Спецкурс „Теории Великого Объединения"

Глава I. Стандартная модель сильных и электрослабых взаимодействий

§ 1. Бозонный сектор Стандартной модели.

$$G = SU(3)\times SU(2)\times U(1) \longrightarrow SU(3)\times U(1)_{em}$$

– 3 сомножителя и $\Rightarrow$ 3 константы связи e_1; e_2; e_3 для $U(1)$; $SU(2)$ и $SU(3)$ соответственно.

Симметрия спонтанно нарушается хиггсовским полем в фундаментальном представлении $SU(2)$ с гиперзарядом $Y = +1/2$.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\underset{U(1)}{F_{\mu\nu}^2} - \frac{1}{4}\underset{\substack{SU(2)\\ A=\overline{1,3}}}{(F_{\mu\nu}^A)^2} - \frac{1}{4}\underset{\substack{SU(3)\\ A=\overline{1,8}}}{(F_{\mu\nu}^A)^2} + \mathcal{D}_\mu\Phi^+\mathcal{D}^\mu\Phi - \lambda(\Phi^+\Phi - v^2)^2$$

где $$\underset{U(1)}{F_{\mu\nu}} = \partial_\mu \underset{U(1)}{A_\nu} - \partial_\nu \underset{U(1)}{A_\mu}$$

$$\underset{SU(2)}{F_{\mu\nu}} = \partial_\mu \underset{SU(2)}{A_\nu} - \partial_\nu \underset{SU(2)}{A_\mu} + \underset{SU(2)}{[A_\mu, A_\nu]} = ie_2 \underset{SU(2)}{F_{\mu\nu}^A}\frac{\sigma^A}{2}$$

$$\underset{su(3)}{F_{\mu\nu}} = \underset{su(3)}{\partial_\mu A_\nu} - \underset{su(3)}{\partial_\nu A_\mu} + \underset{su(3)}{[A_\mu, A_\nu]} = ie_3 \underset{su(3)}{F^A_{\mu\nu} t^A}$$

тогда

$$-\frac{1}{4}\left(\underset{su(2)}{F^A_{\mu\nu}}\right)^2 = \frac{1}{2e_2^2}\operatorname{tr}\left(F^2_{\mu\nu}\right), \quad A = \overline{1,3}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\underset{su(3)}{F^A_{\mu\nu}}\right)^2 = \frac{1}{2e_3^2}\operatorname{tr}\left(F^2_{\mu\nu}\right) \quad A = \overline{1,8}$$

Для $u(1)$ аналогичная форма записи получается после масштабирования

$$\underset{u(1)}{A_\mu} \longrightarrow \frac{1}{e_1}\underset{u(1)}{A_\mu} \quad \text{т.е.} \quad -\frac{1}{4}\underset{u(1)}{F^2_{\mu\nu}} \longrightarrow -\frac{1}{4e_1^2}F^2_{\mu\nu}$$

но такие обозначения менее удобны.

Что такое гиперзаряд Y ?

Под действием группы $U(1)$

$$\begin{cases} \varphi \to e^{i\alpha_1 e_1 Y}\varphi \\ \underset{u(1)}{A_\mu} \longrightarrow \underset{u(1)}{A_\mu} - \partial_\mu \alpha_1 \end{cases}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ - параметр преобразований

тогда

$$\mathcal{D}_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi + ie_1 Y \underset{u(1)}{A_\mu}\varphi \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \partial_\mu \left(e^{ie_1\alpha_1 Y}\varphi\right) + ie_1 Y (A_\mu - \partial_\mu \alpha_1)\, e^{ie_1\alpha_1 Y}\varphi =$$

$$= e^{ie_1\alpha_1 Y}\left(\partial_\mu \varphi + ie_1 Y A_\mu \varphi\right) = e^{ie_1\alpha_1 Y}\mathcal{D}_\mu \varphi$$

Поэтому ковариантная производная хиггсовского поля будет записываться в виде

$$\mathcal{D}_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + \underset{SU(2)}{A_\mu} \Phi + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \Phi =$$

$$= \partial_\mu \Phi + \frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \Phi + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \Phi$$

(Выбор $Y = 1/2$ сделан для удобства обозначений)

Вакуумное состояние стандартно выбирается в виде $\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$

При этом малой группой будет $U(1)_{em}$, действительно, при калибровочных преобразованиях

$$\Phi \longrightarrow \omega_2 e^{\frac{i}{2} e_1 \alpha_1} \Phi = \exp\left(\frac{i}{2} e_2 \alpha_2^A \sigma^A + \frac{i}{2} e_1 \alpha_1\right) \Phi$$

Преобразования малой группы удовлетворяют условию

$$0 = \delta \Phi_0 = \left(\frac{i}{2} e_2 \alpha_2^A \sigma^A + \frac{i}{2} e_1 \alpha_1\right) \Phi_0 =$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & \alpha_2^1 - i\alpha_2^2 \\ \alpha_2^1 + i\alpha_2^2 & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) v \\ (-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1) v \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ преобразования малой группы получаются при $\alpha_2^1 = 0$; $\alpha_2^2 = 0$; $-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 = 0$, т.е.

$$\phi \to \exp\left(\frac{i}{2} e_2 \alpha_2^3 \sigma^3 + \frac{i}{2} e_1 \alpha_1\right)\phi = \exp\left(\frac{i}{2} e_1\alpha_1 (1 + \sigma^3)\right)\phi$$

$$= \exp\left\{ i e_1 \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \phi \equiv \exp\left\{ i e \alpha_{em} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \phi$$

(Связь e_1 и e будет получена далее)

Очевидно, что получившиеся преобразования образуют группу $U(1)_{em}$ с параметром α_{em}. Важно, что она не совпадает с исходной $U(1)$ в произведении $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Спектр частиц удобно исследовать в унитарной калибровке, где зануляются поля, соответствующие голдстоуновским степеням свободы.

Если $\phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ v + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$, то при калибровочных преобразованиях

$$\phi' = \phi + \delta\phi \simeq \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ v + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \alpha_2^1 - i\alpha_2^2 \\ -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} v$$

и $\Rightarrow$ выбором α_2^1; α_2^2 и $-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1$ можно занулить φ_1; φ_2; φ_4, а $\varphi_3 \equiv \varphi$ – нельзя.
Поэтому в унитарной калибровке

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \varphi \end{pmatrix} \quad \text{где } \varphi \in Re.$$

При этом под действием $U(1)_{em}$ $\varphi \to \varphi$ (см. преобразование, написанное ранее) и $\Rightarrow$ φ – электрически нейтральное поле.

Исследуем теперь спектр частиц получившейся теории:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \phi + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \phi \simeq$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \varphi \end{pmatrix} + \frac{i}{2} e_2 \begin{pmatrix} \underset{SU(2)}{A_\mu^3} & \underset{SU(2)}{A_\mu^1} - i\underset{SU(2)}{A_\mu^2} \\ \underset{SU(2)}{A_\mu^1} + i\underset{SU(2)}{A_\mu^2} & -\underset{SU(2)}{A_\mu^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e_2 v \left(\underset{SU(2)}{A_\mu^2} + i \underset{SU(2)}{A_\mu^1} \right) \\ \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2} \left(-e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^3} + e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \right) v \end{pmatrix}$$

Поэтому в унитарной калибровке в квадратичном приближении

берём только квадратичные части

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\underset{u(1)}{F_{\mu\nu}^2} - \frac{1}{4}\underset{\substack{su(2)\\ A=\overline{1,3}}}{(F_{\mu\nu}^A)^2} - \frac{1}{4}\underset{\substack{su(3)\\ A=\overline{1,8}}}{(F_{\mu\nu}^A)^2} + (\partial_\mu\varphi)^2$$

$$+\frac{e_2^2 v^2}{4}\Big(\underset{su(2)}{(A_\mu^1)^2} + \underset{su(2)}{(A_\mu^2)^2}\Big) + \frac{1}{4}v^2\Big(-e_2 \underset{su(2)}{A_\mu^3} + e_1 \underset{u(1)}{A_\mu}\Big)^2$$

$$-4\lambda v^2\varphi^2$$

где было учтено, что

$$\lambda(\Phi^+\Phi - v^2)^2 = \lambda\big((\varphi+v)^2 - v^2\big)^2 \simeq \lambda(2\varphi v)^2 =$$

$$= 4v^2\lambda\varphi^2$$

Поэтому в теории будут 3 массивных векторных поля $(3 = \dim(SU(2)\times U(1)) - \dim U(1)_{em})$ и одно безмассовое векторное поле, а также одно массивное скалярное поле.

$$\underset{su(2)}{A_\mu^{1,2}} \sim m_W^2 = \frac{e_2^2 v^2}{2} \qquad \varphi \sim m_\varphi = 2\sqrt{\lambda}\,v$$

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\Big(e_2 \underset{su(2)}{A_\mu^3} - e_1 \underset{u(1)}{A_\mu}\Big) \qquad m_Z^2 = \frac{(e_1^2+e_2^2)v^2}{2}$$

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\Big(e_2 \underset{u(1)}{A_\mu} + e_1 \underset{su(2)}{A_\mu^3}\Big) \qquad m_A = 0$$

Введём обозначение

$$e \equiv e_1 \cos\theta_W \equiv e_2 \sin\theta_W$$ где θ_W – т.н. угол Вайнберга

тогда

$$\frac{e_2}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}} = \frac{e/\sin\theta_W}{\sqrt{e^2/\cos^2\theta_W + e^2/\sin^2\theta_W}} = \cos\theta_W$$

$$\frac{e_1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}} = \frac{e/\cos\theta_W}{\sqrt{e^2/\cos^2\theta_W + e^2/\sin^2\theta_W}} = \sin\theta_W$$

Тогда

$$\begin{cases} Z_\mu = \cos\theta_W \underset{su(2)}{A_\mu^3} - \sin\theta_W \underset{u(1)}{A_\mu} \\ A_\mu = \cos\theta_W \underset{u(1)}{A_\mu} + \sin\theta_W \underset{su(2)}{A_\mu^3} \end{cases}$$ – ортогональное преобразование

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} \underset{su(2)}{A_\mu^3} = \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \\ \underset{u(1)}{A_\mu} = -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu \end{cases}$$

В итоге функция Лагранжа для бозонного сектора Стандартной модели в квадратичном приближении запишется в виде

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu \underset{su(2)}{A^1_\nu} - \partial_\nu \underset{su(2)}{A^1_\mu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu \underset{su(2)}{A^2_\nu} - \partial_\nu \underset{su(2)}{A^2_\mu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu \underset{su(3)}{A^A_\nu} - \partial_\nu \underset{su(3)}{A^A_\mu}\right)^2$$

$$A = \overline{1,8}$$

$$-\frac{e_2^2 v^2}{4}\left(\left(\underset{su(2)}{A^1_\mu}\right)^2 + \left(\underset{su(2)}{A^2_\mu}\right)^2\right) - \frac{(e_1^2+e_2^2)v^2}{4} Z_\mu^2 +$$

$$+\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - 4\lambda v^2 \varphi^2 .$$

Экспериментальные значения входящих в это выражение величин (2017):

$$\left.\begin{aligned} m_Z &= 91,1876\,(21)\ \text{GeV} \\ m_W &= 80,385\ (15)\ \text{GeV} \\ m_\varphi &= 125,09 \pm 0,24\ \text{GeV} \\ \alpha_3(M_Z) &= 0,1181\ (11) \\ \alpha^{-1}_{em}(M_Z) &= 127,950 \pm 0,017 \\ \sin^2\theta_W(M_Z) &= 0,23129\ (5) \end{aligned}\right\}\ \text{приводится в Particle Data Group.}$$

На основе этих величин находим всё остальное:

$$\alpha_3(M_Z) \simeq (8,4674)^{-1}$$

$$\alpha_{10}(M_Z) \equiv \frac{e_1^2}{4\pi} = \frac{\alpha_{em}(M_Z)}{\cos^2\theta_W} \simeq (98,36)^{-1}$$

$$\alpha_1(M_Z) \equiv \frac{5}{3}\alpha_{10}(M_Z) \simeq (59,01)^{-1}$$

$$\alpha_2(M_Z) \equiv \frac{e_2^2}{4\pi} = \frac{\alpha_{em}(M_Z)}{\sin^2\theta_W} \simeq (29{,}59)^{-1}$$

$$v = \frac{\sqrt{2}\, m_W}{e_2} = \frac{\sqrt{2}\, m_W}{\sqrt{4\pi\alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^{-1}}{2\pi}}\, m_W \simeq 174{,}4 \text{ GeV}$$

$$\lambda = \frac{m_\varphi^2}{4v^2} \simeq 0{,}1286 \simeq (7{,}775)^{-1}$$

§2. Фермионный сектор Стандартной модели

Фермионы Стандартной модели делятся на 3 поколения, в каждом из которых есть кварки и лептоны.

Правые фермионы являются $SU(2)$ синглетами, а левые – $SU(2)$ дублетами.

Кварки лежат в фундаментальном представлении $SU(3)$, а лептоны в тривиальном

	I	II	III	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$ (Y)	$U(1)_{em}$ (q)
кварки	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	Фунд.	Фунд.	$+1/6$	$\begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
	u_R	c_R	t_R	Фунд.	Трив.	$+2/3$	$+2/3$
	d_R	s_R	b_R	Фунд.	Трив.	$-1/3$	$-1/3$

	I	II	III	SU(3)	SU(2)	U(1) (Y)	$U(1)_{em}$ (q)
лептоны	$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L$	Трив.	Фунд.	$-1/2$	$\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$
	ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$	Трив.	Трив.	0	0
	e_R	μ_R	τ_R	Трив.	Трив.	-1	-1

Далее индекс поколения обозначаем индексом $I = \overline{1,3}$.

§3. Лагранжиан лептонного сектора Стандартной модели

$$\mathcal{L}_{лепт.} = i\,\overline{(\nu, e)_L}^{I}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^{I} + i\bar{e}_R^{I}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R^{I}$$

$$- (Y_e)_{IJ}\,\overline{(\nu, e)_L}^{I}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} e_R^{J} - (Y_e^{+})_{IJ}\,\bar{e}_R^{I}(\phi_1^*, \phi_2^*)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^{J}$$

$\frac{1}{2} \; + \frac{1}{2} \; -1 = 0 \qquad\qquad 1 \; - \frac{1}{2} \; - \frac{1}{2} = 0$

+ слагаемые, содержащие правое нейтрино.

При этом хиггсовское поле ϕ было записано в виде $\phi \equiv \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$, т.ч. $\phi^{+} = (\phi_1^*, \phi_2^*)$

Рассматриваемые слагаемые являются $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочно инвариантными, действительно,

по группе $SU(3)$ здесь ничего не преобразуется,
по группе $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \to \omega_2 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \qquad e_R \to e_R$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \to \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \qquad \overline{(\nu, e)_L} \to \overline{(\nu, e)_L}\, \omega_2^+$$

$\Rightarrow$ инвариантность действия получается т.к., например,

$$\overline{(\nu, e)_L} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \to \overline{(\nu, e)_L}\, \omega_2^+ \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \overline{(\nu, e)_L} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = inv$$

$$(\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \to (\phi_1^*, \phi_2^*)\, \omega_2^+ \omega_2 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = inv$$

по группе $U(1)$ необходимо складывать гиперзаряды в каждом слагаемом:

$$\overline{(\nu, e)_L} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R \to \cancel{e^{ie_1\alpha_1 \frac{1}{2}}}\, \overline{(\nu, e)_L}\, \cancel{e^{ie_1\alpha_1 \frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \cancel{e^{-ie_1\alpha_1}}\, e_R = $$

$1/2 + 1/2 - 1 = 0$

$$= inv.$$

т.о. локальная $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калибровочная инвариантность полностью проверена.

Вещественность функции Лагранжа следует из того, что

$$\left[(Y_e^+)_{IJ}\, \overline{e}_R^{\,I} (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J \right]^* = (Y_e^+)_{IJ}^* \left[\overline{e}_R^{\,I} (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J \right]^+$$

$$= (Y_e)_{JI}\, \overline{(\nu, e)}_L^J \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^I = (Y_e)_{IJ}\, \overline{(\nu, e)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J$$

Заметим, что все слагаемые в функции Лагранжа не зануляются по соображениям киральности, т.к., например,

$$\overline{\psi_R} = \overline{\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi} = \left(\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\right)^+ \gamma^0 = \psi^+ \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^0 =$$

$$= \psi^+ \gamma^0 \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5) = \bar\psi\, \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5) = (\bar\psi)_L$$

Аналогично доказывается и равенство $\overline{\psi_L} = (\bar\psi)_R$.

Важно заметить, что, используя произвол в выборе полевых переменных, можно добиться, чтобы матрица $(Y_e)_{IJ}$ была бы

1. Диагональной (размер 3x3)
2. Вещественной
3. Положительно определённой

Действительно, если переопределить полевые переменные т.ч.

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^I \longrightarrow (A_e)_{IJ} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J; \quad e_R^I \longrightarrow (B_e)_{IJ} (e_R)^J, \text{ где}$$

A_e и B_e – унитарные 3x3 матрицы, то кинетический член для лептонов не изменится,

$$i\,\overline{(\nu, e)}_L^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I \longrightarrow i\,\overline{(\nu, e)}_L^J (A_e^+)_{JI} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Big[(A_e)_{Ik}$$

$$\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^k\Big] = i\,\overline{(\nu, e)}_L^J (A_e^+ A_e)_{Jk} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ \nu\end{pmatrix}_L^k = i\,\overline{(\nu, e)}_L^J \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^J$$

(где было учтено, что A_e и B_e не зависят от x)

Но при таком переопределении полевых переменных

$Y_e \longrightarrow A_e^+ Y_e B_e$, т.к.

$$(Y_e)_{IJ}\, \overline{(\nu, e)}_L^I \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} e_R^J \longrightarrow (Y_e)_{IJ}\, \overline{(\nu, e)}_L^k (A_e^+)_{kI} \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

$$(B_e)_{JM}\, e_R^M = (A_e^+ Y_e B_e)_{kM}\, \overline{(\nu, e)}_L^k \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} e_R^M$$

Имеет место

<u>Теорема</u> Если Y - невырожденная матрица, то преобразованием $Y \longrightarrow A^{-1} Y B$, где $A^+ A = 1$ и $B^+ B = 1$, её можно сделать

1. диагональной
2. вещественной
3. положительно определённой

Доказательство

Рассмотрим матрицу YY^+. Она является эрмитовой, $(YY^+)^+ = YY^+$ и $\Rightarrow$ может приведена к диагональному виду унитарным преобразованием:

$A^{-1} Y Y^{+} A = D^{2}$ где $A^{+}A = 1$, а D-диагональная матрица.

т.к. $\langle x | A^{+} Y Y^{+} A | x \rangle \geqslant 0$, то D^{2} - положительно определённая вещественная матрица.

Извлечём квадратный корень, т.ч. у D на диагонали стояли бы положительные числа.

После этого определяем $B \equiv Y^{-1} A D$. Тогда

$A^{-1} Y B = D$.

Убедимся, что B – унитарная матрица:

$B^{-1} (B^{-1})^{+} = D^{-1} A^{-1} Y Y^{+} A D^{-1} = D^{-1} D^{2} D^{-1} = 1$

$\Longrightarrow$ $B^{+}B = 1$ и матрица B действительно является унитарной.

Теорема доказана.

Перейдём теперь к исследованию низкоэнергетического предела лептонного лагранжиана

$$\mathcal{L}_{лепт.} = i \overline{(\nu, e)_L}^{I} \gamma^{\mu} \mathcal{D}_{\mu} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^{I} + i \bar{e}_R^{I} \gamma^{\mu} \mathcal{D}_{\mu} e_R^{I} -$$

$$- (Y_e)_{IJ} \overline{(\nu, e)_L}^{I} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^{J} - (Y_e^{+})_{IJ} \bar{e}_R^{I} (\phi_1^{*}, \phi_2^{*}) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^{J}$$

где Y_e - диагональная, Re и положительно определенная матрица, а ковариантные производные записываются в виде

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L + \frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L - \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$$

$$\mathcal{D}_\mu e_R = \partial_\mu e_R - i e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} e_R$$

В низкоэнергетическом пределе хиггсовское поле можно считать равным вакуумному среднему,

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

а все массивные возбуждения $(\varphi, W_\mu^{1,2}, Z_\mu)$ равными 0.

При этом ранее рассмотренная связь между полями $\underset{SU(2)}{A_\mu^3}$, $\underset{U(1)}{A_\mu}$ и A_μ, Z_μ имела вид

$$\begin{cases} \underset{SU(2)}{A_\mu^3} = \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \longrightarrow \sin\theta_W A_\mu \\ \underset{U(1)}{A_\mu} = -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu \longrightarrow \cos\theta_W A_\mu \end{cases}$$

причём $e = e_1 \cos\theta_W = e_2 \sin\theta_W$.

