М. О. Корпусов, А. Ю. Перлов, А. В. Тимошенко, Р. С. Шафир, Р. С. Шафир, О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений теплоэлектрической модели, *Матем. заметки*, 2023, том 114, выпуск 5, 759–772

DOI: 10.4213/mzm13956

Математические заметки

Том 114 выпуск 5 ноябрь 2023

УДК 517.957

О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений тепло-электрической модели

М. О. Корпусов, А. Ю. Перлов, А. В. Тимошенко, Р. С. Шафир

В данной работе мы предложили систему нелинейных уравнений относительно потенциала электрического поля и температуры, описывающую процесс нагрева полупроводниковых элементов электрической платы с последующим тепловым "пробоем". Для данной системы уравнений мы доказали существование непродолжаемого во времени классического решения, а также получили достаточные условия разрушения решения за конечное время.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: потенциал электрического поля, первая краевая задача для уравнения теплопроводности, функция Грина, разрушение решения, методы нелинейной емкости и пробных функций.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13956

1. Введение. Надежность современных радиолокационных комплексов мониторинга космического пространства (РЛК МКП) в значительной степени определяется эффективностью системы охлаждения, что особенно актуально для современных комплексов высокой мощности с предельно высокой компоновкой радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) при жесточайших требованиях к снижению массогабаритных показателей. Оценке параметров надежности посвящена, например, работа [1]. Успешное решение задачи синтеза системы управления систем охлаждения таких РЛК МКП во многом определяется корректностью математической модели, основанной на решении системы дифференциальных уравнений, описывающей тепловые процессы в полупроводниковой радиоэлектронной аппаратуре. В настоящей статье приведены результаты теоретических исследований по обоснованию разрешимости и разрушения классических решений системы дифференциальных уравнений для потенциала электрического поля и температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00056).

Данная работа продолжает исследования, начатые в работах [2]–[4] и посвященные исследованию начально–краевых задач для локальных и нелокальных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + \mu|\nabla u|^p = 0, \qquad p > 0, \quad \mu > 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\,ds + \mu|\nabla u|^p = 0, \qquad p > 0, \quad \mu > 0 \tag{1.2}$$

при некоторых условиях на функцию $h(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \sigma_1 \Delta_2 u + \sigma_2 u_{x_3 x_3} + \mu|\nabla u|^p = 0, \qquad p > 0, \quad \mu > 0. \tag{1.3}$$

В данной работе мы рассмотрим следующую систему уравнений (см. [5]–[8]):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi + \sigma_0\Delta\phi - \gamma_0\Delta\psi = 0, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi + q_0|D_x\phi|^p, \tag{1.5}$$

где ϕ – потенциала электрического поля, ψ – температура,

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}, \qquad \gamma_0 = \frac{4\pi\gamma}{\varepsilon}, \tag{1.6}$$

причем $\varepsilon_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $q_0 > 0$ и $p > 1$.

При этом при исследовании вопроса о разрушении решения уравнений и систем уравнений мы будем пользоваться методами нелинейной емкости и пробных функций [9]–[12]. Отметим, что модельные уравнения (1.1)–(1.3) относятся к уравнениям соболевского типа (см. работы [13], [14]).

2. Вывод системы уравнений. Вывод системы уравнений имеется в работе [2]. Именно там получена вот такая система уравнений, описывающая тепловые и электрические явления в полупроводниковых приборах, из–за которых полупроводниковые элементы на платах греются и происходит тепловой “пробой”. Для полноты изложения приведем вывод рассматриваемой системы уравнений. В приближении квазистационарного электрического поля справедливы следующие уравнения (см. работу [8]):

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{D}$ – это вектор индукции электрического поля, $\mathbf{E}$ – это вектор напряженности электрического поля, n – плотность свободных зарядов, причем в случае поверхностной односвязности границы Γ определен потенциал электрического поля ϕ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi.$$

Поскольку полупроводник, очевидно, является проводящей средой, то мы должны дополнить уравнения (2.1) уравнением для тока свободных зарядов, которое имеет следующий вид [8]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{J}$ – это вектор тока свободных зарядов. При этом учтем тепловой разогрев полупроводника [5], [6]:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} - \gamma \nabla \psi, \qquad \sigma > 0, \quad \gamma > 0, \tag{2.3}$$

где ψ – это температура в полупроводнике. Причем для температуры ψ имеет место уравнение теплопроводности с тепловым нагревом за счет электрического поля $\mathbf{E}$ следующего вида [5]:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + Q(|\mathbf{E}|), \tag{2.4}$$

где параметр $\varepsilon_0 > 0$ имеет следующий вид:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 e^{-\alpha} \tag{2.5}$$

