

А.Б. КИСЕЛЕВ

доктор физ.-мат. наук, профессор

МГУ им. М.В. Ломоносова

E-mail: akis2006@yandex.ru

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАСШИРЕНИЯ (СЖАТИЯ) ПОЛЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ШАРОВ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ ИЗ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

В работе получены точные аналитические решения одномерных задач расширения (сжатия) полых двухслойных сферических шаров и цилиндрических труб из несжимаемых вязкопластических материалов под действием внешних динамических нагрузок.

Ключевые слова: динамическое нагружение, точные решения, вязкопластичность, несжимаемость, двухслойные полые шары и цилиндрические трубы.

A.B. KISELEV

Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor

Lomonosov Moscow State University

E-mail: akis2006@yandex.ru

EXACT SOLUTIONS FOR ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF EXPANSION (COMPRESSION) OF HOLLOW TWO-LAYER SPHERES AND CYLINDRICAL PIPES MADE FROM VISCOPLASTIC MATERIALS UNDER ACTION OF EXTERNALS DYNAMICAL LOADINGS

In paper present precise analytical solutions for one-dimensional problems of expansion (compression) of hollow two-layer spheres and cylindrical pipes made from incompressible viscoplastic materials under the action of external dynamical loading.

Keywords: dynamical loading, precise solutions, viscoplasticity, incompressible, two-layer hollow spheres and cylindrical pipes.

Известно не так много точных решений задач динамической упруговязкопластичности, ввиду их особой сложности (см. [1...5] и приведенную там библиографию). В работах [6, 7] получены точные решения одномерных нестационарных задач об адиабатическом сжатии и расширении сферических и цилиндрических слоев из несжимаемого вязкопластического материала в предположении, что в начальный момент времени распределения радиальных скоростей удовлетворяют условиям несжимаемости материала слоев. При этом в работе [6] решение получено в предположении, что шаровая часть тензора напряжений равна нулю. В [7] это предположение не используется, а для получения решения привлекается закон сохранения полной энергии. В отличие от работ [2, 3], где исследовались процессы схлопывания и расширения сферических пор из несжимаемого вязкопластического материала под действием постоянной нагрузки, в [8] решения получены в случае динамической

внешней нагрузки. В [9] представлены точные решения задач о расширении (сжатии) сферических и цилиндрических толстостенных слоев из несжимаемого вязкопластического материала, погруженных в несжимаемую вязкую жидкость, под действием внешних динамических нагрузок.

1. Расширение сферической оболочки

Пусть полый двухслойный шар имеет начальный внутренний радиус R_0 , внешний радиус R_2 , радиус контакта слоев R_1 (рис. 1) и находится под действием внешних поверхностных динамических нагрузок. Данная задача распадается на «внутреннюю» (для внутреннего слоя шара), «внешнюю» (для внешнего слоя) и контактную задачу взаимодействия слоев шара.

1.1. «Внутренняя» задача

В одномерном приближении (все параметры зависят от начальной радиальной лагранжевой координаты R и времени t) рассмотрим процесс адиабатического расширения внутреннего слоя шара. Его внутренний, внешний радиусы и радиус контакта слоев меняются с течением времени по законам $r_0 = r(R_0, t)$, $r_2 = r(R_2, t)$, $r_1 = r(R_1, t)$. Сделаем следующие предположения.

1) Поведение материала внутреннего слоя шара описывается уравнениями, которые получаются из уравнений упруговязкопластической модели [10]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^1 = \frac{\dot{S}_{ij}^1}{2\mu_1} + \frac{S_{ij}^1(\sqrt{S_{ij}^1 S_{ij}^1} - \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1)}{2\eta_1 \sqrt{S_{ij}^1 S_{ij}^1}} H(\sqrt{S_{ij}^1 S_{ij}^1} - \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1), \tag{1.1}$$

после сделанных ниже упрощающих предположений.

В уравнениях (1.1) $\dot{\epsilon}_{ij}^1$ и S_{ij}^1 – девиаторы скоростей деформаций и напряжений, Y_1 – предел текучести при простом растяжении; $H(x)$ – единичная функция Хевисайда; μ_1 и η_1 – модуль сдвига и динамическая вязкость материала внутреннего слоя оболочки.

2) Упругими деформациями пренебрегается: $\dot{\epsilon}_{ij}^{e1} = 0$, $\dot{\epsilon}_{ij}^1 = \dot{\epsilon}_{ij}^{p1}$ ($\dot{\epsilon}_{ij}^{e1}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{p1}$ и $\dot{\epsilon}_{ij}^1 = \dot{\epsilon}_{ij}^{e1} + \dot{\epsilon}_{ij}^{p1}$ – скорости упругих, пластических и полных деформаций соответственно); пластическое течение несжимаемо: $\dot{\epsilon}_{kk}^{p1} = 0$.

В силу сделанных предположений уравнения (1.1) сводятся к уравнению

$$\sigma_R^1 - \sigma_\theta^1 = -Y_1 + 2\eta_1(\dot{\epsilon}_R^1 - \dot{\epsilon}_\theta^1), \tag{1.2}$$

где $\dot{\epsilon}_R^1 = \partial v_1 / \partial R$, $\dot{\epsilon}_\theta^1 = v_1 / R$ – радиальная и кольцевая скорости деформаций; v_1 – скорость; σ_R^1 , σ_θ^1 – радиальное и кольцевое напряжения.

