ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 7, с. 893–903

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОБОЛЕВСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 2023 г. М. В. Артемьева, М. О. Корпусов

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка соболевского типа с некоэрцитивным источником, которая описывает поведение зарядов во внешнем поле полупроводниковой плазмы. Доказана локальная разрешимость этой задачи и получены оценки сверху на время разрушения решения.

DOI: 10.31857/S0374064123070038, EDN: GTQZSM

Введение. В работе [1] авторами рассмотрена следующая абстрактная задача:

$$\frac{d^2}{dt^2}\biggl(A_0u+\sum_{j=1}^{N}A_j(u)\biggr)+\frac{d}{dt}DP(u)+Lu=\frac{d}{dt}F(u),\quad u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1, \tag{1}$$

где A_0, D и L – линейные, а $A_j(u)$ и $F(u)$, $P(u)$ – нелинейные операторы в банаховых пространствах V_0, V_j, W_i, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,3}$, с соответствующими нормами $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_j$, $|\cdot|_i$ и с сопряжёнными банаховыми пространствами V_0^*, V_j^*, W_i^* относительно соответствующих скобок двойственностей $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_0$, $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_j$, $(\,\cdot\,,\cdot\,)_i$ и норм $\|\cdot\|_0^*$, $\|\cdot\|_j^*$, $|\cdot|_i^*$.

Пусть банаховы пространства V_0, V_j, W_i, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,3}$, являются рефлексивными и сепарабельными. Предположим также, что

$$A_0\colon V_0\to V_0^*,\quad A_j\colon V_j\to V_j^*,\quad L_1\colon W_1\to W_1^*,$$

$$F\colon W_2\to W_2^*,\quad P\colon V_0\to W_3,\quad D\colon W_3\to V_0^*.$$

Для операторных коэффициентов задачи (1) выполняются следующие условия [1, § 2].

Условия A_0:

(i) оператор $A_0\colon V_0\to V_0^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причём имеет место неравенство

$$\|A_0u\|_0^*\leqslant M_0\|u\|_0\quad \text{для всех}\quad u\in V_0;$$

(ii) оператор A_0 является коэрцитивным, причём справедливо неравенство

$$\langle A_0u,u\rangle_0\geqslant m_0\|u\|_0^2\quad \text{для всех}\quad u\in V_0.$$

Условия A_j:

(i) оператор $A_j\colon V_j\to V_j^*$ является монотонным и непрерывным;

(ii) оператор A_j дифференцируем по Фреше, причём его производная Фреше

$$A'_{jf}(u)\colon V_j\to \mathcal{L}(V_j,V_j^*)$$

является непрерывным, симметричным, монотонным и неотрицательно определённым оператором при любом фиксированном $u\in V_j$ и $A'_{jf}(0)=0$;

(iii) оператор A_j является положительно однородным:

$$A_j(ru)=r^{p_j-1}A_j(u)\quad \text{при}\quad p_j>2,\quad r\geqslant 0,\quad u\in V_j;$$

(iv) справедливы неравенства

$$\|A_j(u)\|_j^* \leqslant M_j\|u\|_j^{p_j-1}, \quad \langle A_j(u), u\rangle_j \geqslant m_j\|u\|_j^{p_j}, \quad M_j, m_j > 0.$$

Условия F:

(i) оператор $F\colon W_2 \to W_2^*$ является ограниченно Липшиц-непрерывным, т.е. имеет место неравенство

$$|F(u_1) - F(u_2)|_2 \leqslant \mu(R)|u_1 - u_2|_2 \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in W_2,$$

где $R = \max\{|u_1|_2, |u_2|_2\}$, $\mu = \mu(R)$ есть ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента;

(ii) оператор F является положительно однородным, т.е.

$$F(ru) = r^{1+q}F(u) \quad \text{при} \quad q > 0, \quad r \geqslant 0, \quad u \in W_2;$$

