > 0,$$

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\nabla u\|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u\|_2^2\,ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_l(x)|u|^{p_l}\,dx\,ds +$$
$$+ \frac{1}{2p_{k_0}}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2p_{k_0}}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_{k_0}p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx,$$

$$\alpha = \frac{\vartheta_3}{p_{k_0}}, \quad \beta = \begin{cases} \vartheta_3 E(0), & \text{при} \quad E(0) > 0; \\ 0, & \text{при} \quad E(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l-1}{p_l}\int\limits_\Omega a_l(x)|u_0|^{p_l}\,dx +$$
$$+ \int\limits_\Omega \mathcal{H}_1(x, \triangle u_0)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{H}_2(x, |\nabla u_0|)\,dx - \int\limits_\Omega \mathcal{H}_3(x, |\nabla u_0|)\,dx.$$

Приложение A

Некоторые результаты нелинейного анализа

§ 1. Пространства Соболева $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$, $\mathbb{W}_0^{s,p}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{s,p}(\Gamma)$

Рассмотрим пространства Соболева, соответствующие произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in \in (0,1]$.

Определение 1. Если $s \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,+\infty]$, то мы обозначим через $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$ векторное пространство

$$\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega), \ \ |\alpha| \leqslant s\}$$

с нормой

$$\| u \|_{\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leqslant s} \| D^\alpha u \|^p_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \right]^{1/p}.$$

Если $s \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$ и $p \in (1,+\infty)$, то мы обозначим через $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$ векторное пространство

$$\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : u \in \mathbb{W}^{[s],p}(\Omega) \ \text{ и } \ d_{\sigma,\alpha}(u) \in \mathbb{L}^p(\Omega\times\Omega), \ |\alpha| = [s]\}$$

с нормой

$$\| u \|_{\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)} = \left[\| u \|^p_{\mathbb{W}^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = [s]} \| d_{\sigma,\alpha}(u) \|^p_{\mathbb{L}^p(\Omega\times\Omega)} \right]^{1/p},$$

где

$$d_{\sigma,\alpha} = \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{(N/p)+\alpha}}, \ \ s = [s] + \sigma.$$

Определение 2. Если $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,+\infty]$, то через $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ мы обозначим замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ по норме пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, наделенное топологией, индуцируемой последним пространством. Если $s \in \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$ и $p \in (1,+\infty)$, то через $\mathbb{W}_0^{s,p}(\Omega)$ мы обозначим замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ в норме $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$, наделенное топологией, индуцируемой последним пространством.

Определение 3. Если $s \in \mathbb{R}_- \backslash 0$ и $p \in (1,+\infty)$, то через $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$ мы обозначим пространство, двойственное к $\mathbb{W}_0^{-s,p'}(\Omega)$, где $p' = p/(p-1)$.

Теорема 1. *Пространства* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $p \in [1,+\infty]$, *являются банаховыми. Если* $p \in (1,+\infty)$, *то они рефлексивны, если* $p = 2$, *то они являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением*

$$(u,v)_{\mathbb{H}^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,.$$

Пространства $\mathbb{W}^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$ *и* $p \in (0,+\infty)$ — *рефлексивные банаховы пространства, и если* $p = 2$, *то они являются гильбертовыми со скалярным произведением*

$$(u,v)_{\mathbb{H}^s(\Omega)} = (u,v)_{\mathbb{H}^{[s]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} (d_{\sigma,\alpha}(u), d_{\sigma,\alpha}(v))_{\mathbb{L}^2(\Omega\times\Omega)}.$$

Теорема 2. *Пространства* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $p \in [1,+\infty]$, *являются банаховыми. Если* $p \in (1,+\infty)$, *то они рефлексивны, и если* $p = 2$, *то они являются гильбертовыми пространствами, которые мы обозначаем через* $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$. *Аналогично, пространства* $\mathbb{W}_0^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$ *и* $p \in (1,+\infty)$, *являются рефлексивными, а при* $p = 2$ — *гильбертовыми пространствами, обозначаемыми* $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$.