и $\varepsilon_1 > 0$ – это фиксированное число, а параметр $\alpha > 0$ достаточно велик. Функция $Q(|\mathbf{E}|)$ описывает тепловую накачку в полупроводнике в самосогласованном электрическом поле $\mathbf{E}$ и хорошо аппроксимируется степенной функцией следующего вида [5]:

$$Q(|\mathbf{E}|) = q_0 |\mathbf{E}|^p, \qquad p > 0, \qquad q_0 > 0. \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.1)–(2.6) вытекает такая система уравнений:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi + \sigma \Delta \phi + \gamma \Delta \psi = 0, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + q_0 |D_x \phi|^p, \tag{2.8}$$

которую заменой $\phi \mapsto -\phi$ можно переписать в виде (1.4)–(1.6).

3. Обозначения и вспомогательные результаты. Будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная выпуклая область с поверхностно односвязной границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{2,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1)$. Нас будет интересовать случай $N = 3$. В работе мы будем пользоваться стандартными обозначениями из работы [15]. Отметим только, что символом $\mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T)$ мы обозначили линейное пространство функций

$$u(x,t), D_{x_i} u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$$

банаховое относительно нормы

$$|u(x,t)|_{1,0;D_T} := |u(x,t)|_{0;D_T} + \sum_{i=1}^{N} |D_{x_i} u(x,t)|_{0;D_T}.$$

Рассмотрим первую краевую задачу в ограниченной области $D_T = \Omega \times (0,T)$ с границей $S_T \cup B_T \cup B$:

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \Delta \psi(t) = f(x,t) \qquad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.1}$$

$$\psi(x,t) = 0 \qquad \text{для} \quad (x,t) \in S_T, \tag{3.2}$$

$$\psi(x,t) = \psi_0(x) \qquad \text{для} \quad (x,t) \in B. \tag{3.3}$$

Функция Грина $G(x,t;y,\tau)$ первой краевой задачи существует, единственна и является непрерывной (см. работу [16]) для $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}_T \times (D_T \cup B)$, $t > \tau$. Кроме того,

$$G, D_x G, D_x^2 G, D_t G \in \mathbb{C}\big((D_T \cup B_T) \times (D_T \cup B)\big), \qquad t > \tau. \tag{3.4}$$

И решение $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}(\overline{D}_T)$ первой краевой задачи (3.1)–(3.3) представимо в следующем виде:

$$\psi(x,t) = \chi(t)\psi_0(x) + \int_0^t \int_\Omega G(x,t;y,\tau)\big[f(y,\tau) - \chi'(\tau)\psi_0(y) + \chi(\tau)\Delta\psi_0(y)\big]\,dy\,d\tau, \tag{3.5}$$

если

$$\chi(t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}[0,+\infty), \qquad \psi_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}), \qquad \chi(0) = 1, \qquad \psi_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma. \tag{3.6}$$

Для доказательства представления (3.5) достаточно применить третью формулу Грина (см., например, [16]) к функции $\psi(x,t) - \chi(t)\psi_0(x)$. Заметим, что в работе [17] приведены мажоранты для производных функции Грина следующего вида:

$$|D_t^r D_x^s G(x,t;y,\tau)| \leqslant \frac{A_1}{(t-\tau)^{(3+2r+s)/2}} \exp\left(-a_1 \frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right), \tag{3.7}$$

при $t > \tau$, $x \neq y$. Из этой оценки (см., например, [16]) элементарно получается вспомогательная оценка:

$$|D_t^r D_x^s G(x,t;y,\tau)| \leqslant \frac{A_2}{(t-\tau)^{\mu}|x-y|^{3+2r+s-2\mu}}, \qquad t > \tau, \quad x \neq y. \tag{3.8}$$

Прежде чем переходить к основной части исследования, приведем вспомогательное утверждение о свойстве объемного потенциала

$$V(x,t) := \int_0^t \int_\Omega G(x,t;y,\tau) f(y,\tau)\,dy\,d\tau. \tag{3.9}$$

Справедливо следующее утверждение (см., например, [16]).

Лемма 1. *Если функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$, *то объемный потенциал* $V(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ *и для всех* $(x,t) \in D_T$ *справедливо равенство*:

$$D_{x_i} V(x,t) = \int_0^t \int_\Omega D_{x_i} G(x,t;y,\tau) f(y,\tau)\,dy\,d\tau, \tag{3.10}$$

причем справедлива оценка:

$$|V(x,t)|_{0;D_T} + \sum_{i=1}^N |D_{x_i} V(x,t)|_{0;D_T} \leqslant M(N,\theta) T^\theta |f(x,t)|_{0;D_T} \tag{3.11}$$

для любого $\theta \in (0,1)$.

