

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ имени Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

На правах рукописи

Данилина Анна Владимировна

Редкие четырехлептонные распады  $B$  - мезонов в Стандартной  
модели

Специальность 1.3.15 — «Физика атомных ядер и элементарных частиц,  
физика высоких энергий»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доцент, кандидат физ.-мат. наук  
Никитин Николай Викторович

Москва 2023

## Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>1 Распады заряженных <math>B</math>-мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1 Теоретический обзор редких распадов заряженных $B$ – мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино . . . . .	15
1.1.1 Оценки парциальной ширины распада $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ .	15
1.1.2 Эффективный гамильтониан и адронные матричные элементы . . . . .	17
1.2 Структура амплитуд для распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ . . . . .	18
1.3 Выражения для амплитуд распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ . . . . .	22
1.4 Парциальные ширины распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_{\ell} \ell^- \ell^-$ и $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ . . . . .	25
1.5 Численные результаты для распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_{\ell} \ell^- \ell^-$ и $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ . . . . .	28
<b>2 Редкие распады нейтральных <math>B</math> - мезонов на четыре легких заряженных лептона . . . . .</b>	<b>38</b>
2.1 Исследование распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . . . . .	38
2.1.1 Оценки парциальной ширины распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .	38
2.1.2 Эффективный гамильтониан распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .	41
2.1.3 Структура амплитуд для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . . . . .	42
2.1.4 Численные результаты для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . . .	48
2.2 Исследование распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . . . . .	59
2.2.1 Оценки парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .	59
2.2.2 Эффективный гамильтониан распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . .	60
2.2.3 Структура амплитуд распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . . . . .	61
2.2.4 Численные результаты для распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . . .	64
Заключение . . . . .	70
Благодарности . . . . .	72

Список литературы . . . . .	74
<b>3 Приложение . . . . .</b>	<b>80</b>
3.1 Кинематика четырехлептонных распадов . . . . .	80
3.2 Четырехлептонные распады $B$ - мезонов в EvtGen . . . . .	85
3.2.1 Описание модели BLLNUL . . . . .	88
3.2.2 Модели распадов нейтральных $B$ – мезонов . . . . .	89
3.3 Безразмерные функции $a^{(ij)}$ , $b^{(ij)}$ , $c^{(ij)}$ , $d^{(ij)}$ , $f^{(ij)}$ и $g^{(ij)}$ . . . . .	90
Список рисунков . . . . .	93
Список таблиц . . . . .	97

## Введение

Стандартная модель (СМ) – основная теория в современной физике элементарных частиц, объясняющая множество наблюдаемых физических явлений. СМ использует формализм квантовой теории поля для описания взаимодействий между элементарными частицами. Квантовая теория поля представляет частицы как возбуждения квантовых полей в пространстве – времени, и описывает их взаимодействия с помощью обмена калибровочными бозонами. С другой стороны, СМ построена на теории групп Ли и теории представлений, которая изучает способы представления групп симметрии и их применение к описанию свойств частиц. Стандартная модель является калибровочной теорией, основанной на прямом произведении групп  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , и описывающей сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия как обмен калибровочными бозонами со спином единица: восемью безмассовыми глюонами в сильных, одним безмассовым фотоном в электромагнитных взаимодействиях и тремя массивными бозонами  $W^\pm, Z$  в слабых взаимодействиях. Фермионный сектор СМ образуют три семейства:

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau^- & b \end{bmatrix},$$

где каждый кварк способен находиться в трех цветовых состояниях. 12 – ти фундаментальным фермионам соответствуют 12 антифермионов.

За возникновение массы у частиц в СМ отвечает механизм Браута – Энглера – Хиггса. Данный механизм предполагает, что существует поле, называемое полем Хиггса, заполняющее все пространство. Взаимодействие изначально безмассовых элементарных частиц с полем Хиггса приводит к возникновению у этих частиц масс.

Несмотря на высокий предсказательный потенциал, СМ имеет ряд ограничений, таких как отсутствие объяснения темной материи и гравитационных эффектов. Исследования в области физики частиц продолжаются с целью расширения и улучшения СМ и нахождения более полной теории, объясняющей все фундаментальные взаимодействия в природе. Эти поиски включают как непосредственные эксперименты на ускорителях высоких энергий, так и косвенные измерения в космических экспериментах и астрофизических наблюдениях.

Одним из примером косвенных измерений также является изучение редких распадов. Данные процессы могут проходить через взаимодействия с гипотетическими «новыми» частицами, которые не входят в Стандартную модель. Измерение аномально высоких или несоответствующих ожиданиям значений характеристик этих процессов может указывать на наличие новой физики. В качестве примеров редких распадов можно привести редкие радиационные, полулептонные и лептонные распады  $B$ -мезонов. Эти распады являются важным объектом исследования на  $B$ -фабриках и Большом адронном коллайдере (БАК).

### Актуальность темы диссертации

Согласно предсказаниям Стандартной модели  $B$ -мезоны распадаются в многолептонные конечные состояния с вероятностями менее  $10^{-7}$ , что делает эти процессы трудно наблюдаемыми. Поэтому измерения характеристик редких многолептонных распадов  $B$ -мезонов могут предоставить ценную информацию о возможных отклонениях от предсказаний Стандартной модели и наличии «новой физики». Эти измерения могут включать анализ парциальных ширины распадов, распределений по квадратам или модулям четырехимпульсов продуктов распада, угловых распределений и корреляций. Точные измерения этих параметров могут помочь в тестировании различных теоретических моделей.

Кроме того что четырехлептонные распады  $B$ -мезонов открывают возможность провести прецизионную проверку предсказаний Стандартной модели (СМ) в высших порядках теории возмущений, данные процессы могут служить фоновыми процессами для подавленных по спиральности сверхредких распадов  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . Последние распады в настоящее время активно исследуются на Большом адронном коллайдере в ЦЕРН в связи с поиском физики вне рамок СМ [1–4].

Редкие многолептонные распады  $B$ -мезонов в СМ можно условно разделить на два типа. Распады первого типа запрещены на древесном уровне и идут в высших порядках теории возмущений за счёт петлевых диаграмм типа «пингвин» и/или «квадратик» (так называемые нейтральные токи, нарушающие аромат). К распадам первого типа относятся процессы  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  и аналогичные им. В распадах второго типа для получения заданного конечного

многолептонного состояния используется значительное число электромагнитных и слабых процессов на древесном уровне. В качестве характерного примера можно указать распад  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и подобные ему процессы. Второй тип редких распадов содержит вершины взаимодействия  $b$ -кварка с двумя верхними кварками  $u$  и  $c$ . Изучение подобных взаимодействий дополняет информацию, полученную при изучении взаимодействий  $b$  и  $t$  кварков, в том числе относительно  $Wub$  и  $Wcb$  аномальных вершин. Всё вышесказанное делает редкие четырехлептонные распады  $B$ -мезонов важными объектами с точки зрения экспериментального изучения физики вне рамок СМ, а теоретические предсказания для таких распадов актуальной задачей.

В единственной работе [5], где теоретически были предсказаны значения парциальных ширин распадов  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  и  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , не учтен вклад промежуточных векторных резонансов и слабой аннигиляции. Предсказания для  $\text{Br}(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-)$  и  $\text{Br}(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$  в литературе отсутствуют. В настоящий момент относительно значений парциальных ширин заряженных  $B$ -мезонов ведется дискуссия [6–8], которая была инициирована результатами, полученными в данной диссертационной работе.

Ни один из обсуждающихся в работе редких четырехлептонных распадов экспериментально не обнаружен. Однако коллаборация LHCb установила верхние пределы на парциальные ширины распадов  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  [9, 10] и  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$  [11].

Данная диссертационная работа посвящена теоретическому исследованию распадов заряженных  $B$ -мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино, а также распадов нейтральных  $B$ -мезонов на четыре заряженных лептона и изучению связанных с этими распадами парциальных ширин и дифференциальных характеристик.

## Цели и задачи исследования

Целью диссертационной работы являлось теоретическое исследование распадов заряженных и нейтральных  $B$ -мезонов в четырехлептонные конечные состояния в рамках Стандартной модели. Работа включает в себя два связанных между собой исследования. В первом изучаются распады заряженных  $B$ -мезонов:  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$ . Во втором проводится исследование распадов нейтральных  $B$ -мезонов:  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Рассчитаны амплитуды распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ ,  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$  с учетом вкладов промежуточных  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  резонансов, вклада тормозного излучения и нерезонансного вклада  $b\bar{b}$  – пар;
2. Для процессов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ ,  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$  вычислены значения парциальных ширин. Для распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  получен ряд физически обоснованных дифференциальных распределений;
3. Рассчитана амплитуда распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с учетом вкладов  $\phi(1020)$ ,  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$ ,  $\psi(4415)$ ,  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  резонансов, вкладов «хвостов» от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$ ,  $b\bar{b}$  – пар, процессов тормозного излучения и слабой аннигиляции;
4. Рассчитана амплитуда распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с учетом вкладов  $\rho^0(770)$ ,  $\omega(782)$ ,  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$  и  $\psi(4415)$  резонансов, вкладов «хвостов» от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$ ,  $b\bar{b}$  – пар, процессов тормозного излучения и слабой аннигиляции;
5. Вычислено значение парциальной ширины распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с учетом вклада  $\phi(1020)$  - резонанса и без него. Оценено влияние данного вклада на парциальную ширину распада;
6. Вычислено значение парциальной ширины распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с учетом вклада  $\omega(782)$  - резонанса и без него. Оценено влияние данного вклада на парциальную ширину распада;
7. Для распадов  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  получена серия наиболее актуальных дифференциальных характеристик;
8. Получены оценки для парциальных ширин распадов  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  и  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ ;
9. Реализованы модели для Монте - Карло генераторов EvtGen для всех обсуждаемых в работе распадов.

**Объект и предмет исследования** Объектом исследования настоящей работы являлись распады заряженных  $B$ -мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино, а также распады нейтральных  $B$ -мезонов на четыре заряженных лептона в Стандартной модели. Предметом исследования выступают

наблюдаемые величины: парциальные ширины и дифференциальные характеристики данных распадов.

### Методология и методы исследования

Основные результаты работы были получены с помощью методов квантовой теории поля и являются следствием теоретических расчетов. Методология исследований основывается на проведении всех необходимых этапов моделирования исследуемых процессов методом Монте-Карло. В основе проведенных вычислений лежит программный пакет EvtGen для моделирования распадов  $B$  - мезонов. Для учета вклада резонансов в редкие четырехлептонные распады  $B$  - мезонов была использована модель векторной доминантности.

### Научная новизна:

Все предсказания, касающиеся четырехлептонных распадов заряженных и нейтральных  $B$  - мезонов, которые были получены в данной работе, являются либо первыми предсказаниями в данной области (распады заряженных  $B$  - мезонов и распад  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ ), либо наиболее полными из имеющихся на настоящий момент (распад  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ ).

1. Впервые получены парциальные ширины и дифференциальные характеристики распадов заряженных  $B$  - мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино;
2. Впервые получены предсказания для парциальной ширины и дифференциальных характеристик распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , с учетом вкладов  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  - мезонов, резонансных вкладов от  $u\bar{u}$  и  $c\bar{c}$  - пар, нерезонансного вклада  $b\bar{b}$  - пар, вклада процессов тормозного изучения и слабой аннигиляции;
3. Впервые получены предсказания для парциальной ширины и дифференциальных характеристик распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с учетом вкладов  $\phi(1020)$  - резонанса, резонансных вкладов от  $u\bar{u}$  и  $c\bar{c}$  - пар, нерезонансного вклада  $b\bar{b}$  - пар, вкладов процессов тормозного изучения и слабой аннигиляции;
4. Созданы модели Монте - Карло генераторов в рамках программного пакета EvtGen для моделирования распадов заряженных  $B$  - мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино, а также распадов  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .

## Практическая полезность

На основании результатов, полученных в первой главе данной диссертационной работы реализованна теоретически обоснованная модель для Монте - Карло генератора EvtGen. Данная модель позволяет проводить моделирование распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$ . Модель включена в базу программного обеспечения коллаборации *LHCb* и использована при проведении экспериментального анализа распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  [11].

Для распадов  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  на основании вычислений, проведенных в данной работе также были созданы модели для Монте - Карло генератора EvtGen. Данные модели сейчас находятся на этапе подготовки к имплементации в базу программного обеспечения коллаборации *LHCb*.

## Основные положения, выносимые на защиту:

1. Теоретические предсказания для парциальных ширин распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ ,  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$  в Стандартной модели находятся на уровне  $10^{-7} - 10^{-8}$ . Ведущим вкладом в амплитуды распадов заряженных  $B$  – мезонов на три легких лептона и нейтрино является вклад  $\omega(782)$  – резонанса. Данные предсказания могут быть использованы для сравнения с результатами соответствующих экспериментальных исследований;
2. Парциальная ширина распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  в СМ находится на уровне  $10^{-11}$ . Ведущим вкладом в амплитуду распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  является вклад  $\omega(782)$  – резонанса;
3. Парциальная ширина распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  в СМ находится на уровне  $10^{-9}$ . Ведущим вкладом в амплитуду распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  является вклад  $\phi(1020)$  – резонанса;
4. Оценки парциальных ширин распадов  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ , полученные на основе рассчитанных значений  $Br(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$  и  $Br(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$  имеют порядок величины  $10^{-10} - 10^{-11}$ . Данные оценки не противоречат соответствующим экспериментально измеренным коллаборацией  $LHCb$  [12] величинам.

## Достоверность результатов и выводов

Достоверность полученных результатов данной работы определяется использованием проверенных методов современной квантовой теории поля и физики элементарных частиц, которые ранее были успешно применены в других исследованиях и дали надежные теоретические предсказания. Кроме того, результаты, полученные в данной диссертационной работе, сравнивались с теоретическими предсказаниями других авторов и не противоречат современным экспериментальным данным.

## Апробация работы и публикации

Основные научные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, индексируемых в базах данных Scopus, WoS, RSCI:

- A1 A. Danilina, N. Nikitin and K. Toms, Decays of charged  $B$  mesons into three charged leptons and a neutrino, *Phys. Rev. D* 101, 096007 (2020);
- A2 A. V. Danilina and N. V. Nikitin, Rare decays of the  $B_s$ -meson into four charged leptons in the framework of the Standard Model, *Phys. Scr.* 97 074005 (2022);
- A3 А.В.Данилина, Н.В.Никитин, Редкие распады нейтральных В-мезонов на четыре заряженных лептона в Стандартной модели, Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 345–351;
- A4 Danilina A., Nikitin N., Toms K., Rare four leptonic B-mesons decays with a neutrino in final state, *EPJ Web Conf. Volume 222*, 2019;
- A5 Anna Danilina and Nikolay Nikitin, Differential distributions in rare four-leptonic B-decays, *EPJ Web of Conferences* 191, 02011 (2018);
- A6 Данилина А.В., Никитин Н.В, Четырехлептонные распады заряженных и нейтральных В-мезонов в Стандартной модели, *Ядерная физика*, №3, 2018, Том 81;
- A7 Anna Danilina, Nikolai Nikitin, Rare four-leptonic B-decays with light leptons in the final state in the Standard Model, *EPJ Web Conf. Volume 158*, 2017;

Материалы диссертации представлялись на различных международных и всероссийских конференциях и семинарах:

1. XI International Conference on New Frontiers in Physics (ICNFP 2022), Колумбари, Крит, Греция, 30 августа - 11 сентября 2022;
2. International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology, Дубна, ОИЯИ, Россия, 17-22 июля 2022;
3. 10th International Conference on New Frontiers in Physics (ICNFP 2021), Colymbari, Crete, Greece, Греция, 23 августа - 2 сентября 2021;
4. Ломоносовские Чтения 2021, секция физики высоких энергий, Москва, НИИЯФ МГУ, Россия, 20-29 апреля 2021;
5. The XXIV International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory (QFTHEP'2019), г. Сочи, Россия, 22-29 сентября 2019;
6. QUARKS-2018 20th International Seminar on High Energy Physics, Valday, Russia, Россия, 27 мая - 2 июня 2018;
7. Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике ИТЭФ, (г. Москва, 26 - 29 ноября 2018 г.);
8. The XXIII International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory (QFTHEP'2017), г.Ярославль, Россия, 26 июня - 3 июля 2017;
9. Ломоносовские Чтения 2017, секция физики высоких энергий, Москва, НИИЯФ МГУ, Россия, 17.04.2017

Исследования отмечены следующими наградами:

- Академическая премия от Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» для аспирантов и молодых ученых без степени, Россия (г. Москва, 2018 - 2020 гг.);
- Olga Igonkina Scholarship 2021 (NIKHEF, Нидерланды, 2021 г.);
- Премия по Программе развития МГУ, (г. Москва, 2020 - 2022 гг.).
- Диплом по итогам молодежного конкурса научно-исследовательских работ НИЦ «Курчатовский институт» - ИТЭФ (г. Москва, 2018 – 2021 гг.);

Работа выполнена при поддержке грантов Российского научного фонда № 16-12-10280 и № 22-22-00297.

### Личный вклад диссертанта

В научных работах, написанных совместно с другими авторами, основные результаты, представленные в диссертации, были получены автором данной диссертации лично. Автор активно участвовал в постановке и решении задач, а также в подготовке публикаций.

### Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 97 страниц, включая 36 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 68 наименований.

Текст диссертации организован следующим образом:

- **Во введении** приведено обоснование актуальности темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследований, показана новизна и практическая значимость работы, приведено краткое описание содержания диссертации;

- **Первая глава** посвящена теоретическому обзору распадов заряженных  $B$  – мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино;
- **Во второй главе** представлены исследования распадов нейтральных  $B$  – мезонов :  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ ;
- **В приложении** представлена кинематика четырехлептонных распадов, а также рассматривается процесс моделирования четырехлептонные распады  $B$  - мезонов в EvtGen. Также в данный раздел вынесены выражения для адронных тензоров, используемых при расчете амплитуд распадов нейтральных  $B$  – мезонов
- **В заключении** приведены основные результаты диссертационной работы.

# 1 Распады заряженных $B$ -мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино

Данная глава посвящена теоретическому исследованию распадов заряженных  $B$ -мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино в Стандартной модели, т.е. процессов вида  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ . При этом рассматриваются как распады с лептонами различного аромата в конечном состоянии ( $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ), так и процессы с идентичными лептонами,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$ .

Данная глава устроена следующим образом. В разделе 1.1.1 приводятся оценки для парциальных ширин распадов вида  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ . В разделе 1.1.2 выписывается эффективный гамильтониан и приводятся основные определения адронных формфакторов. Разделы 1.2 и 1.3 посвящены расчету амплитуд распадов  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$  и  $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-$ . В разделе 1.4 даются выражения для парциальных ширин распадов. В разделе 1.5 обсуждаются численные результаты.

Данная глава основана на материалах, опубликованных в [A1, A4 - A7].

## 1.1 Теоретический обзор редких распадов заряженных $B$ -мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино

### 1.1.1 Оценки парциальной ширины распада $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$

Начнем исследование распадов заряженных  $B$ -мезонов на три легких лептона и нейтрино с рассмотрения процессов вида  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ , когда аромат лептона  $\ell$  не совпадает с ароматом лептона  $\ell'$ . Перед вычислением парциальных ширин данных распадов, рассмотрим некоторые простые оценки для них на примере распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ .

Определяющие вклады в амплитуду распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  дают  $\rho^0(770)$  – и  $\omega(782)$  – резонансы. Поэтому для нахождения парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  по порядку величины можно использовать

следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \approx \\
& \approx \left| \sqrt{\text{Br}(B^- \rightarrow \rho^0 e^- \bar{\nu}_e) \text{Br}(\rho^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)} + \sqrt{\text{Br}(B^- \rightarrow \omega e^- \bar{\nu}_e) \text{Br}(\omega \rightarrow \mu^+ \mu^-)} \right|^2 \approx \\
& \approx 0.4 \times 10^{-7}, \tag{1}
\end{aligned}$$

где необходимые экспериментальные значения парциальных ширин взяты из [41]. Оценка (1) не учитывает, что  $\rho^0(770)$  – мезон является широким резонансом, то есть в случае  $\rho^0(770)$  – мезона факторизационное приближение должно давать заниженный результат. Кроме того, оценка (1) никак не учитывает вклад фотонного полюса, который может быть достаточно существенным.

С экспериментальной точки зрения более интересным является распад  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ . Данный процесс отличается от рассмотренного выше процесса  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  наличием идентичных частиц в конечном состоянии. На амплитудном уровне это обуславливает возникновение дополнительного интерференционного слагаемого. Тем не менее, данное слагаемое не влияет на порядок величины парциальной ширины распада. Поэтому, основываясь на 1, можно оценить:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-) \approx \frac{1}{2} \times \text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \approx 0.2 \times 10^{-7} \tag{2}$$

Здесь дополнительный фактор  $\frac{1}{2}$  возникает за счет наличия тождественных фермионов в конечном состоянии.

В 2019 году коллаборацией LHCb было получено актуальное значение верхнего предела для данного распада на уровне 95% достоверности:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-) < 0.16 \times 10^{-7}, \tag{3}$$

Оценка (2) согласуется с экспериментальным верхним пределом [11]. В то же время (2), как и (1) не учитывает ряд значимых вкладов, за счет чего точное теоретическое предсказание для парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$  может оказаться выше значения экспериментального верхнего предела [11].

### 1.1.2 Эффективный гамильтониан и адронные матричные элементы

В терминах фундаментальных кварковых и лептонных полей гамильтониан для вычисления амплитуд четырехлептонных распадов  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$  имеет вид

$$\mathcal{H}_{eff}(x) = \mathcal{H}_W(x) + \mathcal{H}_{em}(x). \quad (4)$$

Гамильтониан переходов  $b \rightarrow uW^- \rightarrow u\ell^-\bar{\nu}_{\ell}$  записывается как

$$\mathcal{H}_W(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ub} (\bar{u}(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) b(x)) (\bar{\ell}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_\ell(x)) + h.c., \quad (5)$$

где  $u(x)$  и  $b(x)$  – кварковые поля,  $\ell(x)$  и  $\nu_\ell(x)$  – лептонные поля,  $G_F$  – постоянная Ферми,  $V_{ub}$  – матричный элемент матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава, матрица  $\gamma^5$  определена как  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ .

Гамильтониан электромагнитного взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{H}_{em}(x) = -e \sum_f Q_f (\bar{f}(x) \gamma^\mu f(x)) A_\mu(x) = -j_{em}^\mu A_\mu(x), \quad (6)$$

где элементарный заряд  $e = |e|$  нормирован условием  $e^2 = 4\pi\alpha_{em}$  и  $\alpha_{em} \approx 1/137$  – постоянная тонкой структуры,  $Q_f$  – величина заряда фермиона аромата  $f$  в единицах элементарного заряда,  $f(x)$  – поле фермионов аромата  $f$  и  $A_\mu(x)$  – 4-потенциал электромагнитного поля.

Определим следующие ненулевые адронные матричные элементы, которые будут необходимы для дальнейших вычислений:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{u} \gamma^\mu \gamma^5 b | B^-(M_1, p) \rangle &= i f_{B_u} p^\mu, \\ \langle 0 | \bar{q} \gamma^\mu Q | V(M_V, k, \varepsilon) \rangle &= \varepsilon^\mu M_V f_V, \\ \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{u} \gamma_\mu b | B^-(M_1, p) \rangle &= \frac{2V(k^2)}{M_1 + M_2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{*\nu} p^\alpha q^\beta, \\ \langle V(M_2, q, \varepsilon) | \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 b | B^-(M_1, p) \rangle &= i \varepsilon^{*\nu} \left[ (M_1 + M_2) A_1(k^2) g_{\mu\nu} - \right. \\ &\quad - \frac{A_2(k^2)}{M_1 + M_2} (p + q)_\mu p_\nu - \\ &\quad \left. - \frac{2M_2}{k^2} \left( A_3(k^2) - A_0(k^2) \right) k_\mu p_\nu \right], \\ \langle B^{*-}(M_{B^*}, k, \varepsilon) | \bar{b} \gamma^\mu b | B^-(M_1, p) \rangle &= \frac{2V_b(q^2)}{M_1 + M_{B^*}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{*\nu} p^\alpha k^\beta. \end{aligned} \quad (7)$$

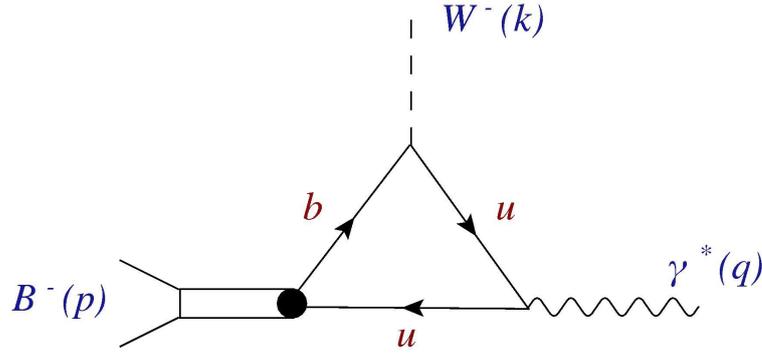


Рисунок 1 — Диаграмма излучения виртуального фотона легким кварком B<sup>-</sup>– мезона.

Здесь  $M_1$  – масса B<sup>-</sup> – мезона,  $p^\mu$  – его четырехимпульс,  $M_{B^*}$  – масса B<sup>\*-</sup>–мезона,  $M_2$  – масса легких  $\rho^0(770)$  или  $\omega(782)$  мезонов,  $M_V = \{M_2, M_{B^*}\}$  – массы промежуточных векторных мезонов,  $\varepsilon^\mu$  – их поляризации. Четырехвекторы  $p^\mu$ ,  $q^\mu$  и  $k^\mu$  удовлетворяют закону сохранения  $p^\mu = q^\mu + k^\mu$ . Компоненты полностью антисимметричного тензора  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  фиксированы условием  $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1$ , а  $g_{\mu\nu}$  – метрический тензор в пространстве Минковского с  $\text{diag } g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ .

## 1.2 Структура амплитуд для распадов B<sup>-</sup> → ℓ<sup>+</sup> ℓ<sup>-</sup> $\bar{\nu}_\ell$ ℓ<sup>'-</sup>

Для распадов вида B<sup>-</sup>(p) → γ\*(q) W<sup>-</sup>(k) → ℓ<sup>+</sup>(k<sub>1</sub>) ℓ<sup>-</sup>(k<sub>2</sub>)  $\bar{\nu}_\ell$ (k<sub>3</sub>) ℓ<sup>'-</sup>(k<sub>4</sub>) из выражения (4) следует три основных типа диаграмм. Первый тип отвечает ситуации, когда виртуальный фотон излучается  $\bar{u}$  – кварком B<sup>-</sup> – мезона (см. Рис. 1). Второй тип диаграмм соответствует излучению виртуального фотона b – кварком (см. Рис. 2). Третий тип связан с процессами тормозного излучения, когда виртуальный фотон излучается лептоном ℓ<sup>'-</sup> в конечном состоянии (см. Рис. 3). Четырехимпульсы q и k определены в Приложении 3.1.

Общая структура амплитуды, отвечающая диаграммам рис. 1, рис. 2 и рис. 3, может быть представлена в виде

$$\mathcal{M}_{fi}(q^2, k^2) \sim \frac{1}{q^2} T_{\nu\mu}(q, k) j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} T^{\nu\mu}(q, k) &= i \int d^4x e^{i(qx)} \langle 0 | j_{em}^\nu(x), \bar{u}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b(0) | B^-(M_1, p) \rangle = \\ &= T_{\nu\mu}^{(u)}(q, k) + T_{\nu\mu}^{(b)}(q, k) + T_{\nu\mu}^{(brem)}(q, k). \end{aligned}$$

Лептонные токи определяются выражениями

$$j^\nu(k_2, k_1) = \bar{\ell}(k_2) \gamma^\nu \ell(-k_1) \quad \text{и} \quad J^\mu(k_4, k_3) = \bar{\ell}'(k_4) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu \ell'(-k_3).$$

Тензор  $T_{\nu\mu}(q, k)$  удовлетворяет условию поперечности:  $q^\nu T_{\nu\mu}(q, k) = 0$ .

Тогда с учетом данного условия и в соответствии с работой [40] тензор  $T_{\nu\mu}(q, k)$  имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu}(q, k) &= \epsilon_{\nu\mu qk} \frac{e a(q^2, k^2)}{M_1} - i \left( g_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right) e M_1 b(q^2, k^2) - \quad (9) \\ &- i e \left( k_\nu - \frac{(qk)}{q^2} q_\nu \right) \left( k_\mu \frac{2 d(q^2, k^2)}{M_1} - q_\mu \frac{2 c(q^2, k^2)}{M_1} \right) - \\ &- i Q_{B_u} e f_{B_u} \frac{q_\nu k_\mu}{q^2}, \end{aligned}$$

где  $Q_{B_u} = Q_b - Q_u = -1$  – электрический заряд  $B^-$  – мезона в единицах  $|e|$ ,  $a(q^2, k^2), \dots, d(q^2, k^2)$  – безразмерные формфакторы, которые являются функциями двух переменных – квадратов переданных четырехимпульсов –  $q^2$  и  $k^2$ . Из (9) следует, что  $b(0, 0) = c(0, 0)$  и  $d(0, 0) = Q_{B_u} f_{B_u}/M_1$ .

