

doi: 10.55959/MSU0201-7385-7-2023-6-83-106



СОЗНАНИЕ, ФИЛОСОФИЯ И МАТЕМАТИКА

Л.Э.Я. Брауэр

Вниманию читателя предлагается перевод на русский язык доклада знаменитого нидерландского математика, крупного тополога и создателя математического интуиционизма Лейтзена Эгбертэса Яна Брауэра (1881–1966), прочитанного им в 1948 г. на X Международном философском конгрессе, проходившем в Амстердаме. Перевод сделан с английского языка, на котором доклад опубликован в материалах конгресса. Есть основания полагать, что английский текст был написан самим Брауэром, нидерландский оригинал неизвестен. Английский язык не был для Брауэра родным, и вопрос о том, насколько точно ему удалось воспроизвести на нем свою (и так достаточно непростую для восприятия) мысль, остается открытым. Переводчики приложили все усилия, чтобы, с одной стороны, передать оригинал максимально точно, а с другой — сделать текст воспринимаемым. Предлагаемая работа Брауэра — одна из наиболее репрезентативных для изучения общефилософских взглядов создателя интуиционизма в поздний период его творчества (ее автору 67 лет). Она дает описание основных этапов формирования сознания, включая базовую интуицию времени, а также складывание причинно-следственной картины действительности и связанного с нею научного мышления. На непосредственной основе базовой интуиции времени сознание способно, кроме того, осуществлять свободное развертывание математических конструкций. Брауэр строит своеобразную эстетическую концепцию, уделяющую особое внимание математической красоте. В работе обосновывается специфическая трансценденталистская философская позиция, в которой истина связывается исключительно с непосредственным опытом своего собственного сознания. Эта позиция оказывается одновременно провиденциалистской и крайне пессимистической, питая соответствующее понимание мудрости, созвучное ряду поучений Бхагавадгиты. В отличие от логицизма, который практически отождествлял математику и логику, брауэровский подход противопоставляет математику, понятую как практика свободного интроспективного конструирования, — логике как набору правил, привязанному к каузальному

© В.А. Шапошников и Е.А. Зайцев, 2023

Перевод доклада Л.Э.Я. Брауэра осуществлен В.А. Шапошниковым и Е.А. Зайцевым по изданию: [1]. Репринтное воспроизведение см. в: [2, 480–494]. В тексте перевода страницы первой публикации указаны в квадратных скобках.

поведению и языку власти и подчинения. Брауэр предлагает свою интуитивистскую математику как альтернативу математике классической. В то время как последняя связана для него с наукой и каузальным поведением, цель которых состоит в подчинении себе мира, первая — помогает нам встать на путь, ведущий к освобождению, взаимопониманию, красоте, мудрости и истине. Одним из наиболее ярких отличий интуитивистской математики от классической является отказ от универсальной применимости логического принципа исключенного третьего. Брауэр подробно разбирает основания и последствия такого отказа, используя понятия творящего субъекта и свободно становящейся последовательности, а также конструируя ряд иллюстрирующих его тезисы математических примеров.

В.А. Шапошников и Е.А. Зайцев

[1235] Прежде всего, следует дать отчет о тех фазах, через которые должно пройти сознание при переходе из своей глубинной обители (*its deepest home*) к внешнему миру, в котором мы осуществляем совместные действия (*cooperate*) и ищем взаимопонимания. Этот отчет не предполагает взаимопонимания и может оставаться, в некотором роде, речью, обращенной к самому себе. То же самое может быть сказано также и о некоторых других частях этой лекции.

* * *

В своей глубинной обители *сознание*, по-видимому, медленно осциллирует, безвольно и обратимо (*reversibly*), между покоем (*stillness*) и ощущениями (*sensation*). И только наличие ощущений, кажется, делает возможным изначальный феномен перехода. Этот изначальный феномен есть *ход времени* (*a move of time*). Посредством хода времени одно ощущение уступает место другому ощущению, причем таким образом, что сознание удерживает первое ощущение в качестве прошедшего; сверх того, чрез различие между настоящим и прошедшим оно отличает себя от (*recedes from*) обоих ощущений и от состояния покоя и становится *разумом* (*mind*).

Став разумом, оно берет на себя функцию субъекта, который переживает настоящее, равно как и прошедшее ощущение, в качестве объекта. И через повторение этого феномена двоичности (*this two-ity-phenomenon*) ощущение-объект может быть расширено до пестрого многообразия всего мира ощущений.

В меру необратимости (*irreversibility*), с которой субъект отделил себя от некоторого элемента объекта, этот элемент теряет свою эгоичность (*egoicity*), то есть становится отчужденным от субъекта, и в меру этой отчужденности разум обретает склонность к вожделению

и страху (apprehension) и, значит, к целенаправленной деятельности (conative activity), положительной или отрицательной, в отношении этого элемента.

* * *

В переживаемом разумом мире ощущений имеет место свободно-волевой феномен *каузального внимания* (the free-will phenomenon of *causal attention*). Он идентифицирует различные ощущения и различные комплексы ощущений и, таким способом, в зарождающейся атмосфере предвидения создает *итеративные комплексы ощущений*. Итеративный комплекс ощущений с неизменным порядком следования элементов — если встретился один из элементов, ожидается появление и всех последующих, причем в правильном временном порядке, — называется *каузальной последовательностью*.

С другой стороны, имеются итеративные комплексы ощущений, чьи элементы допускают перестановку в отношении времени [их появления]. Некоторые из них полностью отчуждены от субъекта. Они называются *вещами*. Вещами, например, являются *индивиды*, то есть человеческие тела, включая собственное тело (the home body) субъекта. Вещи могут быть, а могут и не быть неразрывно связаны с эгоическими ощущениями (egoic sensations). Вся полнота эгоических ощущений, неразрывно связанных с неким индивидом, называется *душой* соответствующего человеческого существа. Душа, связанная [1236] с субъектом-индивидом, будучи скрытой (rather latent), проявляется в чувствах (sensations) призвания (vocation) и вдохновения (inspiration).

Вся полнота вещей называется *внешним миром субъекта*. Каузальные последовательности, каждый из элементов которых содержит какую-то вещь, называются *внешними каузальными последовательностями*.

* * *

Каузальное внимание делает возможным развитие целенаправленной деятельности субъекта от спонтанного усилия до планирования будущих предприятий посредством свободно-волевого феномена *акта хитрости* (the free-will phenomenon of *cupping act*). Акт хитрости состоит в том, что в некоторой каузальной последовательности возможных событий какой-то более поздний элемент, непосредственно не доступный, но, тем не менее, *желаемый (цель)*, реализуется *непрямым способом*. Достигается это благодаря осуществлению, возможно, не желаемого, но доступного более раннего элемента той же последовательности (*средства*), через появление которого обретаётся и желаемый элемент как его *следствие*. Кау-

зальная последовательность, которая используется таким способом, называется *полезной* каузальной последовательностью. Само собой разумеется, что цель, как и средства, может иметь отрицательный (предотвращающий) характер. Расположение ума (*mood*) и настроенность чувств (*temper*), которые направляют акты хитрости, существенно отличны от спонтанного вождения и страха.

