ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1143–1154

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2023 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2023. Т. 59. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S0374064123080137, EDN: ISASRE

Н. А. Изобов (Минск, ИМ НАН Беларуси), **А. В. Ильин** (Москва, Россия, ВМК МГУ) "Вариант антиперроновского эффекта смены показателей Ляпунова у двумерных дифференциальных систем при возмущениях высшего порядка малости" (20.02.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080149, EDN: ISDLNW

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, являющимися линейными приближениями для нелинейных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0. \tag{2}$$

У этих систем m-возмущения $f(t,y)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по всем переменным и имеют порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её:

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \text{const} > 0, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Эффект Перрона [1; 2, с. 50, 51] состоит в смене отрицательных характеристических показателей системы (1) на положительные значения у части решений системы (2) (с $m = 2$) и сохранении отрицательных показателей у решений оставшейся непустой части. Исследованию этого эффекта Перрона, в том числе и полного его варианта, посвящена серия наших работ (и, в частности, совместных с С.К. Коровиным), завершившаяся полным описанием [3, 4] суслинскими множествами совокупностей как положительных, так и отрицательных (и при их отсутствии) показателей всех нетривиальных решений системы (2) с возмущением (3).

Следует отметить, что суслинские множества впервые были использованы Е.А. Барабановым [5] для описания совокупностей нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем (их существование мощности континуума и даже положительной меры Лебега было установлено ранее одним из авторов настоящего сообщения).

Для возможных приложений представляет интерес противоположный антиперроновский эффект существования дифференциальных систем с линейным приближением со всеми положительными характеристическими показателями и малым возмущением из определенного

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

класса, имеющих нетривиальные решения с отрицательными показателями Ляпунова. Этот эффект исследован нами в случае экспоненциально убывающих [6] и исчезающих на бесконечности [7] линейных возмущений.

В настоящем сообщении предложен простейший вариант антиперроновского эффекта для возмущений высшего порядка малости.

Введём октанты

$$R_1^2 \equiv \{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : y_1\geqslant 0,\quad y_2\geqslant 0\},\quad R_2^2 \equiv \{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : y_1\leqslant 0,\quad y_2\geqslant 0\},$$

$$R_3^2 \equiv \{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : y_1\leqslant 0,\quad y_2\leqslant 0\},\quad R_4^2 \equiv \{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : y_1\geqslant 0,\quad y_2\leqslant 0\}$$

пространства $\mathbb{R}^2$.

Справедлива следующая

Теорема. *Для любых параметров* $\lambda_2\geqslant\lambda_1>0,\ \ m>\theta>1$ *существуют:*

1) двумерная линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A)=\lambda_i,\ \ i=1,2;$

2) бесконечно дифференцируемое по $t\geqslant t_0$ *и* $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ m*-возмущение (3)*

$$f(t,y)\colon [t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

такое, что нелинейная возмущённая система (2) имеет решения

$$Y_i(t)\in R_i^2,\quad t\in[t_0,+\infty),\quad i=\overline{1,4},$$

с показателями Ляпунова

$$\lambda[Y_i]=-\frac{(1+\theta)(m\lambda_1+\theta\lambda_2)}{m^2-\theta^2}<0,\quad i=\overline{1,4}.$$

Литература. 1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. H. 5. S. 702–728. 2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006. 3. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472. 4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589. 5. Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853. 6. Изобов Н.А., Ильин А.В. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457. 7. Изобов Н.А., Ильин А.В. Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1443–1452.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (МГУ ВМК, Москва, Россия) “Оптимизация с помощью управления весовой и начальной функциями в параболической экстремальной задаче с точечным наблюдением” (20.03.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080150, EDN: ISEPGM

Рассматривается смешанная задача для параболического уравнения:

$$u_t=(a(x,t)u_x)_x+b(x,t)u_x+h(x,t)u,\quad (x,t)\in Q_T=(0,1)\times(0,T),\quad T>0, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad u_x(1,t)=\psi(t),\quad 0<t<T,\quad u(x,0)=\xi(x),\quad 0<x<1, \tag{2}$$

с гладкими коэффициентами a, b, h в области $\overline{Q}_T$. Кроме того, предполагается, что граничные функции φ и ψ принадлежат пространству $W_2^1(0,T)$, а начальная функция ξ –

пространству $L_2(0,1)$. Исследуется следующая задача управления с точечным наблюдением: фиксируя функции ξ, ψ и управляя температурой φ на левом конце отрезка, стараемся добиться того, чтобы температура $u(x_0,\cdot\,)$ в заданной точке $x_0\in(0,1)$ оставалась интегрально близкой с некоторым весом ρ к заданной функции $z(\cdot)$ на всём интервале времени $(0,T)$. Таким образом, рассматривается задача минимизации интегрального функционала качества по φ. Продолжая исследования [1–4], мы изучаем также задачу об экстремуме полученного значения по некоторому классу весовых функций ρ.

Различные типы экстремальных задач с финальным или распределённым наблюдениями для параболических уравнений изучались в работах [5, 6].