Теорема 3. *Обобщенная функция* $\mathbb{T}$ *принадлежит* $\left(\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)\right)' = \mathbb{W}^{-k,p'}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $p \in (1,+\infty)$, *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{T}$ *может быть представлена в виде*

$$\mathbb{T} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Теорема 4. *Если* $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ — *ограниченное открытое множество класса* $\mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$, *с целым* $k \geqslant 1$ *и* $p \in [1,+\infty)$, *то справедливы следующие вложения.*

1. *Если* $N > kp$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$ *с* $q \leqslant Np/(N-kp)$ *и* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$, *если* $q < Np/(N-kp)$; *в более общем случае, если* $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$ *и* $N > (k-m)p$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{W}^{m,q}(\Omega)$ *с* $q \leqslant Np/(N-(k-m)p)$ *и* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{W}^{m,q}(\Omega)$, *если* $q < Np/(N-(k-m)p)$.
2. *Если* $N = kp$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^q(\Omega)$ *для каждого* $q \in [1,+\infty)$.
3. *Если* $\mathrm{N} < kp$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{C}^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ *со следующими значениями* μ : $\mu = k-(N/p)$, *если* $k-(N/p) < 1$; μ — *произвольное и* $\mu < 1$, *если* $k-(N/p) = 1$; $\mu = 1$, *если* $k-(N/p) > 1$. *В более общем случае, если* $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$ *и* $N < (k-m)p$, *то* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{C}^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ *при*: $\mu = k-m-(N/p)$, *если* $k-m-(N/p) < 1$; *произвольном* $\mu < 1$, *если* $k-m-(N/p) = 1$; $\mu = 1$, *если* $k-m-(N/p) > 1$.

Теорема 4 (продолжение). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная область с границей* Γ, *непрерывной по Липшицу, целое* $k \geqslant 1$ *и* $p \in [1,+\infty)$. *Тогда справедливы следующие предложения.*

1. *Если $kp < N$ и $1 \leqslant q \leqslant (N-1)p/(N-kp)$, то существует единственный оператор $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{W}^{k,p}(\Omega); \mathbb{L}^q(\Gamma))$ такой, что если $u \in \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, то $\gamma_0 u = u\big|_{\Gamma}$, а если $u \in \mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$, то мы называем $\gamma_0 u$ следом порядка 0 функции u на Γ; если $p > 1$, то γ_0 — компактный оператор.*
2. *Если $kp = N$, то* (1) *справедливо при любом $q \geqslant 1$.*
3. *Если $kp > N$, то след $\gamma_0 u$ функции $u \in \mathbb{W}^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ является классическим сужением u на Γ.*

Рассмотрим теперь отдельно пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Имеет место следующее утверждение. Пусть $f \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Тогда существуют такие $f_0, f_1, ..., f_n$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, что

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_{\Omega} dx \left[f_0 v + \sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i} \right] \quad \forall\ v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Кроме того,

$$\| f \|_{\mathbb{H}^{-1}} = \inf \left\{ \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} |f_i|^2 \, dx \right)^{1/2} : f_0, ..., f_n \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}.$$

§ 2. Слабая и $*$—слабая сходимости

Определение 4. Последовательность $x_n \rightharpoonup x$ называется слабо сходящейся в нормированном пространстве $\mathbb{B}$, если числовая последовательность $\langle u_n, h\rangle$ сходится для любого $h \in \mathbb{B}^*$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена скобка двойственности между нормированными пространствами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$.

Определение 5. Последовательность $h_n \in \mathbb{B}^*$ называется $*$—слабо сходящейся, если для любого $u \in \mathbb{B}$ числовая последовательность $\langle h_n, u\rangle$ сходится.