Поскольку (положительная и отрицательная) волевая деятельность главным образом направлена на вещи, включая индивидов, акт хитрости преимущественно оперирует с внешними каузальными последовательностями.

Посредством актов хитрости субъект создает *каузальную сферу влияния*. Он, с одной стороны, *защищает* ее посредством деятельности по *уничтожению* вещей, ставящих под угрозу полезные каузальные последовательности, с другой стороны, *расширяет* ее посредством деятельности по *построению* вещей, пригодных для новых полезных каузальных последовательностей.

На деле, с актами хитрости связано множество разочарований. Прежде всего, непосредственное исполнение (положительного или отрицательного) желания путем спонтанного действия никогда не равно его удовлетворению окольным путем. К тому же каузальное внимание встречается с определенным сопротивлением со стороны объекта (*the part of the object*), так что доверие к каузальным последовательностям сталкивается с неожиданными и необъяснимыми обманами, вопреки всем усилиям по защите. Более того, все каузальные последовательности подвержены неточностям, так что последовательное соединение (*concatenation*) каузальных последовательностей не обязано с необходимостью образовывать еще одну каузальную последовательность.

Несмотря на эти разочарования, разум, единожды пристрастившись к каузальному вниманию, остается в постоянном *каузальном напряжении*, стимулируя попеременно то *каузальное мышление*, то есть внимание, направленное на обнаружение каузальных последовательностей и возможностей по созданию или защите каузальных последовательностей, то *каузальное действие*, то есть действие, обычно хитрое, следующее из каузального мышления.

* * *

Наряду с этим существует феномен *игры*, имеющий место, когда волевая деятельность, или каузальное мышление, или действие осуществляются *игровым образом* (*playfully*), то есть без побуждения со стороны вождения или страха, призвания, вдохновения или принуждения.

[1237] Каузальное внимание часто приводит к отождествлению комплексов ощущений, возникающих из каузальных действий субъекта, с комплексами ощущений, переживаемых в опыте каузальной связи с другими индивидами. Вследствие этого отождествления последние комплексы ощущений называют *действиями тех других индивидов*. Более того, каузальные действия субъекта и такие же действия многочисленных других индивидов в значительной степени влияют друг на друга; многие каузальные действия, присущие множеству индивидов, как кажется, даже возможны и имеют смысл только как моменты (items) организованного взаимодействия меньших или больших групп индивидов; роль (the share) субъекта в этом взаимодействии представляется имеющей ту же природу, что и роль индивидов-объектов (the individuals of the object).

Системы каузального мышления, которые лежат в основе подобных совместных (cooperative) каузальных действий, куда сложнее, чем те, что служат побуждением к индивидуальным каузальным актам. Выдающееся место среди первых занимает *научное мышление*, которое экономным и эффективным способом каталогизирует обширные группы каузальных последовательностей совместных действий (cooperative causal sequences). И это научное мышление, особенно когда оно озабочено техническими приемами (technique), основано на *математике*.

Математика возникает, когда двоичность (two-ity), созданная ходом времени, освобождается субъектом от всего качественного и когда остающаяся в качестве базовой интуиции математики пустая форма общего субстрата всех двоичностей предоставляется неограниченному развертыванию (is left to an unlimited unfolding). Это развертывание создает новые математические сущности в форме *заранее определенных (predeterminately) или более или менее свободно продолжающихся бесконечных последовательностей* полученных ранее математических сущностей, а также в виде *математических видов (mathematical species)*, то есть свойств, которые предполагаются для полученных ранее математических сущностей. Причем эти свойства удовлетворяют следующему условию: если они реализуются для определенной математической сущности, они также реализуются для всех математических сущностей, которые были определены как равные ей.

Значение математики в отношении научного мышления главным образом состоит в том, что зачастую легче управлять какой-либо группой наблюдаемых каузальных последовательностей, если

расширить ее освобожденный от качеств математический субстрат до *гипотезы*, то есть более полной и легче обозримой математической системы. Каузальные последовательности, представленные абстрактным образом в виде гипотезы, которые до настоящего момента не наблюдались и не признавались доступными наблюдению, часто находят свои реализации позднее.

* * *

Организация группы индивидов в совместно действующее сообщество (a cooperation) состоит в сетевой организации передачи воли (a wire-netting of will-transmission). На примитивных стадиях цивилизации и в рамках примитивных отношений человека к человеку эта передача воли от индивида к индивиду осуществляется просто жестами или примитивными животными звуками. Однако в случае более развитой групповой организации навязываемые действия (the acts to be imposed) становятся слишком дифференцированными и слишком сложными для выражения их исключительно таким простым путем. Чтобы в таких условиях можно было по-прежнему управлять занятыми в совместном деле людьми (to direct the trade) посредством звуковых или визуальных сигналов-просьб или сигналов-приказов, предметом каузального внимания должна служить вся полнота законов, декретов, объектов и теорий, имеющих дело с актами, нечто предписывающими организованным [в группу] индивидам. Такое внимание есть *лингвистическое каузальное внимание*; [1238] элементы математической системы, возникающей в качестве его результата, обозначаются *лингвистическими базовыми знаками*. Из этих базовых знаков посредством грамматических правил, взятых из названной математической системы, построены организованные языки, делающие возможным в высшей степени дифференцированную и сложную передачу воли, которой требует цивилизация. И эти языки не только *консолидируют* сетевую организацию передачи воли, но также подталкивают (suggest) к ее непрерывному *расширению*. Конечно же, большая часть той стабильности и точности, которыми благодаря грамматике и словарю язык, по-видимому, обладает, теряется в практической жизни, поскольку совокупность совместных действий (the totality of cooperations) требует куда больше базовых понятий, чем набор базовых слов и словесных связей, которые язык может предложить. С другой стороны, стабильность и точность языка не являются необходимыми в практической жизни, ведь в каждой организации рутинные действия порождают своего рода коллективную волю, создают хорошее понимание, для которого достаточно и одного слова.

Выше был дан отчет о трех последовательных фазах исхода (exodus) сознания из его глубинной обители. Из них *наивная* фаза начинается с момента создания мира ощущений, *изолированная каузальная* — с начала каузальной деятельности, а *социальная* — с вовлечения в совместное действие с другими индивидами. Обратное движение (regression) с третьей ко второй фазе кажется происходит часто и легко, однако возвращение с любой из них к наивной фазе, по-видимому, трудноосуществимо; проще дается временное возвращение (a temporary refluxence)¹ в глубинную обитель с помощью свободно-волевого феномена отстранения-концентрации (the free-will phenomenon of detachment-concentration), которое не возвращает к наивности (leaving aside naivety). Возникает вопрос, могут ли быть найдены и где — в ходе этого исхода сознания и после него — *красота, взаимное понимание, мудрость и истина*.