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство функций $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(0,1)}+\|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых отображение $[0,T]\to L_2(0,1)$, действующее по правилу $t\mapsto u(\,\cdot\,,t)$, непрерывно [7, с. 15]. Через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ обозначим множество функций $\eta\in W_2^1(Q_T)$, для которых $\eta(\,\cdot\,,T)=\eta(0,\cdot\,)=0$. *Слабым решением* задачи (1), (2) будем называть функцию $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot\,)=\varphi$ и для всех $\eta\in\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(a(x,t)u_x\eta_x-b(x,t)u_x\eta-h(x,t)u\eta-u\eta_t)\,dx\,dt=\int\limits_0^1\xi(x)\eta(x,0)\,dx+\int\limits_0^T a(1,t)\psi(t)\,\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1 [8]. *Задача (1), (2) имеет единственное слабое решение $u\in V_2^{1,0}(Q_T)$, причём существует такая константа C (не зависящая от φ, ψ, ξ), что выполняется неравенство*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)}\leqslant C(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)}+\|\psi\|_{W_2^1(0,T)}+\|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Пусть $\Phi\subset W_2^1(0,T)$ – множество управляющих функций φ, которое далее считаем непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, а $Z\subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Рассмотрим функционал

$$J[z,\rho,\varphi]=\int\limits_0^T(u_\varphi(x_0,t)-z(t))^2\rho(t)\,dt,\quad \varphi\in\Phi,\quad z\in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1), (2) с заданной управляющей функцией φ, а ρ – весовая функция из множества $P=\{\rho\in L_\infty(0,T):\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t\in(0,T)}\rho(t)>0\}$. Зафиксировав функции z и ρ, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi]=\inf_{\varphi\in\Phi}J[z,\rho,\varphi].$$

Теорема 2 [3, 8, 9]. *Для любых функций $z\in L_2(0,T)$ и $\rho\in P$ существует единственная функция $\varphi_0\in\Phi$, для которой*

$$m[z,\rho,\Phi]=J[z,\rho,\varphi_0].$$

Для чисел $\rho_2>\rho_1>0$ введём подкласс $\widetilde{P}\subset\{\rho\in P:\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t\in(0,T)}\rho(t)\geqslant\rho_1,\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,T)}\rho(t)\leqslant\rho_2\}$ и поставим задачу нахождения величин

$$M_1[z,\widetilde{P},\Phi]=\inf_{\rho\in\widetilde{P}}m[z,\rho,\Phi]\quad\text{и}\quad M_2[z,\widetilde{P},\Phi]=\sup_{\rho\in\widetilde{P}}m[z,\rho,\Phi].$$

Определение [10]. Подмножество $Y\subset X^*$ пространства, сопряжённого к банахову пространству X, называется *регулярно выпуклым*, если для любого $y\in X^*\setminus Y$ существует такое $x_0\in X$, что $\sup\limits_{f\in Y}f(x_0)<y(x_0)$.

Теорема 3. *Если множество* $\widetilde{P}$ *регулярно выпукло в* $L_\infty(0,T)$*, то для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *существуют функции* $\rho_i \in \widetilde{P}$ *и* $\varphi_i \in \Phi$*,* $i = 1, 2$*, для которых*

$$M_i[z, \widetilde{P}, \Phi] = J[z, \rho_i, \varphi_i]. \tag{3}$$

В доказательстве теоремы 3 используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [10, теорема 10]. *Если* X *– сепарабельное банахово пространство, то множество* $Y \subset X^*$ *регулярно выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло и* $*$*-слабо замкнуто.*

Лемма 2 [11, гл. 8, § 7]. *Для любой ограниченной последовательности* $\rho_1, \rho_2, \ldots \in L_\infty(0,T)$ *существуют подпоследовательность* $(\rho_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *и такая функция* $\rho_0 \in L_\infty(0,T)$*, что при любой функции* $\zeta \in L_1(0,T)$ *выполнено равенство*

$$\lim_{j\to+\infty} \int\limits_0^T \rho_{k_j}(t)\zeta(t)\,dt = \int\limits_0^T \rho_0(t)\zeta(t)\,dt.$$

Замечание. Отметим, что равенство (3) теоремы 3 при $i = 1$ установлено в работе [4].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 2. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 3. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 4. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об одной задаче двойного экстремума в параболической задаче управления с точечным наблюдением // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1583–1585. 5. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications (Graduate Studies in Mathematics). V. 112. Providence, 2010. 6. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 8. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274. 9. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504. № 1. С. 28–31. 10. Krein M., Šmuljan V. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space // Ann. of Math. 1940. V. 41. № 3. P. 556–583. 11. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск, 2001.

А. И. Астровский (БГЭУ, Минск, Беларусь) “О преобразовании линейных нестационарных систем наблюдения к стационарному виду” (27.03.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080162, EDN: ISNQON

Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ линейную нестационарную систему наблюдения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

у которой $x(t)$ – n-вектор-столбец состояния в момент t, а $n{\times}n$-матричная функция $A(t)$ и n-вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T. Отождествим систему наблюдения (1) с парой матричных функций (A, c), а совокупность всех таких пар с непрерывными элементами обозначим через Σ_n.

Пусть $\mathcal{G}$ – группа, состоящая из невырожденных при каждом $t \in T$ $n \times n$-матричных функций с непрерывно дифференцируемыми элементами. Действие “ $*$ ” группы $\mathcal{G}$ на множестве Σ_n определим стандартным образом:

$$G * (A, c) := (G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G}, cG), \quad G \in \mathcal{G}, \quad (A, c) \in \Sigma_n.$$

Через $\mathcal{O}(A,c)$ обозначим порождённую парой (A,c) орбиту действия группы $\mathcal{G}$, а множество орбит действия группы $\mathcal{G}$ на множестве Σ_n обозначим через $\Sigma_n/\mathcal{G}$. Орбиту, в которой существует стационарная система (т.е. система (1), у которой матрица $A(t)$ и вектор-строка $c(t)$ постоянны при $t\in T$), будем называть *стационарной*. Опишем условия на матрицы системы (1), при выполнении которых её орбита будет стационарной.