Условие несжимаемости материала $\dot{\epsilon}_R^1 + 2\dot{\epsilon}_\theta^1 = 0$ дает уравнение для нахождения распределения скорости в слое:

$$\partial v_1 / \partial R + 2v_1 / R = 0. \tag{1.3}$$

Его решение:

$$v_1(R, t) = A_1(t) / R^2, \tag{1.4}$$

причем $A_1(t) \geq 0$, поскольку происходит расширение шарового слоя и $v_1 \geq 0$.

Уравнение движения имеет вид [11]

$$\rho_1 \dot{v}_1 = \frac{\partial \sigma_R^1}{\partial R} + 2 \frac{\sigma_R^1 - \sigma_\theta^1}{R}, \tag{1.5}$$

где ρ_1 – плотность материала внутреннего слоя шара; точкой над символом здесь и далее обозначена материальная производная по времени.

Поставим следующие граничные условия для внутреннего слоя шара:

$$\sigma_R^1 |_{R=R_1}(t) = \sigma_R^2 |_{R=R_1}(t), \sigma_R^1 |_{R=R_0} = -P_0(t) \leq 0, \tag{1.6}$$

где $P_0(t)$ – давление на внутреннюю поверхность шара, σ_R^2 – радиальное напряжение во внешнем его слое.

В начальном состоянии при $t = 0$ напряжения и деформации в шаре отсутствуют.

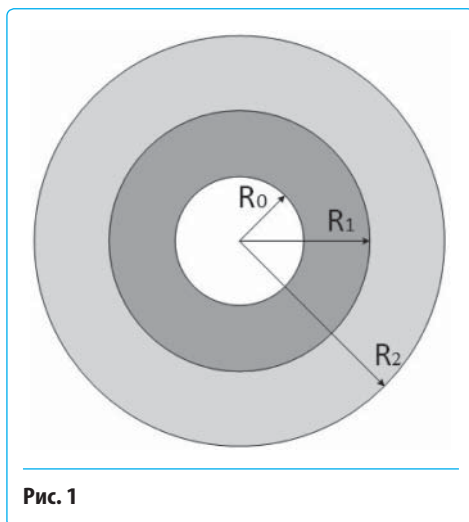


Рис. 1

Если величина внешней нагрузки в начальный момент времени $P_0(0)$ превышает некоторое критическое значение, которое будет указано ниже, то материал внутреннего слоя шара полностью переходит в пластическое состояние. Такие нагрузки и рассматриваются.

Подставив (1.2), (1.4) в уравнение движения (1.5) и проинтегрировав его по радиусу R от R_0 до R_1 с учетом граничного условия (1.6), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $A_1(t)$:

$$\dot{A}_1(t) + \alpha_1 A_1(t) = \beta_1 (\sigma_R^2 |_{R=R_1}(t) + P_0(t)) + \gamma_1; \tag{1.7}$$

$$\alpha_1 = \frac{4\eta_1(R_1^2 + R_1R_0 + R_0^2)}{\rho_1 R_1^2 R_0^2} > 0, \beta_1 = \frac{R_1 R_0}{\rho_1 (R_1 - R_0)} > 0, \gamma_1 = -\frac{2Y_1 R_1 R_0}{\rho_1 (R_1 - R_0)} \ln \frac{R_1}{R_0} < 0.$$

Решение уравнения (1.7) с начальным условием $A_1(0) = 0$ будет следующим:

$$A_1(t) = \beta_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (\sigma_R^2 |_{R=R_1}(t) + P_0(t)) dt + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 t}). \tag{1.8}$$

Учитывая, что ускорение шара в начальный момент времени при его расширении неотрицательно, т.е. $\dot{A}_1(0) \geq 0$, получаем условие на внешнее давление на шар $P_0(0)$:

$$\sigma_R^2 |_{R=R_1}(0) + P_0(0) \geq -\frac{\gamma_1}{\beta_1} = 2Y_1 \ln \frac{R_1}{R_0}. \tag{1.9}$$

Величина $2Y_1 \ln(R_1 / R_0)$ является эффективным пределом текучести при всестороннем расширении внутреннего сферического вязкопластического слоя.

1.2. «Внешняя» задача

Решения, полученные для внутреннего слоя шара, справедливы и для его внешнего слоя. Достаточно во всех предыдущих формулах заменить R_0 на R_1 , R_1 на R_2 , $P_0(t)$ на $(-\sigma_R^1 |_{R=R_1}(t))$, $\sigma_R^2 |_{R=R_1}(t)$ на $(-P_2(t))$ $P_2(t)$ – давление на внешнюю поверхность шара), а также индекс 1 на индекс 2 во всех остальных параметрах. Тогда уравнение (1.8) примет вид:

$$A_2(t) = \beta_2 e^{-\alpha_2 t} \int_0^t e^{\alpha_2 t} (-\sigma_R^1 |_{R=R_1}(t) - P_2(t)) dt + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} (1 - e^{-\alpha_2 t}), \tag{1.8}^*$$

а неравенство (1.9) –

$$\sigma_R^1 |_{R=R_1}(0) + P_2(0) \leq \frac{\gamma_2}{\beta_2} = -2Y_2 \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{1.9}^*$$

1.3. Контактная задача

На контактной границе слоев шара ставятся условия равенства радиальных скоростей и напряжений:

$$v_1 |_{R=R_1} = v_2 |_{R=R_1}, \sigma_R^1 |_{R=R_1} = \sigma_R^2 |_{R=R_1}.$$

Приравняв решения (1.8), (1.8)* при $R = R_1$ и дважды продифференцировав по времени t получившееся уравнение, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для определения радиальных напряжений на контактной поверхности слоев $\Sigma(t) = \sigma_R^1 |_{R=R_1}(t) = \sigma_R^2 |_{R=R_1}(t)$:

$$\dot{\Sigma}(t) + \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \Sigma(t) = -\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \dot{P}_0(t) - \frac{\alpha_2 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} P_0(t) - \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \dot{P}_2(t) - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} P_2(t) - \frac{\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}. \tag{1.10}$$