(iii) оператор F имеет симметричную производную Фреше

$$F_f'(\cdot)\colon W_2 \to \mathcal{L}(W_2, W_2^*);$$

(iv) оператор F удовлетворяет неравенству

$$|F(u)|_2^* \leqslant M|u|_2^{q+1} \quad \text{для всех} \quad u \in W_2.$$

Условия DP:

(i) оператор $D\colon W_3 \to V_0^*$ является линейным и непрерывным, причём

$$\|Du\|_0^* \leqslant D_3|u|_3 \quad \text{для всех} \quad u \in W_3;$$

(ii) оператор $P\colon V_0 \to W_3$ является ограниченно Липшиц–непрерывным, т.е.

$$|P(u_1) - P(u_2)|_3 \leqslant \mu_0(R)\|u_1 - u_2\|_0 \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in V_0,$$

где $\mu_0 = \mu_0(R)$ – ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента, $R = \max\{\|u_1\|_0, \|u_2\|_0\}$;

(iii) справедливо неравенство

$$|P(u)|_3 \leqslant D_4\|u\|_0^{1+q_0}, \quad q_0 \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0;$$

(iv) для всех $u \in V_0$ имеет место неравенство

$$\langle DP(u), u\rangle_0 = 0;$$

(v) оператор P имеет производную Фреше

$$P_f'(\cdot)\colon V_0 \to \mathcal{L}(V_0, W_3).$$

Условия L:

(i) оператор $L\colon W_1 \to W_1^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причём

$$|Lu|_1^* \leqslant D_1|u|_1 \quad \text{для всех} \quad u \in W_1;$$

(ii) оператор L является коэрцитивным, причём

$$(L_1u, u)_1 \geqslant d_1|u|_1^2 \quad \text{для всех} \quad u \in W_1.$$

Для доказательства существования сильного решения задачи Коши (1) применён метод монотонных операторов Браудера–Минти [2, с. 98], а для доказательства разрушения за конечное время – метод энергетических оценок, развитый в статье [3]. Отметим, что уравнение (1) содержит некоэрцитивный источник $dF(u)/dt$, что сильно усложняет получение достаточных условий разрушения задачи Коши (1) за конечное время.

В настоящей работе рассмотрена представленная в примере 1 из [1] начально-краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка и доказано существование непродолжаемого во времени её классического решения.

1. Вывод уравнения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей Γ, причём Γ – односвязная поверхность. Рассмотрим электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi en, \quad \mathbf{E} = -\nabla u, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J} + Q_1(u) + \int\limits_0^t Q_2(u)(\tau)\,d\tau, \quad \mathbf{J} = en_0(u)\mathbf{E}_0, \quad \operatorname{div}\mathbf{P} = \rho(u), \tag{3}$$

где $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_1$ – вектор напряжённости внешнего электрического поля, $\mathbf{e}_1$ – базисный орт, направленный вдоль оси x, E_0 – амплитуда внешнего электрического поля, $\mathbf{E}$ – вектор напряжённости электрического поля, $\mathbf{D}$ – вектор электрического смещения, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации, $\mathbf{J}$ – плотность тока смещения, $n_0(u)$ – квазистационарная плотность свободных зарядов, зависящая от электрического потенциала u, $Q_1(u)$ – источник свободных зарядов, зависящий от потенциала электрического поля u, $\rho(u)$ – плотность связанных зарядов, зависящая от потенциала электрического поля u. Кроме того, здесь учтена временна́я дисперсия, описываемая слагаемым $\int_0^t Q_2(u)(\tau)\,d\tau$. От системы уравнений (2), (3) приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - 4\pi\rho(u)) = 4\pi e^2 E_0 \frac{\partial^2 n_0(u)}{\partial t\partial x_1} + \frac{\partial Q_1(u)}{\partial t} + Q_2(u), \tag{4}$$

где функции $\rho(u)$, $n_0(u)$, $Q_1(u)$ и $Q_2(u)$ можно взять следующими:

$$\rho(u) = \rho_0 + \rho_1 u + \rho_2|u|^{p-2}u, \quad n_0(u) = N_0u^2, \quad Q_1(u) = q_1u^3, \quad Q_2(u) = q_2u. \tag{5}$$