Поэтому в низкоэнергетическом пределе

$$\begin{cases} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^3} \longrightarrow e_2 \sin\theta_W A_\mu = e A_\mu \\ e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \longrightarrow e_1 \cos\theta_W A_\mu = e A_\mu . \end{cases}$$

Поэтому в низкоэнергетическом пределе

$$\mathcal{L}_{лепт} \Rightarrow i\overline{(\nu,e)}_L^I \gamma^\mu \left[\partial_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{2} e A_\mu \sigma_3 \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I - \frac{i}{2} e A_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I\right]$$

$$+ i\bar{e}_R^I \gamma^\mu \left[\partial_\mu e_R^I - ieA_\mu e_R^I\right] - (Y_e)_{IJ}\overline{(\nu,e)}_L^I \begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix} e_R^J$$

$$- (Y_e^+)_{IJ}\, \bar{e}_R^I (0,v)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^J =$$

$$= i\overline{(\nu,e)}_L \gamma^\mu \left[\partial_\mu \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I - ieA_\mu \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I\right] +$$

$$+ i\bar{e}_R^I \gamma^\mu \left[\partial_\mu e_R^I - ieA_\mu e_R^I\right] - (Y_e)_{IJ}\, v\, \bar{e}_L^I e_R^J - (Y_e^+)_{IJ}\, v \cdot$$

$$\cdot \bar{e}_R^I e_L^J$$

Определим матрицу $(m_e)_{IJ} = v(Y_e)_{IJ} = v\begin{pmatrix}Y_{e11} & 0 & 0\\ 0 & Y_{e22} & 0\\ 0 & 0 & Y_{e33}\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}m_e & 0 & 0\\ 0 & m_\mu & 0\\ 0 & 0 & m_\tau\end{pmatrix}$$

и ковариантные производные по отношению к низкоэнергетической группе $U(1)_{em}$

$$\begin{cases} \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} e_L = \partial_\mu e_L - ieA_\mu e_L, \\ \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} e_R = \partial_\mu e_R - ieA_\mu e_R \end{cases}$$

(для нейтрино $\underset{em}{\mathcal{D}_\mu} \nu_L = \partial_\mu \nu_L$)

Тогда низкоэнергетический предел лептонной части лагранжиана Стандартной модели примет вид

$$\mathcal{L}_{\text{лепт}} = i\bar{\nu}_L^I \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L^I + i\bar{e}_L^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} e_L^I + i\bar{e}_R^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} e_R^I$$

$$-(m_e)_{IJ}\left(\bar{e}_L^I e_R^J + \bar{e}_R^I e_L^J\right)$$

При этом

$$\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L = (\bar{\psi})_R \psi_R + (\bar{\psi})_L \psi_L = \bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi +$$

$$+\bar{\psi}\,\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = \bar{\psi}\psi$$

$\Rightarrow$ для лептонов получается стандартное массовое слагаемое, а $(m_e)_{IJ}$ – массовая матрица.

$$i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_R = i\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\mathcal{D}_\mu \psi +$$

$$+ i\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\mathcal{D}_\mu \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi$$

и $\Rightarrow$ кинетический член для заряженных лептонов также имеет стандартный вид.

При этом $q(e_L) = q(e_R) = -e$; $q(\nu_L) = 0$.

т.о. в низкоэнергетическом пределе получается обычная КЭД с 3-мя лептонами + 3 левых нейтрино.

Экспериментально (2017)

$m_e = 0{,}5109989461 \pm 0{,}0000000031$ МэВ $\qquad Y_{11} \simeq 2{,}930 \cdot 10^{-6}$

$m_\mu = 105{,}6583745 \pm 0{,}0000024$ МэВ $\qquad Y_{22} \simeq 6{,}058 \cdot 10^{-4}$

$m_\tau = 1776{,}86 \pm 0{,}12$ МэВ $\qquad Y_{33} \simeq 1{,}02 \cdot 10^{-2}$

Заметим, что часть лептонного лагранжиана, не содержащая правые нейтрино, инвариантна относительно глобальных преобразований группы $U(1)\times U(1)\times U(1)$, т.е.

$$\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I \longrightarrow e^{i\beta_I}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I \quad ; \quad e_R^I \longrightarrow e^{i\beta_I}e_R^I$$

где параметры β_1, β_2 и β_3 не зависят от x. При этом

$$\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}.$$

Действительно, инвариантность кинетических слагаемых очевидна т.к. преобразования являются глобальными, а, например,

$$(Y_e)_{IJ}\,\overline{(\nu,e)}_L^I\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}e_R^J = \sum_{I=1}^{3}(Y_e)_{II}\,\overline{(\nu,e)}_L^I\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}e_R^I$$

$$\longrightarrow \sum_{I=1}^{3}(Y_e)_{II}\,\overline{(\nu,e)}_L^I\,\cancel{e^{-i\beta_I}}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}\cancel{e^{i\beta_I}}\,e_R^I = \text{inv}$$

где было учтено, что юкавские константы являются диагональными.

Такая глобальная инвариантность приводит к сохранению 3-х лептонных чисел

$$L_I = \int d^3x\left[\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^{I+}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^I + e_R^{+I}e_R^I\right], \quad I=\overline{1,3}$$

§4. Лагранжиан кваркового сектора Стандартной модели

$$\mathcal{L}_{кварк} = i\,\overline{(u,d)}_L^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + i\bar{u}_R^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R^I + i\bar{d}_R^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R^I$$

$$- (Y_d)_{IJ}\, \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J - (Y_d^+)_{IJ}\, \bar{d}_R^I (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J$$

$$-1/6 + 1/2 - 1/3 = 0 \qquad 1/3 - 1/2 + 1/6 = 0$$

$$- (Y_u)_{IJ}\, \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J - (Y_u^+)_{IJ}\, \bar{u}_R^I (\phi_2, -\phi_1) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J$$

$$-1/6 - 1/2 + 2/3 = 0 \qquad -2/3 + 1/2 + 1/6 = 0$$

При этом ковариантные производные однозначно определяются квантовыми числами:

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{SU(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{SU(2)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{i}{6} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\mathcal{D}_\mu u_R = \partial_\mu u_R + \underset{SU(3)}{A_\mu} u_R + \frac{2i}{3} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} u_R$$

$$\mathcal{D}_\mu d_R = \partial_\mu d_R + \underset{SU(3)}{A_\mu} d_R - \frac{i}{3} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} d_R$$

Кварковый лагранжиан также является инвариантным относительно локальных преобразований группы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Действительно:

По группе $SU(3)$

$$\overline{(u,d)}_L^a \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_{Ra} \to \overline{(u,d)}_L\, \omega_3^+ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \omega_3 d_R =$$

$$= \overline{(u,d)_L}\, \omega_3^+ \omega_3 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R = \overline{(u,d)_L} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R = inv$$

и т. п.

По группе $SU(2)$ слагаемые второй строки инвариантны также как и в случае лептонного сектора.

Для того, чтобы убедиться в $SU(2)$ инвариантности 3-ей строки, докажем, что

$\begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}$ по $SU(2)$ преобразуется также как $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$.

Действительно,

$$\begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = i\sigma_2 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \longrightarrow i\sigma_2\, \omega_2^* \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_2 \omega_2^* \sigma_2 \cdot i\sigma_2 \phi^* = \sigma_2 (a_4 \cdot 1_2 + i\vec{\sigma}\vec{a})^* \sigma_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_2 \left[a_4 \cdot 1_2 - i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 - i\sigma_3 a_3 \right] \sigma_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} =$$

$$= \left[a_4 \cdot 1_2 + i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 + i\sigma_3 a_3 \right] \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}$$

Поэтому, например,

$$\overline{(u,d)_L} \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R \longrightarrow \overline{(u,d)_L}\, \omega_2^+ \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R =$$

$= \overline{(u,d)_L} \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R = inv$ — действительно получается инвариантность.

По группе $U(1)$ инвариантность проверяется суммированием гиперзарядов различных слагаемых.

$$\overline{(u,d)_L}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} d_R \longrightarrow e^{-\frac{i}{6}e_1\alpha_1}\overline{(u,d)_L}\; e^{\frac{i}{2}e_1\alpha_1}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} e^{-\frac{i}{3}e_1\alpha_1} d_R$$

$$= \overline{(u,d)_L}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} d_R = \text{inv}$$

$$\overline{(u,d)_L}\begin{pmatrix}\phi_2^*\\ -\phi_1^*\end{pmatrix} u_R \longrightarrow e^{-\frac{i}{6}e_1\alpha_1}\overline{(u,d)_L}\; e^{-\frac{i}{2}e_1\alpha_1}\begin{pmatrix}\phi_2^*\\ -\phi_1^*\end{pmatrix} e^{\frac{2i}{3}e_1\alpha_1} u_R$$

$$= \overline{(u,d)_L}\begin{pmatrix}\phi_2^*\\ -\phi_1^*\end{pmatrix} u_R = \text{inv}$$

$\Rightarrow$ инвариантность лагранжиана относительно группы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ полностью проверена.

Однако в кварковом секторе уже невозможно сделать матрицы $(Y_u)_{IJ}$ и $(Y_d)_{IJ}$ одновременно диагональными, вещественными и положительно определёнными. Действительно, мы можем совершать вращения

$$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L^I \longrightarrow A_{IJ}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L^J; \qquad u_R^I \longrightarrow (B_u)_{IJ}\, u_R^J$$

$$d_R^I \longrightarrow (B_d)_{IJ}\, d_R^J$$

где $A^+A = 1$; $B_u^+B_u = 1$; $B_d^+B_d = 1$

(т.е., A, B_u и B_d – унитарные матрицы)

Также как и в лептонном случае, такое преобразование эквивалентно переопределению матриц юкавских констант

$$Y_u \to A^{-1} Y_u B_u$$

$$Y_d \to A^{-1} Y_d B_d.$$

Но для диагонализации необходимо 4 матрицы:

$$A_u^{-1} Y_u B_u = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{v} (m_u)_{IJ}$$

$$A_d^{-1} Y_d B_d = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{v} (m_d)_{IJ}$$

Если взять $A = A_u$, то диагонализуется Y_u, а если взять $A = A_d$, то диагонализуется Y_d.

Далее мы всегда будем выбирать $A = A_u$, т.ч. $(Y_u)_{IJ}$ - диагональная, вещественная и положительно определённая. Но тогда

$$A_u^{-1} Y_d B_d = (A_u^{-1} A_d)(A_d^{-1} Y_d B_d) \quad \text{уже не диагональна.}$$

Определим $V \equiv A_u^{-1} A_d$ - т.н. матрица Кабиббо-Кобаяши-Маскава.

(Она всегда унитарна, как произведение унитарных матриц)

Тогда

$$J \cdot A_u^{-1} Y_d B_d = V \cdot (m_d)_{IJ}$$

Поэтому в отличие от лептонного сектора, кварковый лагранжиан имеет только одну глобальную $U(1)$-симметрию

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \to e^{i\beta/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I ; \quad u_R^I \to e^{i\beta/3} u_R^I$$

$$d_R^I \to e^{i\beta/3} d_R^I \quad \forall\ I = \overline{1,3} \qquad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$$

Действительно, тогда

$$(Y_d)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} d_R^J \to (Y_d)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \cancel{e^{-i\beta/3}} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \cancel{e^{i\beta/3}} d_R^J = inv$$ только если одновременно преобразуются все 3 поколения.

Соответствующим сохраняющимся зарядом является барионное число

$$B = \frac{1}{3} \int d^3x \left\{ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^{+I} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + u_R^{+I} u_R^I + d_R^{+I} d_R^I \right\} =$$

$$= \frac{1}{3} \int d^3x \left\{ u^{+I} u^I + d^{+I} d^I \right\}$$

(Множитель $1/3$ нужен, чтобы у барионов (p, n) $B = 1$)

Исследуем теперь низкоэнергетический предел лагранжиана кваркового сектора.

Напомним, что в низкоэнергетическом пределе

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \qquad (\Leftrightarrow \varphi \to 0)$$

$$W_\mu^{1,2} = \underset{su(2)}{A_\mu^{1,2}} \longrightarrow 0 \qquad Z_\mu \to 0$$

$$e_2 \underset{su(2)}{A_\mu^3} = e_2 (\cos\theta\, Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) \longrightarrow e_2 \sin\theta_W A_\mu = e A_\mu$$

$$e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} = e_1(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu) \longrightarrow e_1 \cos\theta_W A_\mu = e A_\mu$$

Поэтому

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{su(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{ie_2}{2} \underset{su(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{ie_1}{6} e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\longrightarrow \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{su(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \frac{ie}{6} A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$= \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \underset{su(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + ie A_\mu \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\mathcal{D}_\mu u_R = \partial_\mu u_R + \underset{su(3)}{A_\mu} u_R + \frac{2i}{3} e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} u_R \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \partial_\mu u_R + \underset{su(3)}{A_\mu} u_R + \frac{2i}{3} e A_\mu u_R$$

$$\mathcal{D}_\mu d_R = \partial_\mu d_R + \underset{su(3)}{A_\mu} d_R - \frac{ie_1}{3} \underset{u(1)}{A_\mu} d_R \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \partial_\mu d_R + \underset{su(3)}{A_\mu} d_R - \frac{ie}{3} A_\mu d_R$$

– видно, что электрические заряды правых и левых кварков оказались одинаковыми и равными $+2/3$ для верхних кварков и $-1/3$ для нижних кварков.

$$\mathcal{L}_{\text{кварк}} \longrightarrow i\,\overline{(u,d)}_L^I \gamma^\mu \left\{ \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + \underset{su(3)}{A_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + ieA_\mu \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \right\} + i\bar{u}_R^I \gamma^\mu \left(\partial_\mu u_R^I + \underset{su(3)}{A_\mu} u_R^I + \frac{2ie}{3} A_\mu u_R^I \right) + i\bar{d}_R^I \gamma^\mu \cdot$$

$$\left(\partial_\mu d_R^I + \underset{su(3)}{A_\mu} d_R^I - \frac{ie}{3} A_\mu d_R^I \right) - (Y_d)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} d_R^J$$

$$- (Y_d^+)_{IJ} \bar{d}_R^I (0, v) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J - (Y_u)_{IJ} \overline{(u,d)}_L^I \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} u_R^J$$

$$- (Y_u^+)_{IJ} \bar{u}_R^I (v, 0) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J =$$

$$= i\bar{u}^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} u^I + i\bar{d}^I \gamma^\mu \underset{em}{\mathcal{D}_\mu} d^I - (m_u)_{IJ} \left(\bar{u}_L^I u_R^J + \right.$$

$$\left. + \bar{u}_R^I u_L^J \right) - (V m_d)_{IJ} \bar{d}_L^I d_R^J - (m_d V^+)_{IJ} \bar{d}_R^I d_L^J$$

где $\underset{em}{\mathcal{D}_\mu} u \equiv \partial_\mu u + \underset{su(3)}{A_\mu} u + \frac{2ie}{3} A_\mu u$

$$\underset{em}{\mathcal{D}_\mu} d \equiv \partial_\mu d + \underset{su(3)}{A_\mu} d - \frac{ie}{3} A_\mu d$$

Экспериментальные данные (2020)

$$m_u = 2{,}16^{+0{,}49}_{-0{,}26}\ \text{МэВ} \qquad m_d = 4{,}67^{+0{,}48}_{-0{,}17}\ \text{МэВ}$$

$$m_c = 1{,}27 \pm 0{,}02\ \text{ГэВ} \qquad m_s = 93^{+11}_{-5}\ \text{МэВ}$$

$$m_t = 172{,}76 \pm 0{,}30\ \text{ГэВ} \qquad m_b = 4{,}18^{+0{,}03}_{-0{,}02}\ \text{ГэВ}$$

Матрицу смешивания с помощью определённого выбора полевых переменных можно привести к виду

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $c_i \equiv \cos\theta_i$; $s_i \equiv \sin\theta_i$ $\qquad (c_i^2 + s_i^2 = 1)$

$$s_{12} \equiv \sin\theta_{12} = 0{,}22650 \pm 0{,}00048$$

$$s_{13} \equiv \sin\theta_{13} = 0{,}00361^{+0{,}00011}_{-0{,}00009}$$

$$s_{23} \equiv \sin\theta_{23} = 0{,}04053^{+0{,}00083}_{-0{,}00061}$$

$$\delta = 1{,}196^{+0{,}045}_{-0{,}043}$$

остаётся комплексная фаза, отвечающая за нарушение CP.

Юкавские константы:

$$(Y_u)_{11} = \frac{1}{v} m_u = 1{,}24 \cdot 10^{-5} \qquad \frac{1}{v} m_d = 2{,}68 \cdot 10^{-5}$$

$$(Y_u)_{22} = \frac{1}{v} m_c = 7{,}28 \cdot 10^{-3} \qquad \frac{1}{v} m_s = 5{,}33 \cdot 10^{-4}$$

$$(Y_u)_{33} = \frac{1}{v} m_t = 0{,}991 \qquad \frac{1}{v} m_b = 2{,}40 \cdot 10^{-2}$$

– также видна иерархическая структура.

§5. Сокращение аномалий в Стандартной модели

Стандартная модель представляет собой теорию с киральными фермионами, поскольку левые и правые фермионы по-разному взаимодействуют с калибровочными полями.

При квантовании киральных теорий возникают проблемы с аномалиями.

В электродинамике классический закон сохранения

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im j_5,$$

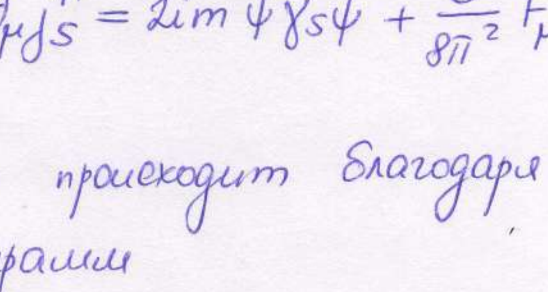
где $j_5^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ и $j_5 \equiv \bar{\psi}\gamma_5\psi$,

нарушается квантовыми поправками до

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

аномалия

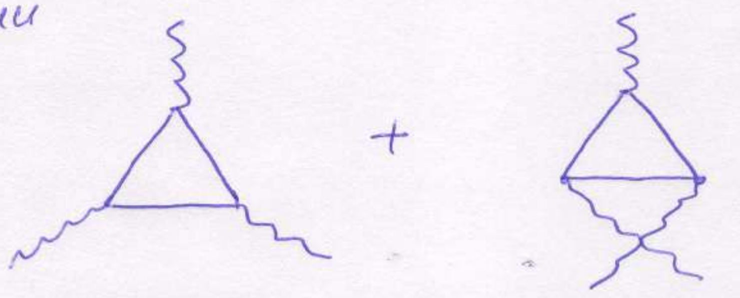
Это происходит благодаря вкладам треугольных диаграмм



где в вершине стоит аксиальный ток.

Но в эл/д аномалия аксиального тока ни к чему плохому не приводит.

В киральных теориях опасность представляют диаграммы с 3-мя внешними калибровочными линиями



которые имеют структуру, похожую на аксиальную аномалию в электродинамике.

$$\mathrm{tr}\Big[\underbrace{\gamma^{\mu}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)}_{\text{вершина}}\;\underbrace{\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\frac{\gamma^{\alpha}p_{\alpha}+m}{p^2-m^2}}_{\text{пропагатор}}\cdots\Big]$$

– видно, что выживает вклад, содержащий γ_5.

Известно, что неабелевы аномалии пропорциональны

$$\sum_R \mathrm{tr}\left(T^A\{T^B,T^C\}\right)-\sum_L \mathrm{tr}\left(T^A\{T^B,T^C\}\right)$$

где суммы берутся по правым и левым фермионам соответственно.

Если аномалия отлична от 0, то нарушаются тождества Славнова-Тейлора, что делает теорию неперенормируемой и, стало быть, неудовлетворительной на квантовом уровне.

Но в СМ все аномалии полностью сокращаются!

Существует несколько вариантов расстановки полей на внешних линиях:

N	A_μ $SU(3)$	A_μ $SU(2)$	A_μ $U(1)$	Причина сокращения аномалий
1	3	0	0	$\sum_L tr(T^A\{T^B, T^C\}) = \sum_R tr(T^A\{T^B, T^C\})$
2	2	1	0	$tr\,\sigma^A = 0$
3	2	0	1	нетривиально
4	1	2	0	$tr\,\lambda^A = 0$
5	1	1	1	$tr\,\lambda^A = 0;\ tr\,\sigma^A = 0$
6	1	0	2	$tr\,\lambda^A = 0$
7	0	3	0	$tr(\sigma^A\{\sigma^B, \sigma^C\}) = 2\delta^{BC}tr\,\sigma^A = 0$
8	0	2	1	нетривиально
9	0	1	2	$tr\,\sigma^A = 0$
10	0	0	3	нетривиально.

$t^A_{SU(3)} = \frac{1}{2}\lambda^A$; $t^A_{SU(2)} = \frac{1}{2}\sigma^A$ (в фундаментальном представлении)

В большинстве вариантов отсутствие аномалий доказывается тривиально (см. таблицу). Однако имеются и существенно нетривиальные варианты (3, 8, 10).