С учетом оценки (3.8) справедливо утверждение (см. [18; теорема 5]).

Лемма 2. *Если область* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – *выпуклая и функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ (*тогда* $D_{x_i}V(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T)$), *то справедлива оценка производных*:

$$|V_{x_i}(x'',t'') - V_{x_i}(x',t')| \leqslant M(N,T,\alpha)|f(x,t)|_{0;D_T}\left[|x''-x'|^{\alpha} + |t''-t'|^{\alpha/2}\right] \tag{3.12}$$

для всех $(x'',t''),(x',t') \in \overline{D}_T$ *и любого* $\alpha \in (0,1)$.

Наконец, справедливо следующее известное утверждение [16].

Лемма 3. *Если функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T)$ *при* $\alpha \in (0,1)$, *то*

$$V(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T) \tag{3.13}$$

и справедливы поточечные равенства:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} - \Delta V(x,t) = f(x,t) \qquad \text{для} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{3.14}$$

$$V(x,t) = 0 \quad \text{для} \ \ (x,t) \in S_T, \qquad V(x,0) = 0 \quad \text{для} \ \ x \in \overline{\Omega}. \tag{3.15}$$

4. Постановка первой краевой задачи. Рассмотрим следующую первую краевую задачу в ограниченной цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi + \sigma_0\Delta\phi - \gamma_0\Delta\psi = 0, \qquad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi + q_0|D_x\phi|^p, \qquad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{4.2}$$

$$\psi(x,t) = \phi(x,t) = 0 \qquad \text{при} \quad (x,t) \in S_T, \tag{4.3}$$

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x) \qquad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.4}$$

Дадим определение классического решения первой краевой задачи (4.1)–(4.4).

Определение 1. Пара функций $\{\phi(x,t),\psi(x,t)\}$ называется *классическим решением задачи* (4.1)–(4.4), если

$$\phi(x,t), \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}, \psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T), \qquad \alpha \in (0,1), \tag{4.5}$$

и пара функций $\{\phi(x,t),\psi(x,t)\}$ удовлетворяют задаче (4.1)–(4.4) поточечно.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *В классе классических решений* $\{\phi(x,t),\psi(x,t)\}$ *при условии согласования* $\phi_0(x) = 0 = \psi_0(x)$ *для всех* $x \in \Gamma$ *и* $\phi_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задача* (4.1)–(4.4) *эквивалентна следующей*:

$$\phi(x,t) = \phi_0(x)\exp(-\sigma_0 t) + \gamma_0\int_0^t \exp(-\sigma_0(t-\tau))\psi(x,\tau)\,d\tau, \qquad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{4.6}$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi + q_0|D_x\phi|^p, \qquad (x,t) \in D_T \cup B_T, \tag{4.7}$$

$$\psi(x,t) = 0 \qquad \textit{при} \quad (x,t) \in S_T, \tag{4.8}$$

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) \qquad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Заметим только, что если $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T)$ и $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, то функция $\phi(x,t)$, определенная равенством (4.6), принадлежит классу

$$\phi(x,t), \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T), \qquad \alpha \in (0,1),$$

и для нее справедливы поточечные равенства (4.1), (4.3) и (4.4).

Справедлива следующая

Лемма 5. *Если $\psi_0(x) \geqslant 0$, то в классе $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{(2,1)}(D_T \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ имеем $\psi(x,t) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \overline{D}_T$.*

Доказательство. Доказательство основано на признаке сравнения для дифференциального неравенства

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi \geqslant 0, \qquad (x,t) \in D_T \cup B_T.$$

5. Существование непродолжаемого во времени решения интегрального уравнения. Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение вида (3.5):

$$\psi(t) = \chi(t)\psi_0(x) + \int_0^t \int_\Omega G(x,t;y,\tau)\bigl[q_0|D_y A(\psi)(y,\tau)|^p - \chi'(\tau)\psi_0(y) + \chi(\tau)\Delta\psi_0(y)\bigr]\, dy\, d\tau, \tag{5.1}$$

$$\phi(x,t) = A(\psi)(x,t) := \phi_0(x)\exp(-\sigma_0 t) + \gamma_0 \int_0^t \exp(-\sigma_0(t-\tau))\psi(x,\tau)\, d\tau, \tag{5.2}$$

где $G(x,t;\xi,\tau)$ – функция Грина первой краевой задачи для оператора теплопроводности

$$L_{\varepsilon_0} := \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x, \qquad \varepsilon_0 > 0,$$

в ограниченной цилиндрической области $D_T = \Omega \times (0,T)$. Справедлива следующая