Таким образом, уравнение (4) описывает поведение зарядов во внешнем электрическом поле в полупроводниковой плазме.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\biggl(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u\biggr) - u + \frac{\partial^2|u|^{1+q_0}}{\partial t\partial x_1} - \frac{\partial|u|^q u}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega), \tag{7}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{8}$$

где $p_j > 2$, $j = \overline{1,n}$, $q_0 > 0$, $q > 0$. Это задача вида (1), и операторные коэффициенты имеют вид

$$A_0u \equiv \Delta u - u, \quad A_j(u) \equiv |u|^{p_j-2}, \quad Lu \equiv u, \quad P(u) \equiv |u|^{1+q_0}, \quad F(u) \equiv |u|^q u. \tag{9}$$

При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^1(\Omega), \quad V_j = L^{p_j}(\Omega), \quad W_1 = H = L^2(\Omega), \quad W_2 = L^{q+2}(\Omega),$$

которые мы полагаем рефлексивными и сепарабельными. Пусть выполнены условия A_0, A_j, F, DP и L на операторные коэффициенты (9). Дадим определение классического решений этой задачи.

Определение 1. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T]; H_0^1(\Omega))$ называется *классическим решением задачи (6)–(8),* если

$$\frac{d^2}{dt^2}|u|^{p_j-2} \in \mathbb{C}([0,T]; H_0^{-1}(\Omega)) \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1,n},$$

равенство (6) справедливо для каждого $t \in [0,T]$ и понимается в смысле банахова пространства $H_0^{-1}(\Omega)$, причём $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Пусть $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ – произвольная функция. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(t) := \int\limits_t^T \phi(s)\,ds \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T], \quad t \in [0,T].$$

Заметим, что $\psi(T) = 0$ и $\psi'(t) = -\phi(t)$. Справедливы следующие формулы интегрирования по частям для интегралов Бохнера в $H_0^{-1}(\Omega)$:

$$\int\limits_0^T \frac{d^2}{dt^2}\biggl(\Delta u(t) - u(t) - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u(t)\biggr)\psi(t)\,dt =$$

$$= -\biggl(\Delta u_1 - u_1 - \sum_{j=1}^n (p_j-1)|u_0|^{p_j-2}u_1\biggr)\int\limits_0^T \phi(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \frac{d}{dt}\biggl(\Delta u(t) - u(t) - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u(t)\biggr)\phi(t)\,dt, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^T u(t)\psi(t)\,dt = \int\limits_0^T \phi(t)\int\limits_0^t u(s)\,ds\,dt, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^T \frac{d}{dt}|u|^q u(t)\psi(t)\,dt = -|u_0|^q u_0 \int\limits_0^T \phi(t)\,dt + \int\limits_0^T |u|^q u(t)\phi(t)\,dt, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^T \frac{\partial^2 |u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1}(t)\psi(t)\,dt = -\frac{\partial |u_0|^{1+q_0}}{\partial x_1}\int\limits_0^T \phi(t)\,dt + \int\limits_0^T \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}(t)\phi(t)\,dt. \tag{13}$$

Тогда, умножив обе части равенства (6) на функцию $\psi(t)$, с учётом (10)–(13) получим равенство

$$\int\limits_0^T \biggl\{\frac{d}{dt}\biggl(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u\biggr) + \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1} - \int\limits_0^t u(s)\,ds - |u|^q u - f\biggr\}\phi(t)\,dt = 0 \tag{14}$$

для всех $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$, где

$$f := -|u_0|^q u_0 + \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1} + (\Delta u_1 - u_1) + \sum_{j=1}^n (p_j-1)|u_0|^{p_j-2}u_1.$$

Полученное равенство (14) позволяет сформулировать определение сильного решения начально-краевой задачи (6)–(8).