Пусть $\mathcal{Y}_T(A,c)$ – множество всех выходных функций системы (1), т.е.

$$\mathcal{Y}_T(A,c)=\{y\in C(T,\mathbb{R}): y(t)=c(t)F_A(t,t_0)x_0,\quad t\in T,\quad x_0\in\mathbb{R}^n\},$$

где $F_A(t,t_0)$ – матрица Коши системы (1).

Несложно видеть [1, с. 42–44, лемма 2.3], что две системы (A,c) и (B,d) из множества Σ_n принадлежат одной и той же орбите относительно действия группы $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда их множества выходов $\mathcal{Y}_T(A,c)$ и $\mathcal{Y}_T(B,d)$ совпадают. Отсюда следует, что задаваемое системой (A,c) отображение $H\colon\mathbb{R}^n\to\mathcal{Y}_T(A,c)$, $x_0\mapsto H(x_0):=\{y(t)=c(t)F_A(t,t_0)x_0 : t\in T\}$, инвариантно относительно действия группы $\mathcal{G}$. Однако построение этого отображения непосредственно по параметрам исходной системы в общем случае невозможно, так как равносильно интегрированию линейной дифференциальной системы в (1). Ниже укажем полный инвариант действия группы $\mathcal{G}$ на множестве равномерно наблюдаемых систем.

Говорят [2, с. 225, 226], что система (1) *равномерно наблюдаема* на T, если каждая её выходная функция $y\in\mathcal{Y}_T(A,c)$ является $n-1$ раз непрерывно дифференцируемой на T и отображение $x(t)\mapsto(y(t),y^{(1)}(t),\ldots,y^{(n-1)}(t))$, задаваемое системой (1), инъективно для любого $t\in T$. Множество равномерно наблюдаемых систем из Σ_n обозначим через $\mathcal{R}$.

Пусть орбита $\mathcal{O}(A,c)$ пары $(A,c)\in\Sigma_n$ является стационарной. Тогда, поскольку, как отмечено выше, множество выходных функций для каждой системы из орбиты одно и то же, каждая выходная функция из множества $\mathcal{Y}_T(A,c)$ бесконечно дифференцируема. Следовательно [1, с. 35, 36], для этой пары (A,c) можно по следующему рекуррентному правилу определить n-вектор-строки:

$$s_0(t)=c(t),\quad s_i(t)=s_{i-1}(t)A(t)+\dot{s}_{i-1}(t),\quad i\in\mathbb{N},\tag{2}$$

и построить по первым n из них для пары (A,c) матрицу наблюдаемости

$$S(A,c)(t):=\operatorname{col}(s_0(t),\ldots,s_{n-1}(t)).$$

Для бесконечно дифференцируемых выходных функций пары $(A,c)\in\Sigma_n$ методом математической индукции несложно показать, что $y^{(i)}(t)=s_i(t)x(t)$, $i\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Так как для двух систем (A,c) и (B,d) из одной орбиты их матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ и $S(B,d)(t)$ связаны равенством $S(A,c)(t)=G(t)S(B,d)(t)$ для некоторой $G\in\mathcal{G}$, то если система (A,c) принадлежит стационарной орбите, ранг её матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ для всех $t\in T$ принимает одно и то же значение.

Доказано [1, с. 38], что ранг матрицы наблюдаемости $S(A,c)(t)$ равен n при любом $t\in T$ для каждой пары (A,c) из множества $\mathcal{R}$ равномерно наблюдаемых систем. Поэтому, как следует из предыдущего, матрица $G(t)$, связывающая две равномерно наблюдаемые системы (A,c) и (B,d) из одной орбиты, имеет вид $G(t)=S^{-1}(A,c)(t)S(B,d)(t)$.

Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество равномерно наблюдаемых систем, у которых каждая выходная функция непрерывно дифференцируема не менее n раз (это гарантирует существование n-вектор-строки $s_n(t)$). Доказано [1, с. 66], что отображение

$$f\colon\mathcal{R}_n\to C(T,\mathbb{R}^n),\quad f(A,c)(t):=s_n(t)S^{-1}(A,c)(t),\tag{3}$$

является полным инвариантом действия группы $\mathcal{G}$ на множестве $\mathcal{R}_n$. Другими словами, отображение f, определённое соотношением (3), принимает одно и то же значение на орбите $\mathcal{O}(A,c)$ пары $(A,c)\in\mathcal{R}_n$ и имеет разные значения на различных орбитах.

Пусть $\mathcal{R}_n^c$ – подмножество множества $\mathcal{R}_n$, для каждой системы (A,c) которого полный инвариант $f(A,c)(t)=\operatorname{col}(f_1(A,c)(t),\ldots,f_n(A,c)(t))$ является не изменяющейся по времени функцией, т.е. $\mathcal{R}_n^c := \{(A,c) \in \mathcal{R}_n : f_j(A,c)(t) \equiv \gamma_j, \ \gamma_j \in \mathbb{R}, \ j = \overline{1,n}\}$. Понятно, что множество стационарных наблюдаемых систем вида (1) является подмножеством множества $\mathcal{R}_n^c$ и полный инвариант для таких систем совпадает с вектором из последовательных коэффициентов характеристического многочлена их матрицы коэффициентов.