В каузальном мышлении и действии *красота* едва ли может быть найдена. Вещи как таковые и господство над ними посредством хитрости (their domination by shrewdness) не есть нечто красивое. Вследствие этого удовлетворение от эффективности каузальных действий или систем каузальных действий или от обнаружения новых каузальных последовательностей не есть чувство прекрасного.

Однако в первой фазе исхода, в радостном чуде самораскрытия сознания, есть красота, что проявляется в эгоических элементах объекта, обнаруживающихся в формах и силах природы, в частности в облике и судьбах людей, в человеческом блеске и человеческой нищете.

Во второй же и третьей фазах есть красота в воспоминании о чуде былой наивности, в воспоминании, пробуждаемом или мечтами, вызванными туманной тоской и ностальгией, или произведениями искусства (созданными самим или встреченными), или определенными разновидностями науки. Такая пробуждающая красоту наука открывает или играючи математизирует наивно воспринимаемые формы и законы природы, подходя к ним со вниманием и уважением (with attentive reverence) и с минимумом технических средств. И такая пробуждающая красоту наука благодаря самому своему уважению отвергает распространение человеческого господства над природой.

¹ Дословно: отток. — Прим. пер.

Более того, во второй и третьей фазах есть *конструктивная* [1239] *красота*, которая проявляется иногда, когда деятельность по конструированию вещей осуществляется игровым образом; приобретая благодаря этому более высокую степень свободы развертывания, она созидает вещи, пробуждающие ощущения мощи, равновесия, гармонии и согласия с внешним миром.

Однако самая полная конструктивная красота — это *интроспективная красота математики*, где вместо элементов игрового каузального действия осуществляется свободное развертывание (free unfolding) ее базовых интуиций. Это развертывание не привязано к внешнему миру, а тем самым, к конечности и ответственности, вследствие чего его интроспективные гармонии способны достигать любой степени богатства и ясности.

* * *

В каждом совместном действии (cooperation), в котором учитываются действия субъекта, каузальному вниманию представляется, что в рассматриваемой системе совместных каузальных действий участие субъекта, в смысле роли индивида-как-субъекта (the subject individual), не отличается по природе (по сравнению с вещами) от роли индивидов-как-объектов (the object individuals), участвующих в том же совместном действии. Это находит выражение в языке рассматриваемого совместного действия. Опять же, каузальному вниманию также представляется, что и не являющиеся совместными (non-cooperative) действия субъекта, рассматриваемые как действия индивида-как-субъекта, во-первых, не отличаются по природе (по сравнению с вещами) от тех, что совершаются индивидами-как-объектами, которые участвуют в данном совместном действии, и, во-вторых, не слишком сильно отличаются по природе (по сравнению с вещами) от действий большинства тех индивидов-как-объектов, которые не учитываются в этом совместном действии. И это находит выражение в языке рассматриваемого совместного действия. Роль, приписываемая индивиду-как-субъекту, в этом языке аналогична той, что приписывается индивидам-как-объектам; тем самым в этом языке игнорируется специфика субъекта (the subject itself is ignored in it). Таким образом, цивилизованные языки (civilized languages), будучи по большей части языками совместного действия (cooperative languages), внушают представление о тождественности таких принципиально различных феноменов, как действия субъекта и действия индивидов-как-объектов.

Это представление усиливается благодаря вводящим в заблуждение терминам, которые используются в цивилизованных языках

для характеристики поведения индивидов вообще. Вполне разумным (reasonable) будет выведение такого поведения из некоторого «основания (reason)». Однако неразумным будет выводить его из «разума (mind)». Ибо таким выбором термина субъект научного мышления побуждается помещать в каждого индивида разум и свободную волю, зависящие от этого индивида, тем самым возвышая себя до разума второго порядка, который переживает чужие непознаваемые (incognizable) сознания как [свои] ощущения. Quod non est². И более того, из этого следовало бы, что такой разум второго порядка каузально мыслит множественный разум первого порядка, затем совместно с другими (cooperatively) изучает науку о множественном разуме и вследствие этого изучения приписывает разум второго порядка, воспринимающий чужие сознания, другим индивидам, тем самым еще выше поднимая себя, на этот раз до разума третьего порядка. И так далее. Usque ad infinitum³. И эта бессмыслица продолжала бы идти даже еще дальше. В группе индивидов $I_1, I_2, \dots, I_n$ помимо первичных разумов первого порядка $M_1, M_2, \dots, M_n$, являющихся ощущениями обладающего субъектностью разума второго порядка (the subject mind of second order), для любых k и l , которые являются натуральными числами $\leq n$, появлялись бы разумы M_{kl} , то есть ощущения [1240], переживаемые I_k в качестве разума второго порядка по отношению к M_l . Сходным образом, наряду с первичными разумами второго порядка M_{kl} , являющимися ощущениями обладающего субъектностью разума третьего порядка, для любых p, σ и τ , натуральных чисел $\leq n$ появлялись бы разумы $M_{p\sigma\tau}$, то есть ощущения I_p в качестве разума третьего порядка по отношению к $M_{\sigma\tau}$. И так далее. Usque ad infinitum. Более того, в том, что касается поведения, разница (variation) между индивидами отличалась бы от разницы между индивидом и животным лишь по степени, а не по существу, так что в качестве следствия множественности разума (the plurality of mind) пришлось бы приписать наличие некоторого разума также и животным.

Поскольку же множественности разума не существует, тем более не существует науки о множественном разуме. Все, что есть, это психология человека и животного, которая, будучи расширением физиологии, изучает автоматически действующие (automatic) живые организмы, лишённые разума и свободной воли. К таковым принадлежит и обладающий субъектностью индивид (the subject individual), несмотря на его особую роль носителя радости и боли,

² Этого – нет (лат., формула категорического отрицания). — Прим. пер.

³ Вплоть до бесконечности (лат.). — Прим. пер.

а также [других] феноменов, сопровождающих чувства, мысли и действия субъекта. Ведь, вопреки его главенствующему положению, область доступного описанию в случае субъекта есть не более чем Città del Vaticano по сравнению с подобной же областью в случае объекта⁴.