Для доказательства сокращения аномалий в этих случаях необходимо знать гиперзаряды полей:

поле	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R	$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$	ν_R	e_R	Φ
Y	$+1/6$	$+2/3$	$-1/3$	$-1/2$	0	-1	$+1/2$

фермионы — бозон

Вариант 3 $\left(2\times \underset{SU(3)}{A_\mu} + \underset{U(1)}{A_\mu}\right)$

Существенны только кварки

левый проектор; $SU(2)$ индекс

Аномалия $\sim \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\lambda^A\lambda^B)\cdot\left[\underset{u_R}{\frac{2}{3}} - \underset{d_R}{\frac{1}{3}} - 2\cdot \underset{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L}{\frac{1}{6}}\right]$

$= 0$

Вариант 8 $\left(2\times \underset{SU(2)}{A_\mu} + \underset{U(1)}{A_\mu}\right)$

Существенны только левые фермионы

Аномалия $\sim -\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\sigma^A\sigma^B)\left[3\cdot \underset{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L}{\frac{1}{6}} - \underset{\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L}{\frac{1}{2}}\right] = 0$

левый проектор; цвет

Вариант 10 $\left(3\times \underset{U(1)}{A_\mu}\right)$.

Аномалия $\sim \sum\limits_R Y^3 - \sum\limits_L Y^3 =$

$$= \Big[\underset{\text{цвет}}{3}\cdot\underset{u_R}{\left(\tfrac{2}{3}\right)^3} + \underset{\text{цвет}}{3}\cdot\underset{d_R}{\left(-\tfrac{1}{3}\right)^3} + \underset{\nu_R}{0} + \underset{e_R}{(-1)^3}\Big] - \Big[\overset{\text{цвет}}{3}\cdot\overset{SU(2)}{2}\underset{\binom{u}{d}_L}{\left(\tfrac{1}{6}\right)^3} + \overset{SU(2)}{2}\underset{\binom{\nu}{e}_L}{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3}\Big]$$

$$= \left[\frac{8}{9} - \frac{1}{9} - 1\right] - \left[\frac{1}{36} - \frac{1}{4}\right] = \frac{32-4-36-1+9}{36} = \underline{0}$$

Таким образом, мы видим, что во всех 10 вариантах аномалии полностью сокращаются, причём это происходит благодаря очень нетривиальным соотношениям, которым удовлетворяют квантовые числа.

Поэтому квантовые числа не являются случайными. Далее мы увидим, что их анализ подразумевает существование более широкой калибровочной симметрии.

Глава II SU(5) теория Великого объединения.

§1. Простейшие сведения о группе SU(5)

Группа SU(5) состоит из унитарных матриц размера 5×5 с единичным определителем:

$$\omega \in SU(5) \Rightarrow \omega^+\omega = 1 \,; \; \det\omega = 1 .$$

Соответствующая алгебра Ли состоит из антиэрмитовых бесследовых матриц:

$$\omega = e^{\alpha} \quad \text{где} \quad \alpha^+ = -\alpha ; \; tr\,\alpha = 0 .$$

$$\dim SU(5) = 5^2 - 1 = 24 \qquad (\dim SU(n) = n^2 - 1)$$

$$\mathrm{rank}\, SU(5) = 5 - 1 = 4 \qquad (\mathrm{rank}\, SU(n) = n - 1)$$

(ранг – число одновременно диагонализируемых генераторов)

$$\dim (SU(3) \times SU(2) \times U(1)) = 8 + 3 + 1 = 12$$

$$\mathrm{rank}\,(SU(3) \times SU(2) \times U(1)) = 2 + 1 + 1 = 4$$

Поэтому не исключено, что $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ является подгруппой SU(5). Это действительно так:

$SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5)$.

Действительно, такое вложение строится следующим образом:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\;3\;} & \overleftrightarrow{\;2\;} \end{array} \\ \omega_5 = & \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \updownarrow 3 \\ \updownarrow 2 \end{array} \in SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5) \end{array}$$

где $\omega_3 \in SU(3)$, $\omega_2 \in SU(2)$, α – Re число.

Получившаяся матрица будет унитарной и иметь единичный определитель:

$$\left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right)^{+}\left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} e^{2i\alpha}\omega_3^{+}\cdot e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{-3i\alpha}\omega_2^{+} e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right) = 1_5$$

$$\begin{array}{cc} \det & \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \updownarrow 3 \\ \updownarrow 2 \end{array} = \left(e^{-2i\alpha}\right)^3 \det\omega_3 \cdot \left(e^{3i\alpha}\right)^2 \det\omega_2 \\ & \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\;3\;} & \overleftrightarrow{\;2\;} \end{array} \end{array}$$

$= e^{-6i\alpha}\cdot e^{6i\alpha} = 1$ – поэтому и возникают числа 2 и 3 в экспонентах.

Генераторы группы $SU(5)$ удобно выбрать так, чтобы они были согласованы с вложением $SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5)$.

Они должны быть бесследовыми, эрмитовыми

$$\mathrm{tr}\, t^A = 0\,; \quad (t^A)^+ = t^A$$

и удовлетворять условию нормировки

$$\mathrm{tr}\,(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$$

Положим $t^A = \frac{1}{2}\lambda^A_{SU(5)}$, где $\lambda^A_{SU(5)}$ имеют вид

$$\lambda^A_{SU(5)} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^A_{SU(3)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

если $A = \overline{1,8}$ (8 шт)

(генераторы подгруппы $SU(3)$)

$$\lambda^A_{SU(5)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma^{A-8} \end{array}\right)$$

если $A = 9, 10, 11$ (3 шт)

(генераторы подгруппы $SU(2)$)

$$\lambda^A_{SU(5)} = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & \cdot \\ & 0 & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \end{array}\right) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & \cdot & \cdot \\ & 0 & & -i & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & i & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \end{array}\right)$$

(6 шт) (6 шт)

$A = \overline{12, 23}$. Легко проверить, что такие $\lambda^A_{SU(5)}$ удовлетворяют условию $\mathrm{tr}(\lambda^A_{SU(5)}\lambda^B_{SU(5)}) = 2\delta^{AB}$.

Последний генератор

$$t^{24}_{su(5)} = \frac{1}{2}\lambda^{24}_{su(5)} \quad \text{где} \quad \lambda^{24}_{su(5)} = const\cdot\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ \hline & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)$$

(Он соответствует подгруппе $U(1)$).

Условие нормировки:

$$\frac{1}{2} = tr\left[\frac{1}{2}\lambda^{24}_{su(5)}\cdot\frac{1}{2}\lambda^{24}_{su(5)}\right] = \frac{1}{4}\cdot const^2\cdot tr\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ \hline & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} const^2 \left(3\cdot 4 + 2\cdot 9\right) = \frac{1}{4}\cdot 30\cdot const^2$$

$$\Rightarrow \quad const^2 = \frac{1}{15} \quad \Rightarrow \quad const = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

Т.о. правильно нормированная $\lambda^{24}_{su(5)}$ имеет вид

$$\lambda^{24}_{su(5)} = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)$$

§2. Представления группы $SU(5)$

Все представления группы $SU(5)$ являются тензорными.

Фундаментальное представление в наших обозначениях – вектор с нижним индексом:

$$\phi_i \longrightarrow \omega_i^{\ j}\phi_j \qquad \text{где} \quad i,j = \overline{1,5}$$

Это представление будем обозначать 5.

Антифундаментальное представление $\overline{5}$ соответствует вектору с верхним индексом:

$$\phi^i \longrightarrow (\omega^*)^i_{\cdot j}\,\phi^j$$

Это представление, т.к.

$$(\omega_1^*)^i_{\cdot j}\,(\omega_2^*)^j_{\cdot k}\,\phi^k = \left[(\omega_1\omega_2)^*\right]^i_{\cdot k}\,\phi^k$$

Заметим, что если ϕ_i преобразуется по фундаментальному представлению 5, то ϕ^{*i} преобразуется по представлению $\overline{5}$ $\left(\phi^{*i} \equiv (\phi_i)^*\right)$

Тензорное представление:

$$\phi^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \longrightarrow \omega_{j_1\cdot}^{\ \ l_1} \dots \omega_{j_n\cdot}^{\ \ l_n} (\omega^*)^{i_1}_{\cdot k_1} \dots (\omega^*)^{i_m}_{\cdot k_m}\,\phi^{k_1\dots k_m}_{l_1\dots l_n}$$

Но обычно такие представления являются приводимыми, т.е. содержат некоторые нетривиальные инвариантные подпространства.

Рассмотрим, например, представление ϕ_{ij}

$$\phi_{ij} \rightarrow \omega_i^{\ k}\,\omega_j^{\ l}\,\phi_{kl}.$$

В нём есть инвариантные подпространства, состоящее из антисимметричных тензоров $\phi_{[ij]}$ и симметричных тензоров $\Phi_{(ij)}$, т.к.

$\omega_i{}^k \omega_j{}^l \Phi_{[kl]}$ антисимметрично по ij, а

$\omega_i{}^k \omega_j{}^l \Phi_{kl}$ – симметрично по ij.

$\Phi_{[ij]}$ имеет размерность $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ и обозначается $\mathbf{10}$.

$\Phi_{(ij)}$ имеет размерность $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ и обозначается $\mathbf{15}$.

$\Phi^{[ij]} \sim \overline{10} \qquad \Phi^{(ij)} \sim \overline{15}$.

Присоединённое представление 24 строится исходя из тензорного представления

$$\Phi_i^j \longrightarrow \omega_i{}^k \Phi_k^l (\omega^*)^j{}_l = \omega_i{}^k \Phi_k^l (\omega^+)_l{}^j = [\omega \Phi \omega^{-1}]_i{}^j$$

– правильный закон преобразования.

Но есть инвариантные подпространства:

$$\Phi \cdot \delta_i^j \longrightarrow \omega_i{}^k \Phi \, \delta_k^l \cdot (\omega^{-1})_l{}^j = \Phi \, \delta_i^j$$

($\delta_i^j \longrightarrow \delta_i^j$ – инвариантный тензор для $SU(5)$)

Поэтому также накладываем условие бесследовости $\Phi_i^i = 0$ (как и в алгебре Ли $SU(5)$), а также эрмитовости: $\Phi^+ = \Phi$, т.к.

$$\Phi^+ \longrightarrow (\omega \Phi \omega^{-1})^+ = \omega \Phi^+ \omega^{-1} = \omega \Phi \omega^{-1}, \text{ т.е.}$$

$\Phi'^+ = \Phi'$ – действительно выделяется инвариантное подпространство.

Поэтому $Adj = 24$ даётся тензорами

ϕ_i^j т.ч. $\Phi^+ = \Phi$ и $\mathrm{tr}\,\Phi = 0$.

Помимо δ_i^j у группы $SU(5)$ есть ещё 2 инвариантных тензора: ε_{ijklm} и ε^{ijklm}.

Действительно,

$$\varepsilon_{ijklm} \to \omega_i{}^{i'}\omega_j{}^{j'}\omega_k{}^{k'}\omega_l{}^{l'}\omega_m{}^{m'}\varepsilon_{i'j'k'l'm'} =$$

$$= \varepsilon_{ijklm} \det\omega = \varepsilon_{ijklm}$$

(ε-символ является инвариантным тензором для всех групп, матрицы которых имеют определитель равный 1).

В заключение этой части заметим, что если спинор ψ преобразуется по представлению R группы G (например, $SU(5)$), то зарядово сопряжённый спинор ψ^c преобразуется по сопряжённому представлению $\bar{R}$. Действительно,

$$\overline{\psi^c} \equiv \psi^T C \iff (\psi^c)^+\gamma^0 = \psi^T C \qquad (C = i\gamma^0\gamma^2)$$

$$\Rightarrow \psi^c = (\psi^T C\gamma^0)^+ = -\gamma^0 C\psi^* \qquad (C^* = C,\ C^T = -C)$$

откуда и $\Rightarrow$ требуемое утверждение.

(C - матрица зарядового сопряжения, т.ч. $C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$)

§3. Фермионный состав SU(5) ТВО.

Ключевое утверждение:

Квантовые числа фермионов по группе Стандартной модели $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ таковы, что их можно получить размести фермионы одного поколения в представлениях $\underline{1+\bar{5}+10}$ группы $SU(5)$.

При этом речь идёт о левых фермионах.

$$(\psi_R)^c = -\gamma^0 C\psi_R^* = -\gamma^0 C\,\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi^* = \left[C = i\gamma^0\gamma^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\left[-\gamma^0 C\psi^*\right] = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^c = (\psi^c)_L$$

Другими словами, правые фермионы СМ должны быть зарядово сопряжены перед размещении в представления $SU(5)$.

$$1 \sim (\nu_R)^c = (\nu^c)_L \quad \text{правое нейтрино}$$

$$\bar{5}^i \equiv \psi^i = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ \hline e \\ -\nu \end{pmatrix}_L \qquad 10_{ij} \equiv \psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L$$

содержит правые нижние кварки и левые лептоны

содержит левые кварки, правые верхние кварки и правые заряженные лептоны.

Убедимся, что при этом получаются правильные квантовые числа фермионов по подгруппе

$SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5)$

Правое нейтрино:

При $SU(5)$ преобразованиях $(\nu^c)_L=\mathrm{inv}$

$\Longrightarrow$ ν_R инвариантно и при преобразованиях

$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$

$\Longrightarrow$ ν_R лежит в тривиальных представлениях $SU(3)$ и $SU(2)$ и $Y=0$ — верно.

Представление $\bar 5^i$

$$\bar 5^i\equiv\psi^i\longrightarrow(\omega^*)^i{}_j\,\psi^j \quad \text{где} \quad \psi^i=\begin{pmatrix} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ e\\ -\nu\end{pmatrix}_L$$

Для подгруппы $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$

$$\omega=\left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0\\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2\end{array}\right), \text{ т.е. } \omega^*=\left(\begin{array}{c|c} e^{2i\alpha}\omega_3^* & 0\\ \hline 0 & e^{-3i\alpha}\omega_2^*\end{array}\right)$$

Поэтому

$$\left(\begin{array}{c} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ \hline e\\ -\nu\end{array}\right)_L\longrightarrow\left(\begin{array}{c|c} e^{2i\alpha}\omega_3^* & 0\\ \hline 0 & e^{-3i\alpha}\omega_2^*\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ \hline e\\ -\nu\end{array}\right)_L$$

Поэтому

$$(d^c)^a_L \longrightarrow e^{2i\alpha} (\omega_3^*)^a_{\cdot\, b} (d^c)^b_L$$

$$(d_R)^c \longrightarrow e^{2i\alpha}\, \omega_3^* (d_R)^c$$

$$d_R \rightarrow e^{-2i\alpha} \omega_3 d_R \iff d_{Ra} \rightarrow e^{-2i\alpha} (\omega_3)_a{}^b d_{Rb}.$$

Поэтому d_R лежит в фундаментальном представлении группы $SU(3)$ и тривиальном представлении группы $SU(2)$.

Гиперзаряд нетривиален, но мы не знаем нормировку. У d_R должен быть $Y = -1/3$. Поэтому если мы положим $\alpha \equiv \frac{1}{6}\alpha_0$, то

$$d_{Ra} \rightarrow e^{-\frac{i}{3}\alpha_0} (\omega_3)_a{}^b d_{Rb}$$

и коэффициент при $i\alpha_0$ будет представлять собой гиперзаряд.

Тогда у d_R будут получаться правильные квантовые числа по $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Левые лептоны:

$$\begin{pmatrix} e \\ -\nu \end{pmatrix}_L \rightarrow e^{-3i\alpha} \omega_2^* \begin{pmatrix} e \\ -\nu \end{pmatrix}_L \Rightarrow$$ применяя к этой формуле зарядовое сопряжение, получим, что

$$\begin{pmatrix} e_L \\ -\nu_L \end{pmatrix}^c \longrightarrow e^{3i\alpha} \omega_2 \begin{pmatrix} e_L \\ -\nu_L \end{pmatrix}^c$$

Поскольку если $\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \to \omega_2 \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$, то, как было показано ранее, $\begin{pmatrix}\phi_2^*\\ -\phi_1^*\end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2 \begin{pmatrix}\phi_2^*\\ -\phi_1^*\end{pmatrix}$. Поэтому

$$\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L \longrightarrow e^{-3i\alpha}\omega_2 \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L = e^{-\frac{i\alpha_0}{2}}\omega_2 \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L$$

$\Rightarrow$ левые лептоны преобразуются по тривиальному представлению $SU(3)$, фундаментальному представлению $SU(2)$ и имеют $Y = -1/2$ - верно.

Представление 10_{ij}

$$10_{ij} \equiv \psi_{ij} \longrightarrow \omega_i^{\ k}\omega_j^{\ l}\psi_{kl} \quad \text{где}$$

$$10_{ij} = \psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L$$

Разделим индекс $i = \overline{1,5}$ на группы: $i = (a, \alpha)$ где $a = \overline{1,3}$, $\alpha = 4,5$. Тогда

$$\psi_{a\alpha} \longrightarrow \omega_a^{\ b}\omega_\alpha^{\ \beta}\psi_{b\beta}$$

при $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ преобразованиях.

При этом $\omega_a^{\ b} = e^{-2i\alpha}(\omega_3)_a^{\ b}$; $\omega_\alpha^{\ \beta} = e^{3i\alpha}(\omega_2)_\alpha^{\ \beta}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L \longrightarrow e^{-2i\alpha}\omega_3 \cdot e^{3i\alpha}\omega_2 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L = e^{\frac{i\alpha_0}{6}}\omega_3\cdot\omega_2 \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L$$

Поэтому левые кварки лежат в фундаментальном представлении $SU(3)$, фундаментальном представлении $SU(2)$ и имеют гиперзаряд $Y=+1/6$. - верно. (43)

$$\psi_{\alpha\beta} \to \omega_\alpha{}^\gamma \omega_\beta{}^\delta \psi_{\gamma\delta} \quad \text{причём} \quad \psi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(e^c)_L$$

где $\varepsilon_{45} = -\varepsilon_{54} = 1$.

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(e^c)_L \to e^{3i\alpha}(\omega_2)_\alpha{}^\gamma \cdot e^{3i\alpha}(\omega_2)_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta}(e^c)_L$$

При этом $\alpha = \frac{1}{6}\alpha_0$, а

$$(\omega_2)_\alpha{}^\gamma (\omega_2)_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \det \omega_2 = \varepsilon_{\alpha\beta}$$

(ε-символ - инвариантный тензор для $SU(2)$)

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(e^c)_L \to e^{i\alpha_0}\varepsilon_{\alpha\beta}(e^c)_L$$

$$\Rightarrow \quad e_R \to e^{-i\alpha_0} e_R$$

Поэтому правые заряженные лептоны преобразуются по тривиальным представлениям $SU(3)$ и $SU(2)$ и имеют гиперзаряд $Y=-1$ - верно.

$$\psi_{ab} \to \omega_a{}^d \omega_b{}^e \psi_{de} \quad \text{причём} \quad \psi_{ab} = \varepsilon_{abf}(u^c)_L^f$$

Поэтому

$$\varepsilon_{abf}(u^c)_L^f \to e^{-2i\alpha}(\omega_3)_a{}^d e^{-2i\alpha}(\omega_3)_b{}^e \varepsilon_{def}(u^c)_L^f =$$

$$= e^{-\frac{2i\alpha_0}{3}}(\omega_3)_a{}^d(\omega_3)_b{}^e(\omega_3^{-1})_h{}^f(\omega_3)_f{}^g \varepsilon_{deg}(u^c)_L^h$$

В силу инвариантности ε-символа

$$(\omega_3)_a{}^d (\omega_3)_b{}^e (\omega_3)_f{}^g \varepsilon_{deg} = \varepsilon_{abf} \quad \text{и} \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{abf} (u^c)_L{}^f \longrightarrow \varepsilon_{abf}\, e^{-2i\alpha_0/3} (\omega_3^{-1})_h{}^f (u^c)_L{}^h$$

$$\Leftrightarrow \left[(u_R)^c\right]^f \longrightarrow e^{-2i\alpha_0/3} (\omega_3^+)_h{}^f \left[(u_R)^c\right]^h$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{Rf} \longrightarrow e^{+2i\alpha_0/3} (\omega_3^T)^h{}_f\, u_{Rh}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{Ra} \longrightarrow e^{2i\alpha_0/3} (\omega_3)_a{}^b\, u_{Rb}$$

Поэтому правые верхние кварки преобразуются по фундаментальному представлению $SU(3)$, тривиальному представлению $SU(2)$ и имеют гиперзаряд $Y = 2/3$ — верно.

Т.о. мы убедились, что, разместив фермионы одного поколения в представлениях $1 + \bar{5} + 10$ группы $SU(5)$, мы получим правильные квантовые числа по подгруппе $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$.

При этом этот факт является очень нетривиальным.

С точки зрения теории групп мы доказали, что

$$\bar{5} = \underbrace{(\bar{3},1)}_{(d_R)^c}(+1/3) + \underbrace{(1,2)}_{\binom{\nu}{e}_L}(-1/2) \qquad (SU(3), SU(2))(Y)$$

$$10 = \underbrace{(3,2)}_{\binom{u}{d}_L}(+1/6) + \underbrace{(\bar{3},1)}_{(u_R)^c}(-2/3) + \underbrace{(1,1)}_{(e_R)^c}(+1)$$

§4. Калибровочные бозоны в $SU(5)$ ТВО и предсказание для угла Вайнберга.