Сказанное выше позволяет сформулировать следующие утверждения.

Теорема 1. *Равномерно наблюдаемая пара* $(A,c) \in \Sigma_n$ *обладает стационарной орбитой относительно группы* $\mathcal{G}$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству* $\mathcal{R}_n^c$.

Теорема 2. *В орбите* $\mathcal{O}(A,c)$ *пары* $(A,c) \in \Sigma_n$ *имеется стационарная наблюдаемая пара тогда и только тогда, когда каждая выходная функция системы* (A,c) *бесконечно дифференцируема и существуют такие действительные числа* $\alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_{n-1}$, *что для всех* $t \in T$ *выполняется равенство*

$$s_n(t) = \alpha_0 s_0(t) + \ldots + \alpha_{n-1} s_{n-1}(t).$$

Приведём способ построения эквивалентной стационарной системы наблюдения для линейной нестационарной равномерно наблюдаемой системы (1), если такая имеется.

1. Для заданной пары $(A,c) \in \Sigma_n$ по рекуррентным формулам (2) находим n-вектор-строки $s_i(t)$, $i = \overline{0, n-1}$. Если их нельзя построить, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ нет.

2. Формируем матрицу наблюдаемости $S(A,c)(t)$. Если ранги матрицы $S(A,c)(t)$ при разных $t \in T$ не совпадают, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ нет. Это следует из равенства $S(A,c)(t) = G(t)S(B,d)(t)$ для систем из одной орбиты и того факта, что для стационарной системы ранг матрицы наблюдаемости не зависит от $t \in T$.

Далее алгоритм работает только для случая равномерно наблюдаемой пары, т.е. когда $\operatorname{rank} S(A,c)(t) = n$ для всех $t \in T$. Поэтому проверяем невырожденность матрицы $S(A,c)(t)$ при всех $t \in T$.

3. Вычисляем полный инвариант $f(A,c)(t)$ по формуле (3). Если его значение равно некоторому постоянному вектору, то пара (A,c) преобразуется к стационарной системе при помощи преобразования $G(t) = S^{-1}(A,c)(t)$. Если значения полного инварианта зависят от переменной t, то стационарной системы в орбите $\mathcal{O}(A,c)$ нет.

Отметим, что в отличие от классического, введённого А.М. Ляпуновым, понятия приводимости для линейных дифференциальных систем на бесконечном промежутке времени, свойство приводимости для систем наблюдения (1) означает возможность одновременного преобразования матричных функций $A(t)$ и $c(t)$ к стационарным (постоянным) матрицам на конечном промежутке T. Множество приводимых по Ляпунову систем является важным классом линейных нестационарных систем, так как многие свойства таких систем (устойчивость, стабилизируемость и др.) изучаются посредством стационарных систем. Н.П. Еругин [3] заложил основы общей теории приводимых систем, доказал ряд необходимых и достаточных условий приводимости линейных дифференциальных систем и описал некоторые подклассы таких систем.

Литература. 1. Астровский А.И., Гайшун И.В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск, 2013. 2. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск, 1999. 3. Еругин Н.П. Приводимые системы // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1946. Т. 13. С. 3–96.

В. А. Зайцев, И. Г. Ким (УдГУ, Ижевск, Россия) “Назначение конечного спектра и стабилизация билинейных систем с сосредоточенным и распределённым запаздываниями” (10.04.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080174, EDN: ISSNVD

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{K}\}$ – линейное n-мерное пространство над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ – пространство $m \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I \in M_n(\mathbb{K})$ – единичная матрица; $\operatorname{Sp} H$ – след матрицы H.

Рассмотрим билинейную стационарную дифференциальную систему с сосредоточенным и распределённым запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + u_1 A_1 x(t) + \ldots + u_r A_r x(t) + B_0 x(t-h) + v_1 B_1 x(t-h) + \ldots + v_s B_s x(t-h) +$$

$$+\int\limits_{-h}^{0}(C_0(\tau)+w_1(\tau)C_1+\ldots+w_\ell(\tau)C_\ell)x(t+\tau)\,d\tau,\quad t>0, \tag{1}$$

с начальным условием $x(\tau)=\zeta(\tau)$, $\tau\in[-h,0]$, где $\zeta\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^n$ – непрерывная функция; здесь $A_j,B_\mu,C_\xi\in M_n(\mathbb{K})$, $j=\overline{0,r}$, $\mu=\overline{0,s}$, $\xi=\overline{1,\ell}$; $C_0\colon[-h,0]\to M_n(\mathbb{K})$ – интегрируемая функция; $h>0$ – постоянное запаздывание; $x\in\mathbb{K}^n$ – вектор состояния, $u=\operatorname{col}(u_1,\ldots,u_r)\in\mathbb{K}^r$ и $v=\operatorname{col}(v_1,\ldots,v_s)\in\mathbb{K}^s$ – векторы управления, $w=\operatorname{col}(w_1,\ldots,w_\ell)\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^\ell$ – интегрируемая функция управления.