Теорема 5. *Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства $\mathbb{B}$. Тогда из $\{u_n\}$ можно выделить слабо сходящуюся в $\mathbb{B}$ подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$:*

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема 6. *Пусть $\mathbb{B}$ — есть банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства $\mathbb{B}^*$. Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$—слабо сходящуюся в $\mathbb{B}^*$ подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:*

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad * -\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Определение 6. *Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство.*

(i) *Пространство* $\mathbb{B}$ *называется строго выпуклым если*

$$\|u+v\| \neq \|u\| + \|v\| \tag{2.1}$$

для всех линейно независимых элементов $u, v \in \mathbb{B}$;

(ii) *Пространство* $\mathbb{B}$ *называется равномерно выпуклым если для любых двух последовательностей* $\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathbb{B}$ *таких, что* $\|u_n\| = \|v_n\| = 1$ *и*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n + v_n\| = 2,$$

имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - v_n\| = 0. \tag{2.2}$$

Можно дать эквивалентные определения строгой и равномерной выпуклости в терминах «$\varepsilon - \delta$»:

Определение 7. *Пусть* $\mathbb{B}$ — *это банахово пространство.*

(i) *Пространство* $\mathbb{B}$ *называется строго выпуклым, если из неравенств* $\|u\| \leqslant 1$ *и* $\|v\| \leqslant 1$ *и* $u \neq v$ *следует, что*

$$\|u+v\| < 2. \tag{2.3}$$

(ii) *Пространство* $\mathbb{B}$ *называется равномерно выпуклым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из неравенств* $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ *и* $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ *следует*

$$\|u+v\| \leqslant 2(1-\delta(\varepsilon)). \tag{2.4}$$

Теорема 7. *Всякое равномерно выпуклое банахово пространство* $\mathbb{B}$ *рефлексивно.*

Теорема 8. *Если* $\mathbb{B}$ — *это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\|u_n\| \to \|u\|$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

§ 3. Каратеодориевы функции. Оператор Немыцкого. Теорема М. А. Красносельского

Теперь приступим к рассмотрению одного частного, но важного класса операторов, называемых *операторами Немыцкого*. Для того чтобы ввести оператор Немыцкого нам сначала необходимо рассмотреть так называемые *Каратеодориевы функции*. Пусть $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ — это есть полное измеримое $\sigma-$конечное пространство. Дадим определения.

Определение 9. *Функция*

$$f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

называется Каратеодориевой, если она для всех $u \in \mathbb{R}^N$ $\mu-$ $-$*измерима на* Ω *и для* $\mu-$*почти всех* $x \in \Omega$ *непрерывна по* $u \in \mathbb{R}^N$.

Определение 10. *Оператор* $N_f(u) \equiv f(x, u(x))$ *называется оператором Немыцкого.*

Его важность при исследовании нелинейных краевых задач обусловлена тем, что для него справедлива следующая теорема М. А. Красносельского.

Теорема 9. *Оператор Немыцкого* $N_f(u)$ *является ограниченным и непрерывным, действующим из*

$$\prod_{k=1}^{N} \mathbb{L}^{p_k}(\Omega,\mu) \quad \text{в} \quad \mathbb{L}^q(\Omega,\mu) \quad \text{при} \quad p_k, q \in [1,+\infty)$$

тогда и только тогда, когда для соответствующей Каратеодориевой функции $f(x,u)$ *справедлива оценка*

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + c\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p_k/q}$$

для всех $u = (u_1, ..., u_N) \in \mathbb{R}^N$ *и* $\mu-$*почти всех* $x \in \Omega$, *где* $a(x) \in$ $\in \mathbb{L}^q(\Omega,\mu)$.

Доказательство этой теоремы достаточно сложное и кропотливое имеется в работе [9].

Рассмотрим теперь следующий важный результат, который будет нами неоднократно использоваться в вариационных задачах.