Т.к. в теориях Янга-Миллса число калибровочных бозонов всегда равно размерности калибровочной группы, то для $G = SU(5)$ будет $\dim SU(5) = 24$ калибровочных бозонов, из которых $\dim(SU(3)\times SU(2)\times U(1)) = 12$ были в Стандартной Модели, а ещё $24-12=12$ новых.

Т.к. $SU(5)$ - простая группа, то имеется только одна константа связи e_5.

$$\underset{SU(5)}{A_\mu} = ie_5 \underset{SU(5)}{A_\mu^A} \underset{SU(5)}{\lambda^A}/2 =$$

$$= ie_5 \cdot \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu^A} \underset{SU(3)}{\lambda^A} & \begin{matrix} X^*_{\mu 1} & Y^*_{\mu 1} \\ X^*_{\mu 2} & Y^*_{\mu 2} \\ X^*_{\mu 3} & Y^*_{\mu 3} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} X^1_\mu & X^2_\mu & X^3_\mu \\ Y^1_\mu & Y^2_\mu & Y^3_\mu \end{matrix} & \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \underset{SU(2)}{\sigma^A} \end{array} \right) + \frac{ie_5}{2} \underset{SU(5)}{A_\mu^{24}} \underset{SU(5)}{\lambda^{24}}$$

При этом $X^*_{\mu a} \equiv (X^a_\mu)^*$; $Y^*_{\mu a} \equiv (Y^a_\mu)^*$, так что получившееся выражение является антиэрмитовой матрицей: $\underset{SU(5)}{A_\mu^+} = -\underset{SU(5)}{A_\mu}$.

Также очевидно, что $\operatorname{tr} \underset{SU(5)}{A_\mu} = 0$.

Поскольку вложение $SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5)$ имеет вид

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{array}\right)$$

, то $\underset{su(3)}{A^A_\mu}$ и $\underset{su(2)}{A^A_\mu}$ отождествляются с $SU(3)\times SU(2)$ калибровочными полями, а т.к.

$$\underset{su(5)}{\lambda^{24}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ \hline & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)$$

, то $\underset{su(5)}{A^{24}_\mu} = \underset{u(1)}{A_\mu}$ - калибровочное поле, соответствующее подгруппе $U(1)$.

X^a_μ и Y^a_μ - новые комплексные векторные поля, которых не было в Стандартной Модели.

Т.к. в группе $SU(5)$ только одна константа связи e_5, а в $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ - 3 (e_3, e_2, e_1) то, по-видимому, $SU(5)$ симметрия может иметь место только при определённых соотношениях между e_3, e_2 и e_1. Чтобы выявить эту связь, рассмотрим поле $\phi_i \in 5$ (т.е. лежащее в фундаментальном представлении $SU(5)$). Тогда

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + \underset{su(5)}{(A_\mu)_i{}^j}\phi_j$$

должна переходить в ковариантную производную по $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, если $X^a_\mu, Y^a_\mu \to 0$.

(Это получается если X_μ^a и Y_μ^a имеют очень большие массы и не влияют на низкоэнергетическую физику, см. далее) (47)

$$\mathcal{D}_\mu \Phi_i \to \partial_\mu \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \hline \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix} + \frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu^A} \lambda^A & 0 \\ \hline 0 & \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \end{array}\right) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \hline \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{ie_5}{2\sqrt{15}} \underset{U(1)}{A_\mu} \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ \hline & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \hline \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix}$$

При этом по отношению к $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ части Φ_i преобразуются так: ($\alpha = \frac{1}{6}\alpha_0$, см. раньше)

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \hline \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} e^{-\frac{i\alpha_0}{3}}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{\frac{i\alpha_0}{2}}\omega_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \hline \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{-\frac{i\alpha_0}{3}}\omega_3 \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$$

- фундаментальное $SU(3)$
- тривиальное $SU(2)$
- $Y = -1/3$ по $U(1)$.

$$\begin{pmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i\alpha_0/2}\omega_2 \begin{pmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix}$$

- тривиальное $SU(3)$
- фундаментальное $SU(2)$
- $Y = +1/2$ по $U(1)$

$$\Rightarrow \underset{(CM)}{\mathcal{D}_\mu} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} + \frac{ie_3}{2} \underset{SU(3)}{A_\mu^A} \underset{SU(3)}{\lambda^A} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} - \frac{ie_1}{3} \underset{U(1)}{A_\mu} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(CM)}{\mathcal{D}_\mu}\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix} = \partial_\mu\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix} + \frac{ie_2}{2}\underset{su(2)}{A_\mu^A}\sigma^A\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix} + \frac{ie_1}{2}\underset{u(1)}{A_\mu}\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix}$$

С другой стороны, из выражения для ковариантной производной по группе $SU(5)$ мы получаем, что при низких энергиях

$$\mathcal{D}_\mu\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \hline \phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\left[\partial_\mu + \frac{ie_5}{2}\underset{su(3)}{A_\mu^A}\lambda^A - \frac{ie_5}{\sqrt{15}}\underset{u(1)}{A_\mu}\right]\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}\\ \hline \left[\partial_\mu + \frac{ie_5}{2}\underset{su(2)}{A_\mu^A}\sigma^A + \frac{3ie_5}{2\sqrt{15}}\underset{u(1)}{A_\mu}\right]\begin{pmatrix}\phi_4\\ \phi_5\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Сравнивая это выражение с предыдущими, мы видим, что

$$e_5 = e_3 = e_2\ ; \qquad \frac{e_1}{3} = \frac{e_5}{\sqrt{15}}\ ; \quad \frac{e_1}{2} = \frac{3e_5}{2\sqrt{15}}$$

$$e_5 = \sqrt{\frac{5}{3}}\,e_1$$

т.о. мы получаем, что

$$\boxed{e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\,e_1}$$

Это позволяет предсказать значение угла Вайнберга:

$$e = e_1\cos\theta_W = e_2\sin\theta_W\,.$$

$$\Longrightarrow\ tg\,\theta_W = \frac{e_1}{e_2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}\,e_5}{e_5} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\sin^2\theta_W + \cos^2\theta_W = 1 \Longrightarrow \frac{1}{\sin^2\theta_W} = 1 + \frac{1}{tg^2\theta_W} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin^2\theta_W = 3/8}$$

Определим величины

$$\alpha_5 \equiv \frac{e_5^2}{4\pi}\,; \quad \alpha_3 \equiv \frac{e_3^2}{4\pi}\,; \quad \alpha_2 \equiv \frac{e_2^2}{4\pi}\,; \quad \alpha_{10} \equiv \frac{e_1^2}{4\pi}$$

$$\alpha_1 \equiv \frac{5}{3}\alpha_{10} = \frac{5}{3}\cdot\frac{e_1^2}{4\pi}$$

Тогда условие существования $SU(5)$ симметрии можно записать в виде

$$\boxed{\alpha_5 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1}$$

Напомним, что эксперимент даёт

$$\sin^2\theta_W(M_Z) = 0{,}23129\,(5) \qquad \left(\frac{3}{8} = 0{,}375\right)$$

$$\alpha_3(M_Z) \simeq (8{,}4674)^{-1}$$

$$\alpha_2(M_Z) \simeq (29{,}59)^{-1}$$

$$\alpha_1(M_Z) \simeq (59{,}01)^{-1}$$

– видно, что на масштабе M_Z предсказания $SU(5)$ модели не выполняются. Причина – наличие квантовых поправок. Далее будет показано, что в суперсимметричной версии Стандартной Модели имеется масштаб, на котором предсказания $SU(5)$-модели оказываются верными.

§5. Квантовые числа калибровочных бозонов X_μ^a и Y_μ^a

Выясним вначале какие квантовые числа имеют калибровочные бозоны X_μ^a и Y_μ^a по отношению к группе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5)$.

При $SU(5)$ преобразованиях

$$A_\mu \to \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega\partial_\mu\omega^{-1}$$

Если $\omega\in SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, то $\omega = \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2\end{array}\right)$

В этом случае

$$A_\mu \to \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2\end{array}\right)\left\{\frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu^A\lambda^A} & X_\mu^*\ Y_\mu^* \\ \hline \begin{matrix}X_\mu\\ Y_\mu\end{matrix} & \underset{SU(2)}{A_\mu^A\sigma^A}\end{array}\right) + \frac{ie_5}{2}\underset{U(1)}{A_\mu}\lambda^{24}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} e^{+2i\alpha}\omega_3^{-1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-3i\alpha}\omega_2^{-1}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha}\omega_2\end{array}\right)\partial_\mu\left(\begin{array}{c|c} e^{2i\alpha}\omega_3^{-1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-3i\alpha}\omega_2^{-1}\end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \cancel{e^{-2i\alpha}}\omega_3 & 0 \\ \hline 0 & \cancel{e^{3i\alpha}}\omega_2\end{array}\right)\cdot\frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu^A\lambda^A} & X_\mu^*\ Y_\mu^* \\ \hline \begin{matrix}X_\mu\\ Y_\mu\end{matrix} & \underset{SU(2)}{A_\mu^A\sigma^A}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \cancel{e^{2i\alpha}}\omega_3^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \cancel{e^{-3i\alpha}}\omega_2^{-1}\end{array}\right) +$$

$$+ \frac{ie_5}{2}\underset{U(1)}{A_\mu}\lambda^{24} - i\partial_\mu\alpha\left(\begin{array}{c|c} -2 & 0 \\ \hline 0 & 3\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} \omega_3\partial_\mu\omega_3^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \omega_2\partial_\mu\omega_2^{-1}\end{array}\right)$$

Принимая во внимание, что $e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}e_1$ (51)

и $\alpha = \frac{1}{6}\alpha_0$, получаем, что

$$\underset{su(3)}{A_\mu} = \frac{ie_3}{2}\underset{su(3)}{A_\mu^A}\lambda^A \longrightarrow \omega_3 \underset{su(3)}{A_\mu}\omega_3^{-1} + \omega_3\partial_\mu\omega_3^{-1}$$

$$\underset{su(2)}{A_\mu} = \frac{ie_2}{2}\underset{su(2)}{A_\mu^A}\sigma^A \longrightarrow \omega_2 \underset{su(2)}{A_\mu}\omega_2^{-1} + \omega_2\partial_\mu\omega_2^{-1}$$

$$\underset{u(1)}{A_\mu}\cdot\frac{e_1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{i}{\sqrt{15}} \longrightarrow \underset{u(1)}{A_\mu}\cdot\frac{e_1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{15}} - \partial_\mu\alpha_0\cdot\frac{1}{6}$$

$$\Longrightarrow \underset{u(1)}{A_\mu} \longrightarrow \underset{u(1)}{A_\mu} - \partial_\mu\alpha_0\cdot\frac{1}{e_1} \equiv \underset{u(1)}{A_\mu} - \partial_\mu\alpha_1$$ если положить $\alpha_0 \equiv e_1\alpha_1$

(Гиперзаряд получался как коэффициент при α_0 и $\Rightarrow$ это правильное отождествление)

$$\begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2\begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix}\omega_3^{-1}e^{3i\alpha}e^{+2i\alpha} = \omega_2\begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix}\omega_3^{-1}e^{5i\alpha_0/6}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} X_\mu^a \\ Y_\mu^a \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2\begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix}(\omega_3^+)_b{}^a e^{5i\alpha_0/6} = \omega_2(\omega_3^*)^a{}_b\begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix}e^{\frac{5i\alpha_0}{6}}$$

– получаем антифундаментальное $SU(3)$
фундаментальное $SU(2)$
$Y = +5/6$ по $U(1)$.

Теперь необходимо также определить электрические заряды X_μ и Y_μ калибровочных бозонов. Это будет сделано в следующем параграфе.

§6. Оператор электрического заряда

Симметрия $SU(5)$ нарушается по цепочке

$$SU(5) \longrightarrow SU(3)\times SU(2)\times U(1) \longrightarrow SU(3)\times U(1)_{em}$$

массу приобретают X_μ и Y_μ

массу приобретают $W_\mu^{1,2}$ и Z_μ

Отбрасывая на каждом шаге массивные векторные поля, получаем, что $\left(e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\, e_1\right)$

$$\underset{SU(5)}{A_\mu} \longrightarrow \frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu^A \lambda^A} & 0 \\ \hline 0 & \underset{SU(2)}{A_\mu^A \sigma^A} \end{array}\right) + \frac{ie_5}{2\sqrt{15}}\underset{U(1)}{A_\mu}\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu} & 0 \\ \hline 0 & \underset{SU(2)}{A_\mu} \end{array}\right) + \frac{ie_1}{6}\underset{U(1)}{A_\mu}\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

(оператор гиперзаряда)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu} & 0 \\ \hline 0 & \frac{ie_2}{2}\underset{SU(2)}{A_\mu^3 \sigma^3} \end{array}\right) + \frac{ie_1}{6}\underset{U(1)}{A_\mu}\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \underset{SU(3)}{A_\mu} & 0 \\ \hline 0 & ie A_\mu \frac{1}{2}\sigma_3 \end{array}\right) + \frac{ie}{6}A_\mu\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)$$

т.к. $e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^3} \longrightarrow e_2 \sin\theta_W A_\mu = eA_\mu$; $e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \longrightarrow eA_\mu$

Поэтому при очень низких энергиях ($\ll 10^2$ ГэВ)

$$\underset{su(5)}{A_\mu} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \underset{su(3)}{A_\mu} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + ieA_\mu \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & & & & \\ & -1/3 & & & 0 \\ & & -1/3 & & \\ \hline & 0 & & 1 & \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

(оператор электрического заряда)

Т.о. мы получаем операторы гиперзаряда и электрического заряда вида

$$\hat{Y} = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & & & & \\ & -1/3 & & & 0 \\ & & -1/3 & & \\ \hline & 0 & & 1/2 & \\ & & & & 1/2 \end{array}\right) ; \quad \hat{q} = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & & & & \\ & -1/3 & & & 0 \\ & & -1/3 & & \\ \hline & 0 & & 1 & \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

С их помощью можно найти все гиперзаряды и электрические заряды элементарных частиц.

Рассмотрим более подробно случай электрического заряда.

Фермионы: $1 + \overline{5} + 10$

$1 \sim (\nu^c)_L$ – тривиальное представление $\Rightarrow$
$\Rightarrow q((\nu^c)_L) = 0 \Rightarrow q(\nu_R) = 0$

$$\overline{5}^i = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ \hline e \\ -\nu \end{pmatrix}_L$$ – антифундаментальное представление

$$\overline{5}^i \longrightarrow (\omega^*)^i_{\ j}\, \overline{5}^j = [(\omega^{-1})^T]^i_{\ j}\, \overline{5}^j \simeq$$

$$\simeq \overline{5}^i - (\alpha^T)^i_{\ j}\, \overline{5}^j$$ – генераторы для $\overline{5}$ отличаются от генераторов 5 на знак и транспонирование.

$$\Longrightarrow \quad \hat q \begin{pmatrix} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ \hline e\\ -\nu \end{pmatrix}_L = -\left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & & & 0 & \\ & -1/3 & & & \\ & & -1/3 & & \\ \hline & 0 & & 1 & \\ & & & & 0 \end{array}\right)^T \begin{pmatrix} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ \hline e\\ -\nu \end{pmatrix}_L =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} 1/3 & & & 0 & \\ & 1/3 & & & \\ & & 1/3 & & \\ \hline & 0 & & -1 & \\ & & & & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ \hline e\\ -\nu \end{pmatrix}_L \Longrightarrow \quad \begin{aligned} q((d^c)_L) &= +1/3 \\ q(e_L) &= -1 \\ q(\nu_L) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad q(d_R) = -1/3$$

— правильные электрические заряды.

$$10_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L \longrightarrow \omega_i{}^k \omega_j{}^l 10_{kl} \simeq$$

$$\simeq \left(\delta_i{}^k + \alpha_i{}^k\right)\left(\delta_j{}^l + \alpha_j{}^l\right) 10_{kl} \simeq 10_{ij} + \alpha_i{}^k 10_{kj} + \alpha_j{}^k 10_{ik}$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\hat q\, 10)_{ij} = q_i{}^k 10_{kj} + q_j{}^k 10_{ik} = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & & & 0 & \\ & -1/3 & & & \\ & & -1/3 & & \\ \hline & 0 & & 1 & \\ & & & & 0 \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L + \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ +u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & & & 0 & \\ & -1/3 & & & \\ & & -1/3 & & \\ \hline & 0 & & 1 & \\ & & & & 0 \end{array}\right)^T =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} -\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}0 & u^{c3} & -u^{c2}\\ -u^{c3} & 0 & u^{c1}\\ u^{c2} & -u^{c1} & 0\end{pmatrix}_L & \frac{2}{3}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}_L & -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}_L \\ \hline \frac{2}{3}(-u_1-u_2-u_3)_L & 0 & 1\cdot(e^c)_L \\ -\frac{1}{3}(-d_1-d_2-d_3)_L & 1\cdot(-e^c)_L & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow q\left((u^c)_L\right) = -\frac{2}{3} \Rightarrow q(u_R) = +\frac{2}{3}$$

$$q(u_L) = +\frac{2}{3} \qquad q(d_L) = -\frac{1}{3}$$

$$q\left((e^c)_L\right) = +1 \Rightarrow q(e_R) = -1$$

— также все электрические заряды получаются верно.

Вычислим теперь этим способом электрические заряды калибровочных бозонов.

При глобальных калибровочных преобразованиях

$$\underset{su(5)}{A_\mu} \longrightarrow \omega \underset{su(5)}{A_\mu} \omega^{-1} \simeq (1+\alpha)\underset{su(5)}{A_\mu}(1-\alpha) \simeq \underset{su(5)}{A_\mu} + [\alpha, \underset{su(5)}{A_\mu}]$$

$$\Rightarrow \hat{q}\underset{su(5)}{A_\mu} = \left[\left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & & & & \\ & -1/3 & & & \\ & & -1/3 & & \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{array}\right), \frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{ccc|cc} & \underset{su(3)}{A_\mu^A\lambda^A} & & X^*_{\mu 1} & Y^*_{\mu 1} \\ & & & X^*_{\mu 2} & Y^*_{\mu 2} \\ & & & X^*_{\mu 3} & Y^*_{\mu 3} \\ \hline X^1_\mu & X^2_\mu & X^3_\mu & \underset{su(2)}{A^A_\mu\sigma^A} & \\ Y^1_\mu & Y^2_\mu & Y^3_\mu & & \end{array}\right) + \frac{ie_5}{2\sqrt{15}} \cancel{\underset{u(1)}{A_\mu}\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & 0 & \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)} \right] = \left[\underset{su(2)}{A^A_\mu \sigma^A} = \begin{pmatrix} \underset{su(2)}{A^3_\mu} & \underset{su(2)}{A^1_\mu - iA^2_\mu} \\ \underset{su(2)}{A^1_\mu + iA^2_\mu} & \underset{su(2)}{-A^3_\mu} \end{pmatrix} \right]$$

0

$$\Rightarrow q(\underset{u(1)}{A_\mu}) = 0$$

$$= \frac{ie_s}{2}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \underset{su(3)}{A_\mu^A \lambda^A} & \left(-\frac{1}{3}-1\right) X^*_{\mu a} & \left(-\frac{1}{3}-0\right) Y^*_{\mu a} \\ \left(1+1/3\right) X^a_\mu & (1-1) \underset{su(2)}{A^3_\mu} & (1-0)\underset{su(2)}{(A^1_\mu - iA^2_\mu)} \\ (0+1/3)\, Y^a_\mu & (0-1)\underset{su(2)}{(A^1_\mu + iA^2_\mu)} & -(0-0)\underset{su(2)}{A^3_\mu} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad q\big(\underset{su(3)}{A_\mu}\big) = 0 \qquad q\big(\underset{su(2)}{A^3_\mu}\big) = 0$$

$$q(X^a_\mu) = +4/3 \qquad q(Y^a_\mu) = +1/3$$

$$q\big(\underset{su(2)}{A^1_\mu - iA^2_\mu}\big) = +1 \qquad q\big(\underset{su(2)}{A^1_\mu + iA^2_\mu}\big) = -1 .$$

Поэтому $\boxed{\begin{array}{l} q(A_\mu) = 0; \;\; q(Z_\mu) = 0 \\ q(W^\pm_\mu) = \pm 1, \;\; \text{где} \;\; W^\pm_\mu \equiv \underset{su(2)}{A^1_\mu} \mp i \underset{su(2)}{A^2_\mu} \end{array}}$

– правильные электрические заряды калибровочных бозонов Стандартной модели.

Для тяжёлых калибровочных бозонов X^a_μ и Y^a_μ получились очень необычные электрические заряды

$$\boxed{q(X^a_\mu) = +4/3 \qquad q(Y^a_\mu) = +1/3}$$

В дальнейшем мы увидим, что эти калибровочные бозоны приобретают очень большие массы, порядка 10^{16} ГэВ.