Лемма 6. *При $p > 1$ имеет место оценка*:

$$\bigl||D_x u_1|^p - |D_x u_2|^p\bigr| \leqslant p \max\bigl\{|D_x u_1|^{p-1}, |D_x u_1|^{p-1}\bigr\}|D_x u_1 - D_x u_2|. \tag{5.3}$$

Доказательство. Справедлива цепочка равенств:

$$|D_x u_1|^p - |D_x u_2|^p = \int_0^1 \frac{d}{ds}|D_x u_s|^p\, ds = p\int_0^1 |D_x u_s|^{p-2}(D_x u_s, D_x u_1 - D_x u_2)\, ds, \tag{5.4}$$

из которого получается оценка

$$\bigl||D_x u_1|^p - |D_x u_2|^p\bigr| \leqslant p \int_0^1 |D_x u_s|^{p-1}\, ds\, |D_x u_1 - D_x u_2| \leqslant p \max\bigl\{|D_x u_1|^{p-1}, |D_x u_1|^{p-1}\bigr\}|D_x u_1 - D_x u_2|, \tag{5.5}$$

где мы воспользовались неравенством

$$|D_x u_s| = |sD_x u_1 + (1-s)D_x u_2| \leqslant s|D_x u_1| + (1-s)|D_x u_2| \leqslant \max\bigl\{|D_x u_1|, |D_x u_2|\bigr\}. \tag{5.6}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 7. *Линейный оператор* (5.2) *действует*

$$A\colon \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T) \to \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T) \tag{5.7}$$

и в классе функций $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T)$ *справедлива оценка*:

$$|D_x A(\psi)(x,t)|_{0;D_T} \leqslant |D_x \phi_0(x)|_{0;D_T} + \frac{\gamma_0}{\sigma_0}[1-\exp(-\sigma_0 T)]|D_x \psi(x,t)|_{0;D_T}. \tag{5.8}$$

Рассмотрим отображение

$$F(\psi) := |D_x A(\psi)|^p. \tag{5.9}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8. *Отображение* $F(\psi)$ *при* $p>1$ *действует*

$$F(\psi)\colon \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T) \to \mathbb{C}(\overline{D}_T) \tag{5.10}$$

и справедлива оценка

$$\begin{aligned} |F(\psi_1) - F(\psi_2)|_{0;D_T} &\leqslant p\biggl(\frac{\gamma_0}{\sigma_0}\biggr)^{p-1}(1-\exp(-\sigma_0 T))^{p-1} \\ &\times \max\bigl\{|D_x A(\psi_1)|^{p-1}_{0;D_T}, |D_x A(\psi_2)|^{p-1}_{0;D_T}\bigr\}|D_x\psi_1 - D_x\psi_2|_{0;D_T} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из лемм 6 и 7.

Введем отображение

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\psi)(x,t) &:= \chi(t)\psi_0(x) \\ &+ \int_0^t \int_\Omega G(x,t;y,\tau)\bigl[q_0 F(\psi)(y,\tau) - \chi'(\tau)\psi_0(y) + \chi(\tau)\Delta\psi_0(y)\bigr]\,dy\,d\tau. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $\psi_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ *и* $\chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}_b[0,+\infty)$, *то при* $p>1$ *отображение* $\widehat{G}$ *действует*

$$\widehat{G}\colon \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T) \to \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T) \tag{5.13}$$

и справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\widehat{G}(\psi_1) - \widehat{G}(\psi_2)|_{1,0;D_T} &\leqslant M_1(N,\theta,q_0,p,\gamma_0)T^{p+\theta-1} \\ &\times \max\bigl\{|D_x A(\psi_1)|^{p-1}_{0;D_T}, |D_x A(\psi_2)|^{p-1}_{0;D_T}\bigr\}|\psi_1 - \psi_2|_{1,0;D_T} \end{aligned} \tag{5.14}$$

для любого $\theta \in (0,1)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из лемм 1 и 8. Кроме того, в силу (3.11) и (5.11) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} &|\widehat{G}(\psi_1) - \widehat{G}(\psi_2)|_{1,0;D_T} \\ &\quad\leqslant M(N,\theta)q_0 p\gamma_0^p T^{p+\theta-1}\max\bigl\{|D_x A(\psi_1)|^{p-1}_{0;D_T}, |D_x A(\psi_2)|^{p-1}_{0;D_T}\bigr\}|D_x\psi_1 - D_x\psi_2|_{0;D_T} \\ &\quad\leqslant M_1(N,\theta,q_0,p,\gamma_0)T^{p+\theta-1}\max\bigl\{|D_x A(\psi_1)|^{p-1}_{0;D_T}, |D_x A(\psi_2)|^{p-1}_{0;D_T}\bigr\}|\psi_1 - \psi_2|_{1,0;D_T}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Из этой теоремы вытекает следующая

Теорема 2. *Для любых функций* $\psi_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$, $\phi_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *и* $\chi(t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}[0, +\infty)$ *при* $p > 1$ *найдется такое малое* $T > 0$, *что существует единственное решение интегрального уравнения* (5.1) *в классе* $\mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T)$.