Определение 2. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; H_0^1(\Omega))$ называется *сильным решением задачи (6)–(8)*, если для любой функции $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ выполнено равенство (14), причём $u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *В классе сильных решений задачи (6)–(8) равенство (14), выполненное для любых* $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$, *эквивалентно равенству*

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt}\left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u\right) + \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1} - \int_0^t u(s)\,ds - |u|^q u - f, v(t)\right\rangle_0 dt = 0 \tag{15}$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

С учётом равенства скобок двойственности

$$\langle f, u\rangle_0 = \langle f, u\rangle_j \quad \text{для всех} \quad f \in L^{p_j}(\Omega)^*, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad j = \overline{1,n},$$

$$\langle f, u\rangle_0 = (f,u)_1, \quad f \in L^2(\Omega)^*, \quad \text{и} \quad \langle f, u\rangle_0 = (f,u)_2, \quad f \in L^{q+2}(\Omega)^*, \quad \text{для всех} \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

соотношение (15) можно записать в эквивалентном виде

$$\int_0^T \Bigg[\left\langle \frac{d}{dt}(\Delta u - u)(t), v(t)\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt}|u|^{p_j-2}u(t), v(t)\right\rangle_j + \left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}(t), v(t)\right\rangle_0 +$$
$$+ \int_0^t (u(s), v(t))_1\,ds - (|u|^q u(t), v(t))_2 - \langle f, v(t)\rangle_0\Bigg] dt = 0 \tag{16}$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Теперь в (16) возьмём $v(t) = \phi(t)w$, где $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$, $w \in H_0^1(\Omega)$, и получим равенство

$$\int_0^T \phi(t)\Bigg[\left\langle \frac{d}{dt}(\Delta u - u)(t), w\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt}|u|^{p_j-2}u(t), w\right\rangle_j + \left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}(t), w\right\rangle_0 +$$
$$+ \int_0^t (u(s), w)_1\,ds - (|u|^q u(t), w)_2 - \langle f, w\rangle_0\Bigg] dt = 0 \tag{17}$$

для любых $\phi(t) \in \mathbb{C}[0,T]$ и $w \in H_0^1(\Omega)$. В силу условий на операторные коэффициенты (9) имеем

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\Delta u - u), w\right\rangle_0 \in \mathbb{C}[0,T], \quad \left\langle \frac{d}{dt}|u|^{p_j-2}u, w\right\rangle_j \in \mathbb{C}[0,T], \tag{18}$$

$$\int_0^t (u(s), w)_1\,ds \in \mathbb{C}[0,T], \quad (|u|^q u, w)_2 \in \mathbb{C}[0,T], \tag{19}$$

$$\left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}, w\right\rangle_0 \in \mathbb{C}[0,T]. \tag{20}$$

Поэтому из (17) и свойств (18)–(20) в силу основной леммы вариационного исчисления вытекает следующее равенство:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\Delta u - u), w\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt}|u|^{p_j-2}u, w\right\rangle_j + \left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}, w\right\rangle_0 +$$

$$+\int_0^t (u(s),w)_1\,ds - (|u|^q u, w)_2 - \langle f, w\rangle_0 = 0 \tag{21}$$

для всех $w \in H_0^1(\Omega)$ и всех $t \in [0,T]$.

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу

$$\frac{d}{dt}\left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u\right) + \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1} - \int_0^t u(s)\,ds = |u|^q u + f, \tag{22}$$

$$u(0) = u_0, \quad u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{23}$$

Определение 3. *Классическим решением задачи (22), (23)* называется функция $u(t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T]; H_0^1(\Omega))$, удовлетворяющая уравнению (22) для каждого $t \in [0,T]$ в смысле пространства $H_0^{-1}(\Omega)$, причём $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $f \in H_0^{-1}(\Omega)$.

Очевидно, что классическое решение задачи (22), (23) является сильным решением задачи (6)–(8).