Пусть

$$f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

является Каратеодориевой функцией. Введем так называемую потенциальную функцию

$$F(x,z) = \int_0^z f(x,\xi)\, d\xi, \tag{3.1}$$

а также функционал

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\, dx. \tag{3.2}$$

Предположим также, что

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + c|u|^{p/p'} \quad \text{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad p \in (1,+\infty),$$

где $a(x) \in \mathbb{L}_+^{p'}(\Omega)$ и $c > 0$. Тогда для потенциальной функции $F(x,u)$, определенной формулой (3.1), имеет место следующее неравенство:

$$|F(x,u)| \leqslant \left| \int\limits_0^{u(x)} f(x,\xi)\,d\xi \right| \leqslant a(x)|u| + \frac{c}{p}|u|^p \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|a(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{c}{p}|u|^p = a_1(x) + c_1|u|^p, \quad (3.3)$$

где $a_1(x) \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ и $c_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x,u)$ является Каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (3.3) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^1(\Omega)$$

и является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (3.2) является ограниченным и непрерывным из $\mathbb{L}^p(\Omega)$ в $\mathbb{R}^1$. Действительно, в силу оценки (3.3) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leqslant \int\limits_\Omega |F(x,u(x))|\,dx \leqslant \int\limits_\Omega a_1(x)\,dx + c_1 \int\limits_\Omega |u|^p\,dx \leqslant c_2 + c_1\|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leqslant \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u,v) \equiv \psi(u+v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v \rangle \quad \text{для} \quad u,v \in \mathbb{L}^p(\Omega).$$

$$|\omega(u,v)| \leqslant \left| \int\limits_\Omega [F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x))]\,dx - \int\limits_\Omega N_f(u)(x)v(x)\,dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x)) =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}F(x,u(x)+tv(x))\,dt = \int\limits_0^1 f(x,u(x)+tv(x))v(x)\,dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u,v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_\Omega dx\, |N_f(u+tv)(x) - N_f(u)(x)|\,|v(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'}\, \|v\|_p.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \to 0} \frac{|\omega(u,v)|}{\|v\|_p} \leqslant \lim_{\|v\|_p \to 0} \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u+tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Тем самым, справедлива следующая лемма.
Лемма 1. *При сформулированных условиях функционал $\psi(u)$, определенный формулой* (3.2), *является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство*:

$$\psi_f'(u) = N_f(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \textit{при} \quad p \in (1, +\infty). \tag{3.4}$$

§ 4. Дифференциальное неравенство

Рассмотрим основное для нас следующее дифференциальное неравенство:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geqslant 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0, \tag{4.1}$$

где

$$\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]), \quad \Phi(t) \geqslant 0, \quad \Phi(0) > 0.$$

Разделим обе части неравенства (4.1) на $\Phi^{1+\alpha}$, тогда после некоторых преобразований получим, что

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right)' + \gamma\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \beta\Phi^{-\alpha} \geqslant 0,$$

из которого в свою очередь получим, что

$$\frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \frac{\gamma}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})' + \beta\Phi^{-\alpha} \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Введем обозначение.

$$Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t). \tag{4.3}$$

С учетом этого обозначение из (4.2) получим, что

$$Z'' + \gamma Z' - \beta(\alpha - 1)Z^{\alpha_1} \leqslant 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \tag{4.4}$$

Введем новое обозначение.

$$Y(t) = e^{\gamma t} Z(t), \tag{4.5}$$

с учетом которого из (4.4) получим, что

$$Y^{''} - \gamma Y^{'} - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} \leqslant 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}. \tag{4.6}$$

Заметим теперь, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$Y^{'} = \left(\Phi^{1-\alpha} e^{\gamma t}\right)^{'} = \Phi^{-\alpha}(\alpha - 1)e^{\gamma t}\left[-\Phi^{'}(t) + \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(t)\right]. \tag{4.7}$$

Потребуем выполнения следующего начального условия:

$$\Phi^{'}(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0), \tag{4.8}$$

тогда найдется такое $t_0 > 0$, что будет иметь место неравенство

$$\Phi^{'}(t) > \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(t) \quad \text{при} \quad t \in [0, t_0). \tag{4.9}$$

И, следовательно, из неравенства (4.9) и выражения (4.7) получим, что

$$Y^{'}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_0).$$

Поскольку

$$-\gamma Y^{'}(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_0),$$

то из неравенства (4.6) получим следующее неравенство:

$$Y^{''} - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} \leqslant 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1} \quad \text{при} \quad t \in [0, t_0). \tag{4.10}$$