Доказательство. Доказательство основано на применении принципа сжимающих отображений и теореме 1.

Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений типа Вольтерра во времени (см., например, [19]), получим такой результат:

Теорема 3. *Для любых функций* $\psi_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$, $\phi_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *и* $\chi(t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}[0, +\infty)$ *при* $p > 1$ *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(\phi_0, \psi_0, \chi) > 0$, *что для любого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (5.1) *в классе* $\mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае справедливо предельное свойство*:

$$\lim_{T \uparrow T_0} |\psi(x,t)|_{1,0;D_T} = +\infty. \tag{5.16}$$

6. Существование классического решения задачи (4.1)–(4.4). Прежде всего справедлива следующая

Лемма 9. *Если* $D_{x_i}\phi_0(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $D_{x_i}\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T)$ *при* $\alpha \in (0,1)$, *то*

$$D_{x_i}A(\psi)(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T). \tag{6.1}$$

Доказательство. Доказательство леммы основано на равенстве

$$D_{x_i}A(\psi)(x,t) = D_{x_i}\phi_0(x)\exp(-\sigma_0 t) + \gamma_0 \int_0^t \exp(-\sigma_0(t-\tau))D_{x_i}\psi(x,t)\,dx. \tag{6.2}$$

Справедлива следующая

Лемма 10. *Если* $D_{x_i}A(\psi)(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T)$ *для всех* $i = 1, \ldots, N$ *и функция*

$$\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T),$$

то

$$F(\psi)(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T). \tag{6.3}$$

Доказательство. Доказательство основано на формуле (5.3), а также лемме 7.

Имеет место утверждение.

Лемма 11. *Если* $F(\psi)(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T)$, $\psi_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* $\chi(t) \in \mathbb{C}_b^{(2)}[0, +\infty)$, *то*

$$\widehat{G}(\psi)(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T). \tag{6.4}$$

Доказательство. Доказательство основано на лемме 3.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Для любых* $\psi_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\phi_0(x) \in \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при* $\alpha \in (0,1)$, $p > 1$ *и* $\chi(t) \in \mathbb{C}_b^{(2)}[0,+\infty)$ *оператор* $\widehat{G}$ *на решениях интегрального уравнения* (5.1) *действует*

$$\widehat{G}\colon \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T) \to \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{D}_T). \tag{6.5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, с одной стороны, в силу результата леммы 2 имеем

$$D_{x_i}\widehat{G}(\psi)(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T) \tag{6.6}$$

для любой функции $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1,0)}(\overline{D}_T)$. С другой стороны, из интегрального уравнения (5.1) получим $D_{x_i}\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(\overline{D}_T)$. Осталось последовательно воспользоваться леммами 9–11.

Таким образом, из теоремы 4 с учетом теоремы 3 вытекает следующее утверждение:

Теорема 5. *Для любых* $\psi_0(x), \phi_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *при* $\alpha \in (0,1)$, $p > 1$, $\chi(t) \in \mathbb{C}_b^{(2)}[0,+\infty)$ *при выполнении условий согласования* $\phi_0(x) = 0 = \psi_0(x)$ *для всех* $x \in \Gamma$, *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(\phi_0, \psi_0, \chi(t)) > 0$, *что существует единственное классическое решение задачи* (4.1)–(4.4) *для любого* $T \in (0, T_0)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае выполнено предельное свойство* (5.16).

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно воспользоваться леммами 3 и 4, явным видом интегрального уравнения (5.1), а также третьей формулой Грина, из которой вытекает, что всякое классическое решение задачи (4.1)–(4.4) представимо в виде (5.1), (5.2).

7. Разрушение классического решения первой краевой задачи (4.1)–(4.4). В этом параграфе мы получим достаточные условия того, что для времени $T_0 > 0$ из теоремы 5 выполнено неравенство $T_0 < +\infty$.