3. Существование непродолжаемого решения. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A_0, A_j, L, DP и F на операторные коэффициенты. Тогда при дополнительном условии, что операторы $A_j(u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше для всех $u \in L^{p_j}(\Omega)$, для любых u_0 и u_1 из $H_0^1(\Omega)$ найдётся такое число $T_0 = T_0(u_0,u_1) > 0$, что существует единственное классическое решение задачи (6)–(8) класса $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T_0); H_0^1(\Omega))$, причём либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{t\uparrow T_0}\left\|\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u\right\|_0^*(t) = +\infty.$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6.4 работы [4].

4. Разрушение сильного решения задачи (6) при $q+2 > \overline{p}$. Рассмотрим классическое решение $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0); H_0^1(\Omega))$ задачи (22), (23). Прежде всего введём следующие обозначения:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\langle \Delta u - u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j-1}{p_j}\langle |u|^{p_j-2}u, u\rangle_j, \tag{24}$$

$$J(t) = \langle \Delta u' - u', u'\rangle_0 + \sum_{j=1}^n (p_j-1)\langle |u|^{p_j-2}u', u'\rangle_j. \tag{25}$$

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$(\Phi'(t))^2 \leqslant \overline{p}\,J(t)\Phi(t) \quad \text{\textit{при}} \quad \overline{p} = \max_{j=\overline{1,n}} p_j, \quad t \in [0,T_0). \tag{26}$$

Доказательство см. в работе [4, лемма 7.1].

Заметим, что определение 2 сильного решения задачи (6)–(8) эквивалентно равенству (21). Положив сначала в (21) $w = u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0); H_0^1(\Omega))$, из определения (24) функционала $\Phi(t) \in \mathbb{C}[0,T_0)$ и свойства (iv) условий DP

$$\left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}, u\right\rangle_0 = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{27}$$

получим *первое энергетическое равенство*

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int\limits_0^t ds\,(u(s), u(t))_1 = (|u|^q u, u)_2 + \langle f, u\rangle_0. \tag{28}$$

Теперь положим в равенстве (21) $w = u'(t) \in \mathbb{C}([0, T_0); H_0^1(\Omega))$ и с учётом определения (25) функционала $J(t)$ получим *второе энергетическое равенство*

$$J(t) + \int\limits_0^t ds\,(u(s), u'(t))_1 + \left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}, u' \right\rangle_0 = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(|u|^q u, u)_2 + \frac{d}{dt}\langle f, u\rangle_0, \tag{29}$$

где мы воспользовались тождеством

$$(|u|^q u, u')_2 = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}(|u|^q u, u)_2.$$

Выразив из равенства (28) величину $(|u|^q u, u)_2$ и подставив её в (29), после элементарных преобразований получим следующее выражение для функционала $J(t)$:

$$J(t) = \frac{1}{q+2}\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{q+2}(u,u)_1 - \left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}, u' \right\rangle_0 - \frac{q+1}{q+2}\int\limits_0^t (u(s), u'(t))\,ds + \frac{q+1}{q+2}\langle f, u'\rangle_0. \tag{30}$$

Для дальнейшего воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2, \quad a, b \geqslant 0,$$

с произвольным $\varepsilon > 0$. Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{q+2}(u,u)_1 \leqslant \frac{l}{q+2}\langle \Delta u - u, u\rangle_0 = \frac{2l}{q+2}\Phi(t), \tag{31}$$

$$\frac{q+1}{q+2}\left|\int\limits_0^t (u(s), u'(t))_1\,ds\right| \leqslant \frac{q+1}{q+2} l \int\limits_0^t \langle (\Delta u - u)(s), u(s)\rangle_0^{1/2} \langle (\Delta u' - u')(t), u'(t)\rangle_0^{1/2}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \langle (\Delta u' - u')(t), u'(t)\rangle_0 + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 l^2 \frac{T}{4\varepsilon}\int\limits_0^t \langle (\Delta u - u)(s), u(s)\rangle_0\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 l^2 \frac{T}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi(s)\,ds, \tag{32}$$

$$\frac{q+1}{q+2}|\langle f, u'\rangle_0| \leqslant \frac{q+1}{q+2}\|f\|_0^*\|u'\|_0 \leqslant \frac{q+1}{q+2}\|f\|_0^* \frac{1}{m_0^{1/2}}\langle \Delta u' - u', u'\rangle_0^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}, \tag{33}$$