При помощи уравнений движения в пределе нулевых лептонных масс можно получить следующую общую структуру для амплитуды  $\mathcal{M}_{fi}$ :

$$\mathcal{M}_{fi}(q^2, k^2) \sim \frac{e}{q^2} \left( \epsilon_{\nu\mu qk} \frac{a(q^2, k^2)}{M_1} - i g_{\nu\mu} M_1 b(q^2, k^2) + i k_\nu q_\mu \frac{2 i c(q^2, k^2)}{M_1} \right) j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3).$$

Точное вычисление формфакторов  $a(q^2, k^2), \dots, c(q^2, k^2)$  является сложной задачей. В настоящей работе для упрощения вычислений приняты во внимание только ведущие сингулярные вклады в соответствующие формфакторы.

Начнем с исследования вклада диаграммы на рис. 1. В структуру тензора  $T_{\nu\mu}^{(u)}(q, k)$ , соответствующего данной диаграмме, основной вклад вносят легчайшие промежуточные векторные резонансы, кварковая структура которых включает  $u\bar{u}$  – пару. Для таких состояний тензор  $T_{\nu\mu}^{(u)}(q, k)$  имеет Брейт –

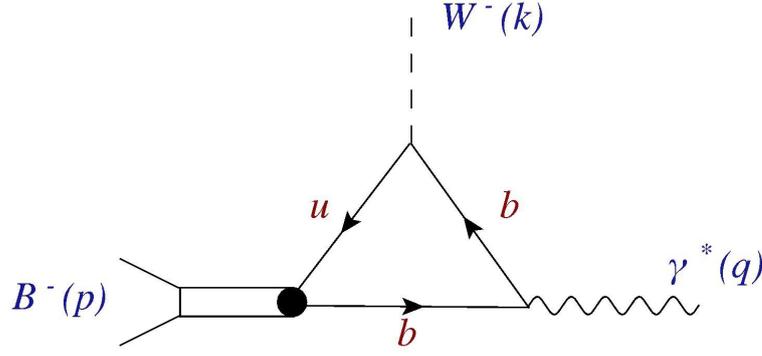


Рисунок 2 — Диаграмма излучения виртуального фотона тяжелым кварком  $B^-$  — мезона.

Вигнеровские полюса по переменной  $q^2$ . Принимая во внимание только вклады  $\rho^0(770)$  — и  $\omega(782)$  — мезонов, можем написать, что

$$\begin{aligned}
 & T_{\nu\mu}^{(u)}(q, k) \rightarrow \\
 & \rightarrow \sum_{i=\rho^0, \omega} \langle 0 | \bar{u} \gamma_\nu u | V(M_{2i}, q, \epsilon) \rangle \frac{e}{M_{2i}^2 - q^2 - iM_{2i}\Gamma_{2i}} \\
 & \langle V(M_{2i}, q, \epsilon) | \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) b | B^-(M_1, p) \rangle,
 \end{aligned}$$

где  $M_{2i}$  и  $\Gamma_{2i}$  — массы и ширины промежуточных векторных резонансов.

В приближении нулевых лептонных масс значения переменной  $k^2$  лежат в диапазоне  $0 \leq k^2 \leq M_1^2$ . Ближайшая полюсная особенность по переменной  $k^2$  связана с появлением промежуточного векторного состояния  $B^{*-}$ . Поскольку  $M_{B^{*-}} > M_1$ , то данная особенность лежит вне кинематически разрешенной области распада  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ . Наличие особенности на массе  $B^{*-}$  — мезона учтено при выборе полюсной параметризации формфакторов переходов  $B \rightarrow \rho$  и  $B \rightarrow \omega$  [32]. При ненулевых лептонных массах выполняется соотношение  $m_{\ell'}^2 \leq k^2 \leq (M_1 - 2m_\ell)^2$ . Поэтому все приведенные выше рассуждения об особенностях тензора  $T_{\nu\mu}^{(u)}$  по переменной  $k^2$  также верны и для этого случая.

Теперь рассмотрим тензор  $T_{\nu\mu}^{(b)}(q, k)$ , который отвечает диаграмме рис. 2. В пределе нулевых лептонных масс по переменной  $q^2$  в кинематически разрешенной области  $0 \leq q^2 \leq M_1^2$  тензор  $T_{\nu\mu}^{(b)}(q, k)$  полюсов не имеет. Ближайший полюс вне кинематически разрешенной области по переменной  $q^2$  соответствует вкладу легчайшего векторного мезона с кварковым составом  $b\bar{b}$ , а именно  $\Upsilon(1S)$  — мезона, масса которого, почти в два раза превышает массу  $B^-$  — мезона. Доминирующий вклад при излучении виртуального фотона тяжелым кварком

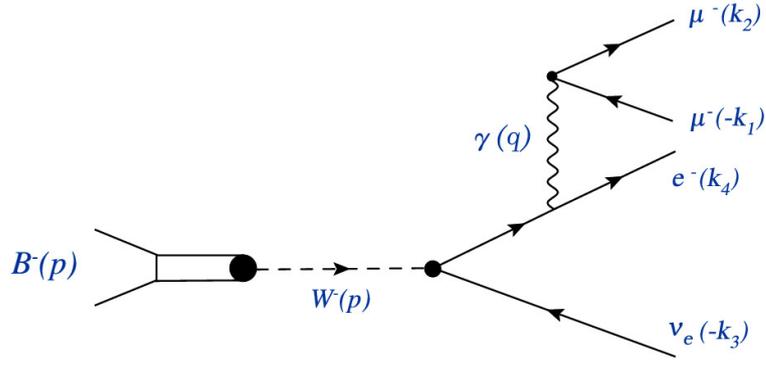


Рисунок 3 — Диаграмма, соответствующая тормозному излучению виртуального фотона.

описывается при помощи процесса  $B^- \rightarrow B^{*-}\gamma^*$ . В этом случае

$$\begin{aligned}
 & T_{\nu\mu}^{(b)}(q, k) \rightarrow \\
 & \rightarrow \langle 0 | \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) b | B^{*-}(M_{B^*}, k, \epsilon) \rangle \frac{e}{M_{B^*}^2 - k^2} \\
 & \langle B^{*-}(M_{B^*}, k, \epsilon) | \bar{b} \gamma_\nu b | B^-(M_1, p) \rangle,
 \end{aligned}$$

Заметим, что мнимая добавка  $-iM_{B^*}\Gamma_{B^*}$  в пропагаторе отсутствует, поскольку  $k^2 < M_{B^*}^2$ , то есть полюс  $B^*$  – мезона лежит вне кинематической области изучаемого распада. Вклад от  $\Upsilon(1S)$  учитывается при задании полюсной параметризации для формфактора  $V_b(q^2)$ . По переменной  $k^2$  в кинематически разрешенной области тензор  $T_{\nu\mu}^{(b)}(q, k)$  других особенностей не имеет.

Численно вклад процесса рис. 2 в ширину четырехлептонного распада подавлен по сравнению с вкладом процесса рис. 1 с фактором  $(\Lambda/m_b)^2$ , где  $m_b \sim 5$  ГэВ – масса  $b$  – кварка, а параметр  $\Lambda \approx 300 - 500$  МэВ. Это следует из явных выражений для формфакторов редких радиационных лептонных распадов  $B$  – мезонов [26, 42]. Однако из – за интерференции между диаграммами рис. 1 и рис. 2 в области фотонного полюса, необходимо учитывать вклад диаграммы рис. 2 в полную ширину распада.

Вкладу тормозного излучения соответствует диаграмма рис. 3. Амплитуда тормозного излучения имеет полюс только по переменной  $q^2$ , возникающий за счет фотонного пропагатора. Учет вклада от тормозного излучения важен в области малых значений  $q^2$ , где приближение нулевых масс может дать недостаточно точный результат. Следовательно, вклад тормозного излучения необходимо вычислять с учетом масс лептонов в конечном состоянии.

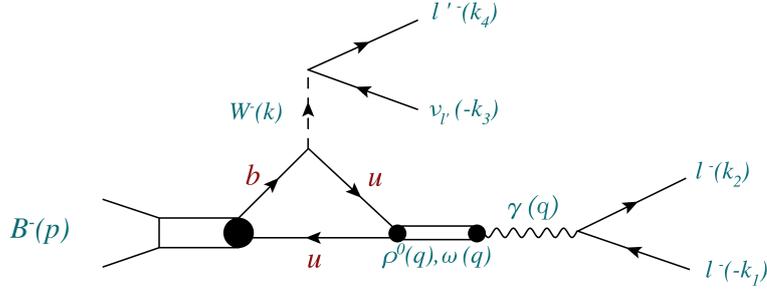


Рисунок 4 — Диаграмма для вычисления  $\mathcal{M}_{fi}^{(u)}$  (см. формулу (10)) на примере распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ . Излучение виртуального фотона легким кварком описывается в рамках модели доминантности векторных мезонов.

### 1.3 Выражения для амплитуд распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$

Рассмотрим распады  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ , когда в конечном состоянии отрицательно заряженные легкие лептоны имеют разный аромат. В общем виде эти распады можно записать как  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$  при  $\ell \neq \ell'$ .

Вклад в полную амплитуду распада  $B^-(p) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_{\ell'}(k_3) \ell'^-(k_4)$  от диаграммы Рис. 1 можно вычислить в приближении модели доминантности векторных мезонов (см. Рис. 4). Если положить  $m_\ell = m_{\ell'} = 0$  и воспользоваться явным видом эффективного гамильтониана (4), то можно найти, что в рамках модели доминантности векторных мезонов (VMD) вклад процесса рис. 1 описывается при помощи диаграммы Рис. 4, а соответствующая ей амплитуда записывается как:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(u)} = \frac{\mathcal{A}}{q^2} \left[ \sum_{i=\rho^0, \omega} \frac{I_i M_{2i} f_{V_i}}{q^2 - M_{2i}^2 + i\Gamma_{2i} M_{2i}} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(i)}(k^2) \right] j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3), \quad (10)$$

где с учетом уравнений движения

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(i)}(k^2) = \frac{2V^{(i)}(k^2)}{M_1 + M_{2i}} \epsilon_{\mu\nu kq} - i(M_1 + M_{2i}) A_1^{(i)}(k^2) g_{\mu\nu} + 2i \frac{A_2^{(i)}(k^2)}{M_1 + M_{2i}} q_\mu k_\nu.$$

Отметим, что для вычисления суммы по резонансам в формуле (10) принимаются во внимание вклады только легчайших  $\rho^0$  - и  $\omega$  - мезонов, которые содержат  $u\bar{u}$  - пару. Поскольку  $\rho^0$  - и  $\omega$  - мезоны являются линейными комбинациями  $u\bar{u}$  и  $d\bar{d}$  - пар, то для выделения вкладов только от  $u\bar{u}$  - пары введены изотопические коэффициенты  $I_i$ . По определению  $I_{\rho^0} = \langle \rho^0 | \bar{u} u \rangle = 1/\sqrt{2}$

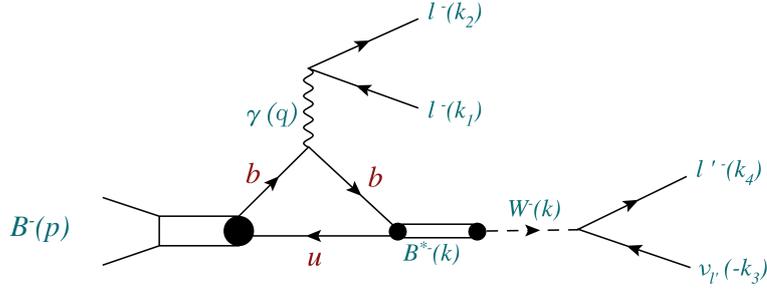


Рисунок 5 — Диаграмма для вычисления  $\mathcal{M}_{fi}^{(b)}$  (см. формулу (11)) на примере распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ .

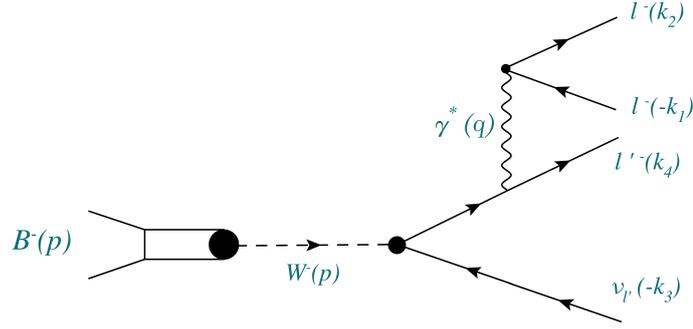


Рисунок 6 — Диаграмма для вычисления амплитуды тормозного излучения  $\mathcal{M}_{fi}^{(brem)}$  (см. формулу (12)) распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ .

Вклад процесса Рис. 2 более точно дается диаграммой рис 5, которая является кросс-каналом распада  $B^* \rightarrow B\gamma^*$  тяжелого векторного мезона в тяжелый псевдоскалярный мезон и виртуальный фотон

$$\mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{A}}{q^2} \frac{M_{B^*} f_{B^*}}{k^2 - M_{B^*}^2} \frac{V_b(q^2)}{M_1 + M_{B^*}} \epsilon_{\mu\nu kq} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \quad (11)$$

Мнимая добавка в пропагаторе отсутствует, поскольку  $k^2 < M_{B^*}^2$ .

Наконец вклад процесса Рис. 3 тормозного излучения виртуального фотона описывается при помощи диаграммы Рис. 6. В случае, когда  $m_\ell \neq 0$  и  $m_{\ell'} \neq 0$  для амплитуды тормозного излучения получаем:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(brem)} = \frac{\mathcal{A}}{q^2} i f_{B_u} g_{\mu\nu} j^\nu(k_2, k_1) \tilde{J}^\mu(k_4, k_3),$$

где

$$\tilde{J}^\mu(k_4, k_3) = J^\mu(k_4, k_3) + \frac{m_{\ell'}}{(p - k_3)^2 - m_{\ell'}^2} \left( \bar{\ell}'(k_4) \gamma^\mu (\hat{p} + m_{\ell'}) (1 - \gamma^5) \nu_{\ell'}(-k_3) \right).$$

Поскольку  $(2m_\ell + m_{\ell'})^2 \leq (p - k_3)^2 \leq M_1^2$ , то второе слагаемое не содержит полюсов во всей кинематически разрешенной области. Второе слагаемое может

быть сравнимо с первым только в области, где  $(p - k_3)^2 \sim (2m_\ell + m_\ell)^2$ . Но эта область подавлена при интегрировании по фазовому объему (66). Поэтому с хорошей степенью точности можем положить, что амплитуда тормозного излучения имеет вид

$$\mathcal{M}_{fi}^{(brem)} = \frac{\mathcal{A}}{q^2} i f_{B_u} g_{\mu\nu} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \quad (12)$$

В формулах (10), (11) и (12) использовано обозначение  $\mathcal{A} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} 4\pi \alpha_{em} V_{ub}$ .

Полная амплитуда распада  $B^-(p) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_\ell(k_3) \ell'^-(k_4)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(1234)} &= \mathcal{M}_{fi}^{(u)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)} + \mathcal{M}_{fi}^{(brem)} = \\ &= \frac{\mathcal{A}}{q^2} \left[ \frac{a(q^2, k^2)}{M_1} \varepsilon_{\mu\nu kq} - iM_1 b(q^2, k^2) g_{\mu\nu} + 2i \frac{c(q^2, k^2)}{M_1} q_\mu k_\nu \right] \\ &\quad j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Безразмерные функции  $a(q^2, k^2) \equiv a(x_{12}, x_{34})$ ,  $b(q^2, k^2) \equiv b(x_{12}, x_{34})$  и  $c(q^2, k^2) \equiv c(x_{12}, x_{34})$  заданы выражениями:

$$\begin{aligned} a(x_{12}, x_{34}) &= \frac{1}{3} \frac{\hat{M}_{B^*} \hat{f}_{B^*}}{x_{34} - \hat{M}_{B^*}^2} \frac{2V_b(M_1^2 x_{12})}{1 + \hat{M}_{B^*}} + \\ &+ \sum_{i=\rho^0, \omega} \frac{I_i \hat{M}_{2i} \hat{f}_{V_i}}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \frac{2V^{(i)}(M_1^2 x_{34})}{1 + \hat{M}_{2i}}; \quad (14) \\ b(x_{12}, x_{34}) &= -\hat{f}_{B_u} + \sum_{i=\rho^0, \omega} \frac{I_i \hat{M}_{2i} \hat{f}_{V_i}}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} (1 + \hat{M}_{2i}) A_1^{(i)}(M_1^2 x_{34}); \\ c(x_{12}, x_{34}) &= \sum_{i=\rho^0, \omega} \frac{I_i \hat{M}_{2i} \hat{f}_{V_i}}{x_{12} - \hat{M}_{2i}^2 + i\hat{\Gamma}_{2i} \hat{M}_{2i}} \frac{A_2^{(i)}(M_1^2 x_{34})}{1 + \hat{M}_{2i}}, \end{aligned}$$

где безразмерные переменные  $x_{12} = q^2/M_1^2$  и  $x_{34} = k^2/M_1^2$  более подробно обсуждаются в Приложении 3.1, а безразмерные постоянные имеют вид  $\hat{f}_{B_u} = f_{B_u}/M_1$ ,  $\hat{f}_{B^*} = f_{B^*}/M_1$ ,  $\hat{f}_{V_i} = f_{V_i}/M_1$ ,  $\hat{M}_{2i} = M_{2i}/M_1$ ,  $\hat{M}_{B^*} = M_{B^*}/M_1$  и  $\hat{\Gamma}_{2i} = \Gamma_{2i}/M_1$ . Формфакторы  $V_b(q^2)$ ,  $V^{(i)}(k^2)$ ,  $A_1^{(i)}(k^2)$  и  $A_2^{(i)}(k^2)$  также являются безразмерными функциями.

Подходящие для практических вычислений параметризации адронных формфакторов (7), кроме электромагнитного формфактора  $V_b(q^2)$ , даны в работе [32]. Используя общие формулы работ [43, 44] можно найти следующую

параметризацию для формфактора  $V_b(q^2)$ , вычисленного в рамках дисперсионной формулировки кварковой модели:

$$V_b(q^2) = \frac{1.044}{\left(1 - \frac{q^2}{M_\Upsilon^2}\right) \left(1 - 0.81 \frac{q^2}{M_\Upsilon^2}\right)}, \quad (15)$$

где  $M_\Upsilon$  – масса  $\Upsilon(1S)$ -мезона. Этим же методом можно найти значения лептонных констант  $f_{B_u} = 191$  МэВ и  $f_{B^*} = 183$  МэВ.

#### 1.4 Парциальные ширины распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell'^-$ и $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$

Дифференциальная парциальная ширина распада  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$  вычисляется по формуле

$$d\text{Br} (B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-) = \tau_{B^-} \frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left| \mathcal{M}_{fi}^{(1234)} \right|^2}{2M_1} d\Phi_4^{(1234)} \quad (16)$$

где  $\tau_{B^-}$  – время жизни  $B^-$  – мезона, четырехчастичный фазовый объем  $d\Phi_4^{(1234)}$  задается выражением (66), суммирование происходит по спинам конечных фермионов. В формуле (16) интегрирование по угловым переменным  $y_{12}$ ,  $y_{34}$  и  $\varphi$  можно провести аналитически.

Интегрирование дает следующее выражение для дважды дифференциальной ширины распада:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \text{Br} (B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-)}{dx_{12} dx_{34}} &= \tau_{B^-} \frac{G_F^2 M_1^5 \alpha_{em}^2 |V_{ub}|^2}{2^6 3^2 \pi^3} \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\ell^2}{x_{12}}} \left(1 - \frac{\hat{m}_{\ell'}^2}{x_{34}}\right) \\ &\frac{\lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})}{x_{12}^2} \left[ 2 x_{12} x_{34} \lambda(1, x_{12}, x_{34}) \left| a(x_{12}, x_{34}) \right|^2 + \right. \\ &+ \left( \lambda(1, x_{12}, x_{34}) + 12 x_{12} x_{34} \right) \left| b(x_{12}, x_{34}) \right|^2 + \lambda^2(1, x_{12}, x_{34}) \left| c(x_{12}, x_{34}) \right|^2 + \\ &+ \left. 2 \lambda(1, x_{12}, x_{34}) (x_{12} + x_{34} - 1) \text{Re} \left( b(x_{12}, x_{34}) c^*(x_{12}, x_{34}) \right) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

которая зависит только от безразмерных переменных  $x_{12}$  и  $x_{34}$ . Полное интегрирование по этим переменным можно провести только численно. Выражение

(17) применимо для процессов  $B^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu e^+ e^-$ , и  $B^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \mu^- \mu^+$ , когда конечное состояние не содержит тождественных частиц.

Практически во всех детекторах, используемых для изучения элементарных частиц, мюонные треки могут быть идентифицированы более эффективно, чем сигналы от электронов, из-за различия в физических свойствах и взаимодействия с детектором. Поэтому с экспериментальной точки зрения наибольший интерес для регистрации представляет распад  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ . В таком распаде конечное состояние включает два тождественных отрицательно заряженных мюона. Это ведет к необходимости учитывать фермиевскую антисимметрию.

Рассмотрим полную амплитуду распада  $B^-(p) \rightarrow \ell^+(k_1) \bar{\nu}_\ell(k_3) \ell^-(k_2) \ell^-(k_4)$ . В пределе нулевых лептонных масс приведенное ниже вычисление применимо как к распаду  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , так и к распаду  $B^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e e^- e^-$ . Полная амплитуда распада имеет вид

$$\mathcal{M}_{fi}^{(tot)} = \mathcal{M}_{fi}^{(1234)} - \mathcal{M}_{fi}^{(1432)}, \quad (18)$$

где амплитуда  $\mathcal{M}_{fi}^{(1234)}$  задается формулой (13), а амплитуда  $\mathcal{M}_{fi}^{(1432)}$  получается из  $\mathcal{M}_{fi}^{(1234)}$  заменой  $k_2 \leftrightarrow k_4$ . Для вычисления  $\mathcal{M}_{fi}^{(1432)}$  в формулах (13) и (14) необходимо выполнить замены:  $q_\mu \rightarrow \tilde{q}_\mu$ ,  $k_\mu \rightarrow \tilde{k}_\mu$ ,  $x_{12} \rightarrow x_{14}$  и  $x_{34} \rightarrow x_{23}$  (определения переменных см. Приложение 3.1).

Дифференциальная парциальная ширина распада дается выражением

$$\begin{aligned} d\text{Br} (B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-) = \frac{1}{2} & \left[ \tau_{B^-} \frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}^{(1234)}|^2}{2M_1} d\Phi_4^{(1234)} + \right. \\ & + \tau_{B^-} \frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}^{(1432)}|^2}{2M_1} d\Phi_4^{(1432)} - \\ & \left. - \tau_{B^-} \frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left( \mathcal{M}_{fi}^{(1234)\dagger} \mathcal{M}_{fi}^{(1432)} + \mathcal{M}_{fi}^{(1432)\dagger} \mathcal{M}_{fi}^{(1234)} \right)}{2M_1} d\Phi_4^{(1234)} \right], \quad (19) \end{aligned}$$

где  $d\Phi_4^{(1234)}$  и  $d\Phi_4^{(1432)}$  задаются выражениями (66) и (67). Общий множитель  $1/2$  обусловлен фермиевской антисимметрией.

Легко заметить, что первое и второе слагаемые в формуле (19) равны друг другу. Поэтому для парциальной ширины можно записать

$$\begin{aligned} \text{Br}(B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-) &= \\ &= \text{Br}(B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-) - \text{Br}_{interf}(B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Br}_{interf}(B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-) &= \\ &= \frac{\tau_{B^-}}{4M_1} \int \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left( \mathcal{M}_{fi}^{(1234)\dagger} \mathcal{M}_{fi}^{(1432)} + \mathcal{M}_{fi}^{(1432)\dagger} \mathcal{M}_{fi}^{(1234)} \right) d\Phi_4^{(1234)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для вычисления интерференционного вклада (21) требуется проведение пяти-мерного численного интегрирования. При этом в матричном элементе  $\mathcal{M}_{fi}^{(1432)}$  необходимо воспользоваться заменами переменных, приведенными в выражениях (68).

### 1.5 Численные результаты для распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-$ и $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$

В работе для получения парциальных ширин и дифференциальных распределений были использованы численные значения масс, времен жизни и ширин распадов псевдоскалярных и векторных мезонов и матричные элементы матрицы Кабиббо – Кобаяши – Маскава из [41]. Константы  $f_{\rho(770)} = 154$  МэВ и  $f_{\omega(782)} = 46$  МэВ были найдены в работе [42].

Вычислим парциальную ширину распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ . Естественным кинематически обусловленным обрезанием полюса по  $x_{12}$  служит значение  $x_{12\min} = (2m_\mu/M_1)^2 \approx 0.0016$ . В этом случае численное интегрирование формулы (17) по  $x_{12}$  и  $x_{34}$  дает:

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \approx (0.6 \pm 0.2) \times 10^{-7} \quad (22)$$

Заметим, что приведенное в (22) значение парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  примерно в два раза меньше соответствующего значения  $1.3 \times 10^{-7}$  из работ [36,38]. Данное отличие, прежде всего, обусловлено учетом изотопических коэффициентов  $I_{\rho^0}$  и  $I_\omega$  в выражении (10). Это уменьшает вклад промежуточных векторных  $\rho^0$  – и  $\omega$  – резонансов в общую ширину распада в два раза. Поскольку данный вклад является доминирующим, то  $\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-)$  тоже изменился почти в два раза. Кроме того, дополнительное уменьшение парциальной ширины примерно на 10% произошло из-за учета масс лептонов в выражении для фазового объема (66).

Отметим, что в данной работе при расчете амплитуды распада использовались форм факторы без дополнительных вычитаний, что также может повлиять на поведение матричного элемента в области малых значений  $x_{12}$ . В то время как в более поздней работе [8] было показано, что учет данных вычитаний также необходим. Сравнение с предсказаниями парциальных ширин распадов  $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-$  и  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ , полученными в более поздних работах, приводится в таблице 2

Результат (22) с точностью до фактора 2 согласуется оценкой (1). Различие между оценкой (1) и точным вычислением (22) связано, в основном, с тем, что оценка (1) не учитывает полюсной вклад при  $x_{12} \rightarrow x_{12\min}$ . Важность учета

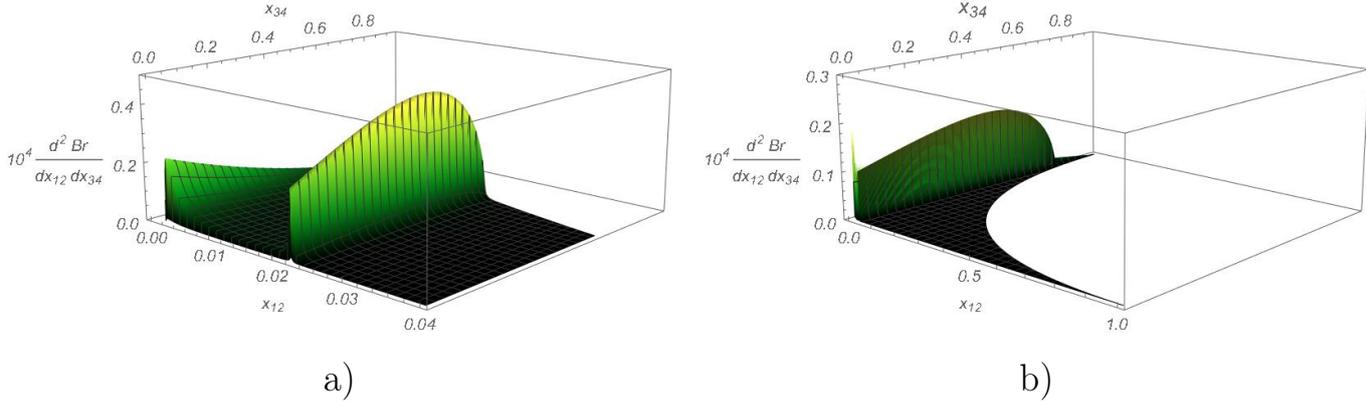


Рисунок 7 — Дважды дифференциальное распределение  $10^4 \times \frac{d^2 \text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , вычисленное согласно формуле (17). На рисунке **a)** отдельно выделена область  $x_{12} \in [0.00, 0.04]$ , которая отвечает области применимости рассматриваемой в настоящей работе модели.

полюсного вклада становится очевидной при анализе дважды дифференциального распределения  $\frac{d^2 \text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , которое представлено на рис. 7.

На рисунке выделяются полюс при  $x_{12} \rightarrow x_{12 \min} = 4m_\mu^2/M_1^2$  и “гребень”, узкого  $\omega(782)$  – резонанса. Широкий  $\rho^0(770)$  – мезон также дает значимый вклад в парциальную ширину, но в распределении на рис. 7 заметен не столь отчетливо, как узкий  $\omega(782)$ –резонанс.