Обозначим характеристическую функцию системы (1) через $\varphi(\lambda)$, т.е.

$$\varphi(\lambda)=\det\biggl[\lambda I-\biggl(A_0+\sum_{j=1}^{r}u_jA_j\biggr)-e^{-\lambda h}\biggl(B_0+\sum_{\mu=1}^{s}v_\mu B_\mu\biggr)-\int\limits_{-h}^{0}\biggl(C_0(\tau)+\sum_{\xi=1}^{\ell}w_\xi(\tau)C_\xi\biggr)e^{\lambda\tau}\,d\tau\biggr].$$

Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda)=0$ системы (1) имеет вид

$$\lambda^n+\gamma_1(\lambda)\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_{n-1}(\lambda)\lambda+\gamma_n(\lambda)=0, \tag{2}$$

где

$$\gamma_i(\lambda)=\sum_{j=0}^{i}\delta_{i0j}\exp(-\lambda jh)+\sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{j=0}^{i-\alpha}\int\limits_{-h}^{0}\cdots\int\limits_{-h}^{0}\delta_{i\alpha j}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha)\exp\biggl(\lambda\biggl(\sum_{\nu=1}^{\alpha}\tau_\nu-jh\biggr)\biggr)\,d\tau_1\cdots d\tau_\alpha, \tag{3}$$

$i=\overline{1,n}$. Здесь числа δ_{i0j}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,i}$, и функции $\delta_{i\alpha j}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha)$, $\tau_\nu\in[-h,0]$, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,i}$, $j=\overline{0,i-\alpha}$, $\nu=\overline{1,\alpha}$, зависят от коэффициентов A_j $(j=\overline{0,r})$, B_μ $(\mu=\overline{0,s})$, C_ξ $(\xi=\overline{1,\ell})$, $C_0(\tau)$ $(\tau\in[-h,0])$, векторов u, v и функции $w(\tau)$ $(\tau\in[-h,0])$ управления системы (1).

Множество $\sigma=\{\lambda\in\mathbb{C}:\varphi(\lambda)=0\}$ корней характеристического уравнения (2), (3) называется *спектром* системы (1). В общем случае спектр σ системы (1) состоит из бесконечного числа точек. Если в уравнении (2) числа δ_{i0j} равны нулю для всех $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,i}$, и функции $\delta_{i\alpha j}(\tau_1,\ldots,\tau_\alpha)$ тождественно нулевые, $\tau_\nu\in[-h,0]$, $i=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,i}$, $j=\overline{0,i-\alpha}$, $\nu=\overline{1,\alpha}$, то характеристическая функция представляет собой полином, и спектр σ является конечным множеством.

Рассмотрим задачу назначения произвольного конечного спектра σ для системы (1).

Определение. Для системы (1) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра*, если для любых $\gamma_i\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, существуют постоянные векторы $u\in\mathbb{K}^r$, $v\in\mathbb{K}^s$ и интегрируемая функция $w\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^\ell$ такие, что характеристическая функция системы (1) удовлетворяет равенству $\varphi(\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$.

Предположим, что коэффициенты системы (1) имеют следующий специальный вид: матрица A_0 имеет нижнюю форму Хессенберга с ненулевыми элементами первой наддиагонали; для некоторого $p\in\{1,\ldots,n\}$ первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матрицы A_j, $j=\overline{1,r}$, равны нулю, т.е.

$$A_0=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad a_{i,i+1}\ne0,\quad i=\overline{1,n-1}; \tag{4}$$

$$A_j=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \widehat{A}_j & 0\end{bmatrix},\quad \widehat{A}_j\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad j=\overline{1,r}. \tag{5}$$

Будем предполагать, что матрицы B_μ $(\mu=\overline{0,s})$, C_ξ $(\xi=\overline{1,\ell})$, $C_0(\tau)$ $(\tau\in[-h,0])$ системы (1) также имеют специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов этих матриц равны нулю, т.е.

$$B_\mu=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \widehat{B}_\mu & 0\end{bmatrix},\quad \widehat{B}_\mu\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad \mu=\overline{0,s}, \tag{6}$$

$$C_0(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \widehat{C}_0(\tau) & 0\end{bmatrix},\quad C_\xi=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \widehat{C}_\xi & 0\end{bmatrix},\quad \widehat{C}_0(\tau),\widehat{C}_\xi\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad \xi=\overline{1,s},\quad \tau\in[-h,0]. \tag{7}$$

Здесь число p то же самое, что и в (4).

По системе (1) построим матрицы $\varGamma_0\in M_{n,r}(\mathbb{K})$, $\varGamma_1\in M_{n,s}(\mathbb{K})$, $\varGamma_2\in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ и $\varLambda_1,\varLambda_2(\tau)\in$ $\in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\varGamma_0=[\mathrm{Sp}\,(A_jA_0^{i-1})]_{i,j=1}^{n,r},\quad \varGamma_1=[\mathrm{Sp}\,(B_jA_0^{i-1})]_{i,j=1}^{n,s},\quad \varGamma_2=[\mathrm{Sp}\,(C_jA_0^{i-1})]_{i,j=1}^{n,\ell}, \tag{8}$$

где i – номер строки, j – номер столбца,

$$\Lambda_1=\mathrm{col}\,[\mathrm{Sp}\,B_0,\mathrm{Sp}\,(B_0A_0),\ldots,\mathrm{Sp}\,(B_0A_0^{n-1})],$$

$$\Lambda_2(\tau)=\mathrm{col}\,[\mathrm{Sp}\,C_0(\tau),\mathrm{Sp}\,(C_0(\tau)A_0),\ldots,\mathrm{Sp}\,(C_0(\tau)A_0^{n-1})], \tag{9}$$

и матрицы $\varDelta_1=[\varGamma_1,\varLambda_1]\in M_{n,s+1}(\mathbb{K})$, $\varDelta_2(\tau)=[\varGamma_2,\varLambda_2(\tau)]\in M_{n,\ell+1}(\mathbb{K})$.