За отсутствием множественности разума *не существует также обмена мыслями*. Мысли неразрывно связаны с субъектом. Так называемая передача мыслей (communicating-of-thoughts) кому-нибудь означает оказание влияния на его действия. Соглашаться с кем-то означает быть удовлетворенным его участием в совместных действиях (his cooperative acts) или заключить с ним союз (an alliance). Устранение неправильного понимания означает восстановление сетевой организации передачи воли для некоторого совместного действия. Посредством так называемого обмена мыслями с другим существом субъект касается всего лишь внешнего корпуса автоматического устройства. Вряд ли это можно назвать взаимопониманием. Только через ощущение души другого иногда переживается более глубокий подход. И когда мудрость, являемая красотой этого ощущения, находит выражение в поочередном обмене словами (in the antiphony of words exchanged), тогда может возникать взаимопонимание.

Если не брать в расчет душу, всякое рассуждение (exposé) о смысле и сущности жизни есть разговор с самим собой. Всякая же дискуссия о множественном разуме есть диалектическая игра на арене коллективной гипотезы коллективного суперсубъекта. Этот суперсубъект переживает объективный мир, существующий независимо от предполагаемых человеческих субъектов, что появляются и исчезают в нем; мир, который остается, даже когда все эти предполагаемые субъекты исчезли, и который все равно был бы, даже если бы вообще не было человеческих субъектов, призванных в существование.

* * *

Отправившись на поиски *мудрости*, мы можем обрести ее в понимании того, что каузальное мышление и действие лишены красоты и что их трудно оправдать, и что в конечном итоге они приводят к разочарованию. А также в знании того, что внешний мир с его бесчисленными индивидами и гипертрофией совместного действия обвенчан с разумом (is wedded to mind), а его дисгармонии отражают вину, свободно взятую на себя разумом (mind's free-will-guilt).

⁴ Город Ватикан (ит.). Видимо, Брауэр намекает на соотношение размеров города-государства Ватикана и территории Италии, в которой он находится. — *Прим. пер.*

Как следствие этого знания внешний мир и чье-либо собственное место в нем принимаются такими, какие они есть. По отношению к внешнему миру по собственному свободному выбору совершаются в общем и целом только действия, по возможности максимально обратимые, направленные на сохранение наличного состояния, но не [1241] действия, — не говоря уже о каузальных действиях, — направленные на изменение этого состояния. Устранение рассогласованностей, предотвращение опасностей и облегчение нужды, все эти негативные вмешательства в человеческое общество считаются оправданными сами по себе, а порой и предписываются. Однако положительную деятельность по изменению структуры человеческого общества, управляемого великим множеством неведомых сил, всегда следует проверять, вспоминая следующее предостережение: «...не для того Провидение поместило тебя в этот мир, чтобы ты улучшал его работу». Только призвание и вдохновение, выдержавшие проверку отстранением-концентрацией, будут сильнее, чем это предостережение.

Следствием этого знания будет также отказ от ответственности за фактическое расширение и так уже гипертрофированного всемирного сотрудничества (world cooperation), которое по своим тривиальным конечным целям всеобщего комфорта и всеобщей безопасности едва ли оправданно. По этой причине исчезнет и стремление занимать ведущие позиции в этом сотрудничестве.

Также [согласно этому знанию] не может быть взята на себя ответственность за урезание свободы, своей собственной или других людей. Отсюда следует, что присоединение к какой-либо клике или объединению будет происходить только против желания, поскольку это обычно уменьшает свободу действия и спонтанность жизненного поведения.

Власть над собратьями по творению (fellow-creatures) будет избегаться. Во-первых, потому что подобная власть сопряжена с ограничением свободы действия других людей. А во-вторых, потому что эти собратья — часть отраженного образа (reflex image), полученного разумом из его глубинной обители. Следовательно, их должно уважать, а не судить и тем более осуждать, презирать или отвергать, даже если они являются врагами, с которыми сражаются.

Восточное благочестие (devotion), возможно, смогло выразить эту мудрость лучше, чем западный человек. Например, в следующих фрагментах из Бхагавадгиты⁵, которые даже в переводе сохранили свою электризирующую силу.

⁵ Цитируется по английскому изданию, подготовленному Свами Прабхаванандой и Кристофером Ишервудом (Лондон, [издательство] Phoenix House, 1947).

«Человеку не следует ненавидеть ни одно живое существо. Пусть он будет дружелюбен и сочувствует всем. Он должен освободить себя от иллюзии Я и моего. Он должен принимать удовольствие и страдание с равной невозмутимостью. Он должен быть прощающим, всегда удовлетворенным, владеющим собой, постоянно собранным воедино. Его решимость должна быть непоколебимой».

«Он не досаждаёт другим людям, но и не позволяет себе быть выведенным миром из равновесия. Он более не подвержен влиянию радости и зависти, беспокойства и страха».

«Он чист и независим от желаний тела. Он способен иметь дело с неожиданным: ко всему готов, ничем не возмущаем. Он не тщеславен и не обеспокоен результатами своих действий».

«Он не желает обладать тем, что приятно. Он не страшится того, что неприятно и не скорбит, если оно приходит. Он остается непоколебимым пред лицом доброй или злой судьбы».

[1242] «Его отношение к другу и врагу одинаково. Он безразличен к чести и поношению, жаре и холоду, удовольствию и страданию. Он свободен от привязанностей. Он равно ценит восхваление и порицание. Он умеет контролировать свою речь. Он удовлетворен тем, что выпадает на его долю. Его дом везде и нигде».

Предписывающий вышеизложенное отношение к жизни категорический императив находит свое [негативное] дополнение в скептическом прогнозе, согласно которому человечество, одержимое иллюзией каузальности, в будущем скатится в разрушительный процесс перенаселения, индустриализации, рабства и разорения природы. Когда же сначала его духовные, а затем и физиологические условия жизни будут уничтожены, оно придет к концу, подобно колонии бактерий в земной коре, которая уже выполнила свою задачу.

Все это через⁶ неподверженное времени искусство и вечную философию постоянно намекает, что неведомые силы, которые управляют судьбой и индивида, и сообщества, не подвержены причинно-следственным связям (are not subject to causality); в частности, что дороги судьбы не могут быть вымощены каузальностью; что безопасность столь же недостижима, сколь и не стоит усилий, прилагаемых к ее достижению; что укрепление организации увеличивает уязвимость, что новая уязвимость ищет защиты в новой организации и что, таким образом, для организации, в которую верят, нет предела роста; и наконец, что если можно было бы отбросить

⁶ В оригинале, по-видимому, опечатка. Вместо “though” должно быть “through”. — *Прим. пер.*

иллюзию каузальности, то природа, постепенно возвращая свои права, стала бы (если исключить ее зависимость от судьбы) щедрой и прощающей в отношении декаузализированного (decausalized) и сократившегося до более скромных и более гармоничных размеров человечества.