Теперь мы умножим обе части неравенства (4.10) на $Y^{'}$ и получим неравенство

$$Y^{'}Y^{''} - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y^{'} \geqslant 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1} \quad \text{при} \quad t \in [0, t_0). \tag{4.11}$$

Теперь заметим, что имеет место следующее равенство:

$$e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y^{'} = \frac{d}{dt}\left[e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}\right] + \delta e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1} - \alpha_1 e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y^{'},$$

из которого получаем равенство

$$e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y^{'} = \frac{1}{1 + \alpha_1}\frac{d}{dt}\left[e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}\right] + \frac{1}{1 + \alpha_1}\delta e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}. \tag{4.12}$$

Подставим выражение (4.12) в (4.11) и получим следующее неравенство:

$$Y^{'}Y^{''} - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 + \alpha_1}\frac{d}{dt}\left[e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}\right] - \frac{\beta(\alpha - 1)\delta}{1 + \alpha_1} e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_0),$$

из которого сразу же получим, что имеет место неравенство

$$Y^{'}Y^{''}-\frac{\beta(\alpha-1)}{1+\alpha_1}\frac{d}{dt}\left[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}\right]\geqslant 0 \quad \text{при} \quad t\in[0,t_0). \tag{4.13}$$

Интегрируя последнее неравенство мы получим неравенство.

$$(Y^{'})^2\geqslant A^2+\frac{2\beta(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}\geqslant A^2, \tag{4.14}$$

где

$$A^2\equiv(Y^{'}(0))^2-\frac{2\beta(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}Y^{1+\alpha_1}(0). \tag{4.15}$$

И теперь мы потребуем выполнения условия

$$A^2>0.$$

После ряда преобразований последнее условие преобразуется к следующему виду:

$$A^2=(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi^{'}(0)-\frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2-\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right]>0. \tag{4.16}$$

Следовательно, условие $A^2>0$ эквивалентно условию

$$\left(\Phi^{'}(0)-\frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2>\frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0). \tag{4.17}$$

Стало быть, мы приходим из неравенств (4.14) и (4.16) к выводу о том, что

$$Y^{'}(t)\leqslant -A<0\Rightarrow\Phi^{'}(t_0)>\frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(t_0).$$

Но тогда $Y^{'}(t_0)<0$. Следовательно, используя алгоритм продолжения во времени, получим, что

$$Y^{'}(t)<0 \quad \text{для всех} \quad t\in[0,T].$$

Значит, справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|Y^{'}|\geqslant A>0\Rightarrow Y^{'}(t)\leqslant -A\Rightarrow Y(t)\leqslant Y(0)-At\Rightarrow&\\ \Rightarrow\Phi^{1-\alpha}(t)\leqslant e^{-\gamma t}\left[\Phi^{1-\alpha}(0)-At\right]\Rightarrow&\\ \Rightarrow\Phi(t)\geqslant\frac{e^{\gamma t/(\alpha-1)}}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0)-At\right]^{1/(\alpha-1)}}.&\end{aligned} \tag{4.18}$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме

Т е о р е м а 10. *Пусть* $\Phi(t)\in\mathbb{C}^{(2)}([0,T])$ *и выполнены условия*

$$\Phi^{'}(0)>\frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0), \tag{4.19}$$

$$\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0) \tag{4.20}$$

причем $\Phi(t) \geqslant 0$, $\Phi(0) > 0$, *тогда время* $T > 0$ *не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство*

$$T \leqslant T_\infty \leqslant \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

$$A^2 \equiv (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right],$$

причем

$$\limsup_{t\uparrow T_\infty}\Phi(t) = +\infty.$$

§ 5. О непрерывности обратной матрицы

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\|_{i,k=1,1}^{m,m}, \tag{5.1}$$

где

$$a_{ik} = \langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N}\left\langle \mathbb{A}'_{ju_m}(u_m)w_i, w_k\right\rangle_j, \quad u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}w_k, \tag{5.2}$$