Теорема 1. *Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4)–(7). Тогда задача назначения произвольного конечного спектра для системы (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(C1) $\mathrm{rank}\,\varGamma_0=n$;

(C2) $\mathrm{rank}\,\varGamma_1=\mathrm{rank}\,\varDelta_1$;

(C3) $\mathrm{rank}\,\varGamma_2=\mathrm{rank}\,\varDelta_2(\tau)$ *для п.в.* $\tau\in[-h,0]$.

Рассмотрим задачу стабилизации системы (1): требуется построить векторы $u\in\mathbb{K}^r$, $v\in$ $\in\mathbb{K}^s$ и интегрируемую функцию $w\colon[-h,0]\to\mathbb{K}^\ell$ такие, чтобы система (1) была асимптотически устойчивой. Система (1) является асимптотически устойчивой, если её спектр σ лежит в левой полуплоскости $\omega:=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,\lambda<0\}$. Если задача назначения произвольного конечного спектра разрешима, то, выбирая многочлен $\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$, $\gamma_i\in\mathbb{K}$, таким, чтобы его корни лежали в области ω, приходим к асимптотически устойчивой системе (1). Таким образом, из теоремы 1 вытекает очевидное

Следствие 1. *Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4)–(7) и выполнены условия (C1)–(C3). Тогда система (1) асимптотически стабилизируема.*

Рассмотрим теперь систему (1), когда матрицы C_ξ $(\xi=\overline{1,\ell})$ являются переменными ($C_\xi\colon[-h,0]\to M_n(\mathbb{K})$ – непрерывные функции, $\xi=\overline{1,\ell}$):

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+u_1A_1x(t)+\ldots+u_rA_rx(t)+B_0x(t-h)+v_1B_1x(t-h)+\ldots+v_sB_sx(t-h)+$$
$$+\int\limits_{-h}^{0}(C_0(\tau)+w_1(\tau)C_1(\tau)+\ldots+w_\ell(\tau)C_\ell(\tau))x(t+\tau)\,d\tau,\quad t>0. \tag{10}$$

Будем предполагать, что матрицы системы (10) имеют специальный вид (4)–(6) и

$$C_\xi(\tau)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \widehat{C}_\xi(\tau) & 0\end{bmatrix},\quad \widehat{C}_\xi(\tau)\in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}),\quad \xi=\overline{0,s},\quad \tau\in[-h,0]. \tag{11}$$

Построим матрицы $\varGamma_0$ и $\varGamma_1$ (см. (8)), матрицу $\varPsi_2(\tau)=[\mathrm{Sp}\,(C_\xi(\tau)A_0^{i-1})]_{i,\xi=1}^{n,\ell}$, $\tau\in[-h,0]$, и матрицы (9).

Теорема 2. *Пусть матрицы системы (10) имеют специальный вид (4)–(6), (11). Тогда задача назначения произвольного конечного спектра для системы (10) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия (С1), (С2) и следующее условие:*

(С4) для почти всякого $\tau \in [-h, 0]$ *система линейных уравнений* $\Psi_2(\tau)X(\tau) = \Lambda_2(\tau)$ *разрешима относительно* $X(\tau) \in \mathbb{K}^{\ell}$*, и решение* $X(\tau)$*,* $\tau \in [-h, 0]$*, является интегрируемой на* $[-h, 0]$ *функцией.*

Следствие 2. *Условия теоремы 2 являются достаточными условиями стабилизации системы (10).*

Приведённые в докладе результаты обобщают результаты работы [1] на билинейные системы, содержащие распределённое запаздывание.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01483-23-00 (проект FEWS-2020-0010).

Литература. 1. Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в билинейных системах с запаздыванием в состоянии // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 19–28.

Е. С. Можегова, Н. Н. Петров (УдГУ, Ижевск, Россия) “Об одной задаче конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов во временны́х шкалах” (17.04.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080186, EDN: ISSNXZ

Определение 1. Непустое замкнутое множество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^1$ такое, что $\sup\{t : t \in \mathbb{T}\} = +\infty$, называется *временно́й шкалой.*

Определение 2 [1]. Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-*дифференцируемой в точке* $t \in \mathbb{T}$, если существует число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

справедливо для всех $s \in \mathbb{T}\bigcap(t - \delta, t + \delta)$, где $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$. Число γ в этом случае называется Δ-*производной* функции f в точке t. Будем обозначать Δ-производную функции f в точке t через $f^{\Delta}(t)$.

Пусть задана некоторая временна́я шкала $\mathbb{T}$ и точка $t_0 \in \mathbb{T}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей P_1, ..., P_n и m убегающих E_1, ..., E_m с законами движения вида

$$x_i^{\Delta} = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j^{\Delta} = v_j, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad u_i, v_j \in W.$$

Здесь $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, $W = \{w \in \mathbb{R}^k : \|w\| \leqslant 1\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I$, $j \in J$.