Конечно же, искусство и философия, постоянно иллюстрирующие эту мудрость, не могут принимать участие в совместном действии (cannot participate in cooperation). Им не следует вступать во взаимодействие с организованными сообществами (should not communicate with cooperation), им, в частности, не следует вступать во взаимодействие с государством. В случае поддержки со стороны государства они утратят свою независимость и выродятся.

* * *

Признание того, что захваченный иллюзией каузальности мир совместной деятельности является отражением вины разума (a reflex of mind's guilt), не предполагает признания вечной привязанности к этому миру. Поскольку путь, по которому глубинная обитель была покинута, по-видимому, уже закрыт для окончательного возврата, будет, возможно, наиболее мудрым терпеливо стремиться к движению в обратном направлении, освобождаясь обратимым образом (a patient tending towards reversible liberation) от участия в совместных делах (cooperative trade) и от контактов, предполагающих множественность разума. Как представляется, уже само это стремление (tendency) будет способствовать исчезновению вождения и страха, так что постепенно деятельность, не являющаяся совместной (non-cooperative activity)⁷, будет сокращаться, совместные каузальные действия будут автоматизироваться, мир вещей поблекнет (faints away), радость от прекрасного побледнеет, эгоические элементы более не будут связывать внимание, а собственное тело станет более скромным в своих потребностях (frugalized). То, что останется от целенаправленной деятельности, не являющейся совместной, будет использовать каждую возможность для дальнейшего выхода из (disengaging from) совместной деятельности и дальнейшего анахоресиса (anachoresis)⁸ собственного тела. Здесь не будет колебания при расставании с тем, что любишь, ведь ни красота, ни единство эго (egoic alliance) не нуждаются в каузальной близости (causal

⁷ Судя по контексту, в оригинале ошибка: отрицание не нужно, должно быть «деятельность являющаяся совместной (cooperative activity)». — Прим. пер.

⁸ От греч. ἀναχώρησις — отход, отступление, уход. Ср. «анахорет» — пустыжник, отшельник, человек, живущий в полном одиночестве, ушедший от общества и избегающий его. — Прим. пер.

proximity). Впрочем, здесь будет грусть, когда во все возрастающей дали наивность исчезнет навсегда. Однако в конце этого пути глубинная обитель, возможно, пусть и смутно, но поманит нас к себе (vaguely beckons).

* * *

[1243] Из данного выше отчета, в особенности из отвержения гипотезы множественности разума, следует, что *истина* есть только в *реальности*, то есть в переживаниях сознания настоящих и прошедших (the present and past experiences of consciousness). Среди них есть вещи, качества вещей, эмоции, правила (государственные правила, правила взаимодействия, правила игры) и действия (материальные действия, мыслительные действия, математические действия). Однако ожидаемые переживания (experiences) и переживания, приписываемые другим, истинны только в качестве предвосхищений и гипотез; в их содержании нет истины.

Истины часто передают словами или сочетаниями слов (word complexes), в основном заимствованными из языков совместного действия, причем так, что для субъекта вместе с определенным словом или словосочетанием всегда возникает определенная истина, а индивиды, являющиеся объектами, ведут себя соответствующим образом. Далее, имеется некая система общих правил, называемая *логикой*, которая позволяет субъекту из систем словосочетаний (systems of word complexes), передающих истины, выводить другие словосочетания, которые обычно также передают истины. Каузальное поведение субъекта (как изолированное, так и совместное) находится под влиянием логики. И снова являющиеся объектами индивиды ведут себя соответствующим образом. Это не означает, что дополнительные сочетания слов, о которых идет речь, передают истины *до того, как* эти истины были опытно пережиты, или что эти истины *всегда могут быть* опытно пережиты. Другими словами, логика не является надежным инструментом открытия истин и не может выводить истины, которые не были бы доступны также другим способом.

* * *

Представленная выше точка зрения, согласно которой не существует опытно не пережитых истин (non-experienced truths), а логика не является абсолютно надежным инструментом открытия истин, получила признание в математике намного позже, чем в практической жизни и [естественных] науках. Математика, рассматриваемая строго в соответствии с этой точкой зрения, и выводящая теоремы исключительно посредством интроспективного конструирования (introspective construction), называется интуици-

онистской математикой. Во многих отношениях она отличается от (deviates from) классической математики. В первую очередь, классическая математика использует логику для получения теорем, верит в существование неустановленных (unknown) истин, в частности применяет *принцип исключенного третьего*, согласно которому каждое математическое утверждение (то есть каждое приписывание некоторого математического свойства некоторой математической сущности) или истинно или не может быть истинным. Во вторую очередь, классическая математика ограничивает себя *детерминированными* (predeterminate) бесконечными последовательностями, для которых n -ый элемент для каждого n фиксирован с самого начала. Благодаря этому ограничению для определения действительных чисел классическая математика имеет в своем распоряжении только детерминированные сходящиеся бесконечные последовательности рациональных чисел. Из определенных таким образом действительных чисел только подвид «никогда не завершенных счетных» видов действительных чисел может быть составлен посредством интроспективного конструирования. Поскольку такие никогда не завершенные счетные виды все имеют меру нуль, классическая математика, чтобы составить из точек континуум, нуждается в некотором логическом процессе, отправляющемся от одной или нескольких аксиом. Вследствие этого мы можем сказать, что классический анализ, сколь бы хорошо он ни подходил для техники и [естественных] наук, обладает меньшей математической истинностью, чем интуиционистский анализ, осуществляющий составление континуума через рассмотрение вида свободно становящихся [1244] сходящихся бесконечных последовательностей рациональных чисел, не прибегая к языку или логике.

* * *

Само собой разумеется, различаются также и языки этих двух математических школ. Даже в тех математических теориях, которые покрываются нейтральным языком, то есть языком, понятным для обеих сторон, каждая из школ работает с математическими сущностями, не признаваемыми другой стороной. Имеются интуиционистские структуры, которые не могут быть вписаны ни в какую классическую логическую рамку, и имеются классические рассуждения, не применимые ни к какому интроспективному образу. Аналогично, в упомянутых теориях даже математические сущности, признаваемые обеими сторонами, тем не менее для каждой из сторон удовлетворяют таким теоремам, которые для другой школы или ложны, или бессмысленны, или даже в некотором роде противо-

речивы. В частности, теоремы, имеющие место в интуиционизме, но не в классической математике, часто возникают благодаря тому обстоятельству, что для математических сущностей, принадлежащих к определенному виду, обладание определенным свойством придает особый характер способу их развития из базовой интуиции, в результате возникают свойства, ложные для классической математики. Поразительным примером служит интуиционистская теорема, согласно которой полная функция единичного континуума, то есть функция, сопоставляющая некоторое действительное число каждому неотрицательному действительному числу, не превосходящему единицу, необходимо является равномерно непрерывной.