Из условий (1.9), (1.9)* получаются ограничения на величину $\Sigma(0)$

$$2Y_1 \ln \frac{R_1}{R_0} - P_0(0) \leq \Sigma(0) \leq -P_2(0) - 2Y_2 \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{1.11}$$

Введем следующие обозначения:

$$C = \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} > 0, f(t) = -\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \dot{P}_0(t) - \frac{\alpha_2 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} P_0(t) - \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \dot{P}_2(t) - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} P_2(t) - \frac{\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1}{\beta_1 + \beta_2}.$$

Решение уравнения (1.10) имеет вид

$$\Sigma(t) = e^{-Ct} \int_0^t e^{Ct} f(t) dt + \Sigma(0) e^{-Ct}. \tag{1.12}$$

Пусть давление на внешнюю поверхность шара отсутствует ($P_2(t) = 0$), а давление на его внутреннюю поверхность постоянно $P_0(t) = P_0 \geq (P_0^{sph})_{\min} = 2Y_1 \ln(R_1 / R_2) + 2Y_2 \ln(R_1 / R_2)$; неравенство следует из (1.11). Из (1.12) получим зависимость для радиального напряжения на контактной поверхности слоев шара:

$$\Sigma(t) = D(e^{-Ct} - 1) + \Sigma(0)e^{-Ct}, \quad D = \frac{\alpha_2 \beta_1 P_0 + \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}. \quad (1.13)$$

Заметим, что если $P_0 = (P_0^{sph})_{\min}$, то $\Sigma(0) = 0$, что следует из (1.11).

Из (1.8) найдем скорость расширения внутреннего слоя шара:

$$v_1(R, t) = \frac{\beta_1}{R^2} e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t} (P_0(t) + \Sigma(t)) dt + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 R^2} (1 - e^{-\alpha_1 t}). \quad (1.14)$$

а из (1.8)* – его внешнего слоя:

$$v_2(R, t) = \frac{\beta_2}{R^2} e^{-\alpha_2 t} \int_0^t e^{\alpha_2 t} (-P_2(t) - \Sigma(t)) dt + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 R^2} (1 - e^{-\alpha_2 t}). \quad (1.14)^*$$

При условиях, когда была получена формула (1.13), из (1.14) и (1.14)* найдем скорости расширения слоев шара:

$$v_1(R, t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1 R^2} \left(P_0 - D - \Sigma(0) + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \right) (1 - e^{-\alpha_1 t}) + \frac{\beta_1 (D + \Sigma(0))}{(\alpha_1 - C) R^2} (e^{-Ct} - e^{-\alpha_1 t}), \quad (1.15)$$

$$v_2(R, t) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2 R^2} \left(D - \Sigma(0) - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) (1 - e^{-\alpha_2 t}) - \frac{\beta_2 (D + \Sigma(0))}{(\alpha_2 - C) R^2} (e^{-Ct} - e^{-\alpha_2 t}). \quad (1.15)^*$$

Рассмотрим теперь случай, когда $P_2(t) = 0$, а нагрузка, действующая на внутреннюю поверхность шара, является ступенчато-постоянной: $P_0(t) = P_0 H(t_0 - t)$, $P_0 = \text{const} \geq (P_0^{sph})_{\min}$, t_0 – время действия нагрузки. Тогда радиальное напряжение, действующее на контактной поверхности слоев шара, будет следующим:

$$\Sigma(t) = \begin{cases} (D + \Sigma(0))(e^{-Ct} - 1), & 0 \leq t \leq t_0 \\ \Sigma(t_0) + F(e^{-C(t-t_0)} - 1), & t > t_0 \end{cases}, \quad F = \frac{\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1} < 0. \quad (1.16)$$

Используя (1.16), (1.15) и (1.15)*, из (1.14), (1.14)* найдем скорости расширения слоев шара:

$$v_1(R, t) = \begin{cases} \frac{\beta_1}{\alpha_1 R^2} \left(P_0 - D - \Sigma(0) + \frac{\gamma_1}{\beta_1} \right) (1 - e^{-\alpha_1 t}) + \frac{\beta_1 (D + \Sigma(0))}{(\alpha_1 - C) R^2} (e^{-Ct} - e^{-\alpha_1 t}), & 0 \leq t \leq t_0 \\ v_1(R, t_0) + \frac{\beta_1 (\Sigma(t_0) - F)}{\alpha_1 R^2} (1 - e^{-\alpha_1 (t-t_0)}) + \\ + \frac{\beta_1 F}{(\alpha_1 - C) R^2} (1 - e^{-C(t-t_0)}) + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 R^2} (1 - e^{-\alpha_1 t}), & t > t_0, \end{cases} \quad (1.17)$$

$$v_2(R, t) = \begin{cases} -\frac{\beta_2}{\alpha_2 R^2} \left(D + \Sigma(0) - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right) (1 - e^{-\alpha_2 t}) - \frac{\beta_2 (D + \Sigma(0))}{(\alpha_2 - C) R^2} (e^{-Ct} - e^{-\alpha_2 t}), & 0 \leq t \leq t_0 \\ v_2(R, t_0) - \frac{\beta_2 (\Sigma(t_0) - F)}{\alpha_2 R^2} (1 - e^{-\alpha_2 (t-t_0)}) + \\ + \frac{\beta_2 F}{(\alpha_2 - C) R^2} (e^{-C(t-t_0)} - 1) + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 R^2} (1 - e^{-\alpha_2 t}), & t > t_0. \end{cases} \quad (1.17)^*$$