Неопределенность численного значения парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ , зависящая от неопределенности вычисления адронных форм-факторов переходов  $B \rightarrow \rho(770)$  и  $B \rightarrow \omega(782)$ , не превосходит 20% [32]. Определенную ошибку вносит использование модели доминантности векторных мезонов (VMD). Данная ошибка, в основном, связана с выбором относительной непертурбативной фазы между слагаемыми в сумме (10). В рамках VMD эта фаза равна нулю. Если по какой-либо причине относительная фаза вкладов  $\rho^0$  – и  $\omega$  – мезонов в амплитуду (10) окажется равной  $\pi$ , то численный результат в (22) может уменьшиться до  $0.15 \times 10^{-7}$  (см. рис. 8).

Подобная зависимость указывает на важность будущего детального модельнонезависимого исследования непертурбативных и нефакторизуемых вкладов сильного взаимодействия в амплитуды распадов  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ .

В используемой для получения результата (22) модели не учтен нерезонансный вклад (NRC), который не связан с хвостами от  $\rho^0(770)$  и

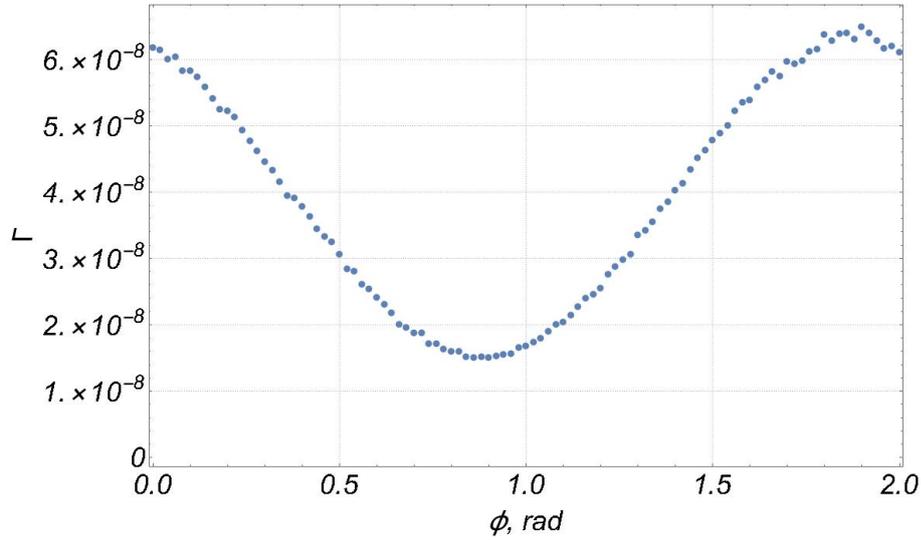


Рисунок 8 — Зависимость парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  от непертурбативной фазы между резонансами

$\omega(782)$ -резонансов. Величину данного вклада можно оценить, если воспользоваться результатами работы [46]. В этой работе найдена парциальная ширина распада  $B \rightarrow \gamma \ell \nu$ , в которую не вносят вклад  $\rho^0$  и  $\omega$ -резонансы. Оценка нерезонансного вклада по порядку величины дает

$$\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-)_{\text{NRC}} \sim \alpha_{em} \times \text{Br}(B \rightarrow \gamma \ell \nu)_{\text{Beneke}} \sim 0.1 \times 10^{-7},$$

что составляет около 15% от значения парциальной ширины (22) и сравнимо с ошибкой вычисления формфакторов. Отметим, что вклады учтенных при вычислении (22) процессов рис. 5 и рис. 6 также сравнимы с неучтенной величиной нерезонансного вклада.

Рассматриваемое в настоящей работе приближение с учетом вклада только легчайших резонансов  $\rho(770)$  и  $\omega(782)$ , по-видимому, не применимо, если парциальная ширина распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  будет измеряться в области  $\sqrt{q^2} > 1$  ГэВ. В этой области дополнительно необходимо учитывать вклады  $\omega(1420)$   $\rho(1450)$ ,  $\omega(1650)$  и  $\rho(1700)$  резонансов. Учет четырех тяжелых резонансов практически не скажется на значении парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  при  $\sqrt{q^2} \leq 1$  ГэВ, но будет определять поведение парциальной ширины в области  $\sqrt{q^2} > 1$  ГэВ. Однако в экспериментальной процедуре [11], для устранения потенциального фона от распада  $\phi \rightarrow \ell^+ \ell^-$ , переменная  $\sqrt{q^2}$  выбирается меньше, чем 980 МэВ. Таким образом экспериментальные данные доступны только в области применимости модели из настоящей работы. Поэтому в данной работе резонансы тяжелее  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  не учитывались.

Перейдем к вычислению парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-$ . Формальное интегрирование в районе фотонного полюса по переменной  $x_{12}$  приводит к следующей грубой зависимости парциальной ширины распада от  $x_{12 \min}$ :

$$\text{Br} \sim \int \frac{dx_{12}}{x_{12}^2} \sim \frac{1}{x_{12 \min}}.$$

Если выбрать  $x_{12 \min} = (2m_e/M_1)^2$ , то по порядку величины

$$\begin{aligned} \text{Br}(B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-) &\sim \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 \text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+\mu^-\bar{\nu}_e e^-) \sim \\ &\sim 10^4 \text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+\mu^-\bar{\nu}_e e^-). \end{aligned} \quad (23)$$

Однако с экспериментальной точки зрения подобное предсказание не имеет смысла, поскольку эффективность регистрации мюонных пар при  $\sqrt{q^2}$  ниже 80 – 100 МэВ невелика, то есть данная область, как правило, непригодна для наблюдения. Если же выбрать  $x_{12 \min} = (\Lambda/M_1)^2 = 0.0002$  при  $\Lambda = 80$  МэВ, то

$$\text{Br}(B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-) \Big|_{x_{12 \min}=0.0002} \approx (0.8 \pm 0.2) \times 10^{-7}. \quad (24)$$

При увеличении значения  $x_{12 \min}$  величина  $\text{Br}(B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-)$  будет снижаться. То же касается и процесса распада  $B^- \rightarrow \mu^+\mu^-\bar{\nu}_e e^-$ . В таблице 1 приводится зависимость парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+\mu^-\bar{\nu}_e e^-$  от порогового значения  $x_{12}$ .

Распады  $B^- \rightarrow \mu^+\mu^-\bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-$  могут оказаться полезными при подтверждении гипотезы лептонной универсальности, если измерять парциальные ширины обоих распадов при фиксированном значении  $x_{12} > (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0016$ . Актуальная работа по проверке гипотезы лептонной универсальности в полулептонных распадах  $B$ -мезонов была проведена в 2022 году коллаборацией LHCb [61]. Результаты данной работы показывают лучшее согласование со СМ, чем в более ранних работах [47–50]. Расхождение между результатами экспериментальных данных возникает за счет неточностей при идентификации электронов в предыдущих работах, а также учета в работе [61] дополнительных вкладов фоновых процессов, не рассматриваемых ранее.

Таким образом, в условиях справедливости гипотезы лептонной универсальности для процессов  $B^- \rightarrow \mu^+\mu^-\bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-$  должно выполняться соотношение

$$\frac{\text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+\mu^-\bar{\nu}_e e^-)}{\text{Br}(B^- \rightarrow e^+e^-\bar{\nu}_\mu\mu^-)} \Big|_{x_{12} > 0.0016} = 1. \quad (25)$$

Таблица 1 — Зависимость парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  от величины  $x_{12min}$  порога интегрирования по переменной  $x_{12}$ .

$q^2 = x_{12min} * M_1^2, GeV^2$	$Br(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-)$
0.1	$6.1 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.15	$4.3 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.20	$3.9 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.25	$3.7 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.30	$3.4 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.35	$3.2 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.40	$3.1 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.45	$2.9 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.50	$2.6 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.55	$2.4 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.60	$1.9 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-8}$
0.65	$2.7 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-9}$
0.70	$1.3 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-9}$
0.75	$7.3 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-10}$
0.80	$4.5 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-10}$
0.85	$3.4 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-10}$
0.90	$2.6 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-10}$
0.95	$2.0 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-10} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-10}$
1.00	$1.8 \frac{\tau_{B^-}}{1.638 \times 10^{-12} \text{ сек}} \frac{ V_{ub} ^2}{1.67 \times 10^{-5}} \times 10^{-10}$

Таблица 2 — Сравнение теоретических предсказаний для парциальных ширин распадов  $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-$  и  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ , полученных разными авторами

	Кинематический регион	$Br(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-)$	$Br(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-)$
[1]	$[4m_\mu^2, M_B^2]$	$6.0 \times 10^{-8}$	$7.0 \times 10^{-8}$
[8]	$[4m_\mu^2, M_B^2]$	$3.01 \times 10^{-8}$	$3.02 \times 10^{-8}$
[6]	$[4m_\mu^2, 1 GeV^2]$	$6.02 \times 10^{-8}$	$5.19 \times 10^{-8}$
[7]	$[4m_\mu^2, 6 GeV^2]$	$1.78 \times 10^{-8}$	$1.75 \times 10^{-8}$

Рассмотрим предсказания для ширины распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , который наиболее удобен для экспериментального измерения [11], поскольку эффективность регистрации мюонов выше, чем эффективность регистрации электронов. Численное интегрирование интерференционного вклада (21) при  $x_{12min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0016$  дает значение

$$\text{Br}_{interf} (B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-) \approx -(0.1 \pm 0.03) \times 10^{-7},$$

которое сравнимо с неопределенностью непертурбативных эффектов сильного взаимодействия, вкладом диаграмм рис. 5 и рис. 6, а также с неучтенным нерезонансным вкладом. Таким образом можно утверждать, что из (20) и (22) следует равенство

$$\text{Br} (B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-) \approx (0.7 \pm 0.3) \times 10^{-7}. \quad (26)$$

которое получено при  $x_{12min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0016$ .

Данное предсказание практически в четыре раза превышает экспериментальный верхний предел, который был получен в работе [11]. Различие между экспериментальным результатом для верхнего предела и теоретическим предсказанием можно объяснить следующим образом. Во-первых, следует учесть достаточно большую ошибку теоретического предсказания (26). Во-вторых, как уже было отмечено при обсуждении формулы (22), значение  $\text{Br} (B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-)$  зависит от относительной фазы между вкладами  $\rho^0(770)$  – и  $\omega(782)$  – резонансов. В рамках VMD-модели эта фаза равна нулю. Однако различные непертурбативные вклады могут привести к эффекту набегания фазы. Остальные неучтенные в настоящей работе добавки вряд ли могут сильно повлиять на численный результат (26). Тем не менее, маловероятно, что различие теоретических и экспериментальных результатов может быть обусловлено эффектами физики вне рамок Стандартной модели.

В работе также вычислялось значение парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e e^- e^-$ :

$$\text{Br} (B^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e e^- e^-) \approx (0.8 \pm 0.3) \times 10^{-7}. \quad (27)$$

Распады  $B^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e e^- e^-$  и  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$  позволяют предложить еще один тест для подтверждения гипотезы лептонной универсальности:

$$\left. \frac{\text{Br} (B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-)}{\text{Br} (B^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e e^- e^-)} \right|_{x_{12} > 0.0016, x_{14} > 0.0016} = 1. \quad (28)$$

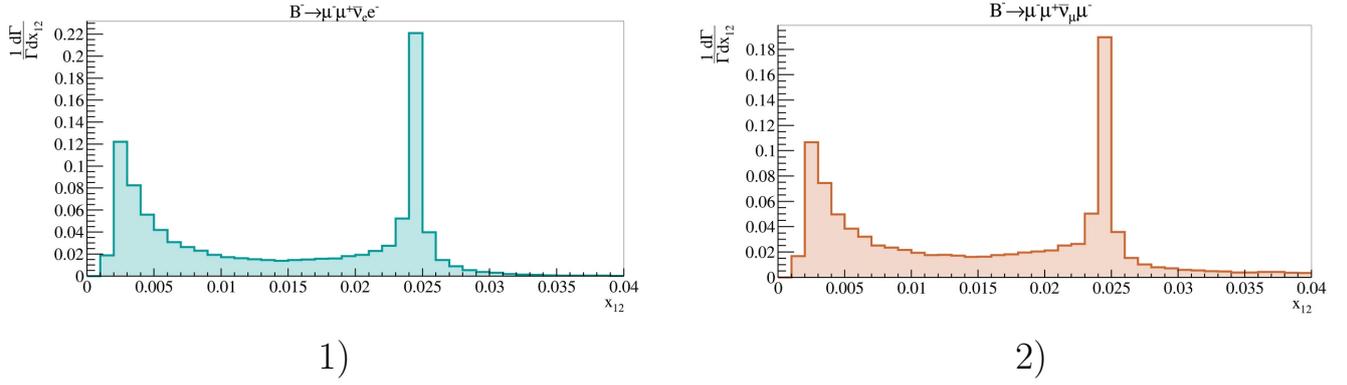


Рисунок 9 — Нормированные дифференциальные распределения  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{12}}$  для распадов 1)  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и 2)  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{34} dy_{12} dy_{34} d\varphi$  формул (16) и (19) соответственно.

Перед тем как исследовать дифференциальные характеристики распадов  $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-$ . Все дифференциальные распределения приведенные ниже в данном разделе были получены в рамках программного пакета EvtGen. Описание данного пакета и модели приводится в разделе 3.2. Рассмотрим одномерные дифференциальные распределения для распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ . Одномерные распределения парциальной ширины по переменным  $x_{12}$  и  $x_{34}$  даны на рис. 9 и рис. 10 соответственно. Распределения по переменной  $x_{12}$  представлены только в диапазоне  $[0, 0.04]$ , что соответствует области применимости рассматриваемой модели. На рис. 9 виден пик фотонного полюса при  $x_{12} \rightarrow x_{12 \min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0016$  и пик  $\omega(782)$  – резонанса при  $x_{12} \rightarrow (M_\omega/M_1)^2 \approx 0.023$ . В силу того, что  $\rho^0(770)$  – мезон имеет ширину порядка 150 МэВ, вклад этого мезона на рис. 9 проявляется в виде широкой подложки к узкому пику  $\omega(782)$  – резонанса. Распределения по  $x_{34}$  на рис. 10 не имеют полюсов в полном согласии с анализом, проведенном в Разделе 1.2, и отчетливо демонстрируют важность учета фермиевской антисимметрии в распаде  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ . Именно из-за дополнительного вклада, возникшего в результате фермиевской антисимметрии формы распределений по переменной  $x_{34}$  в распадах  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$  существенно различаются. Аналогичное различие демонстрируют распределения по переменным  $y_{12} = \cos \theta_{12}$  и  $y_{34} = \cos \theta_{34}$ , которые представлены на рис. 11 и рис. 12 соответственно. Определение угловых переменных  $y_{12}$  и  $y_{34}$  дано в Приложении 3.1.

Важной характеристикой возможности регистрации многолептонных распадов  $B$  – мезонов с нейтрино в конечном состоянии служат распределения по

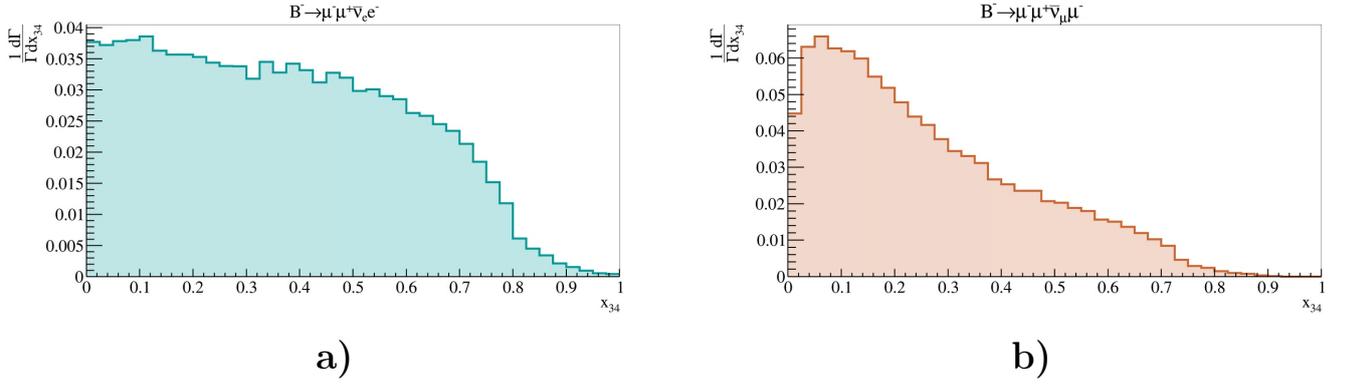


Рисунок 10 — Нормированные дифференциальные распределения  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{34}}$  для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{12} dy_{12} dy_{34} d\varphi$  формул (16) и (19) соответственно.

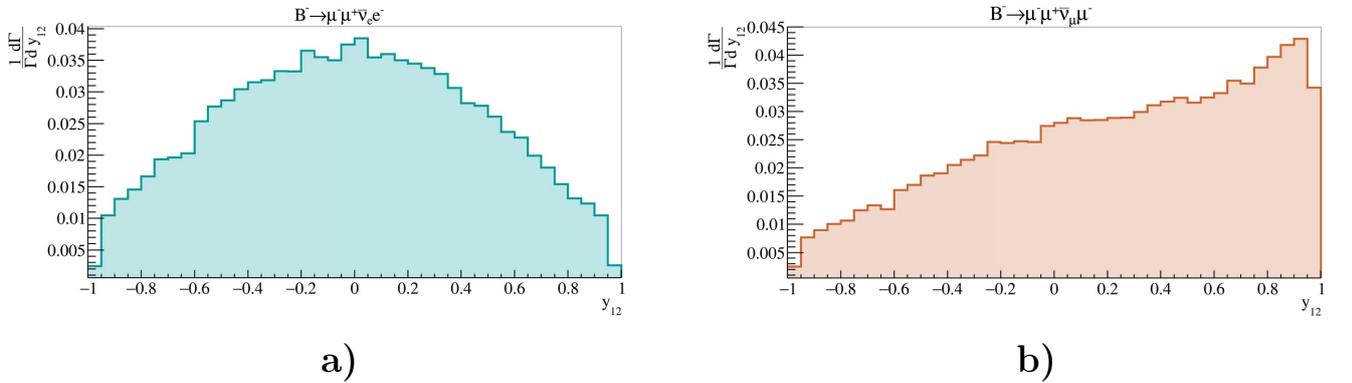


Рисунок 11 — Нормированные дифференциальные распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{12}}$  для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{12} dx_{34} dy_{34} d\varphi$  формул (16) и (19) соответственно.

нормированной инвариантной массе всех заряженных лептонов. Квадрат соответствующей массы определяется согласно формуле

$$x_{124} = \frac{(k_1 + k_2 + k_4)^2}{M_1^2}, \quad (29)$$

где  $k_i$  это 4-импульсы заряженных лептонов в конечном состоянии. Распределения по переменной  $x_{124}$  представлены на рис. 13. Из рисунка видно, что форма данного распределения, как и форма распределения по переменной  $x_{12}$ , слабо чувствительны к наличию фермиевской антисимметрии.

На рис. 14 показано распределение парциальной ширины распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$  по переменной  $\cos(\phi)$ , где  $\phi$  - это угол между

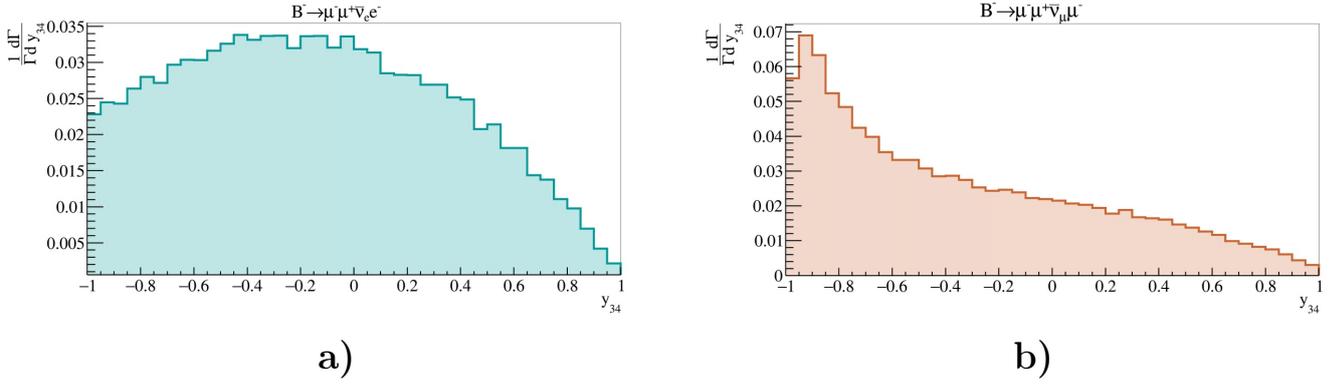


Рисунок 12 — Нормированные дифференциальные распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{34}}$  для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{12} dx_{34} dy_{12} d\varphi$  формул (16) и (19) соответственно.

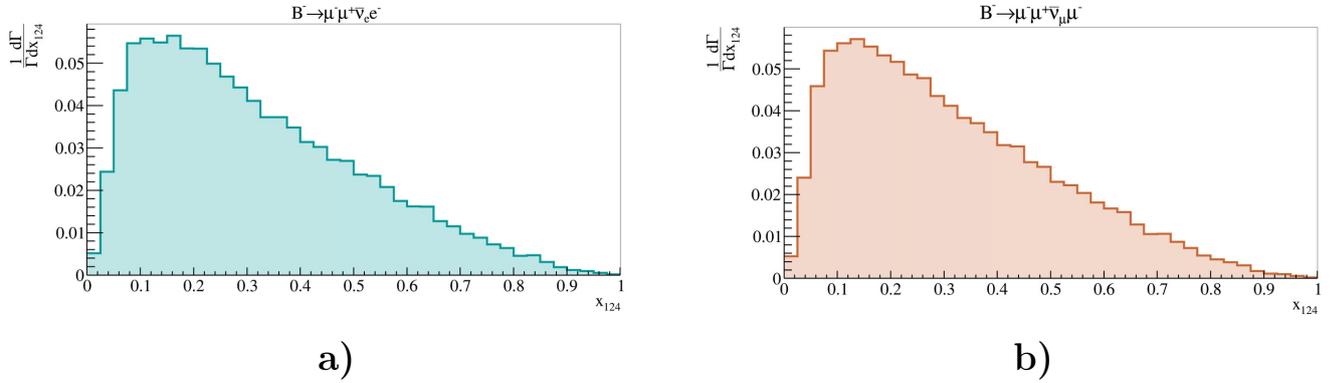
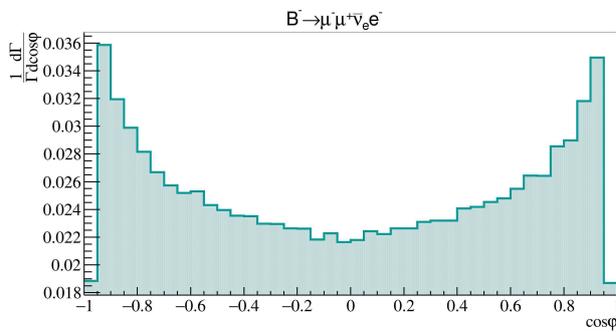


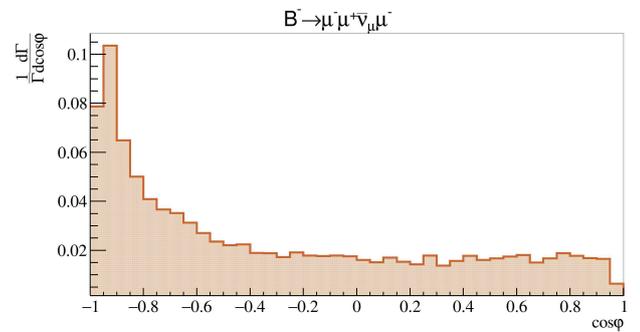
Рисунок 13 — Нормированные дифференциальные распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{124}}$  по инвариантной массе всех заряженных лептонов в конечном состоянии для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ .

плоскостями разлета лептонных пар конечного состояния. Более точно  $\phi$  определен в Приложении 3.3, выражением (64).

Все сказанное выше по поводу дифференциальных распределений в распадах  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$  относится и к дифференциальным распределениям для распадов  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ \bar{\nu}_e e^- e^-$ . Поскольку в рассматриваемой модели выполняется лептонная универсальность, то дифференциальные распределения двух последних распадов не требуют отдельного изучения.



a)



b)

Рисунок 14 — Нормированные дифференциальные распределения  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\cos(\varphi)}$  для распадов а)  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и б)  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{12} dx_{34} dy_{12} dy_{34}$  формул (16) и (19) соответственно.

## 2 Редкие распады нейтральных $B$ - мезонов на четыре легких заряженных лептона

Из структуры лагранжиана, описывающего взаимодействие кварков с калибровочными бозонами и бозоном Хиггса, следует, что в СМ в первом порядке теории возмущений запрещены нейтральные токи, меняющие аромат кварков (FCNC). Нейтральные токи, меняющие аромат кварков, могут идти в СМ в высших порядках теории возмущений например за счет петлевых диаграмм. Примерами распадов, идущих за счет FCNC, являются распады нейтральных  $B$  – мезонов. Данная глава посвящена исследованию распадов нейтральных  $B$  – мезонов на две пары заряженных лептонов, а именно распадов  $\bar{B}_{s,d} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .

### 2.1 Исследование распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Структура данной подглавы выглядит следующим образом. В разделе 2.1.1 приводятся оценки парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . В разделе 2.1.2 выписывается эффективный гамильтониан перехода  $b \rightarrow d \ell^+ \ell^-$ , а также части гамильтониана соответствующие электромагнитному взаимодействию и процессам слабой аннигиляции. Раздел 2.1.3 посвящен расчету амплитуд распадов  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . В разделе 2.1.4 дается выражение для парциальной ширины распада. В разделе 2.1.4 обсуждаются дифференциальные распределения.

Данная глава основана на материалах, опубликованных в [A2].

#### 2.1.1 Оценки парциальной ширины распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Первое теоретическое предсказание для парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  было приведено в работе [5]. Данное предсказание получено в предположении, что распад  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  можно свести к процессу

$\bar{B}_s \rightarrow \gamma^* \gamma^* \rightarrow (\mu^+ \mu^-)(e^+ e^-)$ . Адронные формфакторы вычислялись в рамках эффективной теории тяжелых кварков, которая слабо применима для описания распадов  $B_s$  – мезонов и неприменима для описания распадов  $B_d$  – мезонов. При этом было получено следующее теоретическое предсказание:

$$Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) = 10^{-4} * Br(\bar{B}_s \rightarrow \gamma \gamma) \approx 0,11 * 10^{-9} \quad (30)$$

Поскольку  $\alpha_{em}^2 \approx 10^{-4}$ , предсказание, полученное в работе [5], также хорошо согласуется с оценкой по порядку величины:

$$Br(\bar{B}_s \rightarrow \gamma^* \gamma^* \rightarrow (\mu^+ \mu^-)(e^+ e^-)) \approx \alpha_{em}^2 Br(\bar{B}_s \rightarrow \gamma \gamma)$$

Заметим, что при получении предсказания (30) было принято значение для парциальной ширины распада  $Br(\bar{B}_s \rightarrow \gamma \gamma) = 1,23 * 10^{-6}$ . Современное экспериментальное ограничение не противоречит данному значению  $Br_{PDG} < 3,1 * 10^{-6}$  при 90% CL.

В работе [36] также предложена альтернативная возможность оценки парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ :

$$Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx \alpha_{em} (Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) + Br(\bar{B}_s \rightarrow e^+ e^- \gamma)) \quad (31) \\ \approx 0,2 * 10^{-9}$$

Также можно сделать оценку, основанную на аналогичных соображениях, которая будет учитывать интерференцию между подпроцессами:

$$Br_4(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx \alpha_{em} \left| \sqrt{Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma)} + \sqrt{Br(\bar{B}_s \rightarrow e^+ e^- \gamma)} \right|^2 \approx \\ \approx 0,4 * 10^{-9} \quad (32)$$

Существенный вклад в амплитуду распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  дает от вклад  $\phi(1020)$  – резонанса, возникающий при излучении виртуального фотона  $s$  – кварком  $\bar{B}_s$  мезона. Поэтому интересным представляется оценить влияние данного вклада на парциальную ширину рассматриваемого распада. Для этого рассмотрим вклад процесса  $\bar{B}_s \rightarrow (\phi \rightarrow \ell'^+ \ell'^-) \ell^+ \ell^-$ :

$$Br_{\bar{B}_s \rightarrow \phi \ell \ell}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx Br(\bar{B}_s \rightarrow \phi \ell^+ \ell^-) \left| \sqrt{Br(\phi \rightarrow \mu^+ \mu^-)} + \right. \\ \left. + \sqrt{Br(\phi \rightarrow e^+ e^-)} \right|^2 \approx 0,9 * 10^{-9} \quad (33)$$

При сравнении оценки (33) с оценками (30, 31, 32) можно ожидать, что вклад от  $\phi(1020)$  резонанса будет доминирующим в парциальной ширине распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .

При рассмотрении вкладов  $c\bar{c}$  – пар в парциальную ширину распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$  ведущим является вклад  $J/\psi$  – резонанса. Чтобы оценить его влияние на амплитуду рассмотрим процесс  $\bar{B}_s \rightarrow J/\psi\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ . Тогда

$$Br_{\bar{B}_s \rightarrow J/\psi\gamma}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) \approx \alpha_{em} Br(\bar{B}_s \rightarrow J/\psi\gamma) |\sqrt{Br(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-)} + \sqrt{Br(J/\psi \rightarrow e^+e^-)}|^2 \approx 0,2 * 10^{-9} \quad (34)$$

Из сравнения выражений (33) и (34) можно заключить, что вклад процесса  $\bar{B}_s \rightarrow J/\psi\gamma$  должен быть меньше вклада процесса  $\bar{B}_s \rightarrow \phi\ell^+\ell^-$ . Заметим, что доминирующей модой распада  $\bar{B}$  – мезона в рамках СМ в четырехлептонное конечное состояние является распад  $B_s \rightarrow J/\psi\phi(1020)$ , где и  $J/\psi$ , и  $\phi(1020)$  – мезоны далее распадаются на два лептона.

Простая оценка дает:

$$\begin{aligned} Br(\bar{B}_s \rightarrow J/\psi(\rightarrow \mu^+\mu^-)\phi(\rightarrow e^+e^-)) = \\ Br(\bar{B}_s \rightarrow J/\psi\phi(1020)) * |\sqrt{Br(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-)} Br(\phi \rightarrow e^+e^-) + \\ + \sqrt{Br(J/\psi \rightarrow e^+e^-)} Br(\phi \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \approx \\ \approx 4 * Br(\bar{B}_s \rightarrow J/\psi\phi(1020)) * Br(J/\psi \rightarrow \ell^+\ell^-) * Br(\phi \rightarrow \ell^+\ell^-) \approx \\ \approx \dots 7 * 10^{-8} \end{aligned} \quad (35)$$

Если исключить область  $J/\psi$  – резонанса, это значительно уменьшит влияние данного фонового канала на парциальную ширину распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ . Однако вклад процесса  $B_s \rightarrow J/\psi\phi(1020)$  в значение  $Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)$  может быть все еще велик.

Значительное влияние на величину  $Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)$  может оказать процесс распада  $B_s \rightarrow \psi(2S)\phi(1020)$ . В этом случае

$$\begin{aligned} Br(B_s \rightarrow \psi(2S)(\rightarrow \mu^+\mu^-)\phi(\rightarrow e^+e^-)) = \\ Br(B_s \rightarrow \psi(2S)\phi(1020)) * |\sqrt{Br(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-)} Br(\phi \rightarrow e^+e^-) + \\ + \sqrt{Br(J/\psi \rightarrow e^+e^-)} Br(\phi \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \approx \\ \approx 4 * Br(B_s \rightarrow \psi(2S)\phi(1020)) * Br(J/\psi \rightarrow \ell^+\ell^-) * Br(\phi \rightarrow \ell^+\ell^-) \approx 5 * 10^{-9} \end{aligned}$$

Этот процесс оказывает менее заметное влияние на парциальную ширину распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ , чем  $\bar{B}_s \rightarrow J/\psi(\rightarrow \mu^+\mu^-)\phi(\rightarrow e^+e^-)$ , но, по порядку величины, превышает как все нерезонансные вклады, так и вклад  $\phi(1020)$  – резонанса. Поэтому при расчете  $Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)$  вклад  $\psi(2S)$  – резонанса,

также как и вклад  $J/\psi$  следует исключить, как в  $\mu^+\mu^-$  -, так и в  $e^+e^-$  - канале. Возможное влияние этих двух процессов на  $Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-)$  обсуждалось в работе [9], и его также следует принимать во внимание при оценке численного значения  $Br(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)$ .

### 2.1.2 Эффективный гамильтониан распадов $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$

Эффективный Гамильтониан перехода FCNC распадов  $b \rightarrow q$ , где  $q = \{d,s\}$  можно представить в форме Вильсоновского разложения [65]:

$$\mathcal{H}_{eff}^{b \rightarrow q}(x, \mu) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{tq}^* V_{tb} \sum_i C_i(\mu) O_i^{b \rightarrow q}(x),$$

где  $\mu \sim m_b$  — масштабный параметр, разделяющий пертурбативный и непертурбативный вклады от сильных взаимодействий,  $G_F$  — постоянная Ферми,  $V_{tq}$  и  $V_{tb}$  — матричные элементы матрица Кабиббо - Кобаяши - Маскава (CKM). Легкие степени свободы SM, такие как  $u, d, s, c$ , и  $b$  - кварки, лептоны, фотоны и глюоны, содержатся в базисных операторах вильсоновского разложения  $O_i^{b \rightarrow q}(x, \mu)$ . Тяжелые степени свободы,  $W, Z$ , и  $t$  - кварк, входят в коэффициенты Вильсона  $C_i(\mu)$ . Знак коэффициентов Вильсона определяется условием  $C_2(M_W) = -1$ . Численные значения  $C_i(\mu)$  взяты из [62, 63] при  $\mu = 5$  ГэВ.

Для расчета амплитуды распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$  используется гамильтониан для FCNC - перехода  $b \rightarrow q\ell^+\ell^-$ , где  $q \equiv s$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff}^{b \rightarrow s\ell^+\ell^-}(x, \mu) = & \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_{em}}{2\pi} V_{tb} V_{ts}^* \left[ -2 \frac{C_{7\gamma}(\mu)}{q^2} \left\{ m_b (\bar{s} i\sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma_5) q^\nu b) \right. \right. \\ & + m_s (\bar{s} i\sigma_{\mu\nu} (1 - \gamma_5) q^\nu b) \left. \right\} \cdot (\bar{\ell} \gamma^\mu \ell) \\ & + C_{9V}^{eff}(\mu) (\bar{s} O_\mu b) \cdot (\bar{\ell} \gamma^\mu \ell) + C_{10A}(\mu) (\bar{s} O_\mu b) \cdot (\bar{\ell} \gamma^\mu \gamma_5 \ell) \left. \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где  $O_\mu = \gamma_\mu(I - \gamma_5)$ ,  $q^\nu$  - четырехимпульсы  $\ell^+\ell^-$  - пар, матрица  $\gamma^5$  определяется как  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ,  $\varepsilon^{0123} = -1$  и  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ .

В соответствии с определением (38) гамильтониан электромагнитного взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{H}_{em}(x) = -e \sum_f Q_f (\bar{f}(x) \gamma^\mu f(x)) A_\mu(x) = -j_{em}^\mu A_\mu(x), \quad (39)$$

где заряд  $e = |e| > 0$  нормируется условием  $e^2 = 4\pi\alpha_{em}$  и  $\alpha_{em} \approx 1/137$  – постоянная тонкой структуры;  $Q_f$  – заряд фермиона аромата  $f$  в единицах  $e$ ,  $f(x)$  – фермионное поле аромата  $f$  и  $A_\mu(x)$  – четырехпотенциал электромагнитного поля.

Один из вкладов в амплитуду распада  $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  – вклад процессов слабой аннигиляции, который соответствует аннигиляции кварков в канале начальных или конечных мезонов. Вклад таких процессов в амплитуду распада  $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  менее значим, чем в амплитуду радиационных распадов  $B_{d,s}$  – мезонов.

Гамильтониан слабой аннигиляции имеет вид

$$\mathcal{H}_{eff}^{\bar{B}_q - Q \bar{Q}}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{Qb} V_{Qq}^* a_1(\mu) (\bar{q} O^\mu b) (\bar{Q} O_\mu Q), \quad (40)$$

где  $Q = \{u, c\}$  и  $a_1(\mu = 5 \text{ GeV}) \approx -0.13$  [64].

### 2.1.3 Структура амплитуд для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

В амплитуду распада  $\bar{B}_s(p) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) e^+(k_3) e^-(k_4)$  дают вклад шесть основных видов диаграмм. Первая из них соответствует ситуации, когда виртуальный фотон испускается валентным  $s$  – кварком  $\bar{B}_s$  – мезона в одном канале по четырехимпульсу, а в другом происходит образование лептонной пары за счет FCNC – вершины (см. рис. 15). Вторая диаграмма относится к аналогичным процессам для  $b$  – кварка, в этом случае виртуальный фотон излучается валентным  $b$  – кварком  $B_s$  мезона в одном канале, а в другом также за счет FCNC – вершины рождается лептонная пара. Диаграммы, отвечающие данным процессам, показаны на рис. 16. Третий вид диаграмм относится к тормозному излучению, когда виртуальный фотон испускается лептоном в конечном состоянии (см. рис. 17). Четвертый и пятый типы отражают вклады  $u\bar{u}$  и  $c\bar{c}$  пар, возникающих при учете пингвинных диаграмм. Шестой вид диаграмм также передает вклад  $u\bar{u}$  и  $c\bar{c}$  пар и связан с процессами слабой аннигиляции (см. рис. 19).

Исходя из выражений для гамильтонианов (38), (39) и (40)), получим амплитуду, соответствующую процессам испускания виртуального фотона  $s$  и  $b$  – кварками, вкладам  $u\bar{u}$ ,  $c\bar{c}$  – пар:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi}^{(1234)} = i\sqrt{2}G_F\alpha_{em}^2V_{tb}V_{ts}^*M_1 & \left[ \right. \\
& \left[ -\frac{a^{(VV)}}{M_1^2}\varepsilon_{\mu\alpha kq} - ib^{(VV)}g_{\mu\alpha} + 2i\frac{c^{(VV)}}{M_1^2}q_\alpha k_\mu \right] j^\mu(k_2, k_1) J^\alpha(k_4, k_3) + \\
& + \left[ -\frac{a^{(VA)}}{M_1^2}\varepsilon_{\mu\alpha kq} - ib^{(VA)}g_{\mu\alpha} + 2i\frac{c^{(VA)}}{M_1^2}q_\alpha k_\mu + i\frac{g^{(VA)}}{M_1^2}k_\mu k_\alpha \right] j^\mu(k_2, k_1) J^{\alpha 5}(k_4, k_3) + \\
& + \left[ -\frac{a^{(AV)}}{M_1^2}\varepsilon_{\mu\alpha kq} - ib^{(AV)}g_{\mu\alpha} + 2i\frac{c^{(AV)}}{M_1^2}q_\alpha k_\mu + i\frac{d^{(AV)}}{M_1^2}q_\mu k_\alpha \right] j^{\mu 5}(k_2, k_1) J^\alpha(k_4, k_3) + \\
& + \left[ -\frac{a^{(AA)}}{M_1^2}\varepsilon_{\mu\alpha kq} - ib^{(AA)}g_{\mu\alpha} + 2i\frac{c^{(AA)}}{M_1^2}q_\alpha k_\mu + \right. \\
& \left. + i\frac{d^{(AA)}}{M_1^2}q_\mu k_\alpha + i\frac{g^{(AA)}}{M_1^2}k_\mu k_\alpha \right] j^{\mu 5}(k_2, k_1) J^{\alpha 5}(k_4, k_3) \left. \right] \quad (41)
\end{aligned}$$

где  $M_1$  - масса  $B_s$  - мезона, четырехимпульсы  $q = k_1 + k_2$  и  $k = k_3 + k_4$  определены в Приложении 3.1. Выражения для токов определяются как

$$\begin{aligned}
j^\mu(k_2, k_1) &= \bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \mu(-k_1), \quad J^\alpha(k_4, k_3) = \bar{e}(k_4) \gamma^\alpha e(-k_3); \\
j^{\mu 5}(k_2, k_1) &= \bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \gamma^5 \mu(-k_1), \quad J^{\alpha 5}(k_4, k_3) = \bar{e}(k_4) \gamma^\alpha \gamma^5 e(-k_3).
\end{aligned}$$

Безразмерные функции  $a^{(IJ)} \equiv a^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$ ,  $b^{(IJ)} \equiv b^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$ ,  $c^{(IJ)} \equiv c^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$ ,  $d^{(IJ)} \equiv d^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$  и  $g^{(IJ)} \equiv g^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$ , где  $IJ = \{VV, VA, AV, AA\}$  определены в 3.3.

Диаграммы изображенные на рис. 15, описывают процесс излучения виртуального фотона валентным  $s$  - кварком  $B_s$  мезона в одном канале и рождение лептонной пары за счет FCNC - вершины в другом. В этом случае, вклад виртуального фотона в амплитуду распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  (41) может быть рассчитан в рамках модели доминантности векторных мезонов (VMD). Существует два случая: в первом виртуальный фотон распадется на пару  $\mu^+ \mu^-$  - (левая диаграмма), а во втором на  $e^+ e^-$  - пару (правая диаграмма). В обоих случаях возникает промежуточный векторный  $\phi(1020)$  - мезон, который мы учитываем в рамках VMD ( что отражено в коэффициентах  $a^{(IJ)}$ ,  $b^{(IJ)}$ ,  $c^{(IJ)}$ ,  $d^{(IJ)}$  и  $g^{(IJ)}$  в Приложении 3.3). Предыдущие оценки и дальнейшие точные расчеты показывают, что вклад от  $\phi(1020)$  - резонанса в амплитуду  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  распада является основным.

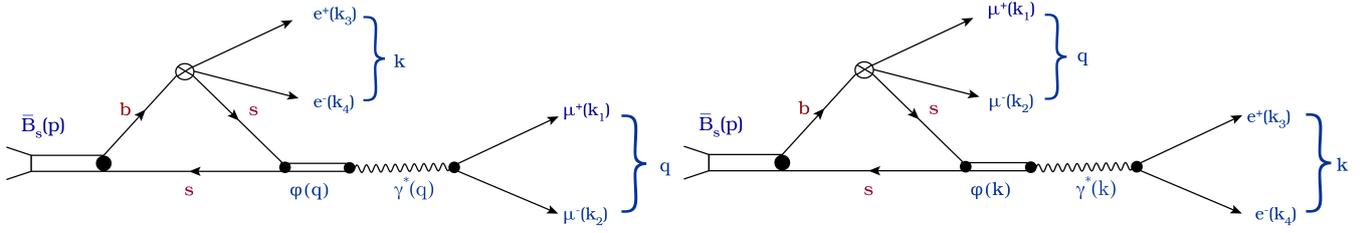


Рисунок 15 — Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона  $s$  – кварком  $B_s$  мезона.

Следующим вкладом в амплитуду (41) является нерезонансный вклад от  $b\bar{b}$  – пар (рис.16). Данный вклад соответствуют излучению виртуального фотона валентным  $b$  – кварком  $B_s$  мезона в одном канале, и образованию лептонной пары за счет FCNC – вершины в другом. Резонансных вкладов, в отличие от случая, когда виртуальный фотон излучается  $s$  – кварком, здесь не возникает, поскольку ближайший векторный резонанс  $\Upsilon(1S)$  лежит вне кинематической области распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+(k_1)\mu^-(k_2)e^+(k_3)e^-(k_4)$ , как и возбужденное состояние  $B_s^*$ . Влияние  $B_s^*$  и  $\Upsilon(1S)$  резонансов на амплитуду распада было учтено при параметризации формфакторов, зависящих от переменных  $q^2$  и  $k^2$  как это показано в Приложении 3.3. Формфакторы  $F_i(q_1^2, q_2^2)$  ранее были описаны в [62, 63] для распада  $B_s \rightarrow l^+l^-\gamma$ , когда один из квадратов четырехимпульсов был определен как  $q_j^2 = 0$ . Здесь мы определяем  $q_1^2 \neq 0$  и  $q_2^2 \neq 0$ . Параметризация формфакторов для одного из квадратов четырехимпульсов взята из [62], таблица II. В этом случае ближайшим векторным резонансом в  $b\bar{b}$  канале является  $\Upsilon(1S)$  – резонанс. Известно что, полюсное приближение отличается от точного расчета не более чем на 20% [62]. Поэтому во втором канале учитывался только полюс от  $\Upsilon(1S)$  мезона. Это дает приближение формфактора в виде

$$F_i(q_1^2, q_2^2) = \frac{F_i(q_1^2 = 0, q_2^2 = 0)}{\left(1 - \frac{q_1^2}{M_{R_i}^2}\right) \left(1 - \frac{q_2^2}{M_{\Upsilon(1S)}^2}\right)},$$

где  $i = \{V, A, TV, TA\}$ .

Для упрощения вычислений для первого  $l^+l^-$  - канала также выбрана полюсная параметризация.

Так как  $M_{B_s^*} > M_1$ , полюс от  $M_{B_s^*}$  - мезона также лежит вне кинематической области распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ . Наличие этого полюса учитывается при выборе полюсной параметризации формфакторов.

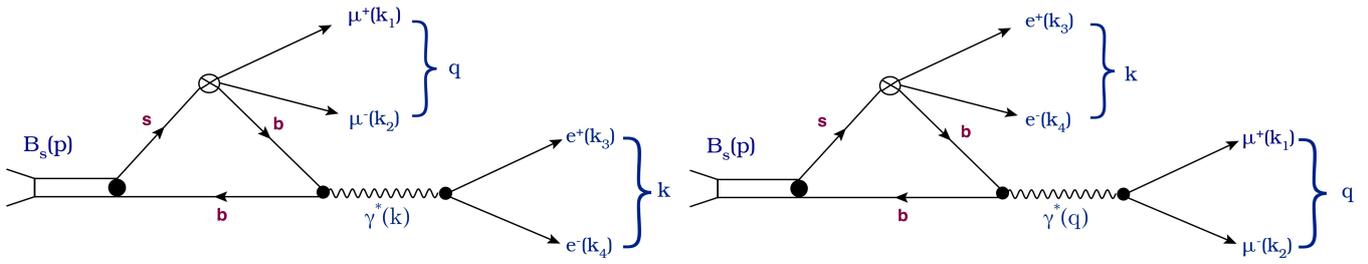


Рисунок 16 — Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона  $b$  — кварком  $B_s$  мезона.

Следующий набор диаграмм относится к процессам тормозного излучения и описывает ситуацию, когда виртуальный фотон испускается одним из лептонов в конечном состоянии (см. рис. 17). Существует четыре типа диаграмм тормозного излучения, описывающих вклад от испускания фотона каждым лептоном в конечном состоянии.

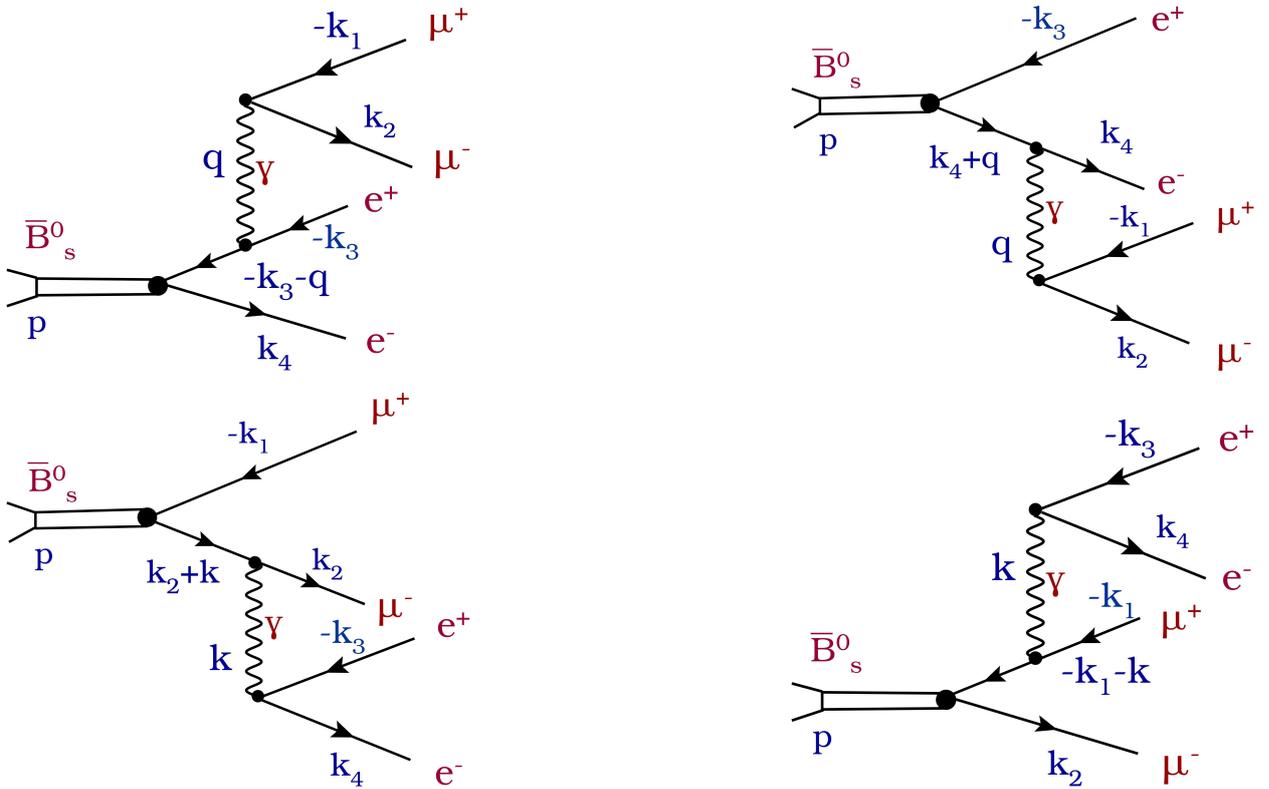


Рисунок 17 — Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона одним из лептонов конечного состояния.

В качестве примера амплитуды процесса тормозного излучения следующего, из выражения (39) и дающего вклад в амплитуду распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , можно привести выражение, описывающее вклад  $\mu^+ \mu^-$  пары, испускаемой

электроном и позитроном в конечном состоянии:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(\mu)} = & i\sqrt{2} G_F \alpha_{em}^2 V_{tb} V_{ts}^* \left( \bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \mu(-k_1) \right) \left[ \right. \\ & i d^{(VP)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) k_\mu \left( \bar{e}(k_4) \gamma^5 e(-k_3) \right) + \\ & \left. + f^{(VT)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\nu \left( \bar{e}(k_4) \gamma^\alpha \gamma^\beta e(-k_3) \right) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогичное выражение для описания вклада  $e^+e^-$  – пары, испускаемой  $\mu^-$  и  $\mu^+$  в конечном состоянии, получается заменой в выражении (42) мюонных масс на электронные в коэффициентах  $d^{(VP)}$  и  $f^{(VP)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(e)} = & \sqrt{2} G_F \alpha_{em}^2 V_{tb} V_{td}^* \left( \bar{e}(k_2) \gamma^\mu e(-k_1) \right) \left[ \right. \\ & i d^{(VP)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) k_\mu \left( \bar{\mu}(k_4) \gamma^5 \mu(-k_3) \right) + \\ & \left. + f^{(VT)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\nu \left( \bar{\mu}(k_4) \gamma^\alpha \gamma^\beta \mu(-k_3) \right) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Для расчета полюсной структуры в области малых квадратов четырехимпульсов, возникающих при расчете вкладов тормозного излучения, необходимо учитывать ненулевые массы лептонов. Данный вклад может быть достаточно существенным, поэтому в выражении (42) коэффициенты  $d^{(VP)}$  и  $f^{(VP)}$  включают в себя зависимость от лептонных масс.

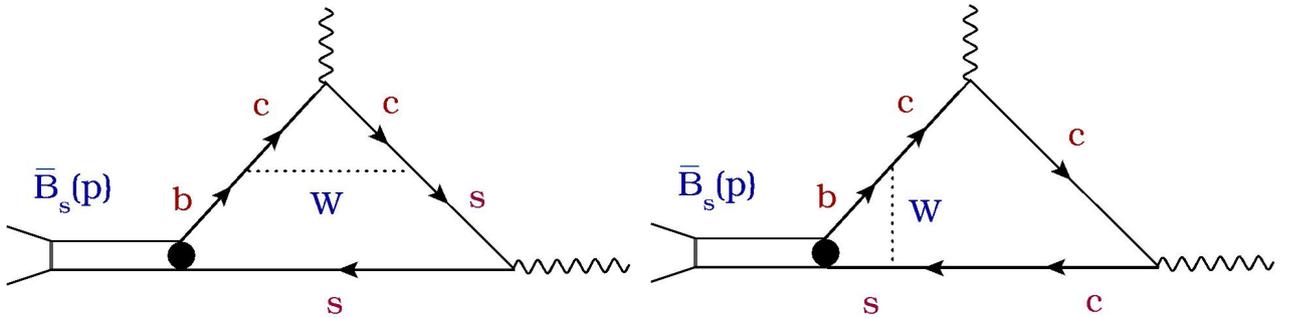


Рисунок 18 — Диаграммы вида «пингвин», отвечающие вкладам петлевым вкладом  $c$  и  $u$  кварков

Следующие вклады соответствуют учету легких степеней свободы, в частности, вкладу петель от  $c$  и  $u$  кварков.

Векторные  $c\bar{c}$  резонансы  $J/\psi$ ,  $\psi(2S)$ ,  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$ ,  $\psi(4415)$ , как и  $u\bar{u}$  – резонансы,  $\rho^0(770)$ ,  $\omega(782)$ , возникают из эффективного гамильтониана перехода  $b \rightarrow sl^+\ell^-$  (38). Резонансный вклад отражен в коэффициентах  $a^{(IJ)}$ ,  $b^{(IJ)}$  и  $c^{(IJ)}$ . В частности в выражении для поправки к коэффициенту  $C_{9V}^{eff}$ . Структура  $C_{9V}^{eff}(\mu, q^2)$  может быть представлена как

$$C_{9V}^{eff}(\mu, q^2) = C_{9V}(\mu) + \Delta C_{9V}^{c\bar{c}+u\bar{u}}(\mu, q^2),$$

где  $C_{9V}(\mu) = -4.21$  - вильсоновский коэффициент на масштабе  $\mu = 5$  ГэВ.

Здесь  $\Delta C_{9V}^{c\bar{c}+u\bar{u}}(\mu, q^2)$  - непертурбативная поправка, содержащая эффекты от  $c\bar{c}$  и  $\rho^0(770)$ ,  $\omega(782)$  резонансов.

В приближении факторизации структура поправки  $\Delta C_{9V}^{c\bar{c}}(\mu, q^2)$  может быть представлена в виде [67]:

$$\Delta C_{9V}^{c\bar{c}}(\mu, q^2) = 3a_1(\mu) \left( h \left( \frac{m_c}{m_b}, \frac{q^2}{m_b^2} \right) + \frac{3}{\alpha_{em}^2} \kappa \sum_{V=J/\psi, \psi', \dots} \frac{\pi \Gamma(V \rightarrow \ell\ell) M_V}{M_V^2 - q^2 - i M_V \Gamma_V} \right) \quad (44)$$

Пертурбативные эффекты от сильных взаимодействий содержатся в функции  $h \left( \frac{m_c}{m_b}, \frac{q^2}{m_b^2} \right)$ , которая соответствует однопетлевым матричным элементам четырехкварковых операторов  $O_1$  и  $O_2$ . Вклады непертурбативных КХД - эффектов, связанных с образованием промежуточных связанных состояний  $c\bar{c}$  оцениваются в приближении факторизации и модели доминантности векторных мезонов.

Аналогичный вид непертурбативной поправки  $\Delta C_{9V}^{u\bar{u}}(\mu, q^2)$ , описывающий вклады от  $u\bar{u}$  - пар, может быть получен путем замены в выражении (44) соответствующих значений массы  $c$  - кварка на массу  $u$  - кварка, а также масс и ширин промежуточных  $c\bar{c}$  резонансов на аналогичные значения для  $u\bar{u}$  резонансов.

Для более полного соответствия процедуре экспериментального анализа [9, 10, 12], при теоретическом расчете дифференциальных характеристик и парциальных ширин распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  в данной работе исключались вклады от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  резонансов в пределах  $|\sqrt{M_1^2 x_{ij}} - m(Res)| < 100$  MeV. Здесь  $m(Res)$  - масса промежуточных  $J/\psi$  или  $\psi(2S)$  резонансов. Вклады “хвостов” от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  - резонансов при вычислении амплитуды учитывались. Вклады от высших векторных  $c\bar{c}$  резонансов  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$  и  $\psi(4415)$ , также как и вклады от  $\phi(1020)$ ,  $\rho(770)$  и  $\omega(782)$  - резонансов не исключались, так как они не перекрывают менее значимые вклады.

Последний вклад в амплитуду распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , который рассматривается в данной работе, — это вклад процессов слабой аннигиляции. Данный вклад возникает за счет диаграмм низшего порядка, описывающих вклад пар  $c\bar{c}$  и  $u\bar{u}$  после интегрирования по вкладам  $W$  - бозонов. Вклад пары  $t\bar{t}$  также возникает, но оказывается подавленным с фактором подавления  $(\frac{M_1}{m_t})^2$  и, поэтому, в данной работе не учитывается.