$$\left|\left\langle \frac{\partial |u|^{1+q_0}}{\partial x_1}, u' \right\rangle_0\right| \leqslant \varepsilon \langle \Delta u' - u', u'\rangle_0 + \frac{b}{\varepsilon}\langle \Delta u - u, u\rangle_0^{1+q_0} \leqslant \varepsilon J(t) + \frac{d}{\varepsilon}\Phi^{1+q_0}(t), \tag{34}$$

где $d = 2^{1+q_0}b$. Итак, из равенства (30) с учётом (31)–(34) получим оценку

$$(1-3\varepsilon)J(t) \leqslant \frac{1}{q+2}\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \frac{2l}{q+2}\Phi(t) +$$

$$+\left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 l^2 \frac{T}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi(s)\,ds + \left(\frac{q+1}{q+2}\right)^2 \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon} + \frac{d}{\varepsilon}\Phi^{1+q_0}(t). \tag{35}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/3)$. Тогда из соотношений (26) и (35) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\Phi\Phi'' - \frac{q+2}{\overline{p}}(1-3\varepsilon)(\Phi')^2 + 2l\Phi^2 + \frac{(q+1)^2}{q+2}l^2\frac{T}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi(s)\,ds\,\Phi(t) +$$

$$+\frac{(q+1)^2}{q+2}\frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}\Phi + \frac{d(q+2)}{\varepsilon}\Phi^{2+q_0} \geqslant 0,$$

которое запишем, сделав замену $3\varepsilon \mapsto \varepsilon$, в следующем виде:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma_1\Phi + \gamma_2 T\int\limits_0^t \Phi(s)\,ds\,\Phi(t) + \gamma_3\Phi^{1+\lambda} \geqslant 0, \tag{36}$$

где

$$\alpha = \frac{q+2}{\overline{p}}(1-\varepsilon), \quad \beta = 2l, \quad \gamma_1 = \frac{(q+1)^2}{q+2}\frac{3\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon},$$

$$\gamma_2 = l^2\frac{(q+1)^2}{q+2}\frac{3}{2\varepsilon}, \quad \gamma_3 = \frac{3d(q+2)}{\varepsilon}, \quad \lambda = 1 + q_0. \tag{37}$$

Потребовав выполнения условия $\alpha > 1$, отсюда получим неравенства

$$0 < \varepsilon < \frac{q+2-\overline{p}}{q+2}, \quad q+2 > \overline{p}.$$

Кроме того, имеем

$$2\alpha - 1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2\varepsilon}{\overline{p}}, \quad \alpha_1 = 2(q+2) - \overline{p}, \quad \alpha_2 = 2(q+2).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $h(x) = x(\alpha_1 - \alpha_2 x) \geqslant 0$ при $x \in [0, \alpha_1/\alpha_2]$. Максимум этой функции достигается в точке

$$x_0 = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} = \frac{2(q+2)-\overline{p}}{4(q+2)}.$$

Пусть выполнено неравенство $q+2 > \overline{p}$. Теперь рассмотрим следующие два случая: $q + {}$ ${} + 2 \leqslant 3\overline{p}/2$ и $3\overline{p}/2 < q+2$. В первом случае имеем

$$x_0 = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} = \frac{2(q+2)-\overline{p}}{4(q+2)} \geqslant \frac{q+2-\overline{p}}{q+2},$$

а во втором

$$x_0 = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} = \frac{2(q+2)-\overline{p}}{4(q+2)} < \frac{q+2-\overline{p}}{q+2}.$$

Выберем параметр $\varepsilon > 0$, входящий в коэффициенты (37), таким образом, чтобы коэффициент $2\gamma_1/(2\alpha-1)$ принял минимальное значение. Это требование необходимо нам для того, чтобы включить в эффект *blow-up* как можно больше элементов $f \in H_0^{-1}(\Omega)$. Заметим, что этот коэффициент имеет вид