Цель группы преследователей состоит в том, чтобы “переловить” всех убегающих. Цель группы убегающих – помешать этому, т.е. предоставить возможность хотя бы одному из убегающих уклониться от встречи (точные определения приводятся ниже).

Убегающие используют кусочно-программные стратегии, преследователи – кусочно-программные контрстратегии. Пусть $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z^0)$.

Определение 3. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит *уклонение от встречи*, если существуют кусочно-программные стратегии V_1, ..., V_m убегающих E_1, ..., E_m такие, что для любых траекторий $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ преследователей P_1, ..., P_n найдётся номер $p \in J$, при котором для всех $i \in I$ и $t \in \mathbb{T}$ выполнено соотношение $y_p(t) \neq x_i(t)$, где $y_p(t)$ – реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E_p.

Определение 4. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит *поимка*, если для некоторого момента $T > t_0$, $T \in \mathbb{T}$, при любых кусочно-программных стратегиях V_1, ..., V_m убегающих E_1, ..., E_m существуют кусочно-программные контрстратегии U_1, ..., U_n преследователей P_1, ..., P_n такие, что найдутся моменты $\tau_1, \ldots, \tau_m \in [t_0, T]\bigcap\mathbb{T}$ и номера $s_1, \ldots, s_m \in I$, для которых выполнены равенства $y_j(\tau_j) = x_{s_j}(\tau_j),\ \ j \in J,$ где $x_i(t),\ \ i \in I,$ и $y_j(t),\ \ j \in J,$ – реализовавшиеся в данной ситуации траектории игроков $P_i,\ \ i \in I,$ и $E_j,\ \ j \in J,$ соответственно.

Теорема 1. *Для любых натуральных чисел* $p, m \geqslant p \cdot 2^p + 2$ *в игре* $\Gamma(2^p + 1, m, z^0)$ *происходит уклонение от встречи из произвольных начальных позиций* z^0.

Теорема 2. *Для любого натурального числа* p *в игре* $\Gamma((k+1)^p, p(k+1)^{p-1}, z^0)$ *происходит поимка при некотором векторе начальных позиций* z^0.

Определим функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ условием $f(n) = \min\{m\colon$ в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи из произвольных начальных позиций $z^0\}$.

Теорема 3. *Существуют положительные константы* C_1 *и* C_2 *такие, что для всех натуральных* $n,\ \ n \neq 1,$ *справедливо неравенство*

$$C_1 n \ln n \leqslant f(n) \leqslant C_2 n \ln n.$$

Отметим, что результаты работы [2] являются следствием приведённых в докладе результатов при $\mathbb{T} = \mathbb{R}^1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

Литература. 1. Guseinov G.S. Integration on time scales // J. of Math. Anal. Appl. 2003. V. 285. № 1. P. 107–127. 2. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре “казаки-разбойники” // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.

В.Е. Хартовский (ГрГУ, Гродно, Беларусь) “Условия асимптотической наблюдаемости линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием” (15.05.2023).

DOI: 10.31857/S0374064123080198, EDN: ISVQOF

В работе [1] для линейных автономных систем запаздывающего типа введено понятие асимптотической наблюдаемости, предполагающее возможность однозначного восстановления неустойчивой части решения по результатам наблюдаемого выхода, а также предложена конструкция наблюдателей, формирующих асимптотическую оценку решения асимптотически наблюдаемых систем. Важным аспектом такого подхода является отсутствие требования спектральной наблюдаемости у исходного объекта. В статье [2] свойство асимптотической наблюдаемости используется для формирования асимптотической оценки решения систем нейтрального типа.

В докладе идеи работ [1, 2] обобщаются на вполне регулярные линейные автономные дифференциально-алгебраические системы с соизмеримыми запаздываниями, имеющие вид

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0. \tag{2}$$

Здесь $D \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda],\ \ C(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{k\times n}[\lambda]$ – множество полиномиальных матриц переменной λ); λ_h – оператор сдвига, определённый для заданного $h > 0$ правилом $\lambda_h f(t) = f(t-h)$; функция $y(t),\ \ t > 0,$ – наблюдаемый выходной сигнал. Решение уравнения (1) однозначно определяется начальным условием

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0] \quad (m = \deg A(\lambda)),$$

где η – кусочно-непрерывная функция такая, что функция $D\eta$ непрерывна. Далее предполагаем, что функция η неизвестна. Условие полной регулярности уравнения (1) имеет вид

$$\deg |pD - A(0)| = n_1, \tag{3}$$

здесь и ниже $n_1 = \operatorname{rank} D$, $n_1 \leqslant n$. Заметим, что множество дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием (1), удовлетворяющих условию полной регулярности (3), включает в себя класс систем нейтрального типа, кроме того, к таким системам в ряде случаев сводится анализ непрерывно-дискретных систем.

Один и тот же выход $y(t)$, $t > t_0$ $(t_0 \geqslant 0)$, может порождаться различными решениями $x(t)$, $t > t_0$, уравнения (1). Каждое такое решение $x(t)$, $t > t_0$, будем называть *совместимым* с выходом $y(t)$, $t > t_0$.