(Решения (1.17), (1.17)* имеют физический смысл до момента времени $t_{\text{stop}} > t_0$, когда прекратится расширение шара. Для нахождения t_{stop} надо решить уравнение $v_1(R_0, t_{\text{stop}}) = 0$ относительно t_{stop} :

$$v_1(R_0, t_0) + \frac{\beta_1 (\Sigma(t_0) - F)}{\alpha_1 R_0^2} (1 - e^{-\alpha_1 (t_{\text{stop}} - t_0)}) - \frac{\beta_1 F}{(\alpha_1 - C) R_0^2} (e^{-C(t_{\text{stop}} - t_0)} - 1) + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 R_0^2} (1 - e^{-\alpha_1 t_{\text{stop}}}) = 0. \quad (1.18)$$

Аналитического решения у уравнения (1.18) нет. Однако, его численное решение не представляет сложностей.

Зависимость скорости внутренней поверхности шара от времени $v_1(R_0, t)$ схематически представлена на рисунке 2.

2. Расширение цилиндрических слоев

Рассмотрим полую толстостенную двухслойную цилиндрическую трубу, находящуюся под действием внешних поверхностных динамических нагрузок (рис. 1). Эта задача, как и задача для сферического шара, распадается на «внутреннюю», «внешнюю» и контактную задачу взаимодействия слоев.

2.1. «Внутренняя» задача

В одномерном приближении рассмотрим процесс адиабатического расширения внутреннего слоя цилиндрической трубы. Используя сделанные п. 1.1. предположения и исходя из того, что в случае цилиндрической трубы перемещения вдоль оси симметрии z отсутствуют, т.е. скорость деформации $\dot{\epsilon}_z^1 = 0$, уравнения (1.1) приводятся к следующим:

$$\bar{\sigma}_R^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{Y}_1 + 2\bar{\eta}_1 \dot{\epsilon}_R^1, \quad \bar{\sigma}_0^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{Y}_1 + 2\bar{\eta}_1 \dot{\epsilon}_0^1. \tag{2.1}$$

Условие несжимаемости материала слоя $\dot{\epsilon}_R^1 + \dot{\epsilon}_0^1 = 0$ дает уравнение для нахождения распределения скоростей в нем:

$$\partial \dot{\bar{v}}_1 / \partial R + \bar{v}_1 / R = 0. \tag{2.2}$$

Его решение имеет вид:

$$\bar{v}_1(R, t) = \bar{A}_1(t) / R, \tag{2.3}$$

причем $\bar{A}_1(t) \geq 0$, поскольку происходит расширение трубы и $\bar{v}_1 \geq 0$.

Уравнение движения внутреннего слоя цилиндрической трубы [11]:

$$\bar{\rho}_1 \dot{\bar{v}}_1 = \frac{\partial \bar{\sigma}_R^1}{\partial R} + \frac{\bar{\sigma}_R^1 - \bar{\sigma}_0^1}{R}. \tag{2.4}$$

Граничные условия для него:

$$\bar{\sigma}_R^1 |_{R=R_1}(t) = \bar{\sigma}_R^2 |_{R=R_1}(t), \quad \bar{\sigma}_R^1 |_{R=R_0} = -P_0(t) \leq 0. \tag{2.5}$$

Если величина внешней нагрузки в начальный момент времени $P_0(0)$ превышает некоторое критическое значение, которое будет указано ниже, то материал внутреннего слоя цилиндрической трубы полностью переходит в пластическое состояние. Такие нагрузки и рассматриваются.

Подставив (2.1), (2.3) в уравнение движения (2.4) и проинтегрировав его по радиусу R от R_0 до R_1 с учетом граничного условия (2.5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\bar{A}_1(t)$:

$$\dot{\bar{A}}_1(t) + \bar{\alpha}_1 \bar{A}_1(t) = \bar{\beta}_1 (\bar{\sigma}_R^2 |_{R=R_1}(t) + P_0(t)) + \bar{\gamma}_1; \tag{2.6}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{2\bar{\eta}_1(R_1 - R_0)}{\bar{\rho}_1 R_1 R_0 \ln(R_1 / R_0)} > 0, \quad \bar{\beta}_1 = \frac{1}{\bar{\rho}_1 \ln(R_1 / R_0)} > 0, \quad \bar{\gamma}_1 = -\frac{2\bar{Y}_1}{\sqrt{3}\bar{\rho}_1} < 0.$$