§7. Лагранжиан бозонного сектора SU(5) ТВО

— содержит калибровочные и хиггсовские поля.
При этом хиггсовские поля должны обеспечивать цепочку спонтанного нарушения симметрии

$$SU(5) \xrightarrow{10^{15}\,\text{ГэВ}} SU(3)\times SU(2)\times U(1) \xrightarrow{10^{2}\,\text{ГэВ}} SU(3)\times U(1)_{em}.$$

$H \in 24 = Adj$ $\qquad\qquad$ $\phi \in 5$

SU(5) симметрия нарушается до $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ хиггсовским полем H в Adj, т.е.

$$H^{+} = H\ ; \quad \mathrm{tr}\, H = 0 \qquad \Big(H_i^{j} \equiv H^{A} t^{A}_{SU(5)}\Big)$$

Это - минимальная возможность (минимальное представление содержащее $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ синглет, не считая тривиального)

SU(2) дуплет включается в представление 5 группы SU(5) (также минимальное представление)

Бозонная часть функции Лагранжа строится из следующих соображений:

1) Калибровочная инвариантность
2) Перенормируемость (потенциал не более 4-й степени по полям)
3) Отсутствие слагаемых 3-ей степени в потенциале.

тогда

$$\mathcal{L}_{Б} = \frac{1}{2e_5^2}\,\mathrm{tr}\Big(\underset{su(5)}{F_{\mu\nu}^2}\Big) + \mathrm{tr}(\mathcal{D}_\mu H)^2 + \mathcal{D}_\mu\phi^+\mathcal{D}^\mu\phi - V(H) - V(\phi^+\phi)$$

$$-\lambda_4\,\mathrm{tr}(H^2)\,\phi^+\phi - \lambda_5\,\phi^+H^2\phi$$

где $$V(H) = -m_1^2\,\mathrm{tr}\,H^2 + \lambda_1(\mathrm{tr}\,H^2)^2 + \lambda_2\,\mathrm{tr}\,H^4$$

$$V(\phi^+\phi) = -m_2^2\,\phi^+\phi + \lambda_3(\phi^+\phi)^2$$

$$\underset{su(5)}{F_{\mu\nu}} = \partial_\mu \underset{su(5)}{A_\mu} - \partial_\nu \underset{su(5)}{A_\mu} + \underset{su(5)}{[A_\mu, A_\nu]}$$

$$\mathcal{D}_\mu H = \partial_\mu H + \underset{su(5)}{[A_\mu, H]}$$

$$\mathcal{D}_\mu\phi = \partial_\mu\phi + \underset{su(5)}{A_\mu}\phi \qquad \mathcal{D}_\mu\phi^+ = \partial_\mu\phi^+ - \phi^+\underset{su(5)}{A_\mu}$$

где было принято во внимание, что при калибровочных преобразованиях

$$H \to \omega H\omega^{-1};\quad \phi\to\omega\phi;\quad \phi^+\to\phi^+\omega^{-1},\quad \omega\in SU(5).$$

Действительно, тогда, например,

$$\phi^+H^2\phi \to \phi^+\cancel{\omega^{-1}}\cdot\cancel{\omega}H\cancel{\omega^{-1}}\cdot\cancel{\omega}H\cancel{\omega^{-1}}\cdot\cancel{\omega}\phi = \phi^2H^2\phi = inv.$$

$$\mathrm{tr}(H^2) \to \mathrm{tr}(\cancel{\omega}H\cancel{\omega^{-1}}\cdot\cancel{\omega}H\cancel{\omega^{-1}}) = \mathrm{tr}(H^2) = inv$$

$$\phi^+\phi \to \phi^+\cancel{\omega^{-1}}\cancel{\omega}\phi = \phi^+\phi = inv$$

$\Rightarrow$ функция Лагранжа действительно является калибровочно инвариантной

Выясним теперь как происходит спонтанное нарушение калибровочной симметрии в $SU(5)$ ТВО. Поскольку имеются 2 очень сильно различающихся масштаба, то можно по-отдельности исследовать оба этапа нарушения симметрии.

На первом этапе происходит нарушение

$$SU(5) \longrightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

на масштабе $\sim 10^{15}$ ГэВ (см. далее) из-за того, что поле H приобретает вакуумное среднее.

На втором этапе

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}$$

на масштабе $\sim 10^2$ ГэВ вакуумным средним поля Φ.

Поэтому при исследовании нарушения симметрии $SU(5) \to SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ можно пренебрегать Φ и минимизировать только

$$V(H) = -m_1^2 \, tr\, H^2 + \lambda_1 (tr\, H^2)^2 + \lambda_2 \, tr\, H^4$$

где m_1 имеет порядок 10^{15} ГэВ.

Используя калибровочную симметрию

$H \to \omega H \omega^{-1}$

можно добиться, чтобы вакуумное значение поля H (которое мы обозначим через H_0) было бы диагональной матрицей:

$$H_0 = \begin{pmatrix} H_1 & & & & 0 \\ & H_2 & & & \\ & & H_3 & & \\ & & & H_4 & \\ 0 & & & & H_5 \end{pmatrix}$$

причём в силу эрмитовости поля H все $H_i \in Re$, а т.к. $tr\, H = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{5} H_i = 0$.

Поэтому минимизировать $V(H)$ необходимо с учётом условия связи, используя метод неопределённых множителей Лагранжа:

$$V(H_0) \equiv -m_1^2 \sum_{i=1}^{5} H_i^2 + \lambda_1 \Big(\sum_{i=1}^{5} H_i^2 \Big)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^{5} H_i^4 + \mu \sum_{i=1}^{5} H_i$$

множитель Лагранжа.

Условие минимума имеет вид:

$$0 = -2m_1^2 H_i + 4\lambda_1 H_i \sum_{j=1}^{5} H_j^2 + 4\lambda_2 H_i^3 + \mu$$

Зафиксируем значение $A \equiv \sum\limits_{j=1}^{5} H_j^2$, которое одинаково во всех 5 ур-ях:

$$0 = -2m_1^2 H_i + 4\lambda_1 A H_i + 4\lambda_2 H_i^3 + \mu$$

– получилось 5 одинаковых кубических уравнений.

$\Rightarrow$ среди H_i не более 3 различных: $H^{(1)}, H^{(2)}$ и $H^{(3)}$.

При этом

$$0 = -2m_1^2 H_i + 4\lambda A H_i + 4\lambda_2 H_i^3 + \mu = 4\lambda_2 (H_i - H^{(1)})(H_i - H^{(2)})$$

$$\cdot (H_i - H^{(3)})$$

Приравнивая коэффициенты при H_i^2, получаем, что

$$0 = H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(3)}$$

Пусть среди H_i имеется n_1 шт. $H^{(1)}$, n_2 шт. $H^{(2)}$ и n_3 шт. $H^{(3)}$. Тогда в силу бесследовости получаем условие

$$n_1 H^{(1)} + n_2 H^{(2)} + n_3 H^{(3)} = 0$$

В итоге у нас будет система уравнений

$$\begin{cases} H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(3)} = 0 \\ n_1 H^{(1)} + n_2 H^{(2)} + n_3 H^{(3)} = 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 5 \end{cases}$$

Из неё можно выразить $H^{(2)}$ и $H^{(3)}$ через $H^{(1)}$:

$$H^{(3)} = -H^{(1)} - H^{(2)}$$

$$0 = n_1 H^{(1)} + n_2 H^{(2)} - n_3 H^{(1)} - n_3 H^{(2)}$$

$$\begin{cases} H^{(2)} = \dfrac{(n_1 - n_3)}{(n_3 - n_2)} H^{(1)} \\ H^{(3)} = H^{(1)} \dfrac{(\cancel{-n_3} + n_2 - n_1 + \cancel{n_3})}{n_3 - n_2} = \dfrac{(n_2 - n_1)}{(n_3 - n_2)} H^{(1)} \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в $V(H)$ получаем, что

$$V(H) = -m_1^2\left(n_1 H^{(1)2} + n_2 H^{(2)2} + n_3 H^{(3)2}\right) + \lambda_1\left(n_1 H^{(1)2} + n_2 H^{(2)2} +\right.$$

$$\left. + n_3 H^{(3)2}\right)^2 + \lambda_2\left(n_1 H^{(1)4} + n_2 H^{(2)4} + n_3 H^{(3)4}\right) =$$

$$= -m_1^2 H^{(1)2}\left[n_1 + n_2\left(\frac{n_1-n_3}{n_2-n_3}\right)^2 + n_3\left(\frac{n_1-n_2}{n_2-n_3}\right)^2\right] + \lambda_1 H^{(1)4}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2}{(n_2-n_3)^2}\right]^2 + \lambda_2 H^{(1)4}\left[\frac{n_1(n_2-n_3)^4 +}{(n_2-n_3)^4}\right.$$

$$\left.\frac{+ n_2(n_1-n_3)^4 + n_3(n_1-n_2)^4}{}\right] \equiv -m_n^2 H^{(1)2} + \lambda_n H^{(1)4}$$

где

$$m_n^2 \equiv m_1^2\left[\frac{n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2}{(n_2-n_3)^2}\right]$$

$$\lambda_n \equiv \lambda_1\left[\frac{n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2}{(n_2-n_3)^2}\right]^2 +$$

$$+ \lambda_2\left[\frac{n_1(n_2-n_3)^4 + n_2(n_1-n_3)^4 + n_3(n_1-n_2)^4}{(n_2-n_3)^4}\right]$$

Теперь минимизируем полученное выражение по $H^{(1)}$:

$$0 = -2m_n^2 H^{(1)} + 4\lambda_n H^{(1)3}$$

$$\Rightarrow H^{(1)2} = \frac{m_n^2}{2\lambda_n}$$

Подставляя это в $V(H)$, получим, что

$$V_{min} = V(H_0) = -m_n^2 \cdot \frac{m_n^2}{2\lambda_n} + \lambda_n \left(\frac{m_n^2}{2\lambda_n}\right)^2 = -\frac{m_n^2}{4\lambda_n} =$$

$$= -\frac{m_1^4}{4\left(\lambda_1 + \lambda_2 f(n_1, n_2, n_3)\right)}, \quad \text{где}$$

$$f(n_1, n_2, n_3) \equiv \frac{n_1(n_2-n_3)^4 + n_2(n_1-n_3)^4 + n_3(n_1-n_2)^4}{\left[n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{(n_1-n_2)^2 + (n_2-n_3)^2 + (n_1-n_3)^2}{2\left[n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2\right]}$$

Далее необходимо понять, какой из минимумов является самым низким. Для этого перебираются все возможные значения n_1, n_2, n_3:

n_1	n_2	n_3	$f(n_1,n_2,n_3)$	малая группа
5	0	0	$V_{min} = 0$	$SU(5)$
4	1	0	13/20	$SU(4) \times U(1)$
3	2	0	7/30	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.
3	1	1	1/2	$SU(3) \times U(1) \times U(1)$
2	2	1	1/4	$SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$

– видно, что наименьшее значение функции $f(n_1, n_2, n_3) = 7/30$ соответствует правильному вакууму.

При каких условиях минимальное значение $f(n_1, n_2, n_3)$ даёт минимум $V(H_0)$? Очевидно,

$$\lambda_1 + \lambda_2 f(n_1 n_2 n_3) > 0 \quad , \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \frac{7}{30}\lambda_2 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

При этом $V_{min} = -\dfrac{m_1^4}{4(\lambda_1 + \frac{7}{30}\lambda_2)}$

Найдём соответствующее вакуумное среднее скалярного поля:

$$H_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & & & 3 & \\ & 0 & & & 3 \end{array}\right) V \quad \sim 10^{15} \text{ ГэВ}$$

Тогда

$$V(H_0) = -m_1^2 \cdot \mathrm{tr}\, H_0^2 + \lambda_1 (\mathrm{tr}\, H_0^2)^2 + \lambda_2 \mathrm{tr}\, H_0^4 =$$

$$= -m_1^2 V^2 (4\cdot 3 + 9\cdot 2) + \lambda_1 V^4 (4\cdot 3 + 9\cdot 2)^2 + \lambda_2 V^4 (16\cdot 3 + 81\cdot 2)$$

$$= -30 m_1^2 V^2 + 900 \lambda_1 V^4 + 210 \lambda_2 V^4$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -60 m_1^2 V + 4\cdot(900\lambda_1 + 210\lambda_2) V^3$$

$$V^2 = \frac{60 m_1^2}{4(900\lambda_1 + 210\lambda_2)} = \frac{m_1^2}{2(30\lambda_1 + 7\lambda_2)}$$

$$V = \frac{m_1}{\sqrt{2(30\lambda_1 + 7\lambda_2)}} \quad \sim 10^{15} \text{ ГэВ}$$

Малой группой действительно будет $SU(3)\times SU(2)\times$ $\times\, U(1)$, поскольку

$$\begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right) V \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha}\omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha}\omega_2 \end{pmatrix}^{+} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right) V$$

– вакуумное состояние действительно не меняется

Следующий шаг – нарушение симметрии

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1) \longrightarrow SU(3)\times U(1)_{em}$$

которое происходит при энергиях порядка 10^2 ГэВ.

При этом можно считать, что $H \longrightarrow H_0$. Тогда

$$V(H,\phi^+,\phi) = V(H) + V(\phi^+\phi) + \lambda_4 \operatorname{tr} H^2 \cdot \phi^+\phi + \lambda_5 \phi^+ H^2 \phi \longrightarrow$$

$$\longrightarrow V(\phi^+\phi) + \lambda_4 \operatorname{tr} H_0^2 \cdot \phi^+\phi + \lambda_5 \phi^+ H_0^2 \phi =$$

отбрасываем постоянную

$$= -m_2^2 \phi^+\phi + \lambda_3 (\phi^+\phi)^2 + 30\lambda_4 V^2 \phi^+\phi + \lambda_5 \phi^+ H_0^2 \phi$$

где $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \leftarrow \text{хиггсовский триплет} \\ \leftarrow \text{хиггсовский дуплет} \end{matrix}$

(отождествляется с хиггсом Стандартной модели)

Для этих хиггсовских полей мы получаем потенциал

$$V(\Phi^+,\Phi) = \overset{\text{становится } \lambda \text{ в СМ}}{\lambda_3} \left[(\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} + (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \right]^2$$

$$+ (\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \cdot \left[-m_2^2 + 30\lambda_4 V^2 + 4\lambda_5 V^2 \right]$$

$$+ (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left[-m_2^2 + 30\lambda_4 V^2 + 9\lambda_5 V^2 \right]}_{-2\lambda v^2 \,\sim\, 10^2 \text{ ГэВ}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \lambda \left[(\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} + (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \right]^2 -$$

$$- 2\lambda v^2 (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(-2\lambda v^2 - 5\lambda_5 V^2 \right)}_{\substack{\text{масса}^2 \text{ триплета} \\ \sim 10^{15} \text{ ГэВ (из-за } V)}} (\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

Если $\lambda_5 < 0$, то триплет будет иметь нулевое вакуумное среднее и массу $\sim 10^{15}$ ГэВ. Поэтому он не будет сказываться на физике низких энергий.

Но $-m_2^2 + \underbrace{30\lambda_4 V^2}_{\sim 10^{15} \text{ ГэВ}} + \underbrace{9\lambda_5 V^2}_{\sim 10^{15} \text{ ГэВ}} \sim 10^2$ ГэВ – неестественно – необходима очень точная подстройка λ_4 и λ_5. Это делает такую модель неприемлимой.

§8. Массы калибровочных бозонов X^a_μ и Y^a_μ.

Спонтанное нарушение симметрии $SU(5)\to SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ приводит к появлению масс тяжёлых калибровочных бозонов X^a_μ и Y^a_μ. Эти массы возникают из слагаемого

$$\mathrm{tr}\,(\mathcal{D}_\mu H)^2 = \mathrm{tr}\,\Big(\partial_\mu H + \underset{su(5)}{[A_\mu, H]}\Big)^2 \longrightarrow \mathrm{tr}\,\Big(\underset{su(5)}{[A_\mu, H_0]}^2\Big)$$

При этом

$$\underset{su(5)}{[A_\mu, H_0]} = \Bigg[\frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{ccc|cc} & \underset{su(3)}{A^A_\mu\lambda^A} & & \begin{matrix} X^*_{\mu 1} \\ X^*_{\mu 2} \\ X^*_{\mu 3}\end{matrix} & \begin{matrix} Y^*_{\mu 1} \\ Y^*_{\mu 2} \\ Y^*_{\mu 3}\end{matrix} \\ \hline X^1_\mu & X^2_\mu & X^3_\mu & \multicolumn{2}{c}{\underset{su(2)}{A^A_\mu \sigma^A}} \\ Y^1_\mu & Y^2_\mu & Y^3_\mu & & \end{array}\right) + \cancelto{0}{\underset{u(1)}{\frac{ie_5}{2}A_\mu\lambda^{24}}},$$

$$V\left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & & & & \\ & -2 & & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & -2 & & \\ \hline & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{array}\right)\Bigg] = \frac{5ie_5}{2}\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & X^*_{\mu 1} & Y^*_{\mu 1} \\ & 0 & & X^*_{\mu 2} & Y^*_{\mu 2} \\ & & & X^*_{\mu 3} & Y^*_{\mu 3} \\ \hline -X^1_\mu & -X^2_\mu & -X^3_\mu & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -Y^1_\mu & -Y^2_\mu & -Y^3_\mu & & \end{array}\right) V$$

(где $5 = 3-(-2)$)

Поэтому

$$\mathrm{tr}\,\Big(\underset{su(5)}{[A_\mu, H_0]}^2\Big) = +\frac{25e_5^2}{4}\left[X^*_{\mu a}X^a_\mu + Y^*_{\mu a}Y^a_\mu\right] 2V^2 =$$

$$= \frac{25e_5^2}{2}\left(X^*_{\mu a}, Y^*_{\mu a}\right)\begin{pmatrix} X^a_\mu \\ Y^a_\mu \end{pmatrix} V^2$$

Однако, чтобы найти массу необходимо также знать и кинетическое слагаемое. Для полей X_μ^a и Y_μ^a оно получается следующим образом:

$$\frac{1}{2e_5^2}\,\underset{su(5)}{\mathrm{tr}}\,F_{\mu\nu}^2 \longrightarrow \frac{1}{2e_5^2}\mathrm{tr}\left[\frac{ie_5}{2}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}\partial_\mu X_{\nu a}^* - \partial_\nu X_{\mu a}^*; \\ \partial_\mu Y_{\nu a}^* - \partial_\nu Y_{\mu a}^*\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}\partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a \\ \partial_\mu Y_\nu^a - \partial_\nu Y_\mu^a\end{matrix} & 0 \end{array}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left[\left(\partial_\mu X_{\nu a}^* - \partial_\nu X_{\mu a}^*\right)\left(\partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\partial_\mu Y_{\nu a}^* - \partial_\nu Y_{\mu a}^*\right)\left(\partial_\mu Y_\nu^a - \partial_\nu Y_\mu^a\right)\right]$$

Масса представляет собой определённое отношение между коэффициентами в кинетическом и массовом слагаемых. Стандартно для массивного векторного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 + \frac{m^2}{2}A_\mu^2 .$$

Поэтому мы получаем, что для X_μ^a и Y_μ^a массы окажутся равными

$$\boxed{m_X = m_Y = 5e_5 V}$$

и имеют порядок 10^{15} ГэВ.

§9. Лагранжиан фермионного сектора SU(5) модели

Ранее было показано, что фермионы 1-го поколения можно разместить в представлениях $1+\bar{5}+10$ группы $SU(5)$:

$$1 \sim (\nu^c)_L \qquad 10_{ij} \equiv \psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L$$

$$\bar{5}^i \equiv \psi^i = \left(\begin{array}{c} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ \hline e \\ -\nu \end{array}\right)_L$$

Запишем теперь лагранжиан, который описывает эти поля.

$$\mathcal{L}_\phi = i\overline{(\nu^c)}_L^I \gamma^\mu \partial_\mu (\nu^c)_L^I + i\bar{\psi}_i^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^{iI} + \frac{i}{2}\bar{\psi}^{ijI}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{ij}^I$$

$$- \Big[(Y_1)_{IJ}\, \varepsilon^{ijklm} \psi_{ij}^{IT} C \psi_{kl}^J \Phi_m + (Y_2)_{IJ}\, \psi_{ij}^{TI} C \psi^{iJ} \Phi^{*j} +$$

$$+ (Y_3)_{IJ} (\nu^c)_L^{IT} C \psi^{iJ} \Phi_i + \frac{1}{2} M_{IJ} (\nu^c)_L^{IT} C (\nu^c)_L^J + \text{к.с.} \Big]$$

При этом для правого нейтрино в кинетическом слагаемом стоит обычная производная, т.к. оно лежит в тривиальном представлении калибровочной группы.

Юкавские слагаемые должны быть инвариантны как относительно группы Лоренца, так и относительно калибровочной группы.