Пусть $\{\phi(x,t), \psi(x,t)\}$ классическое решение первой краевой задачи (4.1)–(4.4) для произвольного $T \in (0, T_0)$. Введем обозначения:

$$J_1 := \int_\Omega \phi(x,t)\psi_1(x)\,dx, \qquad J_2 := \int_\Omega \psi(x,t)\psi_1(x)\,dx, \qquad J_3 := \int_\Omega |D_x\phi|^p\psi_1(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Тогда умножим уравнения (4.1) и (4.2) на первую собственную функцию $\psi_1(x)$ оператора Лапласа в области Ω и проинтегрируем по частям с учетом граничных условий (4.3) на боковой поверхности S_T цилиндрической области D_T. Тогда получим равенства:

$$\frac{dJ_1}{dt} + \sigma_0 J_1 - \gamma_0 J_2 = 0, \tag{7.2}$$

$$\frac{dJ_2}{dt} + \gamma_1 J_2 = \gamma_2 J_3, \tag{7.3}$$

$$J_1(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T_0), \qquad J_2(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T_0), \qquad J_3(t) \in \mathbb{C}[0,T_0), \tag{7.4}$$

$$\gamma_1 := \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}, \qquad \gamma_2 := \frac{q_0}{\varepsilon_0}.$$

Сделаем замену функции:

$$\phi_1(x,t) = \phi(x,t)\exp(\sigma_0 t). \tag{7.5}$$

Тогда из (7.1)–(7.5) получим

$$I_1 := \int_\Omega \phi_1(x,t)\psi_1(x)\,dx, \qquad I_3 := \int_\Omega |D_x\phi_1(x,t)|^p\psi_1(x)\,dx, \tag{7.6}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \gamma_0\exp(\sigma_0 t)J_2, \tag{7.7}$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(\gamma_1 t)J_2) = \gamma_2\exp((\gamma_1 - p\sigma_0)t)I_3. \tag{7.8}$$

В свою очередь из (7.7) и (7.8) получим одно уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\exp((\gamma_1-\sigma_0)t)\frac{dI_1}{dt}\right) = \gamma_0\gamma_2\exp((\gamma_1 - p\sigma_0)t)I_3, \tag{7.9}$$

из которого получаем равенство:

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + (\gamma_1-\sigma_0)\frac{dI_1}{dt} = \gamma_0\gamma_2\exp(-(p-1)\sigma_0 t)I_3. \tag{7.10}$$

Кроме того, справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_\Omega \phi_1(x,t)\psi_1(x)\,dx\right| = \frac{1}{\lambda_1}\left|\int_\Omega \phi_1(x,t)\Delta\psi_1\,dx\right| \\
&= \frac{1}{\lambda_1}\left|\int_\Omega (D_x\phi_1(x,t), D_x\psi_1)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |D_x\phi_1|\,|D_x\psi_1|\,dx \\
&= \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega \psi_1^{1/p}|D_x\phi_1|\frac{|D_x\psi_1|}{\psi_1^{1/p}}\,dx \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda_1}\left(\int_\Omega \frac{|D_x\psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)}\,dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_\Omega |D_x\phi_1|^p\psi_1\,dx\right)^{1/p} \\
&= a\left(\int_\Omega |D_x\phi_1|^p\psi_1\,dx\right)^{1/p} = aI_3^{1/p},
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$a = a(p;\Omega;N) \equiv \frac{1}{\lambda_1}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla\psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)}\,dx\right)^{(p-1)/p}. \tag{7.12}$$

Прежде, чем переходить к детальному рассмотрению этого случая нам нужно изучить сходимость следующего интеграла – нелинейную “емкость”:

$$a = a(p;\Omega;N) \equiv \frac{1}{\lambda_1}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla\psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)}\,dx\right)^{(p-1)/p}, \tag{7.13}$$

где функция $\psi_1(x)$ – есть первая собственная функция, соответствующая первому собственному значению $\lambda_1 > 0$ оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{2,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1)$:

$$\Delta\psi_1(x) + \lambda_1\psi_1(x) = 0, \qquad \psi_1(x)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7.14}$$

Обозначим через $p_0 = p_0(\Omega; N) > 1$ такое число, что при $p > p_0$ интеграл в правой части равенства (7.12) сходится. Докажем, что существуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, для которых такое p_0 существует. Действительно, пусть $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| < R\}$ – шар радиуса $R > 0$. Тогда можно вычислить первую собственную функцию и первое собственное значение задачи (7.14) (см., например, [20]). Действительно,

$$\psi_1(x) = \psi_1(|x|) = c_0 r^{-1/2} J_{1/2}(\lambda_1^{1/2} r), \qquad \lambda_1 = \frac{(z_{31})^2}{R^2}, \qquad r = |x|,$$

где z_{31} – первый корень функции Бесселя $J_{1/2}(x)$. Заметим теперь, что для функции Бесселя $J_\nu(z)$ справедлива следующая формула Эйлера [20]:

$$J_\nu(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \prod_{n=1}^{+\infty} \biggl\{1 - \frac{z^2}{z_{\nu,n}^2}\biggr\}, \tag{7.15}$$

где $z_{\nu,1} < z_{\nu,2} < \dots < z_{\nu,n} < \dots$ – это корни функции Бесселя $J_\nu(z)$. Из явного вида (7.15) следует, что подынтегральная функция в (7.12) имеет интегрируемую особенность при $p > 2$, т.е. число $p_0 = 2$ в случае шара.