и $\{w_k\} \subset \mathbb{V}$ — это галеркинский базис в $\mathbb{V}$. Рассмотрим матрицу

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{N}\left\langle \mathbb{A}'_{ju_m}(u_m)w_i, w_k\right\rangle_j. \tag{5.3}$$

Прежде всего докажем ограниченность этой матрицы. Действительно, имеем

$$\|\mathbf{C}\|_{m\otimes m} = \sup_{|\eta|_m=1}|\mathbf{C}\eta|, \tag{5.4}$$

где

$$|\eta|_m = \left(\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathbf{C}\|_{m\otimes m} \leqslant c(m)\sum_{j=1}^{N}\sum_{i,k=1,1}^{m,m}\left\|\mathbb{A}'_{ju_m}(u_m)\right\|_{\mathbb{V}_j\to\mathbb{V}_j^*}\|w_i\|_j\|w_k\|_j$$

$$\leqslant c(m)\sum_{j=1}^{N}\sum_{i,k=1,1}^{m,m}\mu_j(\mathrm{R}_m)\|u_m\|_j\|w_i\|_j\|w_k\|_j, \tag{5.5}$$

где $\mu_j(R_m)$ — это неубывающая и ограниченная на компактах функция и $\mathrm{R}_m = \|u_m\|_j$. Из оценки (5.5) следует, что матрица C является ограниченной для любого фиксированного $\mathbf{c}_m = (c_{m1}, \ldots, c_{mm})$.

Введем резольвенту матрицы

$$\mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}) = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{5.6}$$

для достаточно больших $|\lambda| = r_m > 0$. Тогда для обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ имеет место представление

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r_m} \lambda^{-1} \mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}) d\lambda. \tag{5.7}$$

Тогда

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{c}_m^1) - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{c}_m^2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r_m} \lambda^{-1} \left[\mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1)) - \mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^2))\right] d\lambda. \tag{5.8}$$

Воспользуемся хорошо известным равенством для резольвенты

$$\mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^2)) - \mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1)) = \mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1)) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\mathbf{A}(\mathbf{c}_m^2) - \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1)\right) \mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1))\right]^n \tag{5.9}$$

при условии

$$\left\|\left(\mathbf{A}(\mathbf{c}_m^2) - \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1)\right) \mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1))\right\|_{m\otimes m} \leqslant \left\|\mathbf{A}(\mathbf{c}_m^2) - \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1)\right\|_{m\otimes m} \|\mathfrak{R}(\lambda, \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1))\|_{m\otimes m} \leqslant \delta < 1,$$

к5оторое справедливо при достаточно больших $|\lambda| = r > 0$.

Заметим, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}_m^2) - \mathbf{A}(\mathbf{c}_m^1) = \mathbf{C}(\mathbf{c}_m^2) - \mathbf{C}(\mathbf{c}_m^1) = \|\lambda_{ki}\|_{k,i=1,1}^{m,m}, \tag{5.10}$$

где

$$\lambda_{ki} \equiv \sum_{j=1}^{N} \left\langle \left[\mathbb{A}'_{ju_m}(u_m^1) - \mathbb{A}'_{ju_m}(u_m^2)\right] w_k, w_i \right\rangle. \tag{5.11}$$

Но тогда

$$|\lambda_{ki}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \left\|\mathbb{A}'_{ju_m}(u_m^1) - \mathbb{A}'_{ju_m}(u_m^2)\right\|_{\mathbb{V}_j \to \mathbb{V}_j^*} \|w_i\|_j \|w_k\|_j \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|w_i\|_j \|w_k\|_j \mu_j(\mathrm{R}_m) \|u_m^1 - u_m^2\|_j, \tag{5.12}$$

где

$$\mathrm{R}_m = \max\left\{\|u_m^1\|_j, \|u_m^2\|_j\right\}.$$

Из (5.12) имеем

$$|\lambda_{ki}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|w_i\|_j \|w_k\|_j \mu_j(\mathrm{R}_m) \sum_{k=1}^{m} \|w_k\|_j \left| c^1_{mk} - c^2_{mk} \right|. \tag{5.13}$$