Лоренц-инвариантность:

Скаляры типа $\bar{\psi}\psi$ не подходят, т.к.

$$\overline{\psi_L}\psi_L = (\bar{\psi})_R \psi_L = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1+\gamma_5)\cdot\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = 0$$

Но известно, что ψ^c под действием группы Лоренца преобразуется также как и ψ. Поэтому скаляром будет величина

$\overline{\psi^c}\psi = \psi^T C \psi$, причём для левых фермионов

$\psi_L^T C \psi_L \neq 0$, т.к. $C = i\gamma^0\gamma^2$ - произведение чётного числа γ-матриц.

Калибровочная инвариантность достигается за счёт того, что верхние и нижние индексы друг с другом свёрнуты.

Выясним теперь, можно ли сделать какие-либо юкавские константы диагональными, вещественными и положительно определёнными.

Ранее было показано, что если Y - невырожденная матрица, то $\exists$ A и B, т.ч. $A^+A = 1$ и $B^+B = 1$, для которых

$A^{-1}YB = D$ - диагональная, Re и > 0.

Мы можем совершать замены полевых переменных

$$\psi^I_{ij} \to (A_2^*)_{IJ} \psi^J_{ij}$$

$$\psi^{iI} \to (B_2)_{IJ} \psi^{iJ}$$

$$(\nu^c)^I_L \to (A_3^*)_{IJ} (\nu^c)^J_L$$

При этом матрицы юкавских констант будут меняться как

$$\begin{cases} Y_1 \to A_2^+ Y_1 A_2^* = A_2^{-1} Y_1 A_2^* \\ Y_2 \to A_2^{-1} Y_2 B_2 = D_2 \\ Y_3 \to A_3^{-1} Y_3 B_2 \\ M \to A_3^{-1} M A_3^* \end{cases}$$

При этом видно, что можно диагонализовать либо Y_2, либо Y_3. Поскольку Y_2 более важна, то мы будем диагонализовать её.

т.о. $(Y_2)_{IJ}$ – диагональна, Re и ≥ 0, а остальные матрицы, вообще говоря, диагональными не являются.

§ 10. Взаимодействие фермионов с калибровочными бозонами в $SU(5)$-модели.

Рассмотрим часть лагранжиана фермионного сектора, которая содержит кинетические слагаемые:

$$\mathcal{L}_{\Phi,\text{кин.}} = i\,\overline{(\partial^c)}{}_L^I \gamma^\mu \partial_\mu (\partial^c)_L^I + i\bar{\psi}_i^I \gamma^\mu D_\mu \psi^{iI} + \frac{i}{2}\bar{\psi}^{ij\,I}\gamma^\mu D_\mu \psi_{ij}^I$$

Она однозначно задаётся представлениями, в которых лежат фермионы. Запишем её в терминах полей Стандартной Модели.

Для этого нам потребуется тождества

$$i\bar{\psi}^c \gamma^\mu \partial_\mu \psi^c \Rrightarrow i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

$$\bar{\psi}^c \gamma^\mu A_\mu \psi^c = -\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu^T \psi$$

где стрелка указывает, что отброшены полные производные.

Докажем эти тождества:

$$\bar{\psi}^c = \psi^T C \implies \psi^c = (\psi^T C \gamma^0)^+ = -\gamma^0 C \psi^*$$

Поэтому

$$i\bar{\psi}^c \gamma^\mu \partial_\mu \psi^c = i\psi^T C\gamma^\mu(-\gamma^0 C)\partial_\mu \psi^* = i\psi^T C\gamma^\mu C^{-1} C\gamma^0 C^{-1}\partial_\mu \psi^*$$

$$= i\psi^T \gamma^{\mu T}\gamma^{0T}\partial_\mu \psi^* = (i\psi^T \gamma^{\mu T}\gamma^{0T}\partial_\mu\psi^*)^T =$$

(с учётом антикоммутации спинорных полей)

$$= -i\partial_\mu \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi = -i\partial_\mu \bar\psi \gamma^\mu \psi \;\stackrel{\leftrightarrow}{=}\; i\bar\psi \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

Аналогичным образом

$$\overline{\psi^c} \gamma^\mu A_\mu \psi^c = \psi^T C \gamma^\mu A_\mu (-\gamma^0 C)\psi^* = \psi^T C \gamma^\mu C^{-1} A_\mu C \gamma^0 C^{-1} \psi^*$$

$$= \psi^T \gamma^{\mu T} A_\mu \gamma^{0T} \psi^* = (\psi^T \gamma^{\mu T} A_\mu \gamma^{0T} \psi^*)^T = -\psi^+ \gamma^0 A_\mu^T \gamma^\mu \psi$$

$$= -\bar\psi \gamma^\mu A_\mu^T \psi$$

В силу этих тождеств

$$i\overline{\psi^c} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^c = i\overline{\psi^c} \gamma^\mu (\partial_\mu + T(A_\mu))\psi^c \;\stackrel{\leftrightarrow}{=}$$

$$\stackrel{\leftrightarrow}{=}\; i\bar\psi \gamma^\mu (\partial_\mu - T(A_\mu)^T)\psi = i\bar\psi \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi$$

где было учтено, что ψ и ψ^c лежат в сопряжённых друг к другу представлениях.

Используем теперь эти тождества для того, чтобы записать $\mathcal{L}_{\phi,\text{кин}}$ в обозначениях Стандартной модели.

Имеем:

$$i\overline{(\partial^c)_L} \gamma^\mu \partial_\mu (\partial^c)_L = i\overline{(\partial_R)^c} \gamma^\mu \partial_\mu (\partial_R)^c \;\stackrel{\leftrightarrow}{=}$$

$$\stackrel{\leftrightarrow}{=}\; i\bar\partial_R \gamma^\mu \partial_\mu \partial_R$$

$$i\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^i = i\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \left[\partial_\mu \psi^i - (A_\mu^T)^i_{\ j}\, \psi^j\right] =$$

$$= i\,\overline{(d^{c1}, d^{c2}, d^{c3}, e, -\nu)}_L\, \gamma^\mu \left\{ \partial_\mu - \left(\begin{array}{c|c} \underset{su(3)}{A_\mu} & \frac{ie_5}{2}(X_\mu^*\ Y_\mu^*) \\ \hline \frac{ie_5}{2}\begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix} & \underset{su(2)}{A_\mu} \end{array}\right)^T \right.$$

$$\left. - ie_1 \left(\begin{array}{c|c} -1/3 & 0 \\ \hline 0 & +1/2 \end{array}\right)^T \underset{u(1)}{A_\mu} \right\} \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L =$$

$$= i\,\overline{(d^c)}_L\, \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \underset{su(3)}{A_\mu^T} + \frac{ie_1}{3} \underset{u(1)}{A_\mu}\right) (d^c)_L$$

$$+ i\,\overline{(e, -\nu)}_L\, \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \underset{su(2)}{A_\mu^T} - \frac{ie_1}{2} \underset{u(1)}{A_\mu}\right) \begin{pmatrix} e \\ -\nu \end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{e_5}{2}\, \overline{(d^{c1}, d^{c2}, d^{c3} | e, -\nu)}_L\, \gamma^\mu \left(\begin{array}{c|c} 0 & X_\mu\ Y_\mu \\ \hline \begin{matrix} X_\mu^* \\ Y_\mu^* \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ \hline e \\ -\nu \end{array}\right)_L =$$

$$= i\bar{d}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \underset{su(3)}{A_\mu} - \frac{ie_1}{3} \underset{u(1)}{A_\mu}\right) d_R$$

$$+ i\,\overline{(\nu, e)}_L\, \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{su(2)}{A_\mu^T} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{ie_1}{2} \underset{u(1)}{A_\mu}\right) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{e_5}{2}\, \overline{(d^c)}_{La} \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} e \\ -\nu \end{pmatrix}_L + \frac{e_5}{2}\, \overline{(e, -\nu)}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (d^c)_L^a$$

При этом

$$-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\sigma^A)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^A,$$ так что

$$i\bar{\psi}_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_i = i\bar{d}_R \gamma^\mu \Big(\partial_\mu + \underset{su(3)}{A_\mu} - \frac{ie_1}{3} \underset{u(1)}{A_\mu}\Big) d_R$$

$$+ i\overline{(\nu, e)}_L \gamma^\mu \Big(\partial_\mu + \underset{su(2)}{A_\mu} - \frac{ie_1}{2} \underset{u(1)}{A_\mu}\Big) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L +$$

$$+ \frac{e_5}{2} \overline{(d_R)^c_a} \gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L +$$

$$+ \frac{e_5}{2} \overline{(\nu, e)}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*_{\mu a} \\ Y^*_{\mu a} \end{pmatrix} (d_R)^{ca} =$$

$$= i\bar{d}_R \gamma^\mu \underset{(\text{СМ})}{\mathcal{D}_\mu} d_R + i\overline{(\nu, e)}_L \gamma^\mu \underset{(\text{СМ})}{\mathcal{D}_\mu} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$$

$$+ \Big[\frac{e_5}{2} \overline{(d_R)^c_a} \gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L + \text{к.с.} \Big]$$

где $\underset{(\text{СМ})}{\mathcal{D}_\mu}$ обозначает производные по полям Стандартной Модели.

Последнее равенство также следует из формулы

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu \chi)^* = (\bar{\psi}\gamma^\mu \chi)^+ = \chi^+ \gamma^{\mu +} \gamma^0 \psi = \chi^+ \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu +} \gamma^0 \psi$$

$$= \bar{\chi} \gamma^\mu \psi$$

Аналогичным образом переписываем слагаемое

$$\frac{i}{2}\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{ij}$$

Вначале необходимо записать выражение для ковариантной производной:

$$\psi_{ij} \to \omega_i{}^k \omega_j{}^l \psi_{kl} \simeq \psi_{ij} + \alpha_i{}^k \psi_{kj} + \alpha_j{}^l \psi_{il}$$

Поэтому

$$\mathcal{D}_\mu \psi_{ij} = \partial_\mu \psi_{ij} + (A_\mu)_i{}^k \psi_{kj} + (A_\mu)_j{}^k \psi_{ik}$$

Как следствие, рассматриваемое выражение может быть переписано в виде

$$\frac{i}{2}\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{ij} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu \left(\partial_\mu \psi_{ij} + (A_\mu)_i{}^k \psi_{kj} + (A_\mu)_j{}^k \psi_{ik}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{ij} + i\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu (A_\mu)_i{}^k \psi_{kj}$$

Будем вычислять различные части этого выражения по отдельности.

Из формулы $i\bar{\Psi}^c\gamma^\mu\partial_\mu\psi^c \doteq i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ очевидно, что

$$\frac{i}{2}\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu \partial_\mu \psi^{ij} = i\bar{u}_R\gamma^\mu\partial_\mu u_R + i\overline{(u,d)}_L\gamma^\mu\partial_\mu\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}_L$$

$$+ i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R$$

Рассмотрим теперь слагаемое

$$i\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu (A_\mu)_i{}^k \Psi_{kj}$$

и разобьём индексы на 2 группы: $i=(a,\alpha)$, где $a=\overline{1,3}$; $\alpha=4,5$.

Калибровочные поля Стандартной модели получаются из компонент

$$(A_\mu)_a{}^b = (\underset{SU(3)}{A_\mu})_a{}^b - \frac{ie_1}{3}\underset{U(1)}{A_\mu}\,\delta_a^b$$

$$(A_\mu)_\alpha{}^\beta = (\underset{SU(2)}{A_\mu})_\alpha{}^\beta + \frac{ie_1}{2}\underset{U(1)}{A_\mu}\,\delta_\alpha^\beta$$

Слагаемые, которые содержат эти поля, имеют вид

$$i\bar{\Psi}^{\underset{\text{“−”}}{\alpha a}}\gamma^\mu (A_\mu)_\alpha{}^\beta \Psi_{\underset{\text{“−”}}{\beta a}} = i\,\overline{(u,d)}_L^{\,a}\gamma^\mu\Big[\underset{SU(2)}{A_\mu} + \frac{ie_1}{2}\underset{U(1)}{A_\mu}\Big]\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_{La}$$

$$i\bar{\Psi}^{a\alpha}\gamma^\mu (A_\mu)_a{}^b \Psi_{b\alpha} = i\,\overline{(u,d)}_L\gamma^\mu\Big[\underset{SU(3)}{A_\mu} - \frac{ie_1}{3}\underset{U(1)}{A_\mu}\Big]\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L$$

(для простоты цветовой индекс не выписан)

$$i\bar{\Psi}^{\alpha\gamma}\gamma^\mu (A_\mu)_\alpha{}^\beta \Psi_{\beta\gamma} = i\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\overline{(e^c)}_L\gamma^\mu\Big[(\underset{SU(2)}{A_\mu})_\alpha{}^\beta + \frac{ie_1}{2}\underset{U(1)}{A_\mu}\,\delta_\alpha^\beta\Big]$$

$$\cdot\,\varepsilon_{\beta\gamma}(e^c)_L = i\,\delta^\alpha_\beta\,\overline{(e_R)^c}\gamma^\mu\Big[\underbrace{\cancel{(\underset{SU(2)}{A_\mu})_\alpha{}^\beta}}_{\to 0} + \frac{ie_1}{2}\underset{U(1)}{A_\mu}\,\delta_\alpha^\beta\Big](e_R)^c$$

$$= i\,\bar{e}_R\gamma^\mu\cdot\Big(-ie_1\underset{U(1)}{A_\mu}\Big)e_R$$

$$i\bar{\psi}^{ad}\gamma^{\mu}(A_{\mu})_a{}^{b}\psi_{bd} = i\varepsilon^{ade}\overline{(u^c)}_{Le}\gamma^{\mu}\Big[\underset{su(3)}{(A_{\mu})_a{}^{b}} -$$

$$-\frac{ie_1}{3}\underset{u(1)}{A_{\mu}}\delta_a^b\Big]\cdot\varepsilon_{bdf}(u^c)_L^f = i\left(\delta_b^a\delta_f^e - \delta_f^a\delta_b^e\right)\overline{(u_R)}_e^c\cdot\gamma^{\mu}$$

$$\cdot\Big[\underset{su(3)}{(A_{\mu})_a{}^{b}} - \frac{ie_1}{3}\underset{u(1)}{A_{\mu}}\delta_a^b\Big](u_R)^{cf} = -i\,\overline{(u_R)}_b^c\gamma^{\mu}\underset{su(3)}{(A_{\mu})_a{}^{b}}(u_R)^{ca}$$

$$-i\,\overline{(u_R)}_a^c\,\gamma^{\mu}\cdot ie_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\underset{u(1)}{A_{\mu}}(u_R)^{ca} =$$

$$= i\,\bar{u}_R\gamma^{\mu}\underset{su(3)}{A_{\mu}}u_R + i\,\bar{u}_R\gamma^{\mu}\underset{u(1)}{A_{\mu}}\left(+\frac{2ie_1}{3}\right)u_R$$

Соединим полученное слагаемое с предыдущим, получаем

$$i\bar{u}_R\gamma^{\mu}\partial_{\mu}u_R + i\overline{(u,d)}_L\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R\gamma^{\mu}\partial_{\mu}e_R$$

$$+ i\bar{u}_R\gamma^{\mu}\Big(\underset{su(3)}{A_{\mu}} + \frac{2ie_1}{3}\underset{u(1)}{A_{\mu}}\Big)u_R + i\overline{(u,d)}_L\gamma^{\mu}\Big(\underset{su(3)}{A_{\mu}} + \underset{su(2)}{A_{\mu}}$$

$$+ \frac{ie_1}{6}\underset{u(1)}{A_{\mu}}\Big)\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R\gamma^{\mu}(-ie_1\underset{u(1)}{A_{\mu}})e_R =$$

$$= i\bar{u}_R\gamma^{\mu}\underset{(cm)}{\mathcal{D}_{\mu}}u_R + i\overline{(u,d)}_L\gamma^{\mu}\underset{(cm)}{\mathcal{D}_{\mu}}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R\gamma^{\mu}\underset{(cm)}{\mathcal{D}_{\mu}}e_R$$

– получаются правильные выражения для ковариантных производных по группе Стандартной Модели.

Рассмотрим теперь слагаемые, содержащие поля

$$(A_\mu)_a{}^\beta \longrightarrow \frac{ie_5}{2}\left(X^*_{\mu a}, Y^*_{\mu a}\right)$$

$$(A_\mu)_\alpha{}^b \longrightarrow \frac{ie_5}{2}\begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix}$$

Они имеют следующий вид:

$$i\bar\Psi^{\alpha\gamma}\gamma^\mu (A_\mu)_\alpha{}^b \psi_{b\gamma} = \cancel{+}\,\cancel{i}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\overline{(e^c)}_L\gamma^\mu \frac{\cancel{i}e_5}{2}\begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot (u,d)_{Lb}\right] = \mathrm{tr}\left[\overline{(e^c)}_L \gamma^\mu \frac{ie_5}{2}\begin{pmatrix} +Y_\mu^b \\ -X_\mu^b \end{pmatrix}(u,d)_{Lb}\right] =$$

$$= \frac{e_5}{2}\cdot\overline{(e^c)}_L\gamma^\mu\left(X_\mu^a, Y_\mu^a\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}$$

$$i\bar\Psi^{\alpha a}\gamma^\mu (A_\mu)_\alpha{}^b \psi_{ba} = \cancel{+}\,\cancel{i}\,\overline{(u,d)}_L^a\gamma^\mu \frac{\cancel{i}e_5}{2}\begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix}\varepsilon_{bad}(u^c)_L^d$$

$$= -\frac{e_5}{2}\varepsilon_{abd}\,\overline{(u,d)}_L^a\gamma^\mu\begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix}(u^c)_L^d$$

$$i\bar\Psi^{a\gamma}\gamma^\mu (A_\mu)_a{}^\beta \psi_{\beta\gamma} = i\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} \bar u \\ \bar d \end{pmatrix}_L^a \gamma^\mu\cdot\frac{ie_5}{2}\left(X^*_{\mu a}, Y^*_{\mu a}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(e^c)_L\right] = -\frac{e_5}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} \bar d \\ -\bar u \end{pmatrix}_L^a\gamma^\mu\left(X^*_{\mu a}, Y^*_{\mu a}\right)(e^c)_L\right]$$

$$= \frac{e_5}{2}\overline{(u,d)}_L^a\gamma^\mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^*_{\mu a} \\ Y^*_{\mu a} \end{pmatrix}(e^c)_L$$

$$i\bar{\Psi}^{ab}\gamma^\mu (A_\mu)_a{}^\beta \psi_{\beta b} = \cancel{i}\,\varepsilon^{abd}\,\overline{(u^c)}_{Ld}\,\gamma^\mu \cdot \frac{\cancel{i}e_5}{2}(X^*_{\mu a}, Y^*_{\mu a})\cdot\cancel{(-1)}\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{Lb} = -\frac{e_5}{2}\varepsilon^{abd}\overline{(u^c)}_{Ld}(X^*_{\mu b}, Y^*_{\mu b})\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}$$

Т.о. результат вычисления этого слагаемого имеет вид

$$\frac{i}{2}\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{ij} = i\bar{u}_R\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu} u_R + i\overline{(u,d)}_L\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L +$$

$$+ i\bar{e}_R\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu} e_R + \frac{e_5}{2}\overline{(e^c)}_L\gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}$$

$$+ \frac{e_5}{2}\overline{(u,d)}{}^a_L\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^*_{\mu a} \\ Y^*_{\mu a} \end{pmatrix}(e^c)_L - \frac{e_5}{2}\varepsilon_{abd}\overline{(u,d)}{}^a_L\gamma^\mu \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} X^b_\mu \\ Y^b_\mu \end{pmatrix}(u^c)^d_L - \frac{e_5}{2}\varepsilon^{abd}\overline{(u^c)}_{Ld}\gamma^\mu (X^*_{\mu b}, Y^*_{\mu b})\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}$$

Суммируя результаты для всех слагаемых, получаем, что

$$i\overline{(\nu^c)}_L\gamma^\mu \partial_\mu (\nu^c)_L + i\bar{\Psi}_i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^i + \frac{i}{2}\bar{\Psi}^{ij}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{ij} =$$

$$= i\bar{\nu}_R\gamma^\mu \partial_\mu \nu_R + i\overline{(\nu,e)}_L\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu}\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu} e_R$$

$$+ i\bar{d}_R\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu} d_R + i\bar{u}_R\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu} u_R + i\overline{(u,d)}_L\gamma^\mu \underset{(см)}{\mathcal{D}_\mu}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L +$$

$$+ \frac{e_5}{2}\overline{(d_R)^c_a}\,\gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{e_5}{2}\overline{(\nu, e)}_L\,\gamma^\mu \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^*_{\mu a}\\ Y^*_{\mu a}\end{pmatrix}(d_R)^{ca}$$

$$+ \frac{e_5}{2}\overline{(e^c)}_L\,\gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_{La}$$

$$+ \frac{e_5}{2}\overline{(u, d)}^a_L\,\gamma^\mu \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^*_{\mu a}\\ Y^*_{\mu a}\end{pmatrix}(e^c)_L$$

$$- \frac{e_5}{2}\varepsilon_{abd}\,\overline{(u, d)}^a_L\,\gamma^\mu \begin{pmatrix}X^b_\mu\\ Y^b_\mu\end{pmatrix}(u^c)^d_L$$

$$- \frac{e_5}{2}\varepsilon^{abd}\,\overline{(u^c)}_{Ld}\,\gamma^\mu (X^*_{\mu b}, Y^*_{\mu b})\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_{La}$$

Т.о. имеется часть, которая уже была в Стандартной модели, а также дополнительные слагаемые, которые содержат тяжёлые калибровочные бозоны X^a_μ и Y^a_μ. При этом дополнительные слагаемые автоматически оказываются вещественными. Например,

$$\left[\frac{e_5}{2}\overline{(d_R)^c_a}\,\gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L\right]^* =$$

$$= \frac{e_5}{2}\left[d^T_{Ra}\,C\,\gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L\right]^+ =$$

$$= \frac{e_5}{2}(\nu, e)^+_L\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^*_{\mu a}\\ Y^*_{\mu a}\end{pmatrix}\gamma^{\mu +} C^+ d^{*a}_R = [C^+ = -C]$$

$$= \frac{e_5}{2} (\nu, e)^+_L \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*_{\mu a} \\ Y^*_{\mu a} \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma^\mu (-\gamma^0 C d_R^{*a}) =$$

$$= \frac{e_5}{2} \overline{(\nu, e)}_L \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*_{\mu a} \\ Y^*_{\mu a} \end{pmatrix} \gamma^\mu (d_R^c)^a$$ – правильно.