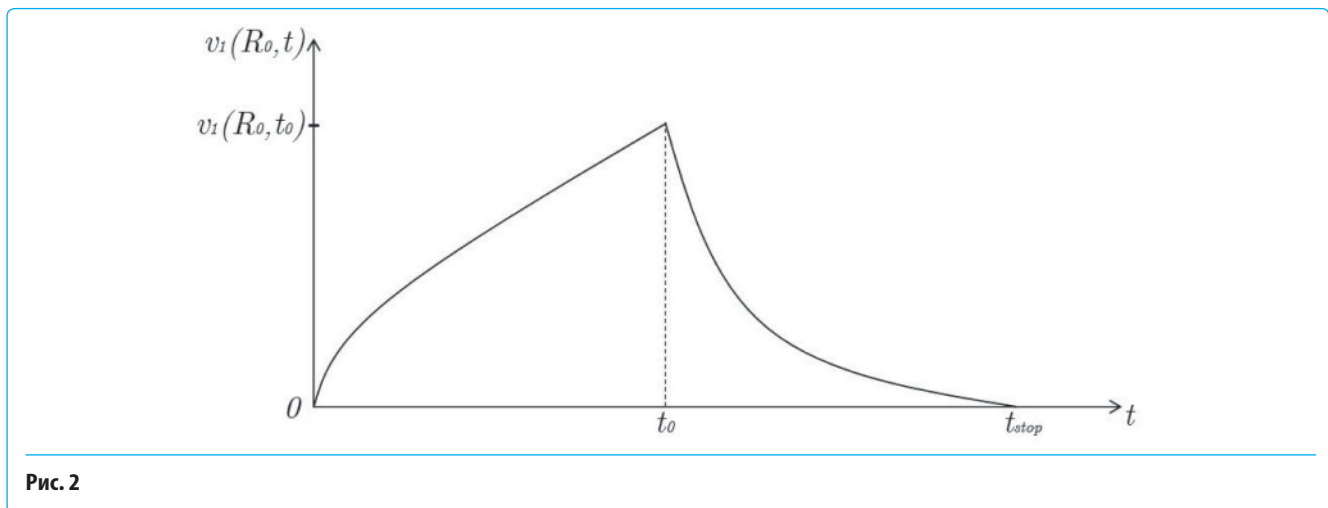


Рис. 2

Решение уравнения (2.6) с начальным условием $\bar{A}_1(0) = 0$ и скорость в слое будут следующими:

$$\bar{A}_1(t) = \bar{\beta}_1 e^{-\bar{\alpha}_1 t} \int_0^t e^{\bar{\alpha}_1 t} (\bar{\sigma}_R^2 |_{R=R_1}(t) + P_0(t)) dt + \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}_1} (1 - e^{-\bar{\alpha}_1 t}), \quad \bar{v}_1(R, t) = \frac{\bar{A}_1(t)}{R}. \quad (2.7)$$

Учитывая, что ускорение оболочки в начальный момент времени при ее расширении неотрицательно, т.е. $\dot{\bar{A}}_1(0) \geq 0$, получаем условие на внешнее давление на цилиндрический слой $P_0(0)$:

$$\bar{\sigma}_R^2 |_{R=R_1}(0) + P_0(0) \geq -\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\gamma}_1 \ln \frac{R_1}{R_0}. \quad (2.8)$$

Величина $2\bar{\gamma}_1 \ln \frac{R_1}{R_0} / \sqrt{3}$ является эффективным пределом текучести при всестороннем расширении цилиндрического вязкопластического слоя.

2.2. «Внешняя» задача

Решения, полученные для внутреннего слоя цилиндрической трубы, справедливы и для ее внешнего слоя. Достаточно во всех предыдущих формулах заменить R_0 на R_1 , R_1 на R_2 , $P_0(t)$ на $(-\bar{\sigma}_R^1 |_{R=R_1}(t))$, $\bar{\sigma}_R^2 |_{R=R_1}(t)$ на $(-P_2(t))$, $P_2(t)$ – давление на внешнюю поверхность трубы, а также индекс 1 на индекс 2 во всех остальных параметрах. Тогда уравнение (2.7) примет вид

$$\bar{A}_2(t) = \bar{\beta}_2 e^{-\bar{\alpha}_2 t} \int_0^t e^{\bar{\alpha}_2 t} (-\bar{\sigma}_R^1 |_{R=R_1}(t) - P_2(t)) dt + \frac{\bar{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2} (1 - e^{-\bar{\alpha}_2 t}), \quad \bar{v}_1(R, t) = \frac{\bar{A}_1(t)}{R}, \quad (2.7)^*$$

а неравенство (2.8)

$$\bar{\sigma}_R^1 |_{R=R_1}(0) + P_2(0) \leq -\frac{\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\gamma}_1 \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.8)^*$$

2.3. Контактная задача

На контактной границе слоев трубы ставятся следующие условия: $\bar{v}_1 |_{R=R_1} = \bar{v}_2 |_{R=R_1}$, $\bar{\sigma}_R^1 |_{R=R_1} = \bar{\sigma}_R^2 |_{R=R_1}$.

Приводя решения (2.7), (2.7)* при $R = R_1$ и дважды продифференцировав по времени t получившееся уравнение, найдем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения радиальных напряжений на контактной поверхности $\bar{\Sigma}(t) = \bar{\sigma}_R^1 |_{R=R_1}(t) = \bar{\sigma}_R^2 |_{R=R_1}(t)$, которое имеет вид (1.10) для случая сферической конструкции (в нем надо лишь заменить константы и переменные на такие же, но с чертой над символами).

Из условий (2.8), (2.8)* получаются ограничения на величину $\bar{\Sigma}(0)$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\gamma}_1 \ln \frac{R_1}{R_0} - P_0(0) \leq \bar{\Sigma}(0) \leq -P_2(0) - \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\gamma}_2 \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.9)$$

Пусть давление на внешнюю поверхность трубы отсутствует ($P_2(t) = 0$), а давление на ее внутреннюю поверхность постоянно: $P_0(t) = P_0 \geq (P_0^{cyl})_{\min} = 2 / \sqrt{3} \bar{\gamma}_1 \ln(R_1 / R_0) + 2 / \sqrt{3} \bar{\gamma}_2 \ln(R_1 / R_2)$; последнее неравенство следует из (2.9). Тогда получим формулу для радиального напряжения на контактной поверхности слоев:

$$\bar{\Sigma}(t) = \bar{D}(e^{-\bar{C}t} - 1) + \bar{\Sigma}(0)e^{-\bar{C}t}, \quad \bar{C} = \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2} > 0, \quad \bar{D} = \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 P_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1}. \quad (2.10)$$

Заметим, что если $P_0 = (P_0^{cyl})_{\min}$, то $\bar{\Sigma}(0) = 0$, что следует из (2.9).