Учет вклада аксиальной аномалии дает следующую амплитудную структуру:

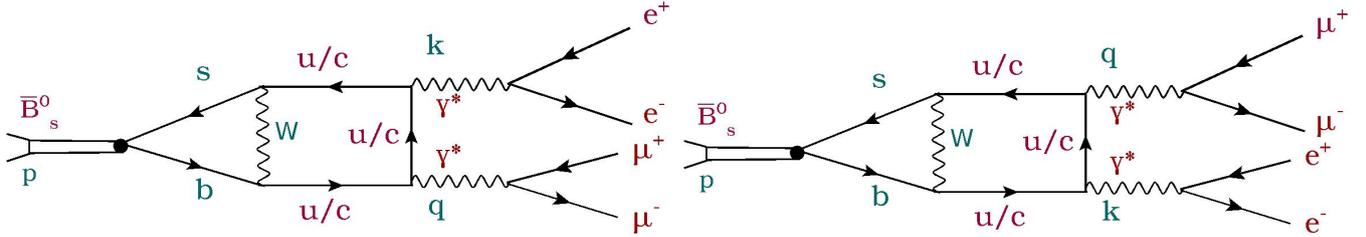


Рисунок 19 — Диаграммы, соответствующие процессам слабой аннигиляции

$$\mathcal{M}_{fi}^{(WA)} = i \frac{32\sqrt{2}}{3\pi} \frac{G_F}{M_1^3} \alpha_{em}^2 (V_{ub} V_{us}^* + V_{cb} V_{cs}^*) a_1(\mu) \hat{f}_{B_s} \frac{1}{x_{12} x_{34}} \varepsilon_{\mu\alpha kq} \left( \bar{\mu}(k_2) \gamma^\mu \mu(-k_1) \right) \left( \bar{e}(k_4) \gamma^\alpha e(-k_3) \right), \quad (45)$$

где  $\hat{f}_{B_s} = \frac{f_{B_s}}{M_1}$ .

Вклад аксиальной аномалии учитывается при нулевых массах  $u$  и  $s$  кварков. Таким образом, мы пренебрегаем поправками вида  $(m_c/M_1)^2$  и  $(m_u/M_1)^2$ . Вклад «слабой аннигиляции» проявляется при малых значениях  $q^2$ , но даже в этой области он подавлен за счет массы тяжелого кварка по сравнению со вкладом, обсуждавшимися в предыдущих секциях, в частности по сравнению с вкладом тормозного излучения.

#### 2.1.4 Численные результаты для распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

##### Вычисление парциальной ширины распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Исследование редких распадов  $B_s$  мезонов являются одним из основных направлений поисков физики за пределами Стандартной модели. С этой точки зрения детальное изучение распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  весьма интересно, а теоретически обоснованное моделирование такого распада необходимо. В рамках данной работы была создана Монте-Карло модель для пакета EvtGen [66]. Данная модель обеспечивает описание распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с учетом всех

теоретических вкладов, обсуждаемых в разделе 2.1.3. Дополнительно был реализован метод, позволяющий определить численное значение парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с использованием пакета EvtGen.

В соответствии с обсуждением, проведенным в предыдущем разделе, полная амплитуда распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(tot)} &= \mathcal{M}_{fi}^{(BS e+\mu)} + \mathcal{M}_{fi}^{(\phi)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b\bar{b})} + \mathcal{M}_{fi}^{(c\bar{c}+u\bar{u})} + \mathcal{M}_{fi}^{(WA)} = \\ &= \sqrt{2} G_F \alpha_{em}^2 V_{tb} V_{ts}^* \sum_L L j_1 j_2, \end{aligned}$$

где  $j_1$  и  $j_2$  - лептонные токи,  $L$  - лоренцевы структуры соответствующих матричных элементов при лептонных токах.

Выражение для парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  записывается как

$$\begin{aligned} d\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) &= \tau_{B_s} \frac{\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{fi}^{(tot)}|^2}{2M_1} d\Phi_4 = \\ &= \frac{G_F^2 \alpha_{em}^4 |V_{tb} V_{ts}^*|^2}{M_1} \tau_{B_s} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \left| \sum_L L j_1 j_2 \right|^2 d\Phi_4, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $\tau_{B_s}$  - время жизни  $B_s$  - мезона, четырехчастичный фазовый объем  $d\Phi_4$  определен в Приложении 3.1 (см. выражение (66)). Суммирование производится по спинам конечных лептонов  $s_1, s_2, s_3$  и  $s_4$ .

Полное интегрирование выражения (46) может быть проведено только численно. С использованием возможностей пакета EvtGen [66], был реализован многомерный интегратор на основе геометрического алгоритма Монте – Карло интегрирования [34]. Суть данного метода состоит в следующем. Предположим, что нужно вычислить площадь плоской фигуры А (см. рис. 20), расположенной в прямоугольнике, который задается условиями

$$\begin{aligned} x_n &< x < x_k \\ y_n &< y < y_k. \end{aligned} \quad (47)$$

Внутри прямоугольника генерируются  $N_{tot}$  случайных точек. Число точек, попавших в область А, обозначим  $N_0$ . Тогда площадь фигуры А может быть вычислена как

$$S_A = S_I \frac{N_0}{N_{tot}}, \quad (48)$$

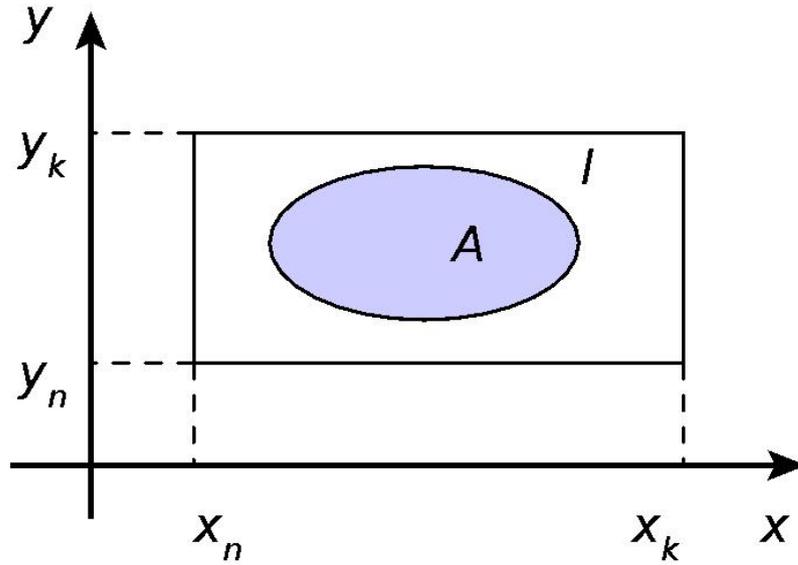


Рисунок 20 — Иллюстрация к описанию геометрического алгоритма Монте-Карло интегрирования

где  $S_I$  – площадь прямоугольника  $I$ . При этом, чем больше будет значение  $N_{tot}$ , тем точнее окажется аппроксимация. Если  $N_{tot}$  будет недостаточно велико, слишком сильным может оказаться влияние флуктуаций. В этом случае конечное значение интеграла может быть переоценено. Поэтому важно подобрать такое, значение  $N_{tot}$ , при котором результат будет устойчивым.

Данный метод может быть обобщен для многомерных интегралов. Вне зависимости от конкретной реализации данного метода и интегрируемой функции можно выделить основные параметры, которые позволяют оценить значение искомого интеграла. Этими параметрами являются полное число событий  $N_{tot}$ , число принятых (попавших в область интегрирования) при работе генератора событий  $N_0$  и максимальное значение интегрируемой функции.

В рамках этого подхода парциальная ширина распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  может быть рассчитана как

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx \frac{\alpha_{em}^4 |V_{tb} V_{ts}^*|^2}{3 \cdot 2^{13} \cdot \pi^5} \tau_{B_s} G_F^2 M_1^5 \frac{N_0}{N_{tot}} |X|^2, \quad (49)$$

где  $N_{tot}$  – полное число событий, полученных при работе генератора EvtGen,  $N_0$  – число принятых событий.  $|X|^2 \equiv \max \frac{|\sum_L j_1 j_2|^2}{M_1^2}$  – безразмерный максимум матричного элемента распада, возведенного в квадрат. При получении константы, задающей размерность парциальной ширины в выражении (49) было использовано определение четырехчастичного фазового объема в приближении

безмассовых лептонов, описанное в [35]. Для определения погрешности, возникающей при использовании данного приближения и его влияния на конечное значение парциальной ширины распада, в альтернативном программном обеспечении (Wolfram Mathematica) был проведен расчет парциальной ширины распада с использованием определения четырехчастичного фазового объема для случаев безмассовых и массивных лептонов в конечном состоянии. При выбранных границах интегрирования  $x_{ij\min} = (2m_\mu/M_1)^2$ , данное приближение вносит погрешность порядка 5% в численное значение парциальной ширины, что слабо отражается на конечном результате.

Описанный подход многомерного интегрирования в EvtGen был апробирован при расчете ряда уже известных парциальных ширин нескольких распадов  $B$  – мезонов, а также при интегрировании различных функций, в том числе и сингулярных.

Значение парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ , рассчитанное в рамках пакета EvtGen, оказывается равным:

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) \approx (6.0 \pm 1.8) * 10^{-9}. \quad (50)$$

Как обсуждалось выше, при интегрировании геометрическим методом Монте – Карло важно показать, что результат устойчив и не зависит от возможного влияния флуктуаций. Ниже приведена таблица для разных значений  $N_{tot}$ . Видно, что с ростом значения  $N_{tot}$ ,  $\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)$  меняется слабо.

При расчете парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$  в области малых значений квадратов инвариантных  $\mu^+\mu^-$  – и  $e^+e^-$  – масс оказывается значимым наличие фотонных полюсов. Чтобы сделать возможным проведение интегрирования в данной области и устранить расходимости необходимо ввести некоторое ограничение. Естественным кинематически обусловленным ограничением полюса по переменной  $x_{12}$ , соответствующей мюонному каналу, служит значение  $x_{12} \rightarrow x_{12\min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0015$ . В электронном канале было установлено аналогичное ограничение  $x_{34} \rightarrow x_{34\min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0015$ , поскольку ограничение на  $x_{34} \rightarrow x_{34\min} = (2m_e/M_1)^2 \approx 10^{-8}$  лежало бы далеко за пределами чувствительности любого детектора. Кроме того, как будет показано далее, ограничение  $x_{34} \rightarrow x_{34\min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0015$  позволяет провести оценку парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-\mu^+\mu^-$ .

Доминирующей модой в СМ распада  $\bar{B}_s$  мезона в четырехлептонное конечное состояние является мода  $\bar{B}_s \rightarrow J/\psi \phi(1020)$ , где  $J/\psi$  и мезоны  $\phi(1020)$

Таблица 3 — Зависимость парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  от  $N_{tot}$

$N_{tot}$	Парциальная ширина
$3 * 10^6$	$5.82 * 10^{-9}$
$6 * 10^6$	$6.27 * 10^{-9}$
$1.2 * 10^7$	$6.07 * 10^{-9}$
$2.4 * 10^7$	$6.12 * 10^{-9}$
$4.8 * 10^7$	$5.92 * 10^{-9}$
$9.6 * 10^7$	$5.98 * 10^{-9}$
$19.2 * 10^7$	$6.0 * 10^{-9}$

распадаются на два лептона [9]. При этом вклад резонанса  $J/\psi$  исключен из расчета  $\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$  для лучшего согласования с экспериментальным анализом [10]. В то же время, вклад “хвостов” от резонанса  $J/\psi$  все еще велик и в значительной степени влияет на парциальную ширину распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .

Аналогично, в СМ существует распад  $\bar{B}_s \rightarrow \psi(2S) \phi(1020) \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , который мог оказать сходное влияние на  $\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$ . Поэтому резонансная область  $\psi(2S)$  также исключается. Вклады  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  резонансов исключаются в соответствии с условиями  $|\sqrt{M_1^2 x_{ij}} - m(\text{Res})| < 100 \text{ МэВ}$ . Как было сказано выше, данные условия определены из экспериментального анализа [10].

Интересным является вопрос, какое влияние на парциальную ширину распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  оказывает  $\phi(1020)$  резонанс. Подобный вопрос изучался в работе [10] для процесса  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ . Для оценки влияния вклада  $\phi(1020)$  – резонанса в данном теоретическом исследовании данный вклад также исключался в соответствии с условиями  $|\sqrt{M_1^2 x_{ij}} - m(\phi(1020))| < 70 \text{ МэВ}$  (ограничения взяты из [12]). Таким образом можно оценить величину менее значительных вкладов, в частности тормозного излучения,  $c\bar{c}$ ,  $u\bar{u}$  и  $b\bar{b}$  пар, а

также процессов слабой аннигиляции. В этом случае для парциальной ширины распада  $\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$  получим следующее значение:

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (2.8 \pm 0.8) * 10^{-10} \quad (51)$$

Сравнение последнего значения со значением, учитывающим  $\phi(1020)$  резонанс показывает, что вклад  $\phi(1020)$  резонанса в амплитуду распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  является ведущим, поскольку его исключение уменьшает парциальную ширину распада более, чем на порядок. Различие же между остальными вкладами, по видимому также укладывается в порядок.

В силу того факта, что экспериментальная идентификация электронов более сложна по сравнению с идентификацией мюонов, с точки зрения экспериментального анализа распад  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  является более интересным, чем распад  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . В амплитуду данного распада дают вклад те же процессы, что и в амплитуду  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . Подробное описание вкладов приводится в разделе 2.1.3. Основное различие между амплитудами распадов  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  заключается в том, для последнего количество диаграмм, учитываемых при расчете амплитуды увеличивается из-за наличия в конечном состоянии тождественных частиц. Как следствие, возникают эффекты фермиевской антисимметризации. При этом появляется большое количество дополнительных интерференционных слагаемых, которые в значительной степени могут повлиять на величину парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ .

В рамках данной работы не вычислялось точное значение парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ , но на основании теоретического предсказания (51) была сделана оценка. В работе [5] было показано, что

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) : \text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) = 3 : 1.$$

Поскольку в [5] не учитывался вклад  $\phi(1020)$  резонанса и  $c\bar{c}$  – состояний, данная оценка применима только к ситуации, когда вклады  $\phi(1020)$  и  $J/\psi, \psi(2S)$  – резонансов исключены. Т.е. к значению (3.19). Тогда для парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  получим следующее приблизительное значение:

$$\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \sim 10^{-10}. \quad (52)$$

Результат 52 не противоречит экспериментальному верхнему пределу из работы [12]:

$$\text{Br}_{Exp}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \leq 8.6 * 10^{-10}$$

и согласуется с оценкой из [36], где аналогичная величина была получена на основании анализа распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ .

Помимо наличия дополнительной интерференции между диаграммами, значимым фактором, определяющим различия между парциальными ширинами распадов  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ , является различие между вкладами фотонных полюсов в  $e^+ e^-$  и  $\mu^+ \mu^-$  - каналах. При этом вклад от фотонного полюса в  $e^+ e^-$  - канале должен быть больше, чем от вклада от фотонного полюса  $\mu^+ \mu^-$ . В данной работе, как это обсуждалось выше, при вычислении парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  установлена нижняя граница  $x_{ij} \rightarrow x_{ij \min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0015$  для  $e^+ e^-$  - канала. Таким образом, исходная разница вкладов полюсов в  $e^+ e^-$  и  $\mu^+ \mu^-$  - каналах не вносит различий в отношении парциальных ширин процессов  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ .

### Дифференциальные характеристики распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

В данной работе была исследована серия дифференциальных характеристик распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . При этом учитывались вклады  $\phi(1020)$ ,  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$ ,  $\psi(4415)$ ,  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  резонансов и «хвостов» от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  резонансов во всех приведенных ниже дифференциальных характеристиках. Относительная фаза между резонансами во всех расчетах положена равной нулю. Распределения получены при помощи программного пакета EvtGen.

Начнем с рассмотрения одномерных дифференциальных распределений. Данные распределения показаны на Рис. 21. Здесь область резонанса  $J/\psi$  исключалась в соответствии с условием  $|\sqrt{M_1^2 x_{12}} - m(J/\psi)| < 100$  МэВ. Аналогичное ограничение было применено при исключении  $\psi(2S)$  - мезона:  $|\sqrt{M_1^2 x_{12}} - m(\psi(2S))| < 100$  МэВ. Как обсуждалось выше, для малых значений квадратов инвариантных  $e^+ e^-$  - и  $\mu^+ \mu^-$  - масс, для обоих каналов были установлены следующие ограничения:  $x_{ij} \rightarrow x_{ij \min} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0015$ . Таким образом, основное отличие между  $\mu^+ \mu^-$  - и  $e^+ e^-$  - каналами нивелируется и распределения на рис. 21(1) и 21(2) в значительной степени похожи.

При получении дифференциальных распределений вклад  $\phi(1020)$  резонанса не исключался и на рис. 21 можно видеть пики в области

$x_{ij} \rightarrow (M_\phi/M_1)^2 \approx 0.037$  в обоих каналах. На рис. 21 (3, 4) более детально рассмотрена область  $\phi(1020)$  – резонанса. Рис. 21 также демонстрирует, что вклад  $\phi(1020)$  резонанса сильно превышает все остальные вклады при условии исключения пиков от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  – мезонов. То есть данный вклад в амплитуду распада является ведущим. Аналогичный вывод был сделан в предыдущем разделе при получении значения парциальной ширины с учетом вклада  $\phi(1020)$  – мезона и без него. Вклад  $\phi(1020)$  – мезона очень велик,

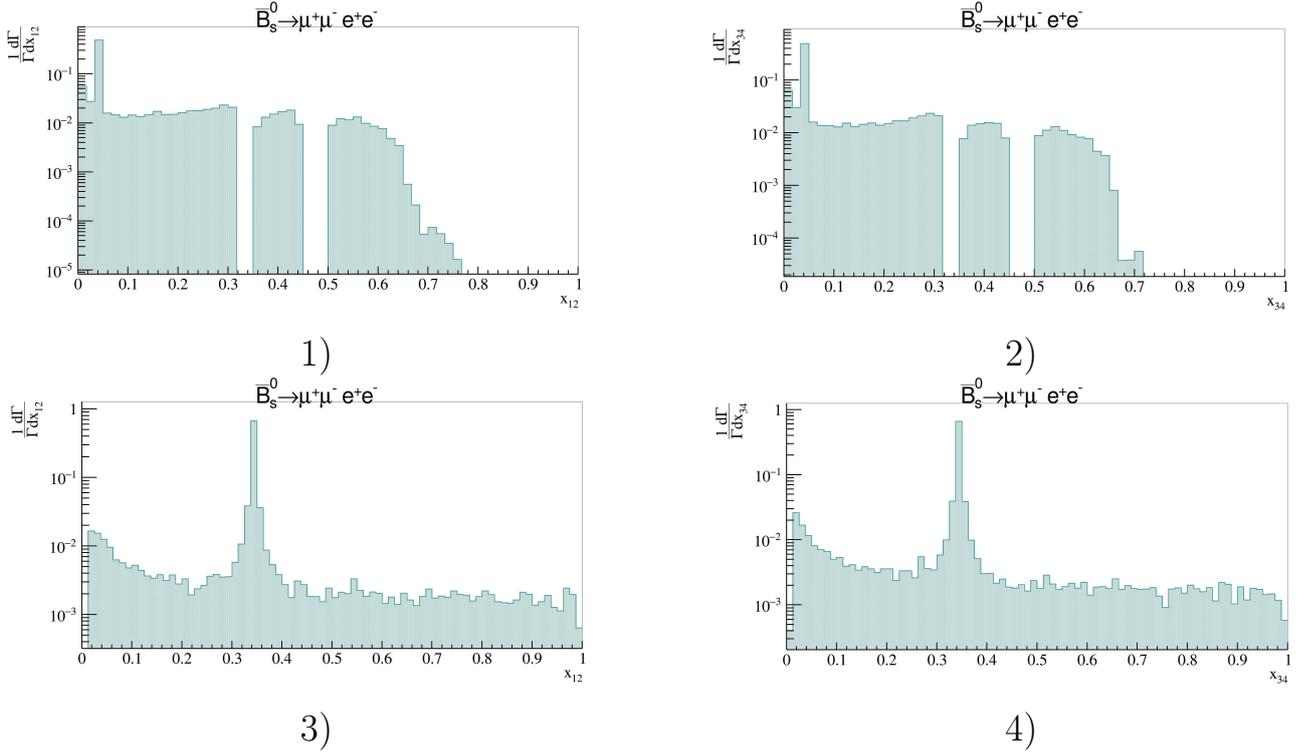


Рисунок 21 — 1),3) Одномерные дифференциальные распределения парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  переменной  $x_{12}$  ( $\mu^+ \mu^-$  – канал); 2),4) одномерные дифференциальные распределения парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $x_{34}$  ( $e^+ e^-$  – канал); на рис. 3),4) представлена более детально показана область  $\phi(1020)$  – резонанса

поэтому вклады близких к  $\phi(1020)$  по массе  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  резонансов на рис. 21 визуалью неразличимы.

Распределения по угловым переменным  $y_{12} = \cos \theta_{12}$  и  $y_{34} = \cos \theta_{34}$  представлены на рис. 21(3) и рис. 21(4) соответственно. Здесь  $\theta_{12}$  – это угол между направлением распространения положительно заряженного  $\mu^+$  и  $B_s$  – мезона в системе покоя мюонной пары. Угол  $\theta_{34}$  представляет собой угол между направлением распространения позитрона  $e^+$  и  $B_s$  – мезона в системе покоя  $e^+ e^-$  –

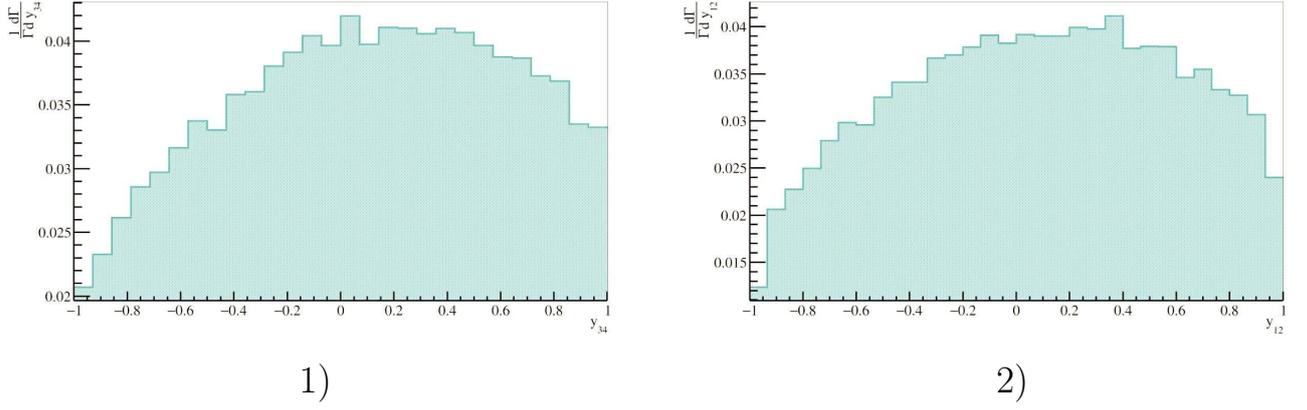


Рисунок 22 — Нормированные дифференциальные распределение по угловым переменным  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{12}}$  и  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{34}}$

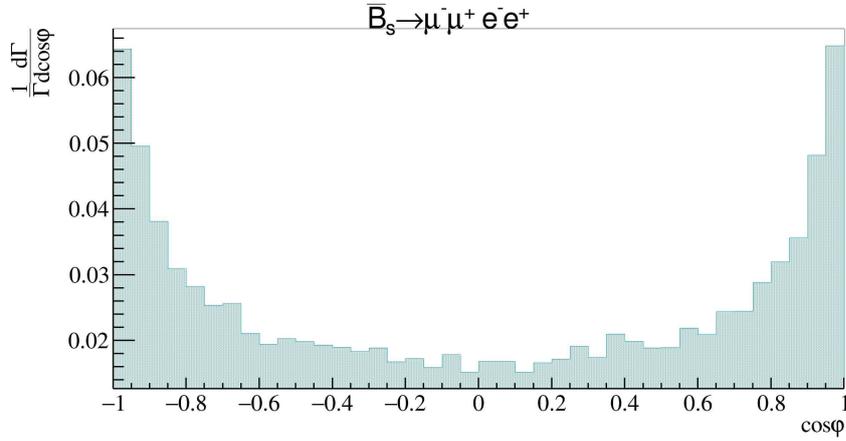


Рисунок 23 — Нормированное дифференциальное распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\cos(\phi)}$

пары. Выражения для переменных  $y_{ij}$  даются в приложении 3.1. Форма распределений на рис. 21(3,4) является характерной для четырехлептонных распадов  $B$  – мезонов.

На рис. 23 показано распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $\cos(\phi)$ , где  $\phi$  – это угол между плоскостями разлета лептонных пар конечного состояния. Более точно  $\phi$  определен в Приложении 3.3, выражением (64).

Важность учета вкладов хвостов  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  – резонансов отображает Рис. 25, где показано дважды дифференциальное распределение парциальной ширины  $d^2\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$ .

$$\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$$

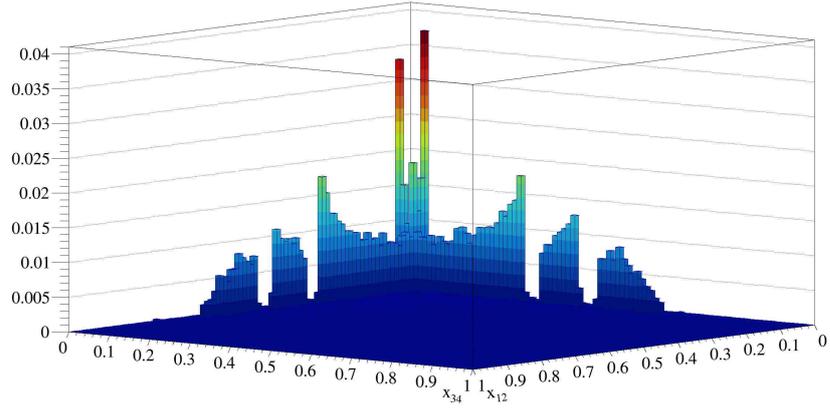


Рисунок 24 — Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины  $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$  в первой проекции

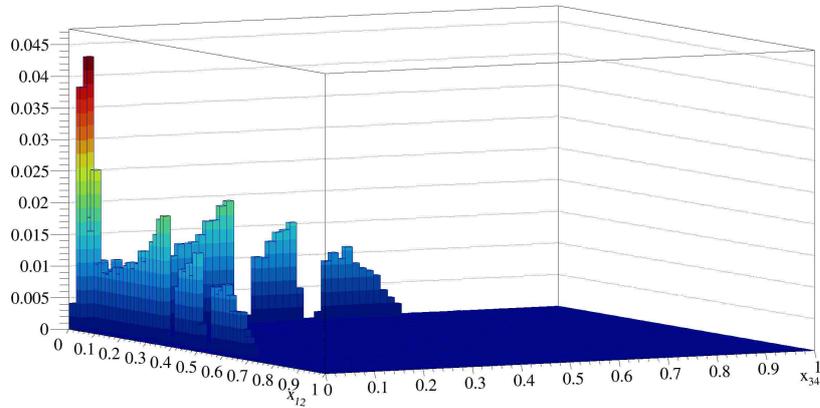


Рисунок 25 — Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины  $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , во второй проекции

Рис. 25 демонстрирует вклады  $\phi(1020)$  резонансов в каналах  $x_{12}$  и  $x_{34}$ , а также поведение амплитуды распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$  для больших значений  $x_{12}$  и  $x_{34}$ . Для ограничений, используемых в данной работе в областях малых  $x_{12}$  и  $x_{34}$ , а также в областях вокруг  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  – резонансов, вклад  $\phi(1020)$  – резонанса является доминирующим. Рис. 25 отражает значение учета «хвостов» от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  – резонансов, а также высших чармониевых резонансов. Видно, что влияние данных вкладов хоть и меньше, чем влияние  $\phi(1020)$  – мезона, но все же весьма существенно.

На Рис. (3.8) как и ранее, было положено  $x_{12} = x_{34} = 0.0015$ . Несмотря на то, что вклад фотонных полюсов в амплитуду распада может быть весьма значителен, его влияние быстро спадает с ростом значений  $x_{12}$  и  $x_{34}$ , и при

данных ограничениях не проявляется.

## 2.2 Исследование распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Процесс распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , также как и ранее обсуждаемый распад  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , относится к распадам, идущим за счет FCNC. При этом,  $\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$  в  $(\frac{V_{td}}{V_{ts}})^2$  раз меньше, чем  $\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$ . Распад  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  можно отнести к сверхредким распадам нейтральных  $B$  – мезонов.

Данная подглава посвящена теоретическому исследованию распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . Структура данной подглавы выглядит следующим образом. В разделе 2.2.1 приводятся оценки парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . В разделе 2.2.2 выписывается эффективный гамильтониан перехода  $b \rightarrow d \ell^+ \ell^-$ . Раздел 2.2.3 посвящен расчету амплитуд распадов  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . В разделе 2.2.4 дается выражение для парциальной ширины распада. В разделе 2.2.4 обсуждаются дифференциальные распределения.

Данная глава основана на материалах, опубликованных в [A3].