* * *

Чтобы прояснить последствия отказа от принципа исключенного третьего в качестве инструмента открытия истин, мы формулируем этот принцип в следующей слегка измененной, более адекватной, с точки зрения интуиционизма, форме, называемой *простым принципом исключенного третьего: овсяком приписывании (assignment) τ некоторого свойства некоторой математической сущности может быть вынесено суждение (can be judged), то есть оно может быть или доказано или сведено к абсурду.*

Для отдельного такого утверждения τ принятие (enunciation) этого принципа является непротиворечивым и в интуиционистской, и в классической математике. Ведь если бы оно было противоречивым, тогда абсурдность τ была бы истинной и абсурдной в одно и то же время, что невозможно. Более того, как легко доказать, для *конечного* числа таких утверждений τ одновременное принятие этого принципа также непротиворечиво. Однако в случае одновременного принятия этого принципа для всех элементов *произвольного* вида таких утверждений τ непротиворечивость не может быть сохранена.

Например, из предположения, что для определенного действительного числа c_1 было доказано, что утверждение c_1 является рациональным или истинно или противоречиво, никакого противоречия выведено быть не может. Далее, одновременное предположение, что для действительных чисел $c_1, c_2, \dots, c_m$ было доказано, что утверждение c_i является рациональным для каждого значения i от 1 до m или истинно или противоречиво, также не может вести к противоречию. Однако одновременное предположение, что для *всех* действительных чисел c было доказано, что утверждение c является рациональным или истинно или противоречиво, все-таки ведет к противоречию.

[1245] Следовательно, если мы формулируем *полный принцип исключенного третьего* следующим образом: *если a , b и c — виды*

математических сущностей, если далее a и b оба образуют части c и если b состоит из тех элементов c , которые не могут принадлежать a , тогда c совпадает с объединением a и b , то этот последний принцип является противоречивым.

* * *

Одно из следствий простого принципа исключенного третьего гласит, что если для приписывания t некоторого свойства некоторой математической сущности была установлена непротиворечивость, то есть абсурдность абсурдности, то истинность t также может быть доказана.

Аналогичным следствием полного принципа исключенного третьего служит принцип взаимности дополнения (the principle of reciprocity of complementarity), который формулируется следующим образом.

Если a , b и c — виды математических сущностей, если далее a и b оба образуют части c и если b состоит из тех элементов c , которые не могут принадлежать a , тогда a состоит из тех элементов c , которые не могут принадлежать b .

* * *

Другим следствием простого принципа исключенного третьего является простой принцип проверяемости (the simple principle of testability), гласящий, что всякое приписывание t некоторого свойства некоторой математической сущности может быть **проверено** (can be **tested**), то есть доказана либо его непротиворечивость, либо абсурдность.

Аналогичным следствием для полного принципа исключенного третьего является полный принцип проверяемости.

Если a , b , d и c — виды математических сущностей, если каждый из видов a , b и d образует часть c и если b состоит из тех элементов c , которые не могут принадлежать a , и d , — из тех элементов c , которые не могут принадлежать b , тогда c совпадает с объединением b и d .

* * *

Для интуиционизма принцип исключенного третьего и его следствия — это утверждения σ об утверждениях τ , и эти утверждения σ только тогда «осуществлены (realized)», то есть только тогда передают истины, когда эти истины опытно пережиты (have been experienced).

Каждое утверждение τ о возможности конструкции, имеющей ограниченный конечный характер, создает во всякой конечной мате-

матической системе прецедент для применения принципа исключенного третьего. Ведь для каждой такой конструкции возможно лишь конечное число конкретных способов ее осуществления, и каждая попытка такого осуществления обнаруживает свою успешность или проваливается за конечное число шагов.

Если утверждение некоторой абсурдности называть *негативным утверждением* (*negative assertion*), то каждое негативное утверждение создает прецедент осуществления принципа взаимности дополнения. В самом деле, пусть α будет негативным утверждением, выражающим абсурдность утверждения β . Поскольку, с одной стороны, следование из истинности утверждения a истинности утверждения b влечет следование из абсурдности b абсурдности a , в то время как, с другой стороны, истинность β влечет абсурдность абсурдности β , мы заключаем, что абсурдность абсурдности абсурдности β , то есть непротиворечивость α , влечет абсурдность β , то есть влечет α .

[1246] При такой трактовке принципа взаимности дополнения принципы проверяемости и исключенного третьего оказываются эквивалентными в области негативных утверждений. Ибо: если для α выполняется принцип проверяемости, это означает, что или абсурдность абсурдности β или непротиворечивость абсурдности β , то есть, в соответствии с предшествующим параграфом, или абсурдность абсурдности β или абсурдность β , то есть или абсурдность α или само α может быть доказано, так что α удовлетворяет принципу исключенного третьего.

* * *

Чтобы привести примеры, опровергающие принцип исключенного третьего и его следствия, введем понятие *дрейфа* (*drift*). Под дрейфом мы понимаем объединение γ сходящейся фундаментальной последовательности действительных чисел $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma)$, ..., называемых *счетовыми числами* (*counting-numbers*) этого дрейфа и предельного числа $c(\gamma)$ этой последовательности, называемого *ядром* (*kernel*) этого дрейфа, причем все счетовые числа отделены⁹ друг от друга и от ядра. Если $c_v(\gamma) <^\circ c(\gamma)$ для каждого v , дрейф будет

⁹ Если для двух действительных чисел a и b , определенных при помощи бесконечных сходящихся последовательностей рациональных чисел $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$, соответственно, можно вычислить два таких натуральных числа m и n , что $b_v - a_v > 2^{-n}$ для $v \geq m$, мы пишем $b >^\circ a$ или $a <^\circ b$, и про числа a и b говорим, что они *отделены* (*to lie apart*) друг от друга. Если $a = b$ абсурдно, мы пишем $a \neq b$. Если $a <^\circ b$ абсурдно, мы пишем $a \geq b$. Если как $a = b$, так и $a <^\circ b$ абсурдно, мы пишем $a > b$. Абсурдности $a <^\circ b$ и $a < b$ оказываются взаимно эквивалентными, а абсурдность $a \geq b$ оказывается эквивалентной $a < b$.

называться *левосторонним* (*left-winged*). Если $c_v(\gamma) \circ^> c(\gamma)$ для каждого v , дрейф будет называться *правосторонним* (*right-winged*). Если фундаментальная последовательность $c_1(\gamma), c_2(\gamma), \dots$ является объединением фундаментальной последовательности *левых счетовых чисел* $l_1(\gamma), l_2(\gamma), \dots$ таких, что $l_v(\gamma) <^\circ c(\gamma)$ для каждого v , и фундаментальной последовательности *правых счетовых чисел* $d_1(\gamma), d_2(\gamma), \dots$ таких, что $d_v(\gamma) \circ^> c(\gamma)$ для каждого v , дрейф будет называться *двусторонним* (*two-winged*).