Сделаем важные предположения:

$$\sigma_0 \geqslant \gamma_1, \tag{7.16}$$

$$I_1(0) = \int_\Omega \phi_0(x)\psi_1(x)\,dx > 0, \qquad \frac{dI_1}{dt}(0) = \gamma_0 J_2(0) = \gamma_0 \int_\Omega \psi_0(x)\psi_1(x)\,dx > 0. \tag{7.17}$$

Поэтому в классе $I_1(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0)$ найдется такое $T_1 \in (0, T_0)$, что

$$I_1(t) > 0, \quad \frac{dI_1(t)}{dt} > 0 \qquad \text{для} \quad t \in [0, T_1]. \tag{7.18}$$

С учетом неравенств (7.11), (7.16) при $t \in [0, T_1]$ получим неравенство

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + (\gamma_1 - \sigma_0)\frac{dI_1}{dt} \geqslant \gamma_3 \exp(-(p-1)\sigma_0 t) I_1^p, \qquad \gamma_3 := \frac{\gamma_0\gamma_2}{a^p}, \tag{7.19}$$

которое умножим на $I_1'(t)$ при $t \in [0, T_1]$ и проинтегрируем на этом сегменте по времени и получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\biggl(\frac{dI_1}{dt}\biggr)^2 &\geqslant (\sigma_0 - \gamma_1)\biggl(\frac{dI_1}{dt}\biggr)^2 + \exp(-(p-1)\sigma_0 t)\frac{\gamma_3}{p+1}\,\frac{d}{dt} I_1^{p+1} \\ &\geqslant \exp(-(p-1)\sigma_0 t)\frac{\gamma_3}{p+1}\,\frac{d}{dt} I_1^{p+1}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Проинтегрируем теперь неравенство (7.20) по времени и получим

$$\frac{1}{2}\biggl(\frac{dI_1}{dt}\biggr)^2 \geqslant \frac{1}{2}\biggl(\frac{dI_1}{dt}(0)\biggr)^2 + \frac{\gamma_3}{p+1}\int_0^t \exp(-(p-1)\sigma_0\tau)\frac{d}{d\tau} I_1^{p+1}(\tau)\,d\tau. \tag{7.21}$$

Заметим, что справедлива формула интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-(p-1)\sigma_0\tau)\frac{d}{d\tau} I_1^{p+1}(\tau)\,d\tau &= I_1^{p+1}(t)\exp(-(p-1)\sigma_0 t) - I_1^{p+1}(0) \\ &\quad + (p-1)\sigma_0 \int_0^t \exp(-(p-1)\sigma_0\tau) I_1^{p+1}(\tau)\,d\tau \\ &\geqslant I_1^{p+1}(t)\exp(-(p-1)\sigma_0 t) - I_1^{p+1}(0). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Теперь потребуем выполнения неравенства

$$b := \frac{1}{2}\left(\frac{dI_1}{dt}(0)\right)^2 - \frac{\gamma_3}{p+1}I_1^{p+1}(0) > 0. \tag{7.23}$$

Тогда, с одной стороны, из (7.21) получим неравенство

$$\frac{dI_1(t)}{dt} \geqslant (2b)^{1/2} > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [0, T_1], \tag{7.24}$$

причем постоянная $b > 0$ определяется только начальными условиями. Поэтому неравенства (7.18) выполняются на всем полуинтервале $[0, T_0)$, на котором существует функция $I_1(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0)$. С другой стороны, в силу (7.23) из (7.20)–(7.22) получаем неравенство:

$$\frac{dI_1(t)}{dt} \geqslant \gamma_4 \exp(-\gamma_5 t) I_1^\alpha(t), \tag{7.25}$$

$$\gamma_4 := \left(\frac{2\gamma_3}{p+1}\right)^{1/2}, \qquad \gamma_5 := \frac{p-1}{2}\sigma_0, \qquad \alpha := \frac{p+1}{2} > 1. \tag{7.26}$$