Таким образом, из (5.8)–(5.13) следует, что для всех $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$$\left| \mathbf{c}^1_m - \mathbf{c}^2_m \right| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

имеем

$$|\lambda_{ki}| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что матрица $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{c}_m)$ является непрерывной относительно столбца $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$. В свою очередь это означает, что к системе галеркинских приближений вида

$$\sum_{i=1}^{m} c'_{mi} \left[\langle \mathbb{A}_0 w_i, w_k \rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbb{A}'_{j,u_m}(u_m) w_i, w_k \rangle_j \right] = (\mathbb{F}(u_m), w_k)_0$$

можно применить теорему Пеано.

З а м е ч а н и е 3. Заметим, что нетрудно получить следующий результат: *оператор $\mathbb{A}'_{ju}(u)$ сильно непрерывен относительно нормы банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{V}_j; \mathbb{V}^*_j)$.*

§ 6. Об одном интерполяционном неравенстве

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

В работе [11] на стр. 71 было получено следующее интерполяционное неравенство:

$$\|v\|_{2q/(q-2)} \leqslant c_1(q) \|\nabla v\|_2^{N/q} \|v\|_2^{1-N/q} \quad \text{для всех} \quad v(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega), \tag{6.1}$$

где $q \geqslant N$ при $N > 2$ и $q > 2$ при $N = 2$. Нетрудно доказать, что из этого интерполяционного неравенства вытекает, что для функций

$$v(x) \in \mathbb{W}^{2,q_1}_0(\Omega) \quad \text{при} \quad q_1 \geqslant 2$$

имеет место неравенство следующего вида:

$$\|\nabla v\|_{2q/(q-2)} \leqslant c_2(q) \|\triangle v\|_2^{N/q} \|\nabla v\|_2^{1-N/q}. \tag{6.2}$$

Теперь отметим, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|\nabla v\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = -\int_\Omega v \triangle v \, dx \leqslant \|\triangle v\|_2 \|v\|_2. \tag{6.3}$$

Подставляя выражение (6.3) в неравенство (6.2) мы получим следующее неравенство:

$$\|\nabla v\|_{2q/(q-2)} \leqslant c_2(q)\|\triangle v\|_2^{1/2+N/2q}\|v\|_2^{1/2-N/2q}. \tag{6.4}$$

Предположим теперь, что

$$v(x) \in \mathbb{W}_0^{2,q_1}(\Omega) \cap \mathbb{L}^{p_{k_0}}(\Omega) \quad \text{при} \quad q_1 \geqslant 2,\ p_{k_0} \geqslant 2$$

и, кроме того, введем обозначение

$$q_3 = \frac{2q}{q-2} \Rightarrow q = \frac{2q_3}{q_3-2}.$$

Тогда используя ограниченность рассматриваемой области приходим из (6.4) к неравенству

$$\|\nabla v\|_{q_3}^{q_3} \leqslant c_3(q_3, p_{k_0}, q_1, \Omega)\|\triangle v\|_{q_1}^{q_3(1/2+N/2q)}\|v\|_{p_{k_0}}^{q_3(1/2-N/2q)}. \tag{6.5}$$

Выберем теперь число $r_1 > 0$ таким образом, чтобы имело место равенство

$$r_1 q_3\left(\frac{1}{2} + \frac{N}{2q}\right) = q_1. \tag{6.6}$$

Проверим, что параметр $r_1 > 1$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{2q_1}{q_3} > 1 + \frac{N}{q} = 1 + N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_3}\right) \Rightarrow 4q_1 + 2N > (2+N)q_3.$$

Итак, пусть выполнено следующее неравенство:

$$4q_1 + 2N > (2+N)q_3, \tag{6.7}$$

тогда используя арифметическое неравенство Юнга с параметром $\varepsilon > 0$ мы из неравенства (6.5) получим следующую оценку:

$$\|\nabla v\|_{q_3}^{q_3} \leqslant \varepsilon\|\triangle v\|_{q_1}^{q_1} + c_4(\varepsilon)\|v\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}r_2} \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0, \tag{6.8}$$

где

$$r_2 = \frac{r_1}{p_{k_0}(r_1-1)}q_3\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2q}\right), \quad r_1 = \frac{2q_1}{q_3}\frac{1}{1+N/q}, \quad q = \frac{2q_3}{q_3-2}.$$

Очевидно, что $r_2 > 0$.