Пусть α — некоторое математическое утверждение, которое до сих пор не проверено и не опознано в качестве проверяемого. Тогда в связи с этим утверждением α и некоторым дрейфом γ творящий субъект (the creating subject)¹⁰ может порождать бесконечно продолжающуюся последовательность $R(\gamma, \alpha)$ действительных чисел $c_1(\gamma, \alpha), c_2(\gamma, \alpha), \dots$ в соответствии со следующим правилом. До тех пор, пока в процессе выбора $c_n(\gamma, \alpha)$ творящий субъект опытно не удостоверился (has experienced) либо в истинности α , либо в его абсурдности, каждое $c_n(\gamma, \alpha)$ избирается равным $c(\gamma)$. Но как только между выбором $c_{r-1}(\gamma, \alpha)$ и $c_r(\gamma, \alpha)$ творящий субъект опытно удостоверился либо в истинности α , либо в его абсурдности, $c_r(\gamma, \alpha)$, а также $c_{r+v}(\gamma, \alpha)$ для каждого натурального числа v , избирается равным $c_r(\gamma)$. Эта последовательность $R(\gamma, \alpha)$ сходится к действительному числу $D(\gamma, \alpha)$, которое будет называться *прямым проверочным числом для γ через α* (a *direct checking-number of γ through α*).

И снова, в связи с α и двусторонним дрейфом γ творящий субъект может порождать бесконечно продолжающуюся последовательность $S(\gamma, \alpha)$ действительных чисел $\omega_1(\gamma, \alpha), \omega_2(\gamma, \alpha), \dots$ в соответствии со следующим правилом. До тех пор, пока в процессе выбора $\omega_n(\gamma, \alpha)$ творящий субъект [1247] опытно не удостоверился в истинности α или его абсурдности, каждое $\omega_n(\gamma, \alpha)$ избирается равным $c(\gamma)$. Но как только между выбором $\omega_{r-1}(\gamma, \alpha)$ и $\omega_r(\gamma, \alpha)$ творящий субъект опытно удостоверился в истинности α , $\omega_r(\gamma, \alpha)$, а также $\omega_{r+v}(\gamma, \alpha)$ для каждого натурального числа v избирается равным $d_r(\gamma)$. И как только между выбором $\omega_{s-1}(\gamma, \alpha)$ и $\omega_s(\gamma, \alpha)$ творящий субъект опытно удостоверился в абсурдности α , $\omega_s(\gamma, \alpha)$, а также $\omega_{s+v}(\gamma, \alpha)$ для каждого натурального числа v избирается равным $l_s(\gamma)$. Эта последовательность $S(\gamma, \alpha)$ сходится к действительному числу $E(\gamma, \alpha)$, которое будет

¹⁰ Именно здесь этот впоследствии знаменитый термин Брауэра впервые появляется в его работах. Правда, выходу текста этого доклада из печати по времени предшествовала публикация небольшой заметки «Существенно отрицательные свойства» [2, 478–479], в которой он также использовал этот термин. — Прим. пер.

называться *осциллирующим проверочным числом для γ через α* (an oscillatory checking-number of γ through α).

Пусть γ — это правосторонний дрейф, чьи счетовые числа рациональны. Тогда утверждение о рациональности $D(\gamma, \alpha)$ проверяемо, но о нем не может быть вынесено суждение (is testable, but not judgeable), а его непротиворечивость не эквивалентна его истинности. К тому же, мы имеем $D(\gamma, \alpha) > c(\gamma)$, но не $D(\gamma, \alpha) \circ c(\gamma)$.

Пусть γ — это двусторонний дрейф, чьи правые счетовые числа рациональны и чьи левые счетовые числа иррациональны. Тогда утверждение о рациональности $E(\gamma, \alpha)$ не допускает вынесения суждения и не проверяемо, а его непротиворечивость не эквивалентна его истинности. К тому же $E(\gamma, \alpha)$ не является ни $\geq c(\gamma)$, ни $\leq c(\gamma)$.

* * *

Издавна существующее убеждение в универсальной применимости (the long belief in the universal validity) принципа исключенного третьего в математике рассматривается интуиционизмом как явление в истории цивилизации того же рода, что и старинное убеждение в рациональности [числа] π или вера во вращение небесного свода вокруг оси, проходящей через Землю. И интуиционизм пытается объяснить живучесть этой догмы двумя фактами: во-первых, очевидной непротиворечивостью этого принципа для произвольно взятого единичного суждения, во-вторых, практической пригодностью (practical validity) всей классической логики для обширной группы *простых повседневных явлений*. Этот последний факт, по всей видимости, произвел столь сильное впечатление, что та игра мысли (the play of thought), которой изначально была классическая логика, стала глубоко укорененной привычкой мысли, которая считалась не только полезной, но и априорно заданной (aprioristic).

* * *

Очевидно, что область законного применения (the field of validity) принципа исключенного третьего совпадает с пересечением областей законного применения принципа проверяемости и принципа взаимности дополнения. К тому же первая из названных областей законного применения является *собственной* подобластью (a proper subfield) для каждой из двух других областей, что видно из приводимых ниже примеров.

Пусть A — вид прямых проверочных чисел дрейфов с рациональными счетовыми числами, B — вид иррациональных действительных чисел, C — объединение A и B . Тогда все утверждения о рациональности какого-либо элемента из C удовлетворяют принципу

проверяемости, в то же время имеются утверждения о рациональности элемента из S , не удовлетворяющие принципу исключенного третьего. И снова, все утверждения о равенстве двух действительных чисел удовлетворяют принципу взаимности дополнения, в то время как имеются утверждения о равенстве двух действительных чисел, не удовлетворяющие принципу исключенного третьего.

* * *

[1248] В области математических утверждений свойство абсурдности так же, как и свойство истинности, является *универсально аддитивным свойством*, другими словами, если оно имеет место для каждого элемента α некоторой совокупности утверждений, то оно имеет место также и для утверждения, которое есть объединение утверждений α . *Это свойство универсальной аддитивности не выполняется для свойства непротиворечивости*. Однако непротиворечивость все-таки обладает более слабым свойством *конечной аддитивности*, другими словами, если утверждения p и σ непротиворечивы, то и утверждение τ , которое есть объединение p и σ , также непротиворечиво. Ведь если принять предположение ω , что τ противоречиво, то из истинности p следовала бы противоречивость σ , которая приходила бы в конфликт с тем, что дано, так что истинность p была бы абсурдной, то есть p было бы абсурдным. Такое следствие предположения ω находится в конфликте с тем, что дано, [значит] предположение ω противоречиво, то есть τ — непротиворечиво.