Из неравенства (7.25) получаем такие неравенства

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{I_1^\alpha}\,\frac{dI_1(t)}{dt} \geqslant \gamma_4 \exp(-\gamma_5 t)\\
&\quad\Longrightarrow \quad \int_0^t \frac{1}{I_1^\alpha(\tau)}\,\frac{dI_1(\tau)}{d\tau} \geqslant \gamma_4 \int_0^t \exp(-\gamma_5 \tau)\,d\tau = \frac{\gamma_4}{\gamma_5}[1 - \exp(-\gamma_5 t)]\\
&\quad\Longrightarrow \quad \frac{1}{\alpha - 1}[I_1^{1-\alpha}(0) - I_1^{1-\alpha}(t)] \geqslant \frac{\gamma_4}{\gamma_5}[1 - \exp(-\gamma_5 t)]\\
&\quad\Longrightarrow \quad I_1(t) \geqslant \frac{I_1(0)}{[1 - (\alpha-1)\gamma_4\gamma_5^{-1} I_1^{\alpha-1}(0)(1 - \exp(-\gamma_5 t))]^{1/(\alpha-1)}}.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Потребуем теперь выполнения еще одного неравенства:

$$I_1(0) > \left(\frac{1}{\alpha - 1}\,\frac{\gamma_5}{\gamma_4}\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{7.28}$$

Тогда миноранта в последнем неравенстве из (7.27) за время

$$T_{\text{blowup}} := -\frac{1}{\gamma_5} \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha - 1}\,\frac{\gamma_5}{\gamma_4} I_1^{1-\alpha}(0)\right) \tag{7.29}$$

обращается в $+\infty$. Таким образом, справедлива следующая основная

Теорема 6. *Если выполнены все условия из теоремы 5 и условия*:

$$a < +\infty, \qquad \sigma_0 \geqslant \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}, \tag{7.30}$$

$$\int_\Omega \psi_1(x)\phi_0(x)\,dx > \left(\frac{(p+1)\sigma_0^2 \varepsilon_0 a^p}{2\gamma_0 q_0}\right)^{1/(p-1)}, \tag{7.31}$$

$$\int_\Omega \psi_1(x)\psi_0(x)\,dx > \left(\frac{2q_0}{(p+1)\gamma_0\varepsilon_0 a^p}\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \psi_1(x)\phi_0(x)\,dx\right)^{(p+1)/2}, \tag{7.32}$$

то для времени $T_0 > 0$ *из теоремы* 5 *справедлива оценка сверху* $T_0 \leqslant T_{\mathrm{blowup}}$ *и поэтому справедливо предельное свойство*:

$$\lim_{T \uparrow T_0} |\psi(x,t)|_{1,0;D_T} = +\infty, \tag{7.33}$$

т.е. классическое решение задачи (4.1)–(4.4) *разрушается за конечное время* T_0.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Тимошенко, Д. В. Калеев, А. Ю. Перлов и др., “Сравнительный анализ аналитических и эмпирических методик оценки текущих параметров надежности радиолокационных комплексов мониторинга”, *Изв. высших учебных заведений. Электроника*, **25**:3 (2020), 244–254.

[2] М. О. Корпусов, “О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Гамильтона–Якоби”, *Матем. заметки*, **93**:1 (2013), 81–95.

[3] М. О. Корпусов, “О разрушении решения нелокального уравнения с градиентной нелинейностью”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2012, № 11, 43–53.

[4] М. О. Корпусов, А. А. Панин, А. Е. Шишков, “О критическом показателе “мгновенное разрушение” versus “локальная разрешимость” в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **85**:1 (2021), 118–153.

[5] Ф. Г. Басс, В. С. Бочков, Ю. С. Гуревич, *Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках*, Наука, М., 1984.

[6] В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, *Физика полупроводников*, Наука, М., 1990.

[7] В. Л. Бонч-Бруевич, И. П. Звягин, А. Г. Миронов, *Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках*, Наука, М., 1972.

[8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика*, Наука, М., 1992.

[9] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Труды МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

[10] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.

[11] С. И. Похожаев, “О разрушении решений уравнения Курамото–Сивашинского”, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 97–106.

[12] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.

[13] Г. А. Свиридюк, “К общей теории полугрупп операторов”, *УМН*, **49**:4(298) (1994), 47–74.

[14] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2007.

[15] Н. В. Крылов, *Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[16] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, М., 1968.

[17] О. А. Ладыженская, В. А. Солонникова, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

[18] В. Погожельский, “Исследование интегралов параболического уравнения и краевых задач в неограниченной области”, *Матем. сб.*, **47 (89)**:4 (1959), 397–430.

[19] А. А. Панин, "О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра", *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 884–903.

[20] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций. Часть I*, ИЛ, М., 1949.

М. О. Корпусов
Российский университет дружбы народов,
г. Москва;
Физический факультет,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило
21.03.2023
После доработки
20.04.2023
Принято к публикации
15.05.2023

А. Ю. Перлов
Национальный исследовательский университет
"МИЭТ"

А. В. Тимошенко
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Р. С. Шафир
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Российский университет дружбы народов, г. Москва