Формулы для скоростей расширения слоев трубы в момент $t = t_0$ снятия ступенчатой нагрузки $P_0(t) = P_0 H(t_0 - t)$, в случае $P_2(t) = 0$, $P_0 = (P_0^{cyl})_{\min}$ имеют следующий вид:

$$\bar{v}_1(R, t_0) = \frac{\bar{\beta}_1 (1 - e^{-\bar{\alpha}_1 t_0})}{\bar{\alpha}_1 R} \left(P_0 - \bar{D} + \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1} \right) + \frac{\bar{\beta}_1 \bar{D}}{(\bar{\alpha}_1 - \bar{C}) R} (e^{-\bar{C}t_0} - e^{-\bar{\alpha}_1 t_0}), \quad (2.11)$$

$$\bar{v}_2(R, t_0) = -\frac{\bar{\beta}_2 (1 - e^{-\bar{\alpha}_2 t_0})}{\bar{\alpha}_2 R} \left(\bar{D} - \frac{\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2} \right) - \frac{\bar{\beta}_2 \bar{D}}{\bar{\alpha}_2 R} (e^{-\bar{C}t_0} - e^{-\bar{\alpha}_2 t_0}). \quad (2.11)^*$$

По скоростям (2.11), (2.11)* найдем кольцевую деформацию в трубе в момент t_0 снятия внутренней нагрузки $P_0 = (P_0^{cyl})_{\min}$:

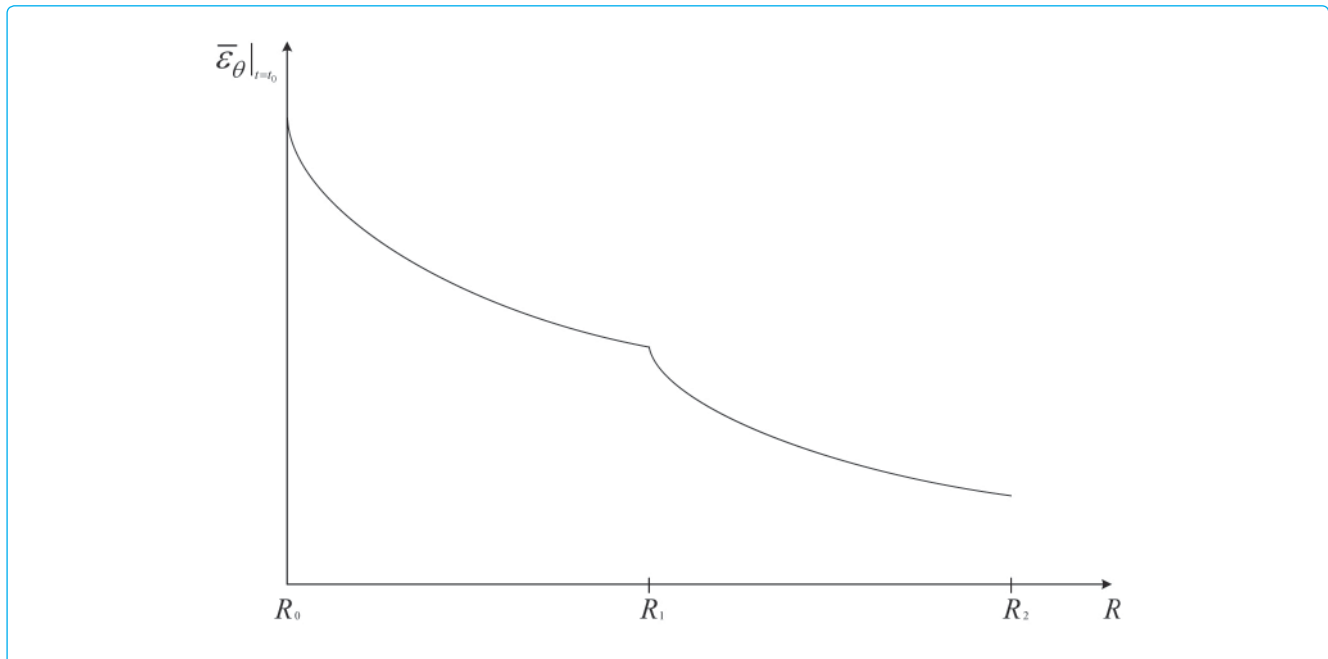


Рис. 3

$$\bar{\varepsilon}_\theta(R, t_0) = \begin{cases} \frac{\bar{\beta}_1 (P_0^{cyl})_{\min} - \bar{\beta}_1 \bar{D} + \bar{\gamma}_1}{\bar{\alpha}_1 R} \left(t_0 + \frac{e^{-\bar{\alpha}_1 t_0} - 1}{\bar{\alpha}_1} \right) + \frac{\bar{\beta}_1 \bar{D}}{(\bar{\alpha}_1 - \bar{C}) R} \left(\frac{e^{-\bar{\alpha}_1 t_0} - 1}{\bar{\alpha}_1} - \frac{e^{-\bar{C} t_0} - 1}{\bar{C}} \right), & R_0 \leq R \leq R_1 \\ \frac{\bar{\beta}_2 \bar{D} - \bar{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2 R} \left(t_0 + \frac{e^{-\bar{\alpha}_2 t_0} - 1}{\bar{\alpha}_2} \right) - \frac{\bar{\beta}_2 \bar{D}}{(\bar{\alpha}_2 - \bar{C}) R} \left(\frac{e^{-\bar{\alpha}_2 t_0} - 1}{\bar{\alpha}_2} - \frac{e^{-\bar{C} t_0} - 1}{\bar{C}} \right), & R_1 < R \leq R_2. \end{cases}$$

График этой функции схематично показан на рисунке 3.