### 2.2.1 Оценки парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Перед проведением точных вычислений характеристик распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , в частности, его парциальной ширины, приведем некоторые оценки данного значения. Единственная существующая на данный момент оценка парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  была предложена в работе [36]. Данная оценка получена на основании точного значения для парциальной ширины распада  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$  в предположении, что непертурбативные вклады от сильных взаимодействий в амплитуды распадов  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell'^-$  и  $B_{d,s} \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^+ \ell'^-$  являются величинами одного порядка и значения соответствующих парциальных ширин отличаются только за счет электрослабых множителей перед амплитудами. Данная оценка оказывается равной

$$\text{Br}_1(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx \frac{\tau_{B_d}}{\tau_{B^-}} \frac{\alpha_{em}^2}{8\pi^2} |C_{10A}|^2 \frac{|V_{tb} V_{td}^*|^2}{|V_{ub}|^2} \left( \frac{M_{B_d}}{M_{B^-}} \right)^5 \quad (53)$$

$$\text{Br}(B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-) \approx 4 \times 10^{-12},$$

где  $|C_{10A}| = 4.41$  - абсолютное значение коэффициента Вильсона из эффективного гамильтониана переходов  $b \rightarrow (d, s) \ell^+ \ell^-$  [16].

Данное значение также учитывает численную разницу в средних значениях СКМ – матричных элементов [42].

Рассматривая распад  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  как совокупность двух процессов  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_d \rightarrow \gamma^* e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , можно получить еще одну оценку парциальной ширины распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ :

$$\begin{aligned} Br_2(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) &\sim \alpha_{em} \left( Br(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma) + Br(B_d \rightarrow e^+ e^- \gamma) \right) \approx \\ &\approx 3.8 \times 10^{-12} \end{aligned} \quad (54)$$

Полученные значения (53) и (54) задают порядок величины ожидаемый для парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .

Следующие разделы посвящены расчету парциальной ширины и дифференциальных характеристик распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ .

### 2.2.2 Эффективный гамильтониан распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Также как и в случае распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , для расчета амплитуды распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  используется эффективный гамильтониан перехода  $b \rightarrow d \ell^+ \ell^-$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff}^{b \rightarrow d \ell^+ \ell^-}(x, \mu) &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_{em}}{2\pi} V_{tb} V_{ts}^* \left[ -2 \frac{C_{7\gamma}(\mu)}{q^2} \left\{ m_b (\bar{d} i \sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma_5) q^\nu b) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_d (\bar{d} i \sigma_{\mu\nu} (1 - \gamma_5) q^\nu b) \right\} \cdot (\bar{\ell} \gamma^\mu \ell) \right. \\ &\quad \left. + C_{9V}^{eff}(\mu) (\bar{d} O_\mu b) \cdot (\bar{\ell} \gamma^\mu \ell) + C_{10A}(\mu) (\bar{d} O_\mu b) \cdot (\bar{\ell} \gamma^\mu \gamma_5 \ell) \right], \end{aligned} \quad (55)$$

где  $O_\mu = \gamma_\mu (I - \gamma_5)$ ,  $q^\nu$  - четырехимпульсы  $\ell^+ \ell^-$  – пар, матрица  $\gamma^5$  определяется как  $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ,  $\varepsilon^{0123} = -1$  и  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ .

Гамильтонианы электромагнитного взаимодействия и слабой аннигиляции для распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  определяются в соответствии с выражениями (39) и (40) соответственно.

### 2.2.3 Структура амплитуд распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Одно из существенных различий между процессами распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  состоит в том, что в амплитуду распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  не дает вклад  $\phi(1020)$  – мезон. Но за счет наличия  $d\bar{d}$  – пар возникают дополнительные вклады  $\rho(770)$  и  $\omega(782)$  – резонансов. На диаграммном уровне это означает, что для распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  появляется вклад, изображенный на рис. 26.

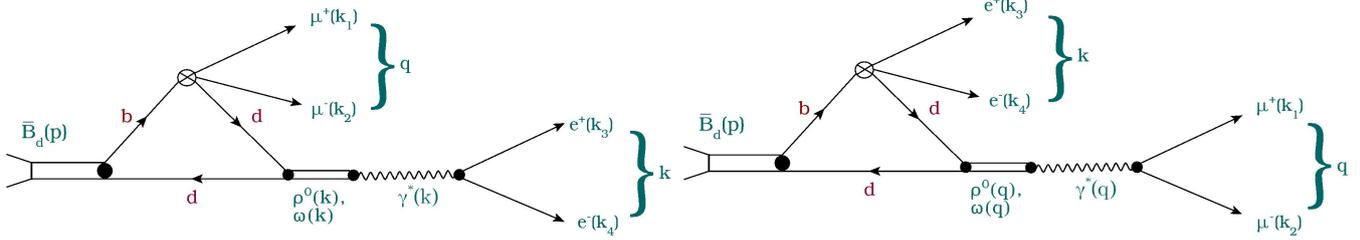


Рисунок 26 — Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона  $d$  – кварком  $B_d$  мезона.

Диаграммы на Рис. 26 описывают процесс излучения виртуального фотона валентным  $d$  – кварком  $B_d$  мезона в одном канале и взаимодействие FCNC – вершины с излучение лептонной парой в другом. Левая диаграмма отвечает случаю, когда виртуальный фотон распадется на пару  $\mu^+ \mu^-$ , правая – распаду виртуального фотона на  $e^+ e^-$  – пару. В обоих случаях возникают промежуточные  $\rho(770)$  и  $\omega(782)$  – резонансы, вклад которых в амплитуду распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  в данной работе вычисляется в рамках модели доминантности векторных мезонов (VMD).

Отметим, что для вычисления вкладов от  $\rho^0$  – и  $\omega$  – мезонов принимаются во внимание вклады только тех компонент  $\rho^0$  – и  $\omega$  – мезонов, которые содержат  $d\bar{d}$  – пару. Поскольку кварковая структура  $\rho^0$  – и  $\omega$  – мезонов представляет собой линейные комбинации  $u\bar{u}$  и  $d\bar{d}$  – пар, то для выделения вкладов только от  $d\bar{d}$  – пары введены изотопические коэффициенты  $I_i$ . По определению  $I_{\rho^0} = \langle \rho^0 | \bar{d}d \rangle = -1/\sqrt{2}$  и  $I_{\omega} = \langle \omega | \bar{d}d \rangle = 1/\sqrt{2}$ .

Вклад нерезонансной компоненты от  $b\bar{b}$  – пар в амплитуды распадов  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  обусловлен процессами излучения виртуального фотона валентным  $b$  – кварком  $B_q$  мезона в одном канале, и образованию лептонной пары за счет FCNC в другом и ранее был описан в части 2.1.3.

Диаграммы, соответствующие данным процессам для распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  приводятся на рис. 27.

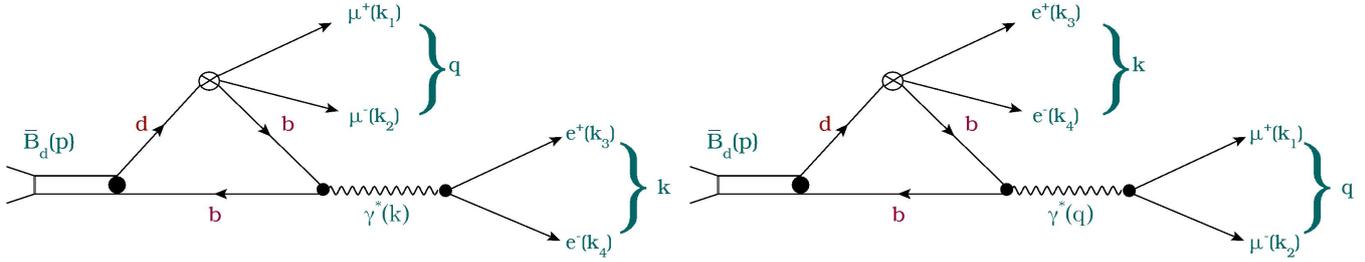


Рисунок 27 — Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона  $b$  – кварком  $B_d$  мезона.

Диаграммы, соответствующие тормозному излучению для распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  приведены на рис. 28. Структура амплитуд процессов тормозного излучения для распадов  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , идентична и дается в 2.1.3 выражением 42.

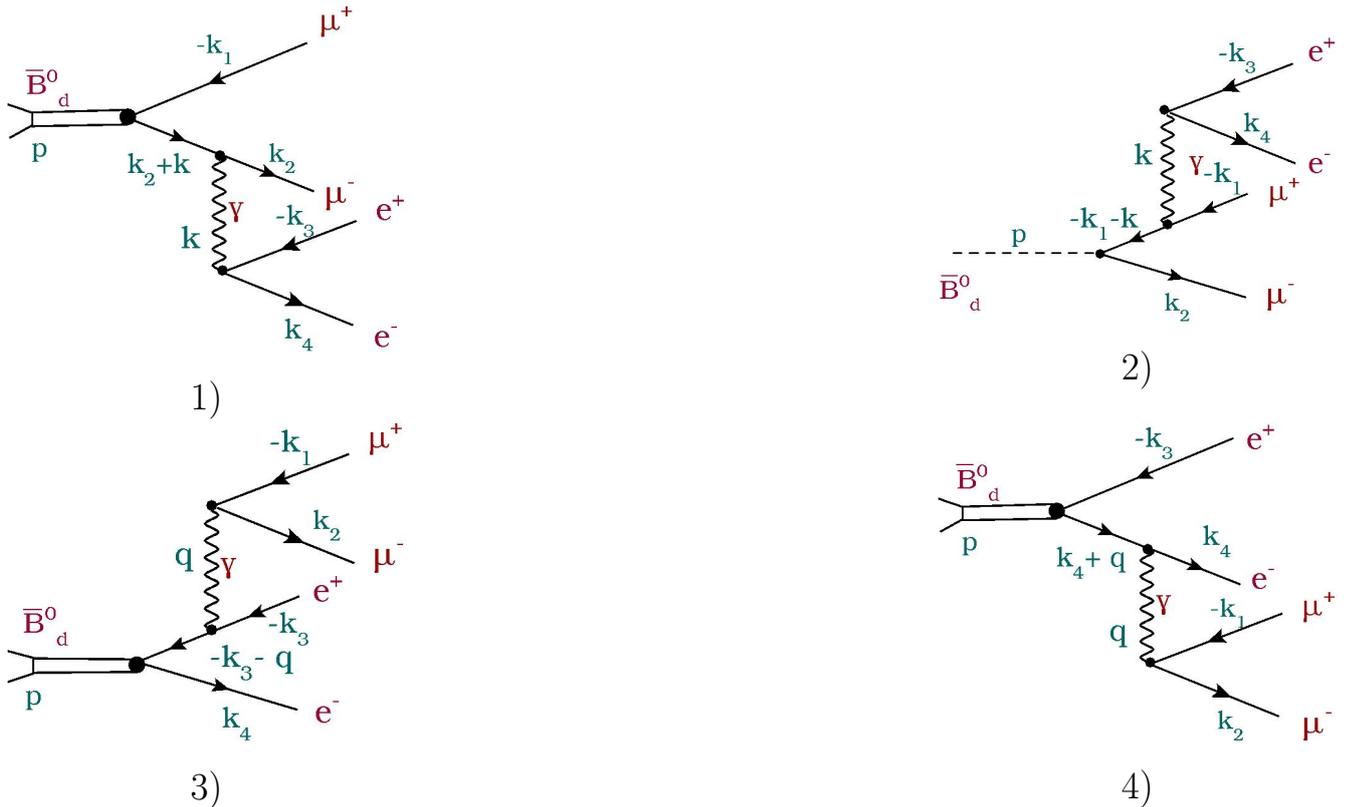


Рисунок 28 — Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона одним из лептонов конечного состояния.

Вклады, соответствующие учету легких степеней свободы, в частности вкладу в петли с  $s$  – и  $u$  – кварков, также описаны в 2.1.3 и для распадов  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  существенных структурных различий не

имеют. Диаграммы, отвечающие этим вкладам для распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , приводятся на рис. 29.

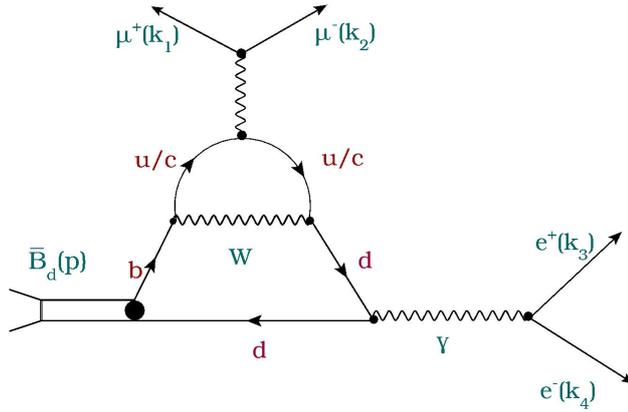


Рисунок 29 — Пример диаграммы вида «пингвин», отвечающей вкладам петлевым вкладом  $d$  и  $u$  кварков

Учет вклада аксиальной аномалии в амплитуду распада  $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  описывается диаграммами на рис. 30. Структура амплитуды распада дается выражением 45. При этом следует произвести замены:

$$\hat{f}_{B_s} \rightarrow \hat{f}_{B_d}; V_{us} \rightarrow V_{ud}; V_{cs} \rightarrow V_{cd}.$$

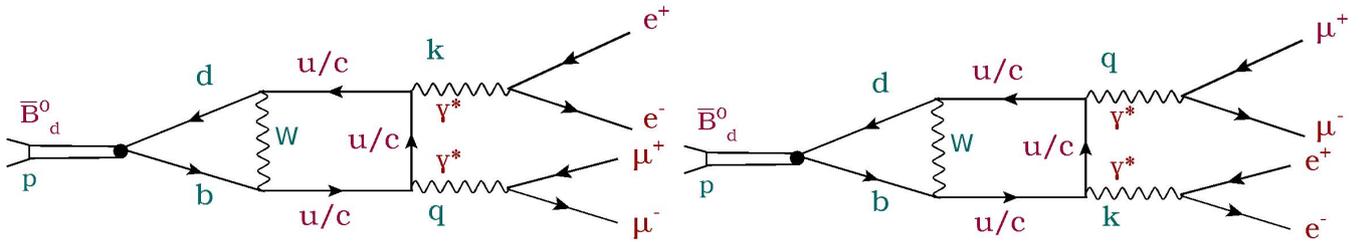


Рисунок 30 — Диаграммы, соответствующие процессам слабой аннигиляции

При учете вклада аксиальной аномалии в амплитуду распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  поправки вида  $(m_c/M_1)^2$  и  $(m_u/M_1)^2$  считаются пренебрежими малыми.

Таким образом, анализ диаграмм, дающих вклад в амплитуду распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  показывает, что соответствующее выражение для амплитуды данного процесса может быть представлено в виде (41), при условии проведения в коэффициентах  $a^{(IJ)}(x_{12}, x_{34}) \dots g^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$  следующих замен масс кварков и элементов СКМ – матрицы:

$$m_s \rightarrow m_d; V_{us} \rightarrow V_{ud}; V_{cs} \rightarrow V_{cd}; V_{ts} \rightarrow V_{td}$$

Также следует провести замены масс, ширин и форм факторов перехода в пропагаторе  $\phi(1020)$  – мезона на соответствующие величины, относящиеся к  $\rho(770)$  и  $\omega(782)$  – резонансам. Т.е., в коэффициентах  $a^{(IJ)}(x_{12}, x_{34}) \dots g^{(IJ)}(x_{12}, x_{34})$  из 3.3, которые включают в себя выражения для резонансных пропагаторов, при расчете амплитуды распада были проведены следующие замены:

$$\frac{1}{f_\phi} \frac{M_2^2}{k^2} \frac{F(M_2)}{k^2 - M_2^2 + iM_2\Gamma_2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{f_\omega} \frac{M_\omega^2}{k^2} \frac{F(M_\omega)}{k^2 - M_\omega^2 + iM_\omega\Gamma_\omega} - \frac{1}{f_\rho} \frac{M_\rho^2}{k^2} \frac{F(M_\rho)}{k^2 - M_\rho^2 + iM_\rho\Gamma_\rho} \right) \quad (56)$$

Полученная амплитуда будет учитывать вклады процессов испускания виртуального фотона  $d$  – кварком, а также вкладам  $u\bar{u}$ ,  $b\bar{b}$  и  $c\bar{c}$  – пар.

#### 2.2.4 Численные результаты для распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$

##### Расчет парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$

Данный раздел посвящен вычислению парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ . При получении численного значения данной величины был использован геометрический метод Монте - Карло, описанный в разделе 2.1.4. В соответствии с этим методом выражение для парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$  может быть записано в виде:

$$\text{Br} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) \approx \frac{\alpha_{em}^4 |V_{tb} V_{td}^*|^2}{3 \cdot 2^{13} \cdot \pi^5} \tau_{B_d} G_F^2 M_{B_d}^5 \frac{N_0}{N_{tot}} |X|^2. \quad (57)$$

Здесь численные значения параметров  $N_{tot}$ ,  $N_0$  и  $|X|^2$  получены в рамках программного пакета EvtGen. При расчете парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ , области  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  резонансов исключались в соответствии с условиями  $|\sqrt{M_1^2 x_{ij}} - m(Res)| < 100$  МэВ.

Значение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$  рассчитанное в рамках пакета EvtGen оказывается равным:

$$\text{Br}_1 (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-) \approx (3.2 \pm 1.0) * 10^{-11}. \quad (58)$$

Данное значение получено с учетом вкладов  $\rho(770)$  и  $\omega(782)$  – резонансов. Значение (58), также как и (50) вычислялось для разного числа  $N_{\text{tot}}$ , пока не был получен устойчивый результат.

Для оценки значимости вкладов высших  $c\bar{c}$  – резонансов и «хвостов»  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  – резонансов был также исключен вклад  $\omega(782)$  – резонанса в соответствии с условием  $|\sqrt{M_1^2 x_{ij}} - m(\omega)| < 70 \text{ МэВ}$ . Вклад широкого  $\rho(770)$  – резонанса исключен не был.

Значение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , полученное при данных условиях составляет

$$\text{Br}_2 (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-) \approx (1.1 \pm 0.3) * 10^{-11}. \quad (59)$$

Видно, что вклад  $\omega(782)$  – резонанса в амплитуду распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по сравнению с соответствующим вкладом  $\phi(1020)$  в амплитуду распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  не столь велик, хотя тоже значителен. Полученное значение парциальной ширины неплохо согласуется с оценками (53) и (54), рассчитанными без учета вклада промежуточных резонансов. Как и распад  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , распад  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  в настоящее время экспериментально не обнаружен. В то же время, коллаборация LHCb установила верхний предел на парциальную ширину распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ . В амплитуду данного распада дает вклад набор диаграмм, аналогичный распаду  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  с тем различием, что их число увеличивается за счет эффектов фермиевской антисимметризации. В данной работе на основании теоретического предсказания (59) была сделана оценка парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ :

$$\text{Br} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) \sim 10^{-11}. \quad (60)$$

Верхний предел на парциальную ширину распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ , установленный коллаборацией LHCb

$$\text{Br}_{\text{exp}} (\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-) < 1.8 * 10^{-10}. \quad (61)$$

Поскольку в данной работе при вычислении всех характеристик распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  установлено ограничение  $x_{ij} \rightarrow x_{ij \text{ min}} = (2m_\mu/M_1)^2 = 0.0016$  для  $e^+ e^-$  – канала, данный фактор не вносит различия в отношении парциальных ширин процессов  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$ . Экспериментальный верхний предел (61) не противоречит оценке 60, полученным в данной работе.

## Дифференциальные характеристики распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$

Набор дифференциальных характеристик распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  представлен в данном разделе. При расчете дифференциальных характеристик рассматривались вклады  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$ ,  $\psi(4415)$ , резонансов и «хвостов» от  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  резонансов. Области  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  резонансов исключались в соответствии с условиями  $|\sqrt{M_1^2 x_{ij}} - m(Res)| < 100$  МэВ. Как и для распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , все распределения были получены в рамках программного пакета EvtGen. Относительная фаза между резонансами во всех расчетах положена равной нулю.

Распределения парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменным  $x_{12}$  и  $x_{34}$  изображены на рис. 31.

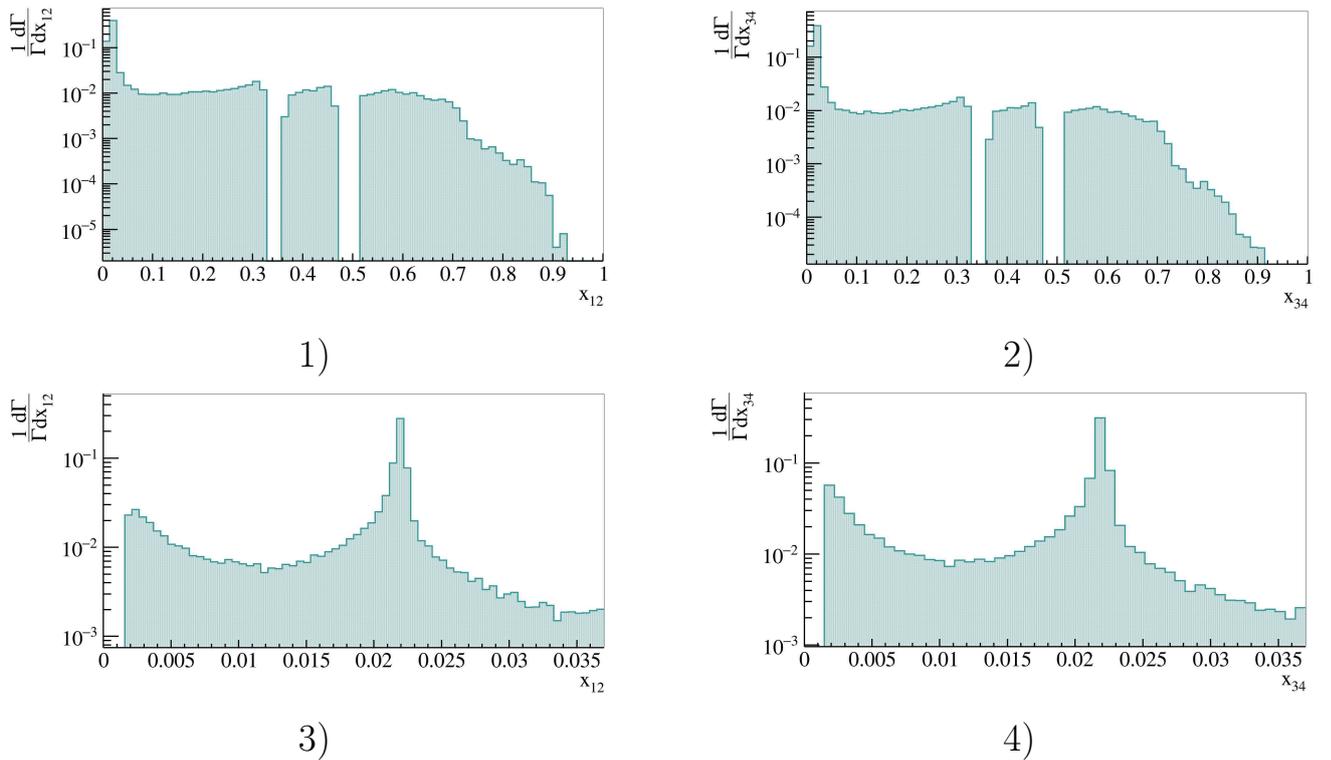


Рисунок 31 — 1) распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  переменной  $x_{12}$  ( $\mu^+ \mu^-$  – канал); 2) распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $x_{34}$  ( $e^+ e^-$  – канал); 3) распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $x_{12}$ , область  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  – резонансов (до  $1^2$ ); 4) распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $x_{34}$ , область  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  – резонансов (до  $1 GeV^2$ ).

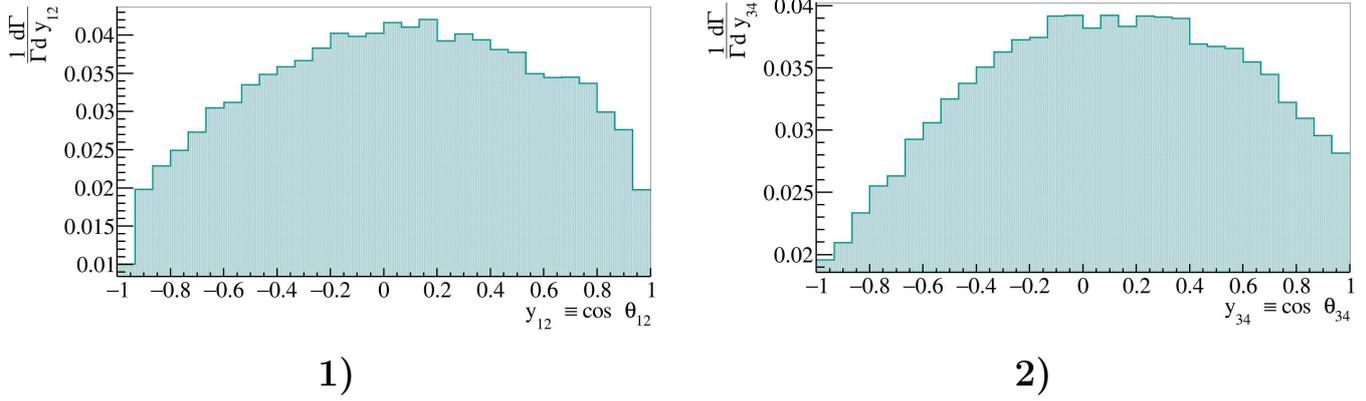


Рисунок 32 — 1) распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $\cos(\theta_{12})$ ; 2) распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $\cos(\theta_{34})$ .

Распределения по данным переменных построены в логарифмическом масштабе, в диапазоне  $[0.0016, 1.0]$  на рис. 31. Влияние фотонного полюса в  $e^+e^-$  – канале при ограничениях  $x_{ij\ min} = 0.0016$  уже не слишком значительно. Поэтому формы распределений для электронного и мюонного каналов в области малых значений  $x_{ij}$  должны быть похожи, что и демонстрирует рис. 31. В области  $x_{ij} \rightarrow (\frac{M_\omega}{M_{B_d}})^2 \approx 0.022$  наблюдается пик от  $\omega(782)$  – мезона. Вклад от  $\rho^0(770)$  – резонанса проявляется в виде широкой подложки к узкому пику от  $\omega(782)$  – мезона. На рис. 31(3, 4) более детально рассмотрены области  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  – резонансов; приведена область, соответствующая диапазону до  $1\ GeV^2$ .

На рис. 32 приведены распределения парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по угловым переменным  $y_{12}$  и  $y_{34}$  соответственно. В силу схожей кинематики, распределения по угловым переменным  $y_{12}$  и  $y_{34}$  для распадов  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  существенных визуальных различий не имеют.

На рис. 33 показано распределение парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $\cos(\phi)$ , где  $\phi$  – это угол между плоскостями разлета лептонных пар конечного состояния. Более точно  $\phi$  определен в Приложении 3.3, выражением (64).