Определение. Систему (1), (2) назовём *асимптотически наблюдаемой*, если для любых двух решений x^1 и x^2 уравнения (1), совместимых с выходами y^1 и y^2 соответственно, выполняется условие: если при некотором $t_0 > 0$ выполняется тождество $y^1(t) \equiv y^2(t)$, $t > t_0$, то $\|x^1(t) - x^2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Очевидно, что введённое этим определением свойство асимптотической наблюдаемости равносильно выполнению условия: $\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех решений системы (1), совместимых с нулевым выходом $y(t) \equiv 0$, $t > t_0$.

Введём множество

$$\mathbf{P} = \left\{ p \in \mathbb{C} : \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} < n \right\},$$

где $W(p, \lambda) = Dp - A(\lambda)$. Если множество $\mathbf{P}$ является пустым, то при $t > t_1$ $(t_1 > 0$ – некоторое число) существует взаимно однозначное соответствие между множеством решений уравнения (1) и множеством выходов (2) (см. [3, 4]).

Пусть $n_2 = n - n_1$, а $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ и $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ – матрицы фундаментальных систем решений линейных алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно. В статье [4] показано, что условие

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \Gamma_1 A(\lambda) \Gamma_2 \\ C(\lambda) \Gamma_2 \end{pmatrix} = n_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

необходимо для существования $t_1 > 0$ и непрерывной (в частности, не зависящей от производных выхода (2)) операции $\mathfrak{L}$ восстановления “отрезка” одного из решений $x(t)$, $t \in [t_1 - mh, t_1]$, уравнения (1), совместимого с выходом (2), $\mathfrak{L}\colon \{y(t) : t \in [0, t_1]\} \mapsto \{x(t) : t \in [t_1 - mh, t_1]\}$. Если одновременно выполняется условие (4) и множество $\mathbf{P}$ пусто, то система (1), (2) является финально наблюдаемой [3, 4]. В этом случае указанная выше непрерывная операция $\mathfrak{L}$ позволяет определить единственную функцию $x(t)$, $t \in [t_1 - mh, t_1]$, совместимую с наблюдаемым выходом (2). Предположим, что множество $\mathbf{P}$ не пусто и выполнено условие (4). Доказана следующая

Теорема. *Если для системы (1)–(3) выполняется условие (4), то она является асимптотически наблюдаемой тогда и только тогда, когда множество* $\mathbf{P}$ *конечно и лежит в левой открытой полуплоскости.*

Для асимптотически наблюдаемой системы (1)–(3), удовлетворяющей условиям приведённой теоремы, разработана схема формирования асимптотической оценки $z(t)$ решения $x(t)$ такой, что $\|x(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$. Реализация этой схемы заключается в следующей последовательности действий.

1. В силу условий (3), (4) существует линейное преобразование переменных $x = P\widetilde{x}$ с неособой матрицей $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, где $\widetilde{x} = \operatorname{col}[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2]$, $\widetilde{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\widetilde{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, такое, что при некотором $t_2 > 0$ функция $\widetilde{x}_1$ определяется системой

$$\dot{\widetilde{x}}_1(t) = L(\lambda_h)\widetilde{x}_1(t) + \widehat{L}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_2, \tag{5}$$

с наблюдаемым выходом

$$\widehat{R}(\lambda_h)y(t) = R(\lambda_h)\widetilde{x}_1(t), \quad t > t_2, \tag{6}$$

а функция $\widetilde{x}_2$ – соотношением

$$\widetilde{x}_2(t) = M(\lambda_h)\widetilde{x}_1(t) + \widehat{M}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_2. \tag{7}$$

Здесь $L(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}[\lambda]$, $R(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1 \times n_1}[\lambda]$ $(r_1 \geqslant r)$, $M(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}[\lambda]$, $\widehat{L}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1 \times r}[\lambda]$, $\widehat{R}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r_1 \times r}[\lambda]$, $\widehat{M}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2 \times r}[\lambda]$. Способ построения матрицы P и соотношений (5)–(7) описан в работе [4, формулы (69)–(71)].

2. Методом от противного показывается, что если система (1)–(3) асимптотически наблюдаема, то и система (5), (6) также асимптотически наблюдаема. Строим асимптотическую оценку $\widetilde{z}_1(t)$ решения $\widetilde{x}_1(t)$ системы (5), (6), $\|\widetilde{x}_1(t) - \widetilde{z}_1(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$. Один из подходов к формированию оценки $\widetilde{z}_1(t)$ при помощи конечной цепочки наблюдателей предложен в статье [2] (если систему (5), (6) можно преобразовать к асимптотически наблюдаемой системе со скалярным выходом, то можно воспользоваться результатами работы [1]).

3. Предположим, что найдена оценка $\widetilde{z}_1(t)$. Вследствие соотношения (7) полагаем

$$\widetilde{z}_2(t) = M(\lambda_h)\widetilde{z}_1(t) + \widehat{M}(\lambda_h)y(t).$$

После этого формируем окончательную оценку $z(t)$ решения $x(t)$ системы (1), (2), используя равенство $z(t) = P\widetilde{z}(t)$, $\widetilde{z} = \operatorname{col}[\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2]$.

Литература. 1. Ильин А.В., Буданова А.В., Фомичев В.В. Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 399–402. 2. Хартовский В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716. 3. Метельский А.В., Минюк С.А. Полная управляемость и полная конструктивная идентифицируемость вполне регулярных алгебро-дифференциальных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 3. С. 303–317. 4. Хартовский В.Е. О некоторых задачах управляемости и наблюдаемости для дифференциально-алгебраических систем с последействием // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 126–137.