3. О сжатии сферических и цилиндрических слоев

Очевидно, что полученные решения одномерных задач о расширении толстостенных двухслойных сферических и цилиндрических слоев из несжимаемых вязкопластических материалов могут быть использованы и для случая сжатия конструкций внешними нагрузками – давлениями $P_0(t), P_2(t)$. Для этого достаточно во всех формулах заменить Y_1, Y_2 на $(-Y_1), (-Y_2)$ и \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 на $(-\bar{Y}_1), (-\bar{Y}_2)$ соответственно. Полученные таким образом решения имеют физический смысл до момента схлопывания конструкций t_{coll}^* когда перемещение их внутренних поверх-

ностей $R = R_0$ станет равным по абсолютной величине R_0 : $w(R_0, t_s^*) = \int_0^{t_{coll}^*} v_1(R_0, t) dt = -R_0$.

Замечание. Зная распределение скоростей в рассмотренных конструкциях от времени можно легко получить формулы для скоростей деформаций, самих деформаций, напряжений, плотности внутренней энергии, температуры, диссипации. Эти формулы в работе не приводятся ввиду их громоздкости.

4. Заключение

Получены точные решения одномерных задач расширения и сжатия полых толстостенных двухслойных сферических шаров и цилиндрических труб из несжимаемых вязкопластических материалов. Они легко обобщаются на случай большего числа слоев, что важно для ряда приложений [12, 13].

Приведенные решения могут использоваться для расчета параметров напряженно-деформированного состояния конструкций, их разогрева, для оценки вклада вязкости в диссипацию энергии и момента начала макроразрушения (естественно, следует выбрать тот или иной критерий разрушения, например, по предельной удельной диссипации [14]). Эти решения могут применяться для тестирования программ компьютерного моделирования и оценки эффективности новых численных методов аналогично тому, как это было сделано в работе [15], в которой использовалось решение [1], или в [16], в которой использовалось решение [7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01541а)

Список литературы

1. Verney D. Evaluation de la limite elastique du cuivre et de l'uranium par des experiences d'implosion «lente». Behavior of Dense Media under High Dynamic Pressures. Symposium H.D.P. Paris, 1968. Gordon and Breach: New York, 1968. 293 p.
2. Григорьев В.Г., Дунин С.З., Сурков В.В. Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале // Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела. 1981. № 1. С. 199...201.
3. Голубев В.К. О расширении пор в пластичных металлах при отколе // Прикл. механ. и тех. физ. 1983. № 6. С. 159...165.
4. Галиев Ш.У. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. Киев: Наукова думка, 1988. 263 с.
5. Кобылкин И.Ф., Селиванов В.В., Соловьев В.С., Сысоев Н.Н. Ударные и детонационные волны. Методы исследований. М.: Физматлит, 2004. 375 с.
6. Киселев А.Б. Аналитические решения задач об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 675...679.
7. Киселев А.Б. К исследованию процесса нестационарного расширения толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2012. № 6. С. 20...25.
8. Киселев А.Б. Дополнение к статье А.Б. Киселева «Аналитические решения об адиабатическом сжатии толстостенных сферических и цилиндрических оболочек из несжимаемого вязкопластического материала» ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 675...679 // Прикл. матем. и механ. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 858...861.
9. Киселев А.Б. Аналитические решения динамических задач расширения (сжатия) толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек, погруженных в вязкую жидкость // Прикл. физ. и матем. 2016. № 2. С. 32...38.
10. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
11. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 184 с.
12. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин Ф.В., Фортвов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: «Янус-К», 1996. 408 с.
13. Прочность, разрушение и диссипативные потери при интенсивных ударно-волновых нагрузках: Сб. научных статей / Под ред. А.А. Садового, С.В. Михайлова. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009. 420 с.
14. Киселев А.Б., Юмашев М.В. Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды // Прикл. механ. и тех. физ. 1990. № 5. С. 116...123.
15. Howell D.P., Bally G.J. A Free-Lagrange augmented Godunov method of the simulation of elastic-plastic solids. J. Comput. Phys. 2002. Vol. 175. Pp. 128...167.
16. Киселев А.Б., Мищенко А.В. Использование упругопластических моделей для описания экспериментальных данных по откольному разрушению при плоском соударении пластин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2015. № 6. С. 29...36.