Аналогичным образом доказывается, что

$$\left[\frac{e_5}{2} \overline{(e^c)}_L \gamma^\mu (X^a_\mu, Y^a_\mu) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} \right]^* =$$

$$= \frac{e_5}{2} \overline{(u, d)}^a_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*_{\mu a} \\ Y^*_{\mu a} \end{pmatrix} (e^c)_L .$$

Последние 2 слагаемые также взаимно сопряжены,

$$\left[\frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u, d)}^a_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} X^b_\mu \\ Y^b_\mu \end{pmatrix} (u^c)^d_L \right]^* =$$

$$= \frac{e_5}{2} \varepsilon^{abd} \left[(u, d)^{+a}_L \gamma^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} X^b_\mu \\ Y^b_\mu \end{pmatrix} (-\gamma^0 C u_L^{*d}) \right]^+ =$$

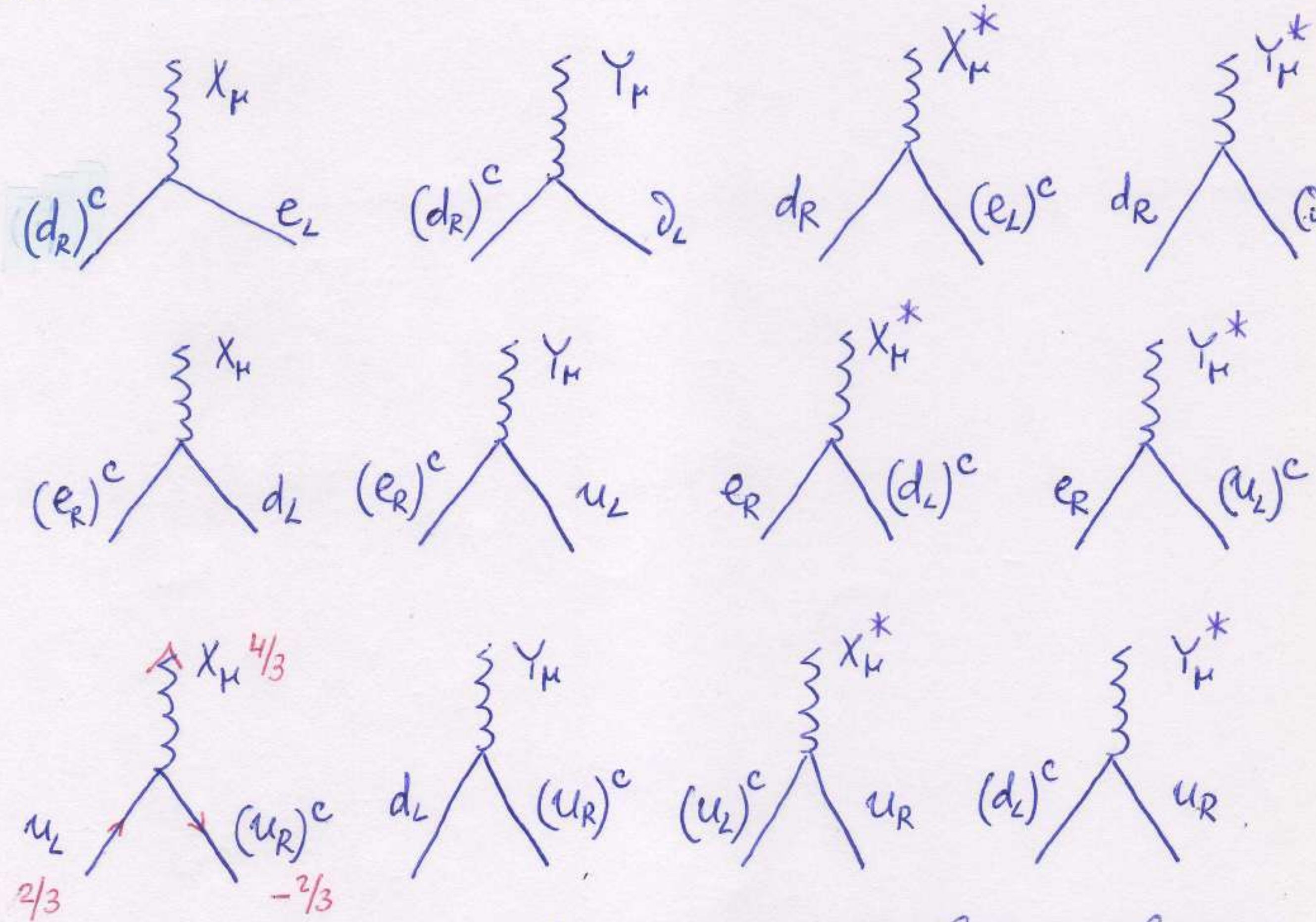
$$= \frac{e_5}{2} \varepsilon^{abd} u^T_{Ld} C \gamma^\mu (X^*_{\mu b}, Y^*_{\mu b}) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} =$$

$$= \frac{e_5}{2} \varepsilon^{abd} \overline{(u^c)}_{Ld} \gamma^\mu (X^*_{\mu b}; Y^*_{\mu b}) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}$$

– т.о. мы убедились, что все дополнительные слагаемые в сумме дают вещественное выражение, которое может быть записано в виде

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{e_5}{2}\overline{(d_R)^c_a}\,\gamma^\mu\,(X^a_\mu, Y^a_\mu)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L\\ &+\frac{e_5}{2}\overline{(e_R)^c}\,\gamma^\mu\,(X^a_\mu, Y^a_\mu)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_{La}\\ &-\frac{e_5}{2}\varepsilon_{abd}\,\overline{(u,d)_L}^a\,\gamma^\mu\begin{pmatrix}X^b_\mu\\ Y^b_\mu\end{pmatrix}(u_R)^{cd} + \text{к.с.}\end{aligned}}$$

Изобразим графически вершины, которые соответствуют этим слагаемым.



— Благодаря этим вершинам оказываются возможными процессы, переводящие кварки в лептоны, кварки в антикварки и наоборот.

§ 11. Распад протона и связанного нейтрона

Протон является стабильной частицей в силу закона сохранения барионного числа в Стандартной Модели и минимальности масс. (для $B = 1$)

Нейтрон в свободном состоянии распадается за $880,2 \pm 0,1$ с (среднее время жизни)

Нейтроны в ядрах стабильны в силу сохранения барионного числа и наличия энергии связи.

Но в теориях Великого Объединения нет закона сохранения барионного числа, т.ч. возможны распады типа

$$p \to e^+ \pi^0 \qquad\qquad n \to e^+ \pi^-$$

$$p \to \tilde{\nu} \pi^+ \qquad\qquad n \to \tilde{\nu} \pi^0$$

$$\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots$$

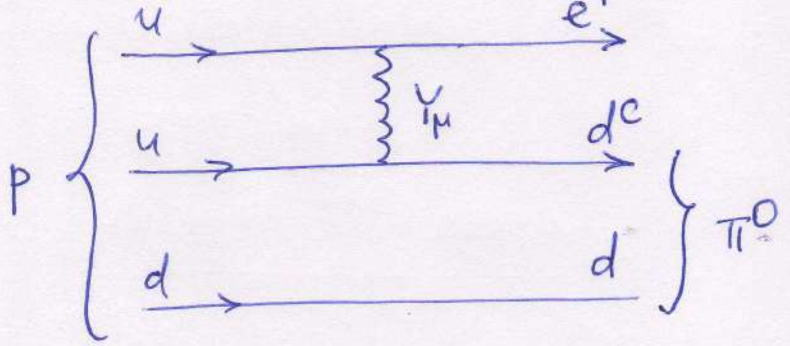
$M_p \simeq 938,272081$ МэВ $\pm 0,000006$ МэВ $\qquad M_n \simeq 939,56413$ МэВ $\pm 0,000006$ МэВ

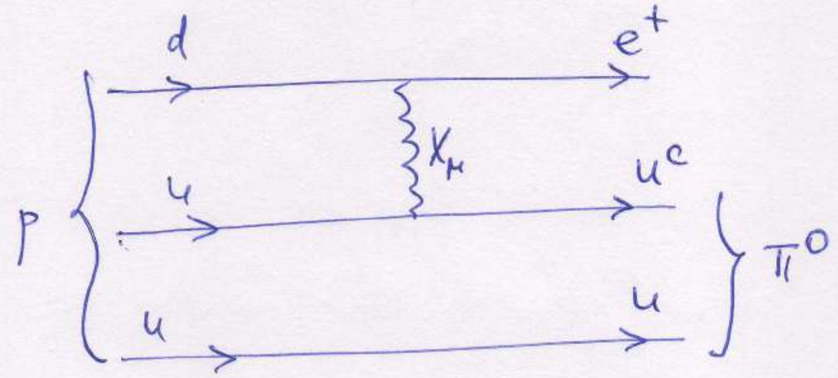
$M_{\pi^\pm} = 139,57061 \pm 0,00024$ МэВ

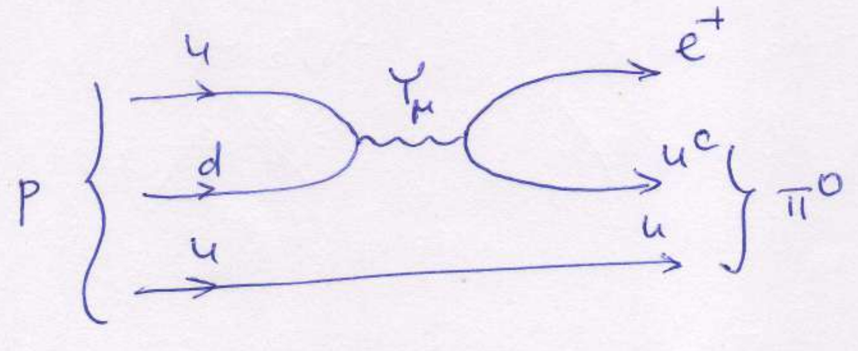
$M_{\pi_0} = 134,9770 \pm 0,0005$ МэВ

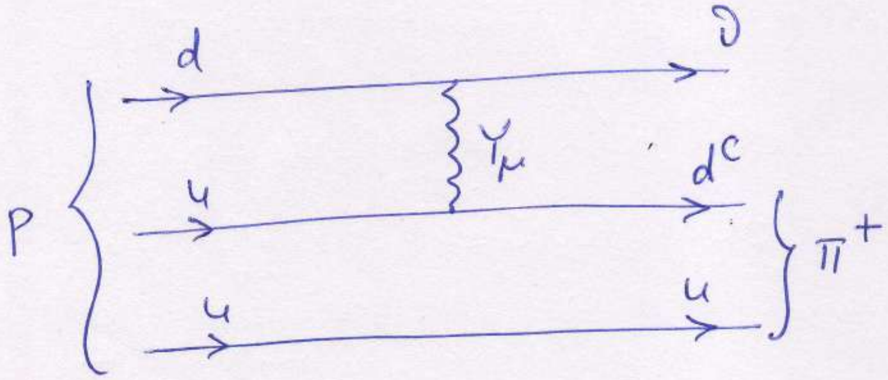
— получается очень большой выигрыш по энергии, который заведомо перекрывает любую энергию связи.

Нарисуем диаграммы, описывающие распад протона и связанного нейтрона в SU(5) модели:



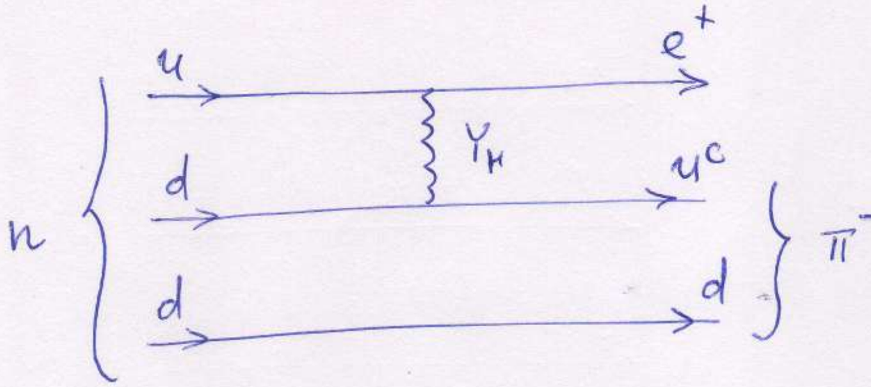




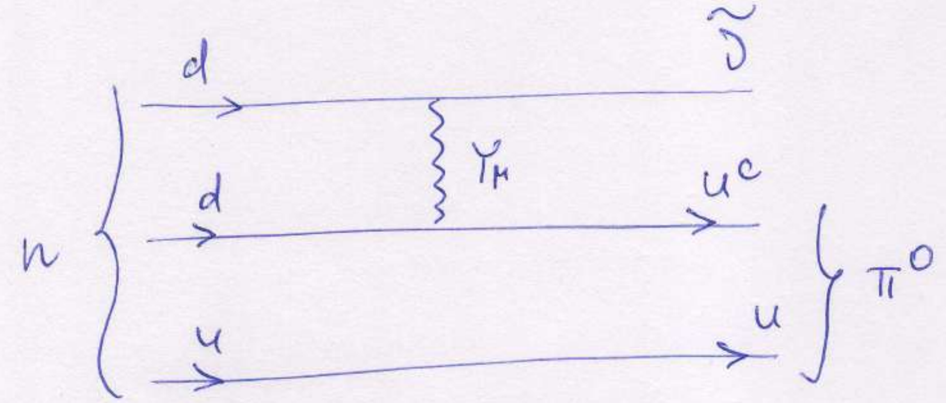


и так далее

В случае распада нейтрона в ядрах возможны, например, такие диаграммы:



и т.д.



Оценим теперь время жизни протона и связанного нейтрона.

Амплитуды очевидно пропорциональны $\frac{1}{M_X^2}$ в силу наличия пропагатора тяжёлого калибровочного бозона. Поэтому вероятность распада

$$w \sim \frac{1}{M_X^4}$$

Но $[w] = [\frac{1}{\tau}] = m$

$\Rightarrow$ нужна ещё 5-я степень массы. Но единственный размерный параметр – масса протона M_p.

Поэтому

$$w \sim \frac{M_p^5}{M_X^4}$$

а время жизни τ по порядку величины равно

$$\tau \sim \frac{M_X^4}{M_p^5}$$

Сделаем численную оценку:

$$\tau \sim \frac{(10^{15}\ ГэВ)^4}{(1\ ГэВ)^5} = 10^{60}\ ГэВ^{-1}$$

$$1\ ГэВ = 10^9\ эВ \sim 10^9 \cdot 10^{-19}\ Дж = 10^{-10}\ Дж$$

$$\Rightarrow t[1\ ГэВ] = \frac{10^{-34}\ Дж \cdot с}{10^{-10}\ Дж} = 10^{-24}\ с$$

$$\Rightarrow \tau \sim 10^{60} \cdot 10^{-24}\ с = 10^{36}\ с = \frac{10^{36}}{3600 \cdot 24 \cdot 365}\ лет \sim$$

$$\sim \frac{10^{36}}{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^2}\ лет \sim 10^{29}\ лет$$

Для сравнения – возраст Вселенной $\sim 13{,}8$ млд. лет $= 1{,}38 \cdot 10^9$ лет

Однако время жизни протона $\sim 10^{29}$ лет уверенно наблюдалось бы в современных экспериментах.

§12. Юкавское взаимодействие в $SU(5)$ ТВО

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_{\text{кин.}} + \mathcal{L}_{\text{юкава}},$$ где

$$\mathcal{L}_{\text{юкава}} = -\Big[(Y_1)_{IJ}\, \varepsilon^{ijklm}\, \psi^{T I}_{ij} C \psi^{J}_{kl} \phi_m + (Y_2)_{IJ} \psi^{T I}_{ij} C \psi^{iJ} \phi^{*j}$$

$$+ (Y_3)_{IJ} (\nu^c)^{T I}_L C \psi^{iJ} \phi_i + \frac{1}{2} M_{IJ} (\nu^c)^{T I}_L C (\nu^c)^J_L + \text{к.с.} \Big]$$

Ранее было показано, что $(Y_2)_{IJ}$ можно сделать диагональной, вещественной и положительно определённой.

Хиггсовское поле $\phi_i \in 5$ имеет структуру

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \boxed{\begin{matrix}\phi_4 \\ \phi_5\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 — триплет с массой $\sim 10^{15}$ ГэВ и нулевым вакуумным средним

ϕ_4, ϕ_5 — дуплет, отождествляется с хиггсом Стандартной модели

При низких энергиях триплет можно заменить на нулевое вакуумное среднее, т.е.

$$\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}$$

Выясним теперь, что в этом случае дают юкавские слагаемые $SU(5)$-модели. (Слагаемые с триплетом не рассматриваем), учитывая, что

$$(\psi^c)^c = (-\gamma^0 C \psi^*)^c = \gamma^0 C \gamma^{0*} C^* \psi = -\gamma^0 C \gamma^{0*} C^{-1} \psi = \gamma^0 \gamma^{0+} \psi$$
$$= \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi$$

$$\frac{1}{2} M_{IJ} (\nu^c)^{T I}_L C (\nu^c)^J_L = \frac{1}{2} M_{IJ} \overline{\nu}_R^I (\nu_R)^{cJ}$$

– далее мы увидим, что это майорановская масса для правого нейтрино.

$$(Y_3)_{IJ} (\nu^c)^{I\,T}_L C \psi^{iJ} \phi_i = (Y_3)_{IJ} \overline{\nu}_R^I \psi^{iJ} \phi_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Y_3)_{IJ} \overline{\nu}_R^I \, (0,0,0,\phi_4,\phi_5) \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L =$$

$$= (Y_3)_{IJ} \overline{\nu}_R^I \, (\phi_4, \phi_5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$$

– очевидно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ инвариант.

$$(Y_2)_{IJ} \psi^{T I}_{ij} C \psi^{iJ} \phi^{*j} \Rightarrow (Y_2)_{IJ} \Big[\psi^{T I}_{\alpha\beta} C \psi^{\alpha J} \phi^{*\beta} +$$

$$+ \psi^{T I}_{a\beta} C \psi^{aJ} \phi^{*\beta} \Big] = -(Y_2)_{IJ} \, \mathrm{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overline{e}_R^I \begin{pmatrix} e \\ -\nu \end{pmatrix}^J_L (\phi_4^*, \phi_5^*) \right]$$

$$+ (Y_2)_{IJ} (u, d)^{T I}_{La} C (d^c)^{aJ}_L \begin{pmatrix} \phi_4^* \\ \phi_5^* \end{pmatrix} = \text{(транспонируем второе слагаемое)}$$

$$= + (Y_2)_{IJ} \left[\overline{e}_R^I (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}^J_L + (d^c)^{T a J}_L C (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^I_{La} \right]$$

$$= (Y_2)_{IJ} \left[\overline{e}_R^I (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}^J_L + \overline{d}_R^J (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^I_L \right]$$

Сравним эти слагаемые с тем, что было в Стандартной модели:

$$\mathcal{L}_{СМ} \longrightarrow -(Y_e^+)_{IJ}\,\bar{e}_R^I\,(\phi_1^*,\phi_2^*)\begin{pmatrix}0\\e\end{pmatrix}_L^J -$$

$$-(Y_d^+)_{IJ}\,\bar{d}_R^I\,(\phi_1^*,\phi_2^*)\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}_L^J$$

Поэтому мы можем провести отождествление

$$(Y_e^+)_{IJ} = (Y_2)_{IJ}\,; \quad (Y_d^+)_{IJ} = (Y_2)_{JI}$$

т.о. мы получаем, что

$$Y_e = Y_d^T = Y_2^+$$

$\Rightarrow$ в области энергий, где имеется $SU(5)$ симметрия массы заряженных лептонов и нижних кварков совпадают. – новое предсказание $SU(5)$ ТВО.