§ 7. Об одном равенстве

В данном разделе нам нужно доказать следующее равенство, что имеет место следующее равенство:

$$\Psi(T) - \Psi(0) = \int\limits_{Q_T} \left[u^{'} u + \sum_{k=1}^{n} (p_k - 1) \frac{2}{p_k} a_k^{1/2} (|u|^{p_k/2})^{'} a_k^{1/2} |u|^{p_k/2} \right] dt\, dx, \tag{7.1}$$

где

$$\Psi(t) \equiv \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k - 1}{p_k} \int\limits_{\Omega} a_k(x) |u|^{p_k}\, dx.$$

При условии, что

$$u \in \mathbb{L}^{p_{k_0}}(Q_T), \quad p_{k_0} = \max_{k=\overline{1,n}} p_k, \quad p_k > 2,$$

$$u^{'} \in \mathbb{L}^2(Q_T), \quad \left(a_k^{1/2}(x) |u|^{p_k/2} \right)^{'} \in \mathbb{L}^2(Q_T).$$

Действительно, доказательство равенства (7.1) основано на рассмотрении соответствующего галеркинского приближения, которые мы всюду используем.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.
2. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Матем. сб. 1965, 67(109), 609–642.
3. *Иванов А. В.* Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение//Алгебра и анализ, 4:6 (1992), 114–130.
4. *Калантаров В.К., Ладыженская О.А.* Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов. Записки ЛОМИ. 1977, 69, 77–102.
5. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка//УМН, 42:2 (1987), 135–176.
6. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: УРСС, 2010, 240 с.
7. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: УРСС, 2011, 376 с.
8. *Корпусов М. О.* Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией. М.: УРСС, 2012, 256 с.
9. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956, 392 с.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
12. *Лаптев Г. И.* Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью// Матем. сб., 1997, т. 188, N 9, с. 83Ц-112.
13. *Лаптев Г. И.* Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени// Матем. сб., 2000, т. 191, N 9, с. 43–64.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, 588 с.
15. *Митидиери Э.Л., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных. Математический ин-т им.В.А.Стеклова РАН. 2001, 234.
16. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.

17. *Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. De Gruyter, Series: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 15. 2011, 648 pp.
18. *Chipot M., Valente V., Vergara Caffarelli G.* Remarks on a Nonlocal Problem Involving the Dirichlet Energy//REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 110 (2003).
19. *Levine H.A.* Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$. Transactions of the American mathematical society. 1974, 1–21.
20. *Levine H. A., Pucci P. and Serrin J.* Some remarks on the global nonexistence problem for nonautonomous abstract evolution equations. Contemporary Math. 1997, 208, 253–263.
21. *Levine H. A., Todorova G.* Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy in four space-time dimensions. Proc. Amer. Math. Soc. 2003, 129, 793–805.
22. *Levine H. A., Park S. R., Serrin J.* Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Differential Equations. 1998. V. 142. pp. 212–229.
23. *Dengming Liu, Chunlai Mu* Blow-up analysis for a semilinear parabolic equation with nonlinear memory and nonlocal nonlinear boundary condition//Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2010, No. 51, 1-17; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/.
24. *Pucci P. and Serrin J.* Some new results on global nonexistence for abstract evolution equation with positive initial energy. Topological Methods in Nonlinear Analys, Journal of J. Schauder Center for Nonlinear Studies. 1997, 10, 241–247.
25. *Pucci P. and Serrin J.* Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy. J. Diff. Equations. 1998, 150, 203–214.
26. *Raviart P. A.* Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires// J. Funct. Anal., 5:2 (1970), 299–328