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha-1} = \frac{1}{\varepsilon(\alpha_1-\alpha_2\varepsilon)}\frac{\overline{p}(q+1)^2}{q+2}\frac{3\|f\|_0^{*2}}{2m_0}$$

– функции от $\varepsilon > 0$, которая принимает минимальное значение в точке

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} \dfrac{q+2-\overline{p}}{q+2}, & \text{если} \quad q+2 \leqslant \dfrac{3}{2}\overline{p}, \\ \dfrac{2(q+2)-\overline{p}}{4(q+2)}, & \text{если} \quad \dfrac{3}{2}\overline{p} < q+2. \end{cases}$$

Однако в случае $q+2 \leqslant 3/2\overline{p}$ мы имеем $\alpha = 1$, что нам не подходит. Поэтому выберем параметр ε следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \begin{cases} \dfrac{q+2-\overline{p}}{q+2} - \delta_0, & \text{если} \quad q+2 \leqslant \dfrac{3}{2}\overline{p}, \\ \dfrac{2(q+2)-\overline{p}}{4(q+2)}, & \text{если} \quad \dfrac{3}{2}\overline{p} < q+2, \end{cases}$$

для любого малого $\delta_0 > 0$. Подставим это значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ в коэффициенты (37).

Теперь проверим выполнимость условий следующей теоремы [1, теорема 1].

Теорема 3. *Пусть функция $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T_0)$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству (36) и $\Phi(0) > 0$, $\Phi'(0) > 0$, $\alpha > 1$, $1 < \lambda < 2\alpha - 1$, причём начальные условия $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ таковы, что существует T_1 – наименьший положительный корень уравнения*

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2 + \frac{\beta+\gamma_2T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}. \tag{38}$$

Тогда $\Phi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\Phi(t) \geqslant [\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T_1)t]^{1/(1-\alpha)} \tag{39}$$

для всех $t \in [0, \min\{T_1, T_0\})$, где

$$A(T_1) = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta+\gamma_2T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) - \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}\right] > 0.$$

Пусть $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $f \in H_0^{-1}(\Omega)$ – произвольные фиксированные функции, а функции $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ – единственное решение следующего уравнения в $H_0^{-1}(\Omega)$:

$$\Delta u_1 - u_1 - \sum_{j=1}^{n}(p_j-1)|u_0|^{p_j-2}u_1 = -\frac{\partial|u_0|^{1+q_0}}{\partial x_1} + |u_0|^q u_0 + f \in H_0^{-1}(\Omega). \tag{40}$$

Решение $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ этого уравнения, действительно, существует в силу теоремы Браудера–Минти [2, с. 98]. В нашем случае функционал $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T_0)$ имеет вид (24). Поэтому при $t = 0$ имеем

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}\langle\Delta u_0 - u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{p_j-1}{p_j}\langle|u_0|^{p_j-2}u_0, u_0\rangle_j,$$

а производная Фреше функционала $\Phi(t)$ имеет следующий вид:

$$\Phi'(t) = \langle \Delta u' - u', u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \langle (p_j - 1)|u|^{p_j-2}u', u\rangle_j.$$

Тогда получим

$$\Phi'(0) = \langle \Delta u_1 - u_1, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \langle (p_j - 1)|u|^{p_j-2}u_1, u_0\rangle_j.$$

Отсюда, с учётом равенства (40) и свойства (27), получим выражение

$$\Phi'(0) = (|u_0|^q u_0, u_0)_2 + \langle f, u_0\rangle_0.$$

Запишем уравнение (38) в следующем эквивалентном виде:

$$K_1 T_1^4 + K_2 T_1^2 + K_3 = 0,$$

где

$$K_1 = \frac{\gamma_2}{\alpha - 1}(\Phi(0))^2, \quad K_3 = \frac{1}{(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2,$$

$$K_2 = \frac{\beta}{\alpha - 1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1}\Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda} - (\Phi'(0))^2. \tag{41}$$