На рис. 34 и 35 приводятся дважды дифференциальные распределения парциальной ширины распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменным  $x_{12}$  и  $x_{34}$  в двух

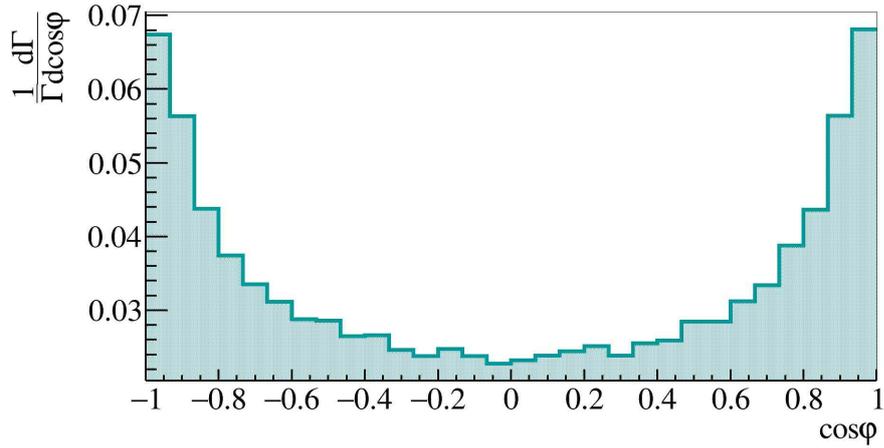


Рисунок 33 — Нормированное дифференциальное распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\cos(\phi)}$

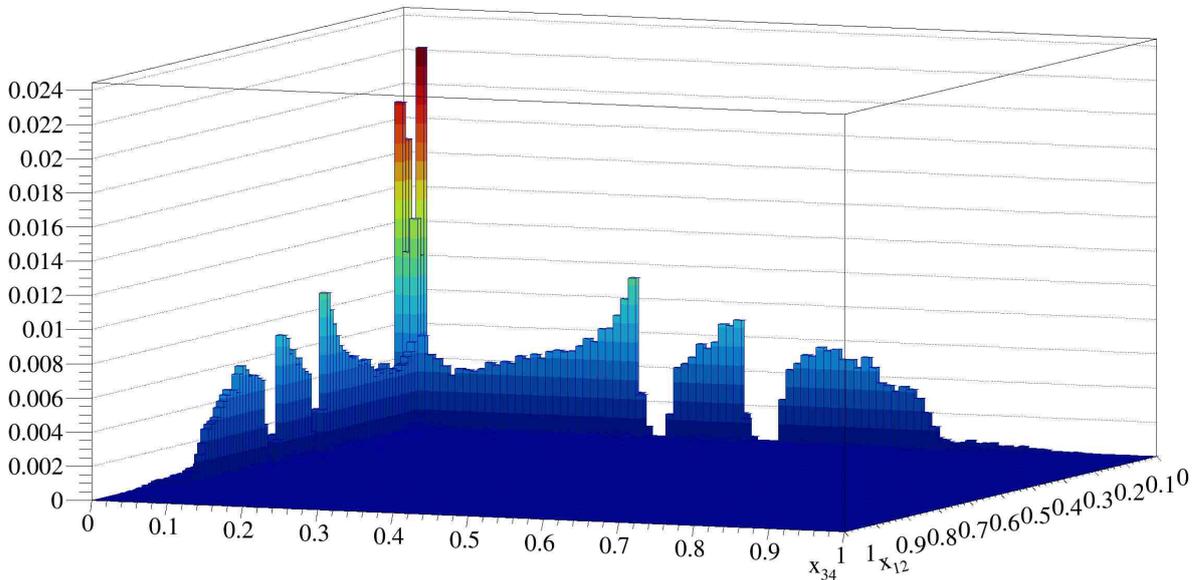


Рисунок 34 — Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины  $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , проекция 1

проекциях. Как и в случае одномерных распределений, области  $J/\psi$  и  $\psi(2S)$  резонансов исключались в соответствии с условиями  $|\sqrt{M_1^2 x_{ij}} - m(\text{Res})| < 100$  МэВ. Вклады «хвостов»  $J/\psi$ ,  $\psi(2S)$  – резонансов и высших  $c\bar{c}$  – резонансов отображены на рис. 34. Форма распределения, приведенного на рис. 34 также подтверждает тот факт, что хотя основными вкладками в амплитуду являются вклады  $\omega(782)$  – резонансов, остальные вклады также значительны. Вклады  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$  и  $\psi(4415)$  – резонансов проявляют себя более отчетливо по сравнению с аналогичным распределением для распада

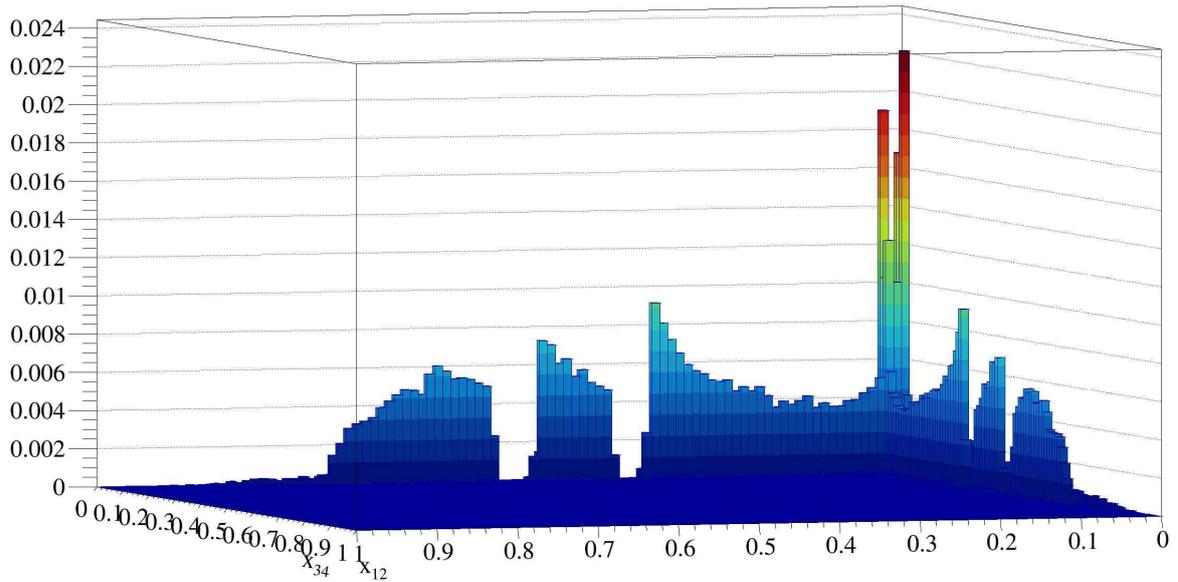


Рисунок 35 — Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины  $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , проекция 2

$\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  на Рис.25. Резонанс  $\omega(782)$  дает меньший вклад в амплитуду распада  $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , чем  $\phi(1020)$  – резонанс в амплитуду распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . Поэтому и относительное значение высших  $c\bar{c}$  - резонансов проявляется на рис. 34 более явно.

## Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Сделаны теоретические предсказания для парциальных ширин и дифференциальных распределений распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ ,  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$  и их зарядово сопряженных мод в СМ. Учитывались вклады  $u\bar{u}$ ,  $b\bar{b}$  – пар и вклад тормозного излучения. Показано, что ведущим вкладом в амплитуды распадов заряженных  $B$  – мезонов на три легких лептона и нейтрино является вклад  $\omega(782)$  – резонанса. Полученные теоретические предсказания могут быть использованы для сравнения с соответствующими экспериментальными результатами;
2. Вычислены парциальная ширина и дифференциальные характеристики распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  в СМ. В расчетах учитывались вклады  $s\bar{s}$ ,  $b\bar{b}$ ,  $c\bar{c}$  и  $u\bar{u}$  – пар, процессов тормозного излучения и слабой аннигиляции. Показано, что основной вклад в амплитуду распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  дает  $\varphi(1020)$  – резонанс. Представлены результаты как с учетом  $\varphi(1020)$  – резонанса, так и без него. Последнее больше соответствует экспериментальной процедуре;
3. Расчитана парциальная ширина распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  в СМ. Учтены вклады  $d\bar{d}$ ,  $b\bar{b}$ ,  $c\bar{c}$  и  $u\bar{u}$  – пар, а также процессов тормозного излучения и слабой аннигиляции. Показано, что основным вкладом в амплитуду распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  является вклад  $\omega(782)$  – резонанса. Получена серия дифференциальных характеристик распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ ;
4. Выполнены оценки парциальных ширин распадов  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  на основе полученных в данной работе значений  $Br(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$  и  $Br(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-)$ . Проведено сравнение данных оценок парциальных ширин распадов  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  с соответствующими экспериментальными верхними пределами, полученными коллаборацией *LHCb*.

5. Для распадов  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ ,  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$ ,  $B^- \rightarrow e^+ e^- \bar{\nu}_e e^-$ ,  $B_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и их зарядово сопряженных мод в СМ реализованы модели для Монте - Карло генератора EvtGen. Модель распада  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \mu^-$  была использована при проведении экспериментального анализа в коллаборации LHCb.

## Благодарности

В первую очередь я хочу выразить свою искреннюю благодарность моему научному руководителю, Николаю Викторовичу Никитину, без участия которого данной работы никогда не было бы, за предложенное интересное направление исследований, полученные знания и всестороннюю поддержку в процессе решения поставленных научных задач.

Я весьма признательна Льву Владимировичу Дудко за ценные советы и научные дискуссии, которые помогли мне в написании данной работы.

Я также глубоко благодарна Виктору Юрьевичу Егорычеву за обеспечение благоприятных условий для успешной научной работы и его непрерывную поддержку в сложных ситуациях.

Я благодарна Ивану Михайловичу Беляеву за многочисленные полезные обсуждения, ценные советы и интересные дискуссии, которые помогли сделать эту работу более наполненной.

Также я хотела бы поблагодарить коллектив кафедры физики атомного ядра и квантовой теории столкновений физического факультета МГУ и сотрудников ОЭФВЭ НИИЯФ МГУ, особенно заведующего кафедрой Виктора Ивановича Саврина, профессоров и сотрудников кафедры Игоря Павловича Волобуева, Александра Михайловича Снигирева, Эдуарда Рустямовича Рахметова, а также куратора Сергея Юрьевича Платонова, за создание благоприятной учебной атмосферы на кафедре, где я проходила обучение в аспирантуре и в отделе, где была подготовлена данная работа.

Я выражаю благодарность Эдуарду Эрнстовичу Боосу, за возможность участия в совместных научных исследованиях.

Я признательна Дмитрию Игоревичу Мелихову за интересные научные дискуссии, помогающие по – новому взглянуть на проводимые исследования.

Я очень рада была иметь возможность работать с коллегами из группы ИТЭФ в эксперименте ЛНСб, в частности с Дарьей Савриной, Дмитрием Голубковым, Дмитрием Переймой и Татьяной Овсянниковой. Я хотела бы выразить им благодарность за множество продуктивных дискуссий, полезные советы и поддержку, а также за их участие и внимание к возникающим трудностям.

И, разумеется, я благодарна своей семьей и близким людьми: Вячеславу Матюнину, Ксении Денисовой и Андрею Тархову, за их неоценимую роль

в моей жизни, терпение и понимание, искреннюю заботу и поддержку, которое они оказали мне на этом длинном пути. Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», а также грантом РФФИ 22-22-00297.

## Список литературы

- [1] V. Khachatryan *et al.* [CMS and LHCb Collaborations], “Observation of the rare  $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  decay from the combined analysis of CMS and LHCb data”, *Nature* 522, 68 (2015).
- [2] M. Aaboud *et al.* [ATLAS Collaboration], “Study of the rare decays of  $B_s^0$  and  $B^0$  into muon pairs from data collected during the LHC Run 1 with the ATLAS detector”, *Eur. Phys. J. C* 76, no. 9, 513 (2016).
- [3] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Measurement of the  $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  branching fraction and effective lifetime and search for  $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  decays”, *Phys. Rev. Lett.* 118, no. 19, 191801 (2017).
- [4] R. Fleischer, R. Jaarsma and G. Tetlalmatzi-Xolocotzi, “In Pursuit of New Physics with  $B_{s,d}^0 \rightarrow \ell^+ \ell^-$ ,” *JHEP* 1705, 156 (2017).
- [5] Y. Dincer and L. M. Sehgal, “Electroweak effects in the double Dalitz decay  $B_s \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell'^+ \ell'^-$ ”, *Phys. Lett. B* 556, 169 (2003).
- [6] A. Bharucha, B. Kindra, and N. Mahajan, Probing the structure of the B meson with  $B \rightarrow \ell \ell \ell' \nu$ , arXiv:2102.03193.
- [7] M. Beneke, P. Böer, P. Rigatos, and K. K. Vos, QCD factorization of the four-lepton decay  $B^- \rightarrow \ell \bar{\nu}_{\ell'} \ell' \bar{\ell}'$ , *Eur. Phys. J. C* 81, 638 (2021).
- [8] Mikhail A. Ivanov and Dmitri Melikhov, Theoretical analysis of the leptonic decays  $B^- \rightarrow \ell \bar{\nu}_{\ell'} \ell' \bar{\ell}'$  *Phys. Rev. D* 105, 014028 (2022).
- [9] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Search for rare  $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  decays”, *Phys. Rev. Lett.* 110, 211801 (2013).
- [10] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Search for decays of neutral beauty mesons into four muons”, *JHEP* 1703, 001 (2017).
- [11] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Search for the rare decay  $B^+ \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \nu_{\mu}$ ”, *Eur. Phys. J. C* 79, no. 8, 675 (2019).

- [12] The LHCb collaboration., Aaij, R., Abdelmotteleb, A.S.W. et al. Searches for rare  $B_s$  and  $B^0$  decays into four muons. *J. High Energ. Phys.* 2022, 109 (2022).
- [13] Валерий Рубаков, "Назрела необходимость в новой физике". // Знание - сила, 2021, № 6. — с. 47-51
- [14] M. D. Mauro, M. W. Winkler, "Characteristics of the Galactic Center excess measured with 11 years of Fermi-LAT data *Phys. Rev. D* 103, 123005 (2021).
- [15] B. Abi et al. [Muon g-2 Collaboration], "Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm *Phys. Rev. Lett.* 126, 141801 (2021).
- [16] G. Buchalla, A. J. Buras and M. E. Lautenbacher, "Weak decays beyond leading logarithms," *Rev. Mod. Phys.* 68, 1125 (1996).
- [17] W. Buchmuller and D. Wyler, "Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation," *Nucl. Phys. B* 268, 621 (1986).
- [18] G. L. Kane, G. A. Ladinsky and C. P. Yuan, "Using the Top Quark for Testing Standard Model Polarization and CP Predictions", *Phys. Rev. D* 45, 124 (1992).
- [19] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], "Search for anomalous  $Wtb$  couplings and flavour-changing neutral currents in t-channel single top quark production in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  and 8 TeV", *JHEP* 1702, 028 (2017).
- [20] C. Bobeth, A. J. Buras, F. Kruger and J. Urban, "QCD corrections to  $\bar{B} \rightarrow X_{d,s}\nu\bar{\nu}$ ,  $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \ell^+\ell^-$ ,  $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$  and  $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$  in the MSSM", *Nucl. Phys. B* 630, 87 (2002).
- [21] C. Bobeth, A. J. Buras and T. Ewerth, "Anti- $B \rightarrow X(s) l^+ l^-$  in the MSSM at NNLO", *Nucl. Phys. B* 713, 522 (2005).
- [22] S. Schilling, C. Greub, N. Salzmann and B. Toedtli, "QCD corrections to the Wilson coefficients  $C(9)$  and  $C(10)$  in two-Higgs doublet models", *Phys. Lett. B* 616, 93 (2005).
- [23] T. Huber, E. Lunghi, M. Misiak and D. Wyler, "Electromagnetic logarithms in  $\bar{B} \rightarrow X_s l^+ l^-$ ", *Nucl. Phys. B* 740, 105 (2006).

- [24] M. Misiak, A. Rehman and M. Steinhauser, “NNLO QCD counterterm contributions to  $\bar{B} \rightarrow X_{s\gamma}$  for the physical value of  $m_c$ ”, Phys. Lett. B 770, 431 (2017).
- [25] D. Melikhov, “Dispersion approach to quark binding effects in weak decays of heavy mesons”, Eur. Phys. J. direct 4, no. 1, 2 (2002).
- [26] F. Kruger and D. Melikhov, “Gauge invariance and form-factors for the decay  $B \rightarrow \gamma \ell^+ \ell^-$ ”, Phys. Rev. D 67, 034002 (2003).
- [27] T. Miyazaki and E. Takasugi, “Internal conversion of pseudoscalar mesons into lepton pairs”, Phys. Rev. D 8, 2051 (1973).
- [28] A. R. Barker, H. Huang, P. A. Toale and J. Engle, “Radiative corrections to double Dalitz decays: Effects on invariant mass distributions and angular correlations,” Phys. Rev. D 67, 033008 (2003).
- [29] EvtGen at LHCb, <http://lhcb-release-area.web.cern.ch/LHCb-release-area/DOC/gauss/generator/evtgen.php>.
- [30] The CMSSW interface to EvtGenLHC,  
<https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/CMS/EvtGenInterface>.
- [31] J. Catmore, M. Smizanska, ATLAS Communication Note, ATL-COM-PHYS-2004-013 (2004); ATL-COM-PHYS-2004-041 (2004).
- [32] D. Melikhov and B. Stech, “Weak form-factors for heavy meson decays: An Update”, Phys. Rev. D 62, 014006 (2000).
- [33] A. Danilina and N. Nikitin, “Rare four-leptonic B-decays with light leptons in the final state in the Standard Model”, EPJ Web Conf. 158, 03005 (2017).
- [34] Илья Меерович Соболев, Метод Монте-Карло, М.: Наука, 1968. 64 с., Серия Популярные лекции по математике, выпуск 46.
- [35] V. I. Borodulin, R. N. Rogalev and S. R. Slabospitsky, [arXiv:hep-ph/9507456 [hep-ph]].

- [36] A. V. Danilina and N. V. Nikitin, “Four-Leptonic Decays of Charged and Neutral  $B$  Mesons within the Standard Model”, *Phys. Atom. Nucl.* 81, no. 3, 347 (2018).
- [37] <https://evtgen.hepforge.org>.
- [38] A. Danilina and N. Nikitin, “Differential distributions in rare four-leptonic B-decays”, *EPJ Web Conf.* 191, 02011 (2018).
- [39] A. Danilina and N. Nikitin, “Rare four leptonic B-mesons decays with a neutrino in final state”, *EPJ Web Conf.* 222, 03019 (2019).
- [40] A. Kozachuk, D. Melikhov and N. Nikitin, “Rare FCNC radiative leptonic  $B_{s,d} \rightarrow \gamma l^+ l^-$  decays in the standard model”, *Phys. Rev. D* 97, no. 5, 053007 (2018).
- [41] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], “Review of Particle Physics”, *Phys. Rev. D* 98, no. 3, 030001 (2018).
- [42] D. Melikhov and N. Nikitin, “Rare radiative leptonic decays  $B_{d,s} \rightarrow l^+ l^- \gamma$ ”, *Phys. Rev. D* 70, 114028 (2004).
- [43] D. Melikhov, “Form-factors of meson decays in the relativistic constituent quark model”, *Phys. Rev. D* 53, 2460 (1996).
- [44] D. Melikhov, “Heavy quark expansion and universal form-factors in quark model”, *Phys. Rev. D* 56, 7089 (1997).
- [45] C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group), “Review of Particle Physics”, *Chin. Phys. C* 40, 100001 (2016).
- [46] M. Beneke and J. Rohrwild, “B meson distribution amplitude from  $B \rightarrow \gamma \ell \nu$ ”, *Eur. Phys. J. C* 71, 1818 (2011).
- [47] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Test of lepton universality using  $B^+ \rightarrow K^+ \ell^+ \ell^-$  decays”, *Phys. Rev. Lett.* 113, 151601 (2014).
- [48] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Measurement of the ratio of branching fractions  $\mathcal{B}(\bar{B}^0 \rightarrow D^{*+} \tau^- \bar{\nu}_\tau) / \mathcal{B}(\bar{B}^0 \rightarrow D^{*+} \mu^- \bar{\nu}_\mu)$ ”, *Phys. Rev. Lett.* 115, no. 11, 111803 (2015) Erratum: [*Phys. Rev. Lett.* 115, no. 15, 159901 (2015)]

- [49] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Measurement of the ratio of the  $B^0 \rightarrow D^{*-}\tau^+\nu_\tau$  and  $B^0 \rightarrow D^{*-}\mu^+\nu_\mu$  branching fractions using three-prong  $\tau$ -lepton decays”, *Phys. Rev. Lett.* 120, no. 17, 171802 (2018).
- [50] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Test of lepton universality with  $B^0 \rightarrow K^{*0}\ell^+\ell^-$  decays”, *JHEP* 1708, 055 (2017).
- [51] E. Byckling, K. Kajantie, *Particle Kinematics* (John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973).
- [52] C. Bobeth, G. Hiller, and D. van Dyk, “General analysis of  $\bar{B} \rightarrow \bar{K}^*\ell^+\ell^-$  decays at low recoil *Phys. Rev. D* 87, 034016, 2013; C. Bobeth, G. Hiller, D. van Dyk, and C. Wacker, “The decay  $B \rightarrow K^*\ell^+\ell^-$  at low hadronic recoil and model-independent  $\delta B = 1$  constraints *J. High Energy Phys.* 01, 2012, 107; R. Aaij *et al.* (LHCb Collaboration), “Test of lepton universality with  $B^0 \rightarrow K^{*0}\ell^+\ell^-$  decays *J. High Energy Phys.* 08, 2017, 055; R. Aaij *et al.* [LHCb], “Tests of lepton universality using  $B^0 \rightarrow K_s^0\ell^+\ell^-$  and  $B^+ \rightarrow K^{*+}\ell^+\ell^-$  decays,” [arXiv:2110.09501 [hep-ex]].
- [53] V. Khachatryan *et al.* [CMS and LHCb Collaborations], “Observation of the rare  $B_s^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$  decay from the combined analysis of CMS and LHCb data”, *Nature* 522, 68, (2015).
- [54] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Measurement of the  $B_s^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$  decay properties and search for the  $B^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$  and  $B_s^0 \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$  decays”, Submitted to *Phys. Rev. D*, (2021).
- [55] A. Datta, J. Kumar, D. London, “The B anomalies and new physics in  $b \rightarrow e^+e^-$  *Phys. Rev. B* 797, 134858, (2019).
- [56] D. Guadagnoli, “Flavor anomalies on the eve of the Run-2 verdict,” *Mod. Phys. Lett. A* 32 no.7, 1730006, (2017).
- [57] J. P. Lees *et al.* [BaBar], “Evidence for an excess of  $\bar{B} \rightarrow D^{(*)}\tau^-\bar{\nu}_\tau$  decays,” *Phys. Rev. Lett.* 109, 101802, (2012).
- [58] R. Aaij *et al.* [LHCb], “Measurement of the ratio of branching fractions  $\mathcal{B}(\bar{B}^0 \rightarrow D^{*+}\tau^-\bar{\nu}_\tau)/\mathcal{B}(\bar{B}^0 \rightarrow D^{*+}\mu^-\bar{\nu}_\mu)$ ,” *Phys. Rev. Lett.* 115 no.11, 111803 (2015).

- [59] M. Huschle *et al.* [Belle], “Measurement of the branching ratio of  $\bar{B} \rightarrow D^{(*)}\tau^-\bar{\nu}_\tau$  relative to  $\bar{B} \rightarrow D^{(*)}\ell^-\bar{\nu}_\ell$  decays with hadronic tagging at Belle,” Phys. Rev. D 92 no.7, 072014, (2015).
- [60] Belle II experiment: status and prospects, <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/5.0008685>.
- [61] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Measurement of lepton universality parameters in  $B^+ \rightarrow K^+\ell^+\ell^-$  and  $B^0 \rightarrow K^{*0}\ell^+\ell^-$  decays”, arXiv:2212.09153
- [62] A. Kozachuk, D. Melikhov, N. Nikitin, “Rare FCNC radiative leptonic  $B_{d,s} \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma$  decays in the standard model Phys. Rev. D 97, 053007, 2018.
- [63] D. Melikhov, N. Nikitin, “Rare radiative leptonic decays  $B_{d,s} \rightarrow \ell^+\ell^-\gamma$  Phys. Rev. D 70, 114028, (2004).
- [64] M. Neubert and B. Stech, “Nonleptonic weak decays of B mesons Adv. Ser. Dir. High Energy Phys. 15, 294 (1998).
- [65] A. J. Buras, M. Munz “Effective Hamiltonian for  $B \rightarrow X(s)e + e^-$  beyond leading logarithms in the NDR and HV schemes”, Phys. Rev. Lett. 52, 186-195, (1995).
- [66] The development page for the EvtGen project, <https://evtgen.hepforge.org>.
- [67] D.Melikhov, N.Nikitin, S.Simula, “Rare exclusive semileptonic  $b \rightarrow s$  transitions in the standard model Phys. Rev. D 57, p.333, (1998).
- [68] D.Melikhov, B.Stech, “Weak form factors for heavy meson decays: An update Phys. Rev. D 62, 014006, (2000).

### 3 Приложение

#### 3.1 Кинематика четырехлептонных распадов

Обозначим через  $k_i$  – 4-импульсы конечных лептонов в четырехлептонных распадах  $B$ -мезонов,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ . Введем следующие 4-импульсы

$$q = k_1 + k_2; \quad k = k_3 + k_4; \quad \tilde{q} = k_1 + k_4; \quad \tilde{k} = k_2 + k_3; \quad p = k_1 + k_2 + k_3 + k_4,$$

где  $p$  суть 4-импульс  $B$ -мезона и  $p^2 = M_1^2$ . Для дальнейших вычислений удобно использовать безразмерные переменные

$$x_{12} = \frac{q^2}{M_1^2}, \quad x_{34} = \frac{k^2}{M_1^2}, \quad x_{14} = \frac{\tilde{q}^2}{M_1^2}, \quad x_{23} = \frac{\tilde{k}^2}{M_1^2}.$$

Общее обозначение  $x_{ij} = (k_i + k_j)^2/M_1^2$ . Отсюда следует, что  $x_{ij} = x_{ji}$ . Практически во всех вычислениях настоящей работы лептоны возможно считать безмассовыми, то есть полагать  $k_i^2 = 0$ . Однако при вычислении вклада тормозного излучения в области  $q^2 \sim 4m_\ell^2$ , где  $m_\ell$  – масса любого заряженного лептона из  $\ell^+\ell^-$ -пары, следует учитывать зависимость матричного элемента тормозного излучения и фазового объема от величины  $m_\ell$ .

Из закона сохранения 4-импульса находим, что в безмассовом пределе переменные  $x_{ij}$  связаны соотношением

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34} = 1. \quad (62)$$

Определим интервалы изменения  $x_{ij}$ . Для этого воспользуемся неравенством  $(p_1 p_2) \geq \sqrt{p_1^2 p_2^2}$ . Тогда любой  $x_{ij} \geq 0$ . С другой стороны

$$1 = \frac{p^2}{M_1^2} = \frac{(q+k)^2}{M_1^2} \geq \frac{(\sqrt{q^2} + \sqrt{k^2})^2}{M_1^2} = \left(\sqrt{x_{12}} + \sqrt{x_{34}}\right)^2.$$

Поскольку  $0 \leq x_{34}$ , то  $x_{12} \leq 1$ . Таким образом  $x_{12} \in [0, 1]$ . Верхняя граница переменной  $x_{34}$  зависит от значения переменной  $x_{12}$ :

$$x_{34} = \frac{(p-q)^2}{M_1^2} \leq \frac{(M_1 - \sqrt{q^2})^2}{M_1^2} = (1 - \sqrt{x_{12}})^2.$$

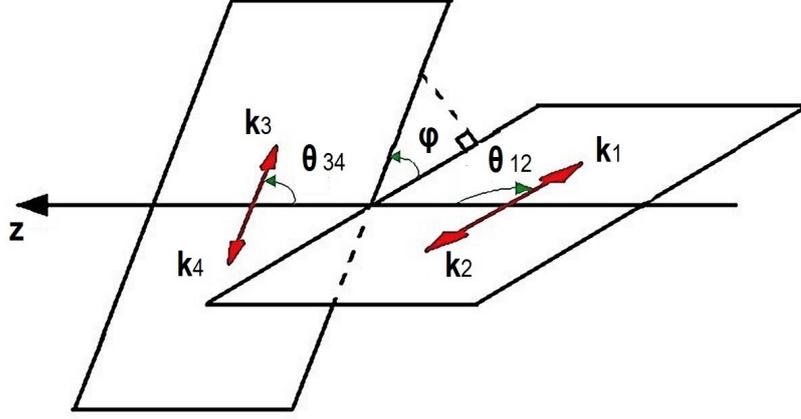


Рисунок 36 — Кинематика распада  $B^-(p) \rightarrow l^+(k_1) l^-(k_2) \bar{\nu}_l(k_3) l'^-(k_4)$ . Угол  $\theta_{12}$  определяется в системе покоя  $l^+(k_1) l^-(k_2)$  – пары;  $\theta_{34}$  определяется в системе покоя  $\bar{\nu}_l(k_3) l'^-(k_4)$  – пары; угол  $\varphi$  задается в системе покоя  $B^-$ -мезона.

Таким образом при фиксированном значении  $x_{12}$  переменная  $x_{34} \in [0, (1 - \sqrt{x_{12}})^2]$ . Для пары  $x_{14}$  и  $x_{23}$  выполнены аналогичные соотношения:  $x_{14} \in [0, 1]$  и при фиксированном  $x_{14}$  переменная  $x_{23} \in [0, (1 - \sqrt{x_{14}})^2]$ .

Рассмотрим кинематику распада  $B^-(p) \rightarrow l^+(k_1) l^-(k_2) \bar{\nu}_l(k_3) l'^-(k_4)$ , когда аромат отрицательно заряженного лептона  $l^-(k_2)$  отличается от аромата отрицательно заряженного лептона  $l'^-(k_4)$ . Сопоставим положительно заряженному лептону импульс  $\mathbf{k}_1$ , а антинейтрину импульс  $\mathbf{k}_3$ . Это позволяет ввести угол  $\theta_{12}$  между направлением импульса положительно заряженного лептона и направлением движения  $B^-$ -мезона (ось  $z$ ) в системе покоя  $l^+l^-$  – пары и угол  $\theta_{34}$  между направлением движения антинейтринно и направлением движения  $B^-$ -мезона (ось  $z$ ) в системе покоя  $l'^-\bar{\nu}_l$  – пары. Тогда

$$y_{12} \equiv \cos \theta_{12} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})} (x_{23} + x_{24} - x_{13} - x_{14}), \quad (63)$$

$$y_{34} \equiv \cos \theta_{34} = \frac{1}{\lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34})} (x_{14} + x_{24} - x_{13} - x_{23}),$$

где  $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$  – треугольная функция. Углы  $\theta_{12} \in [0, \pi]$  и  $\theta_{34} \in [0, \pi]$ . Поэтому  $y_{12} \in [-1, 1]$  и  $y_{34} \in [-1, 1]$ . Отсчет углов производится от оси  $z$ .