References

1. Verney D. Evaluation de la limite elastique du cuivre et de l'uranium par des experiences d'implosion «lente». Behavior of Dense Media under High Dynamic Pressures. Symposium H.D.P. Paris, 1968. Gordon and Breach: New York, 1968. 293 p.
2. Grigorev V.G., Dunin S.Z., Surkov V.V. Zakhlopyvanie sfericheskoy pory v vyazkoplasticheskom material [Collapse of a spherical pores in the material viscoplastic]. Izv. AN SSSR. Mekhan. tverd. tela [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. mechanics of rigid body]. 1981. № 1. Pp. 199...201.
3. Golubev V.K. O rasshirenii por v plastichnykh metallakh pri otkole [The expansion of the pores in ductile metals with spalling]. Prikl. mekhan. i tekhn. fiz [Applied Mechanics and Technical Physics]. 1983. № 6. Pp. 159...165.
4. Galiev Sh.U. Nelineynye volny v ogranichennykh sploshnykh sredakh [Nonlinear waves in limited continuous media]. Kiev: Publishing House «Naukova dumka», 1988. 263 p.

5. Kobylkin I.F., Selivanov V.V., Solovov V.S., Sysoev N.N. Udarnye i detonatsionnye volny. Metody issledovaniy [Shock and detonation waves. Research methods]. Moscow: Publishing House «Fizmatlit», 2004. 375 p.
6. Kiselev A.B. Analiticheskie resheniya zadach ob adiabaticheskom szhatii tolstostennykh sfericheskikh i tsilindricheskikh obolochek iz neshhimaemogo vyazkoplasticheskogo materiala [Analytic solutions of problems on the adiabatic compression of thick-walled spherical and cylindrical shells of an incompressible viscoplastic material]. Prikl. matem. i mekhan [Applied Mathematics and Mechanics]. 2012. Vol. 76. Iss. 4. Pp. 675...679.
7. Kiselev A.B. K issledovaniyu protsessa nestatsionarnogo rasshireniya tolstostennykh sfericheskikh i tsilindricheskikh vyazkoplasticheskikh obolochek [On the study of non-stationary process of expansion of thick-walled spherical and cylindrical shells of visco-plastic]. Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matem. Mekhan [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematical Mechanics]. 2012. № 6. Pp. 20...25.
8. Kiselev A.B. Dopolnenie k state A.B. Kiseleva «Analiticheskie resheniya ob adiabaticheskom szhatii tolstostennykh sfericheskikh i tsilindricheskikh obolochek iz neshhimaemogo vyazkoplasticheskogo materiala» PMM [Supplement to the article A.B. Kiselev, «Analytic solutions of the adiabatic compression of thick-walled spherical and cylindrical shells of an incompressible viscoplastic material» PMM]. 2012. Vol. 76. Iss. 6. Pp. 675...679. Prikl. matem. i mekhan [Applied Mathematics and Mechanics]. 2014. Vol. 78. Iss. 6. Pp. 858...861.
9. Kiselev A.B. Analiticheskie resheniya dinamicheskikh zadach rasshireniya (szhatiya) tolstostennykh sfericheskikh i tsilindricheskikh vyazkoplasticheskikh obolochek, pogruzhennykh v vyazkuyu zhidkost [Analytic solutions of problems of dynamic expansion (contraction) of thick-walled spherical and cylindrical visco-plastic shells immersed in a viscous fluid]. Prikl. fiz. i matem [Applied Physics and Mathematics]. 2016. № 2. Pp. 32...38.
10. Pezhina P. Osnovnye voprosy vyazkoplastichnosti [Key questions viscoplastic]. M.: Mir [Moscow: Publishing House «World»]. 1968. 176 p.
11. Blend D. Nelineynaya dinamicheskaya teoriya uprugosti [Non-linear dynamic theory of elasticity]. M.: Mir [Moscow: Publishing House «World»]. 1972. 184 p.
12. Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin F.V., Fortov V.Ye. Udarno-volnovye yavleniya v kondensirovannykh sredakh [Shock-wave phenomena in condensed matter]. Moscow: Publishing House «Janus-K», 1996. 408 p.
13. Prochnost, razrushenie i dissipativnye poteri pri intensivnykh udarno-volnovykh nagruzkakh: Sb. nauchnykh statey [Strength, destruction and dissipative losses under intense shock wave loads: Collection of scientific articles]. Ed. by A.A. Sadovyi, S.V. Mikhaylov. Sarov: FGUP «RFYaTs-VNIIEF», 2009. 420 p.
14. Kiselev A.B., Yumashev M.V. Deformirovanie i razrushenie pri udarnom nagruzhении. Model povrezhdaemoy termouprugoplasticheskoy sredy [Deformation and fracture under impact loading. Model of damaged thermal elasticoplastic environment]. Prikl. mekhan. i tekhn. fiz [Applied Mechanics and Technical Physics]. 1990. № 5. Pp. 116...123.
15. Howell D.P., Bally G.J. A Free-Lagrange augmented Godunov method of the simulation of elastic-plastic solids. J. Comput. Phys. 2002. Vol. 175. Pp. 128...167.
16. Kiselev A.B., Mishchenko A.V. Ispolzovanie uprugoplasticheskikh modeley dlya opisaniya eksperimentalnykh dannykh po otkolnomu razrusheniyu pri ploskom soudarenii plastin [The use of elastic-plastic models to describe the experimental data on the spall fracture at the plane collision plates]. Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matem. Mekhan [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematical Mechanics]. 2015. № 6. Pp. 29...36.

Сведения об авторе

Киселев Алексей Борисович
 доктор физ.-мат. наук, профессор
 МГУ им. М.В. Ломоносова
 119992, Москва, Российская Федерация, Ленинские горы, 1
 E-mail: akis2006@yandex.ru

Information about author

Kiselev Alexey Borisovich
 Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor
 Lomonosov Moscow State University
 119991, Moscow, Russian Federation, Leninskie Gory, GSP-1
 E-mail: akis2006@yandex.ru