Приложение этой теоремы к специальным непротиворечивым утверждениям, которые представляют собой формулировки принципа исключенного третьего для отдельного утверждения, устанавливают вышеупомянутую непротиворечивость одновременной формулировки этого принципа для конечного числа утверждений.

* * *

В рамках некоторых видов математических сущностей абсурдности двух неэквивалентных¹¹ утверждений могут быть эквивалентны. Например, каждая из трех нижеследующих пар неэквивалентных утверждений, относящихся к действительному числу a ,

- I 1. $a = a$; I 2. или $a \leq 0$ или $a \geq 0$
- II 1. $a \geq 0$; II 2. или $a = 0$ или $a > 0$
- III 1. $a > 0$; III 2. $a < 0$

создает пару эквивалентных абсурдностей.

¹¹ Под неэквивалентностью мы понимаем абсурдность эквивалентности, также как под непротиворечивостью мы понимаем абсурдность противоречивости.

Оказывается, что в рамках некоторых видов математических сущностей, некоторым абсурдностям конструктивных свойств может быть придана конструктивная форма. Например, для натурального числа a абсурдность существования двух натуральных чисел, отличных от a и от 1, произведение которых равно a , эквивалентна существованию остатка при делении a на натуральное число, отличное от a и от 1. Сходным образом, для двух действительных чисел a и b отношение $a \geq b$, введенное выше как абсурдность некоторого конструктивного свойства, может быть сформулировано конструктивно следующим образом: пусть $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ — сходящиеся бесконечные последовательности рациональных чисел, определяющие a и b соответственно. Тогда для каждого натурального числа n может быть вычислено натуральное число m — такое, что $a_v - b_v \circ > -2^{-n}$ для $v \geq m$.

С другой стороны, имеется, по-видимому, мало надежды на сведение иррациональности действительного числа a или одного из отношений $a \neq b$ или $a > b$ для действительных чисел a и b к некоторому конструктивному свойству¹², если заметить, что прямое проверочное [1249] число дрейфа, чье ядро рационально, а счетовые числа иррациональны, является иррациональным без отделения от вида рациональных чисел; далее, что прямое проверочное число произвольного дрейфа отличается от ядра этого дрейфа без отделения от него и что прямое проверочное число правостороннего дрейфа лежит правее ядра этого дрейфа без отделения от него.

Оказывается, что в рамках некоторых видов математических сущностей некоторым непротиворечивостям конструктивных свойств ζ может быть придана или конструктивная форма (возможно, но не необходимо вследствие взаимности дополнения, имеющей место для ζ), или форма абсурдности некоторого конструктивного свойства. Например, для действительных чисел a и b непротиворечивость $a = b$ эквивалентна $a = b$, а непротиворечивость *или* $a = b$ *или* $a \circ > b$ эквивалентна $a \geq b$; далее, непротиворечивость $a \circ > b$ эквивалентна абсурдности $a \leq b$, а также абсурдности *или* $a = b$ *или* $a < \circ b$.

¹² Это место принято считать связанным с полемикой Брауэра против математики без отрицания, которую развивал его ученик Георг Ф.К. Грисс (1898–1953). В заметке того же года «Существенно отрицательные свойства» [2, 478–479] Брауэр приводил пример отрицательного свойства (то есть абсурдности конструктивного свойства), которое не удастся превратить в положительное, в качестве контраргумента к попыткам Грисса и с прямой ссылкой на публикации последнего. — *Прим. пер.*

С другой стороны, если мы думаем о свойстве непротиворечивости рациональности, существующей для всех прямых проверочных чисел тех дрейфов, чьи счетовые числа рациональны, то имеется, по-видимому, мало надежды на сведение непротиворечивости рациональности некоторого действительного числа к некоторому конструктивному свойству или к абсурдности некоторого конструктивного свойства.

* * *

Если под *простой абсурдностью* свойства η мы понимаем абсурдность η , а под $(n+1)$ -кратной *абсурдностью* η абсурдность n -кратной абсурдности η , тогда одна из установленных выше теорем означает, что *трехкратная абсурдность эквивалентна простой абсурдности*. А одно из прямых следствий этой теоремы состоит в том, что *n -кратная абсурдность эквивалентна или простой или двойной абсурдности, в зависимости от нечетности или четности n* .

* * *

На этом я хотел бы остановиться. Надеюсь, мне удалось ясно показать, что интуиционизм, с одной стороны, делает логику более уточненной (subtilizes logic), а с другой, лишает ее статуса источника истины (denounces logic as a source of truth). Далее, что интуиционистская математика есть внутренняя архитектура (inner architecture) и что изыскания в основаниях математики есть внутреннее исследование (inner inquiry), имеющее разоблачающие и освобождающие последствия, в том числе и для нематематических областей мысли.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Brouwer L.E.J. Consciousness, philosophy, and mathematics // Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11–18, 1948) / Ed. by E.W. Beth, H.J. Pos, J.H.A. Hollak, assistant editor (Bibliothèque du Xme Congrès International de Philosophie / Library of the Xth International Congress of Philosophy, Vol. I). Fascicule I and II. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1949. Fasc. II. P. 1235–1249.
2. Brouwer L.E.J. Collected works. Vol. 1: Philosophy and foundations of mathematics / A. Heyting (ed.). Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975. 643 p.

REFERENCES

1. Brouwer L.E.J. Consciousness, philosophy, and mathematics. In: Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, August 11–18, 1948). Ed. by E.W. Beth, H.J. Pos, J.H.A. Hollak, assistant editor (Bibliothèque du Xme Congrès International de Philosophie. Library of the Xth International Congress of Philosophy.

Vol. I). Fascicule I and II. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1949. Fasc. II. P. 1235–1249.

2. Brouwer L.E.J. Collected works. Vol. 1: Philosophy and foundations of mathematics. A. Heyting (ed.). Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975. 643 p.

Информация о переводчиках:

Шапошников Владислав Алексеевич — кандидат философских наук, доцент, заведующий кафедрой философии естественных факультетов философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, тел.: +7 (495) 939-13-46; shaposhnikov@philos.msu.ru

Зайцев Евгений Алексеевич — кандидат физико-математических наук, доцент, старший преподаватель кабинета истории и методологии математики и механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, тел.: +7 (495) 939-38-60; e_zaitsev@mail.ru

Information about the translators:

Shaposhnikov Vladislav Alekseevich — Candidate of Philosophical Science, Associate Professor, Head of the Department of Philosophy for MSU Natural Science Faculties, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University, tel.: +7 (495) 939-13-46; shaposhnikov@philos.msu.ru

Zaytsev Evgeny Alekseevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer, Department of History and Methodology of Mechanics and Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, tel.: +7 (495) 939-38-60; e_zaitsev@mail.ru

Поступила в редакцию 20.07.2023;
принята к публикации 18.09.2023