Кроме того в системе покоя  $B^-$ -мезона определим угол  $\varphi \in [0, 2\pi)$  между плоскостями, которые образованы парами векторов  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  и  $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ . Для этого введем вектор  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$ , перпендикулярный плоскости  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , и вектор

$\mathbf{a}_3 = \mathbf{k}_4 \times \mathbf{k}_3$ , перпендикулярный плоскости  $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_3|}.$$

Используя технику работы [51], для  $\cos \varphi$  можно написать:

$$\cos \varphi = \frac{\det \begin{pmatrix} M_1^2 & (p k_1) & (p k_2) \\ (p k_4) & (k_1 k_4) & (k_2 k_4) \\ (p k_3) & (k_1 k_3) & (k_2 k_3) \end{pmatrix}}{\sqrt{\det \begin{pmatrix} M_1^2 & (p k_1) & (p k_2) \\ (p k_1) & 0 & (k_1 k_2) \\ (p k_2) & (k_1 k_2) & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} M_1^2 & (p k_3) & (p k_4) \\ (p k_3) & 0 & (k_3 k_4) \\ (p k_4) & (k_3 k_4) & 0 \end{pmatrix}}}. \quad (64)$$

Упрощение выражения (64) дает

$$\begin{aligned} & -2 \sqrt{x_{12} x_{34} (1 - y_{12}^2) (1 - y_{34}^2)} \cos \varphi + (1 - x_{12} - x_{34}) y_{12} = \\ & = x_{13} - x_{14} - x_{23} + x_{24}. \end{aligned} \quad (65)$$

Четырехчастичный фазовый объем имеет вид

$$d\Phi_4^{(1234)} = M_1^4 \frac{dx_{12}}{2\pi} \frac{dx_{34}}{2\pi} d\Phi_2^{(qk)} d\Phi_2^{(12)} d\Phi_2^{(34)},$$

где с учетом ненулевой массы лептонов  $\ell^\pm$  и  $\ell'^-$  можно написать

$$\begin{aligned} d\Phi_2^{(qk)} &= 2\pi \delta(q^2 - x_{12} M_1^2) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - x_{34} M_1^2) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p - q - k), \\ d\Phi_2^{(12)} &= 2\pi \delta(k_1^2 - m_\ell^2) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k_2^2 - m_\ell^2) \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2), \\ d\Phi_2^{(34)} &= 2\pi \delta(k_3^2) \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k_4^2 - m_{\ell'}^2) \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k - k_3 - k_4) \end{aligned}$$

При вычислении четырехчастичного фазового объема в качестве независимых переменных интегрирования удобно выбрать  $x_{12}$ ,  $x_{34}$ ,  $y_{12}$ ,  $y_{34}$  и  $\varphi$ . Тогда

$$\Phi_2^{(qk)} = \frac{1}{2^3 \pi} \lambda^{1/2}(1, x_{12}, x_{34});$$

и

$$d\Phi_2^{(12)} = \frac{1}{2^4 \pi} \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\ell^2}{x_{12}}} dy_{12}; \quad d\Phi_2^{(34)} = \frac{1}{2^5 \pi^2} \left(1 - \frac{\hat{m}_{\ell'}^2}{x_{34}}\right) dy_{34} d\varphi.$$

Это дает

$$d\Phi_4^{(1234)} = \frac{M_1^4}{2^{14}\pi^6} \lambda^{1/2} (1, x_{12}, x_{34}) \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\ell^2}{x_{12}}} \left(1 - \frac{\hat{m}_{\ell'}^2}{x_{34}}\right) dx_{12} dx_{34} dy_{12} dy_{34} d\varphi, \quad (66)$$

где  $\hat{m}_\ell = m_\ell/M_1$  и  $\hat{m}_{\ell'} = m_{\ell'}/M_1$ .

В случае распада  $B^-(p) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_\ell(k_3) \ell^-(k_4)$  в конечном состоянии имеются два идентичных лептона  $\ell^-(k_2)$  и  $\ell^-(k_4)$ . Поэтому требуется фермиевская антисимметризация амплитуды распада по 4-импульсам  $k_2$  и  $k_4$ . При вычислении парциальной ширины в этом случае понадобится дополнительная формула для фазового объема при  $m_\ell \neq 0$

$$d\Phi_4^{(1432)} = \frac{M_1^4}{2^{14}\pi^6} \lambda^{1/2} (1, x_{14}, x_{23}) \sqrt{1 - \frac{4\hat{m}_\ell^2}{x_{12}}} \left(1 - \frac{\hat{m}_\ell^2}{x_{34}}\right) dx_{14} dx_{23} dy_{14} dy_{23} d\tilde{\varphi}, \quad (67)$$

где  $\tilde{\varphi}$  – угол между плоскостями  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4)$  и  $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ , который отсчитывается от плоскости  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4)$ .

Выражение (67) получается полностью аналогично формуле (66). При этом  $\cos \tilde{\varphi}$  можно найти, совершив в (64) и (65) замену индексов  $2 \leftrightarrow 4$ . Кроме того для проведения численного интегрирования необходимо иметь определения всех переменных  $x_{ij}$  при помощи набора переменных  $x_{12}$ ,  $x_{34}$ ,  $y_{12}$ ,  $y_{34}$  и  $\varphi$ . Из соотношений (62), (63) и (65) в пределе нулевых лептонных масс находим:

$$\begin{aligned} x_{13} &= \frac{1}{4} \left( -2 \sqrt{x_{12} x_{34} (1 - y_{12}^2) (1 - y_{34}^2)} \cos \varphi + (1 - x_{12} - x_{34}) y_{12} y_{34} - \right. \\ &\quad \left. - \lambda^{1/2} (1, x_{12}, x_{34}) (y_{12} + y_{34}) + 1 - x_{12} - x_{34} \right); \\ x_{14} &= \frac{1}{4} \left( 2 \sqrt{x_{12} x_{34} (1 - y_{12}^2) (1 - y_{34}^2)} \cos \varphi - (1 - x_{12} - x_{34}) y_{12} y_{34} - \right. \\ &\quad \left. - \lambda^{1/2} (1, x_{12}, x_{34}) (y_{12} - y_{34}) + 1 - x_{12} - x_{34} \right); \\ x_{23} &= \frac{1}{4} \left( 2 \sqrt{x_{12} x_{34} (1 - y_{12}^2) (1 - y_{34}^2)} \cos \varphi - (1 - x_{12} - x_{34}) y_{12} y_{34} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{1/2} (1, x_{12}, x_{34}) (y_{12} - y_{34}) + 1 - x_{12} - x_{34} \right); \\ x_{24} &= \frac{1}{4} \left( -2 \sqrt{x_{12} x_{34} (1 - y_{12}^2) (1 - y_{34}^2)} \cos \varphi + (1 - x_{12} - x_{34}) y_{12} y_{34} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^{1/2} (1, x_{12}, x_{34}) (y_{12} + y_{34}) + 1 - x_{12} - x_{34} \right); \end{aligned} \quad (68)$$

Заметим, что в данной работе используются обозначения, практически идентичные обозначениям работы [28], за исключением  $y_{ij}$ , которые в настоящей статье имеют противоположный знак по сравнению с [28].

### 3.2 Четырехлептонные распады $B$ - мезонов в EvtGen

В данном разделе представлено краткое описание программного пакета EvtGen и моделей, описывающих редкие распады  $B$  – мезонов, которые были созданы в рамках данной работы. Пакет EvtGen был создан для компьютерного моделирования распадов  $B$  – мезонов на  $B$  – фабриках BaBar (Стенфорд, США) и CLEO (Корнель, США). В настоящее время пакет адаптирован для адронных  $pp$  – и  $p\bar{p}$  – коллайдеров. Кроме того, пакет EvtGen широко используется коллаборациями LHCb [29], CMS [30], ATLAS [31].

Метод Монте-Карло широко используется в физике частиц для анализа распадов частиц и моделирования их динамики. Он является мощным инструментом для моделирования сложных процессов, таких как взаимодействия элементарных частиц и их распады, и позволяет получать статистические оценки и прогнозы на основе вероятностных распределений.

Ниже приведены некоторые причины, почему метод Монте-Карло важен при анализе распадов в физике частиц:

- Сложность процессов: Распады частиц могут быть сложными и многоканальными процессами, включающими множество взаимодействующих частиц. Метод Монте-Карло позволяет моделировать эти сложные процессы с учетом всех релевантных кинематических, динамических и статистических факторов, что облегчает изучение их свойств.
- Статистическая природа процессов: Взаимодействия частиц в физике частиц имеют статистическую природу, и результаты экспериментов могут быть подвержены статистическим флуктуациям. Метод Монте-Карло позволяет учитывать эти статистические флуктуации при моделировании распадов частиц и оценке систематических ошибок.
- Ограниченная доступность экспериментальных данных: Иногда экспериментальные данные о распадах частиц могут быть ограничены или недостаточно точными. Метод Монте-Карло позволяет заполнить эти пробелы и получить дополнительные предсказания и оценки свойств распадов на основе имеющихся данных и физических законов.
- Точность и эффективность: Метод Монте-Карло является точным и эффективным инструментом для моделирования распадов частиц. Он может быть применен для различных процессов и моделей, и позволяет

получать качественные и количественные результаты с учетом статистических и систематических ошибок.

- Валидация экспериментальных результатов: Метод Монте-Карло также используется для проверки и валидации экспериментальных результатов о распадах частиц. Путем сравнения экспериментальных данных с результатами моделирования методом Монте-Карло, можно оценить соответствие эксперимента с теоретическими предсказаниями, выявить возможные расхождения и их причины, и провести дополнительные анализы, такие как изучение систематических ошибок и оценка неопределенностей в экспериментальных данных.
- Оптимизация экспериментальных процедур: Метод Монте-Карло также может быть использован для оптимизации экспериментальных процедур и планирования экспериментов. Путем моделирования различных вариантов эксперимента и анализа их результатов методом Монте-Карло, можно определить оптимальные условия для измерений и максимизировать точность и достоверность получаемых данных.
- Прогнозирование новых физических явлений: Метод Монте-Карло также может быть использован для прогнозирования новых физических явлений, особенно в случаях, когда экспериментальные данные ограничены или отсутствуют. Моделирование методом Монте-Карло позволяет проводить виртуальные эксперименты с различными параметрами и условиями, что может помочь в поиске новых явлений и предсказании их свойств.

Таким образом, метод Монте-Карло является важным инструментом в анализе распадов частиц в физике частиц, позволяющим моделировать сложные процессы, учитывать статистические флуктуации, валидировать экспериментальные результаты, оптимизировать экспериментальные процедуры и прогнозировать новые физические явления.

На данный момент существует большое количество Монте-Карло генераторов, применяемых для моделирования распадов  $B$  – мезонов. Пакет EvtGen является одним из них. Данный пакет широко используется в CERN и на Belle – II при исследовании распадов  $B$  – мезонов. В EvtGen реализована возможность добавления новых распадов и новых физических моделей как наборов классов языка C. Эти наборы классов называются моделями в EvtGen. Например, для полуплептонного распада  $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$  могут быть использованы модели

форм – факторов перехода  $B \rightarrow K^*$ , вычисленные в рамках кварковых моделей (BTOSLLMS) [9] или различных версий правил сумм КХД (IBTOSLLALI и BTOSLLBALL) [7], [8]. Основная концепция пакета EvtGen заключается в том, что каждый распад описывается с помощью спиральных амплитуд, из которых формируется матрица плотности этого распада. Это позволяет точно моделировать угловые (а следовательно, и спиновые) зависимости во всей цепочке последующих распадов.

Для демонстрации работы алгоритма генерации распадов в EvtGen рассмотрим редкий четырехлептонный распад  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell^-$ . Данный распад моделируется с помощью модели B2LLLNU, созданной при написании данной диссертационной работы. Амплитуда распада может быть записана как:

$$A = \sum_{\lambda_{\ell^-}, \lambda_{\ell^+}, \lambda_{\ell^-}} A_{\lambda_{\ell^-}, \lambda_{\ell^+}, \lambda_{\ell^-}}^{B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell^-} \quad (69)$$

Амплитуда распада записывается для восьми ( $2 \times 2 \times 2$ ) различных состояний спина трех лептонов конечного состояния. Полученное выражение квадратируется и домножается на фазовый объем, после чего может быть использовано для моделирования кинематики распада стандартным методом Монте-Карло.

В соответствии с выражением для амплитуды (69), кинематика распада  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell^-$  разыгрывается по четырехчастичному фазовому объему, умноженному на вероятность  $P_B$ . Выражение для  $P_B$  записывается как:

$$P_B = \sum_{\lambda_{\ell^-}, \lambda_{\ell^+}, \lambda_{\ell^-}} |A_{\lambda_{\ell^-}, \lambda_{\ell^+}, \lambda_{\ell^-}}^{B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell^-}|^2 \quad (70)$$

Кинематика генерируется до тех пор, пока событие не пройдет алгоритм принятия – отклонения соответствии с функцией (70).

В процессе распада  $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell^-$  присутствуют промежуточные резонансы,  $\rho^0$  и  $\omega$ . Но цепочки распада этих резонансов в лептоны здесь не рассматриваются, поскольку данные процессы уже учтены в модели на диаграммном уровне и заданы соответствующими слагаемыми в амплитуде. В ином случае генерацию процессов  $\omega \rightarrow \ell^+ \ell^-$  и  $\rho^0 \rightarrow \ell^+ \ell^-$  следовало бы рассматривать в соответствии с алгоритмом, описанным в [37].

Нужно также отметить, что при использовании данного подхода есть особенность. Для корректного моделирования дифференциальных распределений

необходимо знать максимальное значение, которое может принимать матричный элемент распада. Данное значение можно получить, если знать порядок парциальной ширины изучаемого распада. Более точно максимальное значение матричного элемента можно подобрать при отладке модели.

В результате интегрирования по фазовому объему можно получить распределение парциальной ширины распада по одной из кинематических переменных. Такой результат может быть получен в рамках классической версии пакета EvtGen. В данной работе метод, реализованный в исходной версии пакета EvtGen был расширен до интегрирования по всем переменным фазового объема. Таким образом стало возможно получение не только дифференциальных характеристик процесса, но и расчет парциальной ширины. Более подробно данная оптимизация описана в разделе 2.1.4 данной работы.

### 3.2.1 Описание модели BLLNUL

Приведем краткое описание модели BLLNUL. Данная модель была создана для теоретически обоснованного моделирования распадов заряженных  $B$  – мезонов в три лептона и нейтрино в рамках СМ. В модели BLLNUL реализованы следующие условия:

- возможно моделировать следующих каналов распада  $B^-$  – мезона:  
 $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- e^- \bar{\nu}_e$ ,  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$ ,  $B^- \rightarrow e^+ e^- e^- \bar{\nu}_e$  и  $B^- \rightarrow e^+ e^- \mu^- \bar{\nu}_\mu$ ;
- в соответствии с моделью векторной доминантности учтены вклады промежуточных резонансов  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$ ;
- учтены вклады тормозного излучения и нерезонансный вклад диаграммы с излучением фотона тяжелым кварком  $B^-$  – мезона
- форм – факторы рассчитывались в рамках дисперсионной формулировки релятивистской кварковой модели ([32], Таблица XV)

Большая часть дифференциальных характеристик распадов заряженных  $B$  – мезонов, рассчитанных в данной работе, была получена с помощью модели BLLNUL. Модель BLLNUL была включена в базу официального программного обеспечения коллаборации LHCb.

### 3.2.2 Модели распадов нейтральных $B$ – мезонов

В ходе данной диссертационной работы для пакета EvtGen также были реализованы модели распадов нейтральных  $B$  – мезонов. Рассматривались процессы  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ . Приведем краткое описание данных моделей.

Для распада  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  была реализована модель со следующими параметрами:

- учтены вклады тормозного излучения, процессов слабой аннигиляции и нерезонансный вклад от  $b\bar{b}$  - пар;
- учтены вклады  $\phi(1020)$ ,  $J/\psi$ ,  $\psi(2S)$ ,  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$ ,  $\psi(4415)$ ,  $\rho^0(770)$  и  $\omega(782)$  резонансов;
- форм – факторы рассчитывались в рамках дисперсионной формулировки релятивистской кварковой модели [40];
- параметры  $A$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\eta}$  СКМ матрицы можно варьировать;

Аналогичная модель была реализована для распада  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ :

- учтены вклады тормозного излучения, процессов слабой аннигиляции и нерезонансный вклад от  $b\bar{b}$  - пар;
- учтены вклады  $\rho^0(770)$ ,  $\omega(782)$ ,  $J/\psi$ ,  $\psi(2S)$ ,  $\psi(3770)$ ,  $\psi(4040)$ ,  $\psi(4160)$  и  $\psi(4415)$ , резонансов;
- форм – факторы рассчитывались в рамках дисперсионной формулировки релятивистской кварковой модели [40];
- параметры  $A$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\eta}$  СКМ матрицы можно варьировать;

Описанные модели могут быть использованы как при проведении экспериментальных анализов распадов  $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  и  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ , так и как самостоятельное средство для получения теоретических предсказаний вышеупомянутых распадов.

### 3.3 Безразмерные функции $a^{(ij)}$ , $b^{(ij)}$ , $c^{(ij)}$ , $d^{(ij)}$ , $f^{(ij)}$ и $g^{(ij)}$

Определим безразмерные функции, входящие в амплитуду распадов нейтральных  $B$  – мезонов (41).

$$\begin{aligned}
 a^{(VV)}(x_{12}, x_{34}) = & \frac{1}{M_1^2} \left[ \frac{4\hat{m}_b C_{7\gamma}(\mu)}{x_{12}, x_{34}} \left( \frac{1}{2}(F_{TV}(q^2, k^2) + F_{TV}(k^2, q^2)) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\hat{M}_2 \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} T_1(q^2) - \frac{\hat{M}_2 \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} T_1(k^2) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{C_{9V}(q^2, \mu)}{x_{34}} \left( F_V(q^2, k^2) - \frac{2\hat{M}_2}{1 + \hat{M}_2} \frac{V(q^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{C_{9V}(k^2, \mu)}{x_{12}} \left( F_V(k^2, q^2) - \frac{2\hat{M}_2}{1 + \hat{M}_2} \frac{V(k^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right) \right];
 \end{aligned}$$

$$a^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}}{x_{12}} \left[ F_V(k^2, q^2) - \frac{2\hat{M}_2}{1 + \hat{M}_2} \frac{V(k^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right];$$

$$a^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}}{x_{34}} \left[ F_V(q^2, k^2) - \frac{2\hat{M}_2}{1 + \hat{M}_2} \frac{V(q^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right];$$

$$\begin{aligned}
 b^{(VV)}(x_{12}, x_{34}) = & \frac{1}{M_1^2} \left[ \frac{2\hat{m}_b C_{7\gamma}(\mu)}{x_{12}, x_{34}} \left( \frac{1 - x_{12} - x_{34}}{2}(F_{TA}(q^2, k^2) + F_{TA}(k^2, q^2)) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\hat{M}_2 (1 - \hat{M}_2^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} T_2(q^2) - \frac{\hat{M}_2 (1 - \hat{M}_2^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} T_2(k^2) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{C_{9V}(q^2, \mu)}{x_{34}} \left( \frac{1}{2}(1 - x_{12} - x_{34})F_A(q^2, k^2) - \frac{\hat{M}_2 (1 + \hat{M}_2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} A_1(q^2) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{C_{9V}(k^2, \mu)}{x_{12}} \left( \frac{1}{2}(1 - x_{12} - x_{34})F_A(k^2, q^2) - \frac{\hat{M}_2 (1 + \hat{M}_2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} A_1(k^2) \right) \right];
 \end{aligned}$$

$$b^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{12}} \left[ \frac{1 - x_{12} - x_{34}}{2} F_A(k^2, q^2) - \frac{\hat{M}_2 (1 + \hat{M}_2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} A_1(k^2) \right];$$

$$b^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{34}} \left[ \frac{1 - x_{12} - x_{34}}{2} F_A(q^2, k^2) - \frac{\hat{M}_2 (1 + \hat{M}_2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} A_1(q^2) \right];$$

$$\begin{aligned} c^{(VV)}(x_{12}, x_{34}) = & \frac{1}{M_1^2} \left[ \frac{2\hat{m}_b C_{7\gamma}(\mu)}{x_{12}, x_{34}} \left( \frac{1}{2} (F_{TA}(q^2, k^2) + F_{TA}(k^2, q^2)) - \right. \right. \\ & - \frac{\hat{M}_2 \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \left( T_2(q^2) + \frac{T_3(q^2) x_{12}}{(1 - \hat{M}_2^2)} \right) - \\ & \left. - \frac{\hat{M}_2 \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \left( T_2(k^2) + \frac{T_3(k^2) x_{34}}{(1 - \hat{M}_2^2)} \right) \right) + \\ & + \frac{C_{9V}(q^2, \mu)}{x_{34}} \left( \frac{1}{2} F_A(q^2, k^2) - \frac{\hat{M}_2}{(1 + \hat{M}_2)} \frac{A_2(q^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right) + \\ & \left. + \frac{C_{9V}(k^2, \mu)}{x_{12}} \left( \frac{1}{2} F_A(k^2, q^2) - \frac{\hat{M}_2}{(1 + \hat{M}_2)} \frac{A_2(k^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$c^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{12}} \left[ \frac{1}{2} F_A(k^2, q^2) - \frac{\hat{M}_2}{1 + \hat{M}_2} \frac{A_2(k^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right];$$

$$c^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{34}} \left[ \frac{1}{2} F_A(q^2, k^2) - \frac{\hat{M}_2}{1 + \hat{M}_2} \frac{A_2(q^2) \hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \right];$$

$$d^{(AV)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{34}} \frac{\hat{f}_\phi^{em}}{x_{34} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \left[ \frac{A_2(q^2)}{1 + \hat{M}_2} + \frac{2\hat{M}_2}{x_{12}} \left( A_3(q^2) - A_0(q^2) \right) \right];$$

$$g^{(VA)}(x_{12}, x_{34}) = \frac{1}{M_1^2} \frac{C_{10A}(\mu)}{x_{12}} \frac{\hat{f}_\phi^{em}}{x_{12} - \hat{M}_2^2 + i\hat{\Gamma}_2 \hat{M}_2} \left[ \frac{A_2(k^2)}{1 + \hat{M}_2} + \frac{2\hat{M}_2}{x_{34}} \left( A_3(k^2) - A_0(k^2) \right) \right];$$

$$d^{(VP)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) = - \frac{4C_{10A} \hat{m}_e \hat{f}_{B_s}}{M_1^2} \frac{1}{x_{12} (x_{124} - \hat{m}_e^2) (x_{123} - \hat{m}_e^2)} \frac{(k_3 - k_4, q)}{M_1^2};$$

$$f^{(VT)}(x_{12}, x_{123}, x_{124}) = - \frac{2C_{10A} \hat{m}_e \hat{f}_{B_s}}{M_1^2} \frac{1}{x_{12} (x_{124} - \hat{m}_e^2) (x_{123} - \hat{m}_e^2)} \frac{1 + x_{12} - x_{34}}{2}.$$

Все формфакторы  $V(q^2)$ ,  $T_1(q^2)$ ,  $T_2(q^2)$ ,  $T_3(q^2)$ ,  $A_0(q^2)$ ,  $A_1(q^2)$ ,  $A_2(q^2)$  и  $A_3(q^2)$  взяты из работы [68].

## Список рисунков

1	Диаграмма излучения виртуального фотона легким кварком $B^-$ -мезона. . . . .	18
2	Диаграмма излучения виртуального фотона тяжелым кварком $B^-$ -мезона. . . . .	20
3	Диаграмма, соответствующая тормозному излучению виртуального фотона. . . . .	21
4	Диаграмма для вычисления $\mathcal{M}_{fi}^{(u)}$ (см. формулу (10)) на примере распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ . Излучение виртуального фотона легким кварком описывается в рамках модели доминантности векторных мезонов. . . . .	22
5	Диаграмма для вычисления $\mathcal{M}_{fi}^{(b)}$ (см. формулу (11)) на примере распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ . . . . .	23
6	Диаграмма для вычисления амплитуды тормозного излучения $\mathcal{M}_{fi}^{(brem)}$ (см. формулу (12)) распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ . . . . .	23
7	Дважды дифференциальное распределение $10^4 \times \frac{d^2 \text{Br}(B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , вычисленное согласно формуле (17). На рисунке <b>a</b> ) отдельно выделена область $x_{12} \in [0.00, 0.04]$ , которая отвечает области применимости рассматриваемой в настоящей работе модели. . . . .	29
8	Зависимость парциальной ширины распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ от непертурбативной фазы между резонансами . . . . .	30
9	Нормированные дифференциальные распределение $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{12}}$ для распадов 1) $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ и 2) $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по $dx_{34} dy_{12} dy_{34} d\varphi$ формул (16) и (19) соответственно. . . . .	34
10	Нормированные дифференциальные распределения $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{34}}$ для распадов <b>a</b> ) $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ и <b>b</b> ) $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по $dx_{12} dy_{12} dy_{34} d\varphi$ формул (16) и (19) соответственно. . . . .	35

- 11 Нормированные дифференциальные распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{12}}$  для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{12} dx_{34} dy_{34} d\varphi$  формул (16) и (19) соответственно. . . . . 35
- 12 Нормированные дифференциальные распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{34}}$  для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{12} dx_{34} dy_{12} d\varphi$  формул (16) и (19) соответственно. . . . . 36
- 13 Нормированные дифференциальные распределение  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{124}}$  по инвариантной массе всех заряженных лептонов в конечном состоянии для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ . 36
- 14 Нормированные дифференциальные распределения  $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\cos(\varphi)}$  для распадов **a)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и **b)**  $B^- \rightarrow \mu^+ \bar{\nu}_\mu \mu^- \mu^-$ , полученные интегрированием по  $dx_{12} dx_{34} dy_{12} dy_{34}$  формул (16) и (19) соответственно. . . . . 37
- 15 Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона  $s$  – кварком  $B_s$  мезона. . . . . 44
- 16 Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона  $b$  – кварком  $B_s$  мезона. . . . . 45
- 17 Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона одним из лептонов конечного состояния. . . . . 45
- 18 Диаграммы вида «пингвин», отвечающие вкладам петлевым вкладом  $c$  и  $u$  кварков . . . . . 46
- 19 Диаграммы, соответствующие процессам слабой аннигиляции . . . . 48
- 20 Иллюстрация к описанию геометрического алгоритма Монте-Карло интегрирования . . . . . 50
- 21 1),3) Одномерные дифференциальные распределения парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  переменной  $x_{12}$  ( $\mu^+ \mu^-$  – канал); 2),4) одномерные дифференциальные распределения парциальной ширины распада  $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  по переменной  $x_{34}$  ( $e^+ e^-$  – канал); на рис. 3),4) представлена более детально показана область  $\phi(1020)$  – резонанса . . . . . 55

22	Нормированные дифференциальные распределение по угловым переменным $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{12}}$ и $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dy_{34}}$ . . . . .	56
23	Нормированное дифференциальное распределение $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\cos(\phi)}$ . . . . .	56
24	Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ в первой проекции . . . . .	57
25	Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_s \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , во второй проекции . . . . .	57
26	Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона $d$ – кварком $B_d$ мезона. . . . .	61
27	Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона $b$ – кварком $B_d$ мезона. . . . .	62
28	Диаграммы, соответствующие излучению виртуального фотона одним из лептонов конечного состояния. . . . .	62
29	Пример диаграммы вида «пингвин», отвечающей вкладам петлевым вкладом $d$ и $u$ кварков . . . . .	63
30	Диаграммы, соответствующие процессам слабой аннигиляции . . . . .	63
31	1) распределение парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ переменной $x_{12}$ ( $\mu^+\mu^-$ – канал) ; 2) распределение парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ по переменной $x_{34}$ ( $e^+e^-$ – канал); 3) распределение парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ по переменной $x_{12}$ , область $\rho^0(770)$ и $\omega(782)$ – резонансов (до $1^2$ ); 4) распределение парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ по переменной $x_{34}$ , область $\rho^0(770)$ и $\omega(782)$ – резонансов (до $1\text{ GeV}^2$ ). . . . .	66
32	1) распределение парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ по переменной $\cos(\theta_{12})$ ; 2) распределение парциальной ширины распада $\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-$ по переменной $\cos(\theta_{34})$ . . . . .	67
33	Нормированное дифференциальное распределение $\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\cos(\phi)}$ . . . . .	68
34	Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , проекция 1 . . . . .	68
35	Дважды дифференциальное распределение парциальной ширины $\frac{d^2\text{Br}(\bar{B}_d \rightarrow \mu^+\mu^-e^+e^-)}{dx_{12} dx_{34}}$ , проекция 2 . . . . .	69

- 36 Кинематика распада  $B^-(p) \rightarrow \ell^+(k_1) \ell^-(k_2) \bar{\nu}_\ell(k_3) \ell'^-(k_4)$ . Угол  $\theta_{12}$  определяется в системе покоя  $\ell^+(k_1) \ell^-(k_2)$  – пары;  $\theta_{34}$  определяется в системе покоя  $\bar{\nu}_\ell(k_3) \ell'^-(k_4)$  – пары; угол  $\varphi$  задается в системе покоя  $B^-$ -мезона. . . . . 81

## Список таблиц

1	Зависимость парциальной ширины распада $B^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ от величины $x_{12min}$ порога интегрирования по переменной $x_{12}$ . . . . .	32
2	Сравнение теоретических предсказаний для парциальных ширин распадов $B^- \rightarrow \ell^+ \bar{\nu}_\ell \ell^- \ell^-$ и $B^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \ell^-$ , полученных разными авторами . . . . .	32
3	Зависимость парциальной ширины распада $\bar{B}_s \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$ от $N_{tot}$ .	52