Введём функции

$$I_1(R) = (\Phi'(0)|_{Ru_0})^2 = ((|Ru_0|^q Ru_0, Ru_0)_2 + \langle f, Ru_0\rangle_0)^2 = (R^{q+2}(|u_0|^q u_0, u_0)_2 + R\langle f, u_0\rangle_0)^2,$$

$$I_2(R) = \Phi(0)|_{Ru_0} = R^2 \frac{1}{2}\langle \Delta u_0 - u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} R^{p_j}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle |u_0|^{p_j-2}u_0, u_0\rangle_j. \tag{42}$$

Подставим теперь в правые части равенств (41) вместо u_0 элемент Ru_0 при $R \geqslant 0$. Пусть, кроме того, $x = T_1^2$. Тогда биквадратное уравнение примет следующий вид:

$$K_1 x^2 + K_2 x + K_3 = 0. \tag{43}$$

Прежде всего заметим, что в силу условий

$$q + 2 > \overline{p} = \max_{j=\overline{1,n}} p_j, \quad 2(q+2) > \overline{p}(1+\lambda) \quad (\text{т.е.} \;\; \lambda < -1 + 2(q+2)/\overline{p})$$

и формул (42) коэффициент K_2 окажется отрицательным при достаточно большом $R > 0$ и при условии $(u_0|^q u_0, u_0)_2 \neq 0$.

Дискриминант $\mathcal{D} = K_2^2 - 4K_1K_3$ является положительным при достаточно большом $R > 0$. Итак, при достаточно большом $R > 0$ существует положительный корень уравнения (43)

$$T_1^2 = x = \frac{-K_2 + \sqrt{K_2^2 - 4K_1K_3}}{2K_1} > 0.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 4. *Пусть выполнены неравенства*

$$q + 2 > \overline{p}, \quad 0 < q_0 < 2\frac{q + 2 - \overline{p}}{\overline{p}};$$

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $f \in H_0^{-1}(\Omega)$; $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ является решением уравнения (40), причём

$$(|u_0|^q u_0, u_0) \neq 0.$$

Тогда при достаточно большом $R > 0$ для начальной функции Ru_0 функционал $\Phi(t)$, определённый формулой (24), удовлетворяет неравенству (39).

Справедливо следующее утверждение [4, лемма 7.4].

Лемма 2. *Имеет место двустороннее неравенство*

$$M_1\Phi^{1/2}(t) \leqslant \|A(u)\|_0^* \leqslant M_2\Phi^{1/2} + \sum_{j=1}^n B_j\Phi^{(p_j-1)/p_j}(t),$$

где положительные постоянные M_1, M_2 и B_j не зависят от $u(t)$; $A(u) := \Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2}u$.

Из этой леммы вытекает

Теорема 5. *Пусть выполнены неравенства*

$$q + 2 > \overline{p}, \quad 0 < q_0 < 2\frac{q+2-\overline{p}}{\overline{p}},$$

в качестве начальной функции $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ взята функция Ru_0, а $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ – решение уравнения (40) при $f \in H_0^{-1}(\Omega)$, в которое вместо u_0 нужно подставить Ru_0. Тогда при достаточно большом $R > 0$ время $T_0 > 0$ существования классического решения задачи (6)–(8) конечно, удовлетворяет предельному свойству

$$\lim_{t\uparrow T_0}\Phi(t) = +\infty,$$

и справедлива оценка сверху $T_0 \leqslant T_1$ на время разрушения решения, где число T_1 является положительным решением биквадратного уравнения (38).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артемьева М.В., Корпусов М.О.* Разрушение решений и локальная разрешимость абстрактной задачи Коши второго порядка с некоэрцитивным источником // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 4. С. 43–53.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
3. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Ser. Nonlin. Anal. Appl. 2011. V. 15. P. 648.
4. *Корпусов М.О.* Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Национальный исследовательский ядерный
университет "МИФИ", г. Москва

Поступила в редакцию 23.03.2023 г.
После доработки 31.05.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.