Напомним, что

$m_e \simeq 0{,}51$ МэВ $\qquad m_d \simeq 4{,}7$ МэВ

$m_\mu \simeq 105$ МэВ $\qquad m_s \simeq 96$ МэВ

$m_\tau \simeq 1777$ МэВ $\qquad m_b \simeq 4{,}18$ ГэВ

Но, естественно, очень важную роль играют квантовые поправки.

$$(Y_1)_{IJ}\,\varepsilon^{ijklm}\,\psi_{ij}^{T\,I}\,C\,\psi_{kl}^J\,\phi_m \Rightarrow \quad (Y_1 \text{ – симметричная матрица})$$

$$\Rightarrow 4(Y_1)_{IJ}\,\varepsilon^{abd\alpha\beta}\,\psi_{ab}^{T\,I}\,C\,\psi_{d\alpha}^J\,\phi_\beta = 4(Y_1)_{IJ}\,\varepsilon^{abd}\cdot\varepsilon^{\alpha\beta}\cdot$$

$$\cdot\,\varepsilon_{abe}\,(u^c)_L^{e\,T\,I}\,C\,\psi_{d\alpha}^J\,\phi_\beta = 8(Y_1)_{IJ}\,\bar{u}_R^{a\,I}\,(u,d)_{La}^J\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_4\\\phi_5\end{pmatrix}$$

$$= 8(Y_1)_{IJ}\,\overline{u}_R^{aI}(\Phi_4,\Phi_5)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}^J_{La}$$

Сравним это с аналогичным выражение в лагранжиане Стандартной модели:

$$\mathcal{L}_{СМ} \longrightarrow -(Y_u^+)_{IJ}\,\overline{u}_R^I(\Phi_2,-\Phi_1)\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}^J_L$$

Поэтому (с учётом знака в $\mathcal{L}_{Юкава}$)

$$(Y_u^+)_{IJ} = +8(Y_1)_{IJ}$$

– здесь никаких новых предсказаний не возникает, но правильно получаются слагаемые лагранжиана Стандартной модели.

Т.о. из $SU(5)$ ТВО в низкоэнергетическом пределе мы получаем следующие Юкавские слагаемые:

$$\mathcal{L}_{Юкава} \Rrightarrow -8(Y_1)_{IJ}\,\overline{u}_R^I(\Phi_5,-\Phi_4)\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}^J_L - 8(Y_1^+)_{IJ}\,\overline{(u,d)}_L \cdot \begin{pmatrix}\Phi_5^*\\ -\Phi_4^*\end{pmatrix}u_R^J - (Y_2)_{IJ}\,\overline{d}_R^J(\Phi_4^*,\Phi_5^*)\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L - (Y_2^+)_{IJ}\,\overline{(u,d)}_L^J\begin{pmatrix}\Phi_4\\ \Phi_5\end{pmatrix}d_R^I$$

$$-(Y_2)_{IJ}\,\overline{e}_R^I(\Phi_4^*,\Phi_5^*)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}^J_L - (Y_2^+)_{IJ}\,\overline{(\nu,e)}_L^I\begin{pmatrix}\Phi_4\\ \Phi_5\end{pmatrix}e_R^J - (Y_3)_{IJ}\cdot \overline{\nu}_R^I(-\Phi_5,\Phi_4)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}^J_L - (Y_3^+)_{IJ}\,\overline{(\nu,e)}_L^I\begin{pmatrix}-\Phi_5^*\\ \Phi_4^*\end{pmatrix}\nu_R^J - \frac{1}{2}M_{IJ}\,\overline{\nu}_R^I(\nu_R)^{cJ}$$

$$-\frac{1}{2}(M^+)_{IJ}\,\overline{(\nu_R)^c}^I\nu_R^J$$

§ 13. Масса нейтрино и Великое объединение

Нейтрино отличается от других частиц очень малой (но отличной от 0) массой. Великое Объединение позволяет дать качественное объяснение этого факта.

Слагаемые, существенные для нахождения массы нейтрино, имеют вид

$$-(Y_3)_{IJ}\,\bar{\nu}_R^I\,(-\Phi_5,\Phi_4)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^J-(Y_3^+)_{IJ}\,\overline{(\nu,e)}_L^I\begin{pmatrix}-\Phi_5^*\\ \Phi_4^*\end{pmatrix}\nu_R^J$$

$$-\frac{1}{2}M_{IJ}\,\bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{cJ}-\frac{1}{2}M_{IJ}\,\overline{(\nu_R)^c}\,\nu_R$$

При нарушении $SU(2)\times U(1)$ до $U(1)_{em}$ поле Хиггса приобретает вакуумное среднее

$$\begin{pmatrix}\Phi_4\\ \Phi_5\end{pmatrix}_0=\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$$

Поэтому при энергиях много меньших 10^2 ГэВ рассматриваемые слагаемые дадут

$$-(Y_3)_{IJ}\,\bar{\nu}_R^I\,(-v,0)\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L^J-(Y_3^+)_{IJ}\,\overline{(\nu,e)}_L^I\begin{pmatrix}-v\\ 0\end{pmatrix}\nu_R^J$$

$$-\frac{1}{2}M_{IJ}\,\bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{cJ}-\frac{1}{2}M_{IJ}\,\overline{(\nu_R)^c}\,\nu_R=$$

$$= v(Y_3)_{IJ}\, \overline{\nu}_R^I \nu_L^J + v(Y_3^+)_{IJ}\, \overline{\nu}_L^I \nu_R^J - \frac{1}{2} M_{IJ}\, \overline{\nu}_R^I (\nu_R)^{cJ}$$

$$- \frac{1}{2}(M^+)_{IJ}\, \overline{(\nu_R)^c}^I \nu_R^J .$$

Если бы не было слагаемого с M_{IJ}, то нейтрино имело бы дираковскую массу $m_\nu = -vY_3$. Но слагаемое с M_{IJ} всё меняют.

Важно понимать порядки величин, входящих в этот лагранжиан.

$v \simeq 174{,}4$ ГэВ $\sim 10^2$ ГэВ.

M может быть только порядка M_X (нет других параметров) $\Rightarrow$ $M \sim 10^{15}$ ГэВ.

Удобно переписать низкоэнергетический лагранжиан для нейтрино в терминах майорановских спиноров ν_1 и ν_2, определяемых равенствами

$$\nu_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_1 , \qquad \nu_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu_2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\nu}_L = \overline{\nu}_1 \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \qquad \overline{\nu}_R = \overline{\nu}_2 \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$$

$$\overline{(\nu_R)^c} = (\nu_R)^T C = \nu_2^T \frac{1}{2}(1+\gamma_5) C = \nu_2^T C \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

$$= \overline{\nu}_2 \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \qquad (\nu_R)^c = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_2 .$$

Тогда

$$-\frac{1}{2}\mathcal{M}_{IJ}\overline{\nu}_R^I(\nu_R)^{cJ} = -\frac{1}{2}\mathcal{M}_{IJ}\cdot\overline{\nu}_2^I\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\cdot\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_2^J =$$

$$= -\frac{1}{4}\mathcal{M}_{IJ}\overline{\nu}_2^I(1-\gamma_5)\nu_2^J$$

$$-\frac{1}{2}(\mathcal{M}^+)_{IJ}\overline{(\nu_R)^c}^I\nu_R^J = -\frac{1}{2}(\mathcal{M}^+)_{IJ}\cdot\overline{\nu}_2^I\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu_2^J$$

$$= -\frac{1}{4}(\mathcal{M}^+)_{IJ}\overline{\nu}_2^I(1+\gamma_5)\nu_2^J$$

Если $\mathcal{M}_{IJ}$ - вещественная матрица, то

$$-\frac{1}{2}\mathcal{M}_{IJ}\overline{\nu}_R^I(\nu_R)^{cJ} + \text{к.с.} = -\frac{1}{2}\mathcal{M}_{IJ}\overline{\nu}_2^I\nu_2^J$$

- получается майорановское массовое слагаемое для правого нейтрино.

$$v(Y_3)_{IJ}\overline{\nu}_R^I\nu_L^J = v(Y_3)_{IJ}\overline{\nu}_2^I\cdot\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_1^J$$

$$v(Y_3^+)_{IJ}\overline{\nu}_L^I\nu_R^J = v(Y_3^+)_{IJ}\overline{\nu}_1^I\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu_2^J$$

Если Y_3 - вещественная матрица, то

$$v(Y_3)_{IJ}\overline{\nu}_R^I\nu_L^J + v(Y_3^+)_{IJ}\overline{\nu}_L^I\nu_R^J = v(Y_3)_{IJ}\overline{\nu}_2^I\nu_1^J$$

Поэтому (в случае, когда $\mathcal{M}$ и Y_3 - вещественные матрицы) лагранжиан для нейтрино в терминах майорановских спиноров примет вид

$$\mathcal{L}_{\text{нейтрино}} = v(Y_3)_{IJ}\bar{\nu}_2^I \nu_1^J - \frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I\nu_2^J$$

Рассмотрим вначале случай одного поколения.
Тогда

$$\mathcal{L}_{\text{нейтрино}} = vY_3\,\bar{\nu}_2\nu_1 - \frac{1}{2}M\bar{\nu}_2\nu_2 \equiv -m\bar{\nu}_2\nu_1 - \frac{1}{2}M\bar{\nu}_2\nu_2 =$$

[где $m \equiv -vY_3$]

$$= -\frac{1}{2}\left(\overline{\nu_1, \nu_2}\right)\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1 \\ \nu_2\end{pmatrix}$$

Массы нейтрино получаются как собственные значения массовой матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M\end{pmatrix}$$

$$\left(i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{\nu}_R\gamma^\mu\partial_\mu\nu_R \Rightarrow \frac{i}{2}\bar{\nu}_1\gamma^\mu\partial_\mu\nu_1 + \frac{i}{2}\bar{\nu}_2\gamma^\mu\partial_2\nu_2\right)$$

(после отбрасывания полных производных

$$-\frac{i}{2}\bar{\nu}_1\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\nu_1 + \frac{i}{2}\bar{\nu}_2\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\nu_2 = \frac{i}{4}\partial_\mu\left(-\bar{\nu}_1\gamma^\mu\gamma_5\nu_1 + \bar{\nu}_2\gamma^\mu\gamma_5\nu_2\right)\Big)$$

Найдём СЗ массовой матрицы:

$$0 = \det\begin{pmatrix} -\lambda & m \\ m & -\lambda+M\end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda M - m^2$$

$$D = M^2 + 4m^2 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{M \pm \sqrt{M^2+4m^2}}{2}$$

При этом $M \gg m$. Поэтому

$$\lambda_+ \simeq \frac{M+M}{2} = M$$

$$\lambda_- = \frac{M - M\sqrt{1+4m^2/M^2}}{2} \simeq \frac{M - M - 2m^2/M}{2} = -\frac{m^2}{M}$$

λ_+ соответствует майорановскому нейтрино с массой $\sim 10^{15}$ ГэВ, которое никак не сказывается на низкоэнергетической физике.

λ_- соответствует наблюдаемому нейтрино, которое оказывается майорановским.

При этом по порядку величины

$$\lambda_- = -\frac{m^2}{M} \sim \frac{(10^2 \text{ГэВ})^2}{10^{15}\text{ГэВ}} \simeq 10^{-11}\text{ГэВ} \simeq 10^{-2}\text{эВ}.$$

Эксперименты по осцилляциям нейтрино позволяют определить Δm^2 – разности квадратов масс для различных поколений.

$$\Delta m^2_{21} = (7{,}53 \pm 0{,}18)\cdot 10^{-5}\ \text{эВ}^2$$

$$\Delta m^2_{32} = (2{,}51 \pm 0{,}05)\cdot 10^{-3}\ \text{эВ}^2$$

– видно, что порядок величины получается правильным.

Такой механизм возникновения массы нейтрино (97)
называется качельным (see-saw) механизмом.

В случае, когда есть несколько поколений нейтрино, можно пренебречь импульсом правого нейтрино (ν_2) по сравнению с массой и выполнить по ν_2 интегрирование в производящем функционале. Тогда

$$\mathcal{L}_{\text{нейтрино}} = -m_{IJ}\bar{\nu}_2^I \nu_1^J - \frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I \nu_2^J \Rrightarrow$$

$$\Rrightarrow \frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I \nu_2^J \Big|_{0 = m\nu_1 + M\nu_2} = \frac{1}{2}\bar{\nu}_2^T M \nu_2 \Big|_{\nu_2 = -M^{-1}m\nu_1}$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\nu}_1^T m^T M^{-1} m \nu_1 = \frac{1}{2}\bar{\nu}_1^I (m^T M^{-1} m)_{IJ} \nu_1^J$$

– в общем случае также будут и смешивания засчёт недиагональности.

<u>Замечание</u>: Знак перед массой не существенен:
Если $\mathcal{L} = i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu + m\bar{\nu}\nu$, где ν - майоран. спинор,
то определяем $\nu' \equiv i\gamma_5\nu$

$$\overline{\nu'} = \nu^+(-i)\gamma_5\gamma^0 = i\bar{\nu}\gamma_5$$

$$\overline{\nu'^c} = \nu^T i\gamma_5 C = i\bar{\nu}\gamma_5$$

– по-прежнему майорановский.

Тогда

$$\mathcal{L} = i(-i)\bar{\nu}'\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu(-i\gamma_5\nu') + m(-i)\bar{\nu}'\gamma_5(-i)\gamma_5\nu' =$$

$$= i\bar{\nu}'\gamma^\mu\partial_\mu\nu' - m\bar{\nu}'\nu'$$

– знак перед массой меняется на противоположной.

§14. Сохранение B-L в SU(5) ТВО

Лагранжиан фермионного сектора SU(5) модели имеет вид

$$\mathcal{L}_\phi = i\overline{(\nu^c)_L}^I\gamma^\mu\partial_\mu(\nu^c)_L^I + i\bar{\psi}_i^I\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi^{iI} + \frac{i}{2}\bar{\psi}^{ijI}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_{ij}^I$$

$$-\Big[(Y_1)_{IJ}\,\varepsilon^{ijklm}\psi_{ij}^{IT}C\psi_{kl}^J\phi_m + (Y_2)_{IJ}\psi_{ij}^{IT}C\psi^{iJ}\phi^{*j} +$$

$$+ (Y_3)_{IJ}(\nu^c)_L^{IT}C\psi^{iJ}\phi_i + \frac{1}{2}M_{IJ}(\nu^c)_L^{IT}C(\nu^c)_L^J + \text{к.с.}\Big]$$

Почти все слагаемые в этом лагранжиане инвариантны относительно глобальных $U(1)$ преобразований

$$U(1)_F:\quad \psi_{ij}^I \to e^{-i\alpha/5}\psi_{ij}^I;\ \psi^{iI} \to e^{3i\alpha/5}\psi^{iI};$$

$$(\nu^c)_L^I \to e^{-i\alpha}(\nu^c)_L^I;\quad \phi_i \to e^{2i\alpha/5}\phi_i$$

где $\alpha \neq \alpha(x)$ – вещественное число.

Действительно, инвариантность кинетических слагаемых очевидна:

$$\psi^{I\,T}_{ij} C \psi^J_{kl} \phi_m \longrightarrow \cancel{e^{-i\alpha/5}} \psi^{I\,T}_{ij} C \cdot \cancel{e^{-i\alpha/5}} \psi^J_{kl} \cdot \cancel{e^{2i\alpha/5}} \phi_m = inv$$

$$\psi^{T\,I}_{ij} C \psi^{iJ} \phi^{*j} \longrightarrow \cancel{e^{-i\alpha/5}} \psi^{T\,I}_{ij} C \cdot \cancel{e^{3i\alpha/5}} \psi^{iJ} \cdot \cancel{e^{-2i\alpha/5}} \phi^{*j} = inv$$

$$(\nu^c)^{I\,T}_L C \psi^{iJ} \phi_i \longrightarrow \cancel{e^{-i\alpha}} (\nu^c)^{I\,T}_L C \cdot \cancel{e^{3i\alpha/5}} \psi^{iJ} \cdot \cancel{e^{+2i\alpha/5}} \phi_i = inv$$

Не инвариантным будет только майорановское массовое слагаемое для правого нейтрино:

$$(\nu^c)^{I\,T}_L C (\nu^c)^J_L \longrightarrow e^{-2i\alpha} (\nu^c)^{I\,T}_L C (\nu^c)^J_L \neq inv.$$

Однако можно легко модифицировать массовое слагаемое т.ч. получить инвариантную теорию:

$$\frac{1}{2} M_{IJ} (\nu^c)^{I\,T}_L C (\nu^c)^J_L \longrightarrow \frac{1}{2} (Y_4)_{IJ} S \cdot (\nu^c)^{I\,T}_L C (\nu^c)^J_L$$

где S - комплексное скалярное поле, преобразующееся по закону

$$S \longrightarrow e^{2i\alpha} S$$

и приобретающее вакуумное среднее $v \sim 10^{15}$ ГэВ, т.ч.

$$M_{IJ} = v (Y_4)_{IJ}.$$

Тогда мы получим полностью инвариантную теорию.

Выясним смысл данной симметрии.

Для этого совершим совокупность 2-х преобразований:

1) $U(1)_F$ с параметром $\alpha \neq \alpha(x)$

2) $U(1)_Y \in SU(5)$, параметр которого связан с α т.ч.

$$\Phi_i \longrightarrow \exp\left\{ i\alpha \left(\begin{array}{ccc|cc} 4/15 & & & & \\ & 4/15 & & & 0 \\ & & 4/15 & & \\ \hline & 0 & & -2/5 & \\ & & & & -2/5 \end{array} \right) \right\} \Phi_i \equiv \omega_i{}^j \Phi_j$$

В этом случае под действием указанной совокупности преобразований

$$\Phi_i \to \exp\left\{ \underbrace{i\alpha \left(\begin{array}{c|c} 4/15 & \\ \hline & -2/5 \end{array} \right)}_{U(1)_Y} + \underbrace{i\alpha \left(\begin{array}{c|c} 2/5 & \\ \hline & 2/5 \end{array} \right)}_{U(1)_F} \right\} \Phi_i =$$

$$= \exp\left\{ \frac{2i}{3}\alpha \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right\} \Phi_i$$

так что

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{2i\alpha/3} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{pmatrix}$$

меняется триплет, но у него нулевое вакуумное среднее и масса $\sim 10^{15}$ ГэВ.

хиггсовское поле Стандартной модели не меняется

Выясним, как под действием этих преобразований меняются фермионные поля:

$$(\nu^c)_L \longrightarrow e^{-i\alpha}(\nu^c)_L \qquad (\text{это поле имеет } Y=0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\nu_R \longrightarrow e^{i\alpha}\,\nu_R}$$

$$\psi^i = \begin{pmatrix} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ e\\ -\nu \end{pmatrix}_L \longrightarrow e^{3i\alpha/5}\cdot \exp\left\{-i\alpha \begin{pmatrix} 4/15 &&&&\\ & 4/15 &&&\\ && 4/15 &&\\ &&& -2/5 &\\ &&&& -2/5 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ e\\ -\nu \end{pmatrix}_L$$

$$= \exp\left\{ i\alpha \begin{pmatrix} 1/3 &&&& 0\\ & 1/3 &&&\\ && 1/3 &&\\ &&& 1 &\\ 0 &&&& 1 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} d^{c1}\\ d^{c2}\\ d^{c3}\\ e\\ -\nu \end{pmatrix}_L$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \longrightarrow e^{i\alpha}\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \\[2ex] d_R \longrightarrow e^{-i\alpha/3}\, d_R \end{array}}$$

$$\psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1\\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2\\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3\\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c\\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array}\right)_L \longrightarrow e^{-i\alpha/5}\,\omega_i{}^k\omega_j{}^l\psi_{kl}$$

В частности,

$$(u^c)_L \longrightarrow e^{-i\alpha/5}\cdot e^{4i\alpha/15}\cdot e^{4i\alpha/15}(u^c)_L = e^{i\alpha/3}(u^c)_L$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_R \longrightarrow e^{-i\alpha/3}\,u_R}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \to e^{-i\alpha/5} e^{4i\alpha/15} e^{-2i\alpha/5} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \left[-\frac{9}{15}+\frac{4}{15}=\frac{-1}{3}\right]$$

$$= e^{-i\alpha/3}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \to e^{-i\alpha/3}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L}$$

$$(e^c)_L \to e^{-i\alpha/5} e^{-2i\alpha/5} e^{-2i\alpha/5} (e^c)_L = e^{-i\alpha}(e^c)_L$$

$$\Longrightarrow \boxed{e_R \to e^{i\alpha} e_R}$$

т.о. под действием указанной совокупности преобразований все лептонные поля умножаются на $e^{i\alpha}$, а все кварковые – на $e^{-i\alpha/3}$.

т.к. у лептонов $L=1$, $B=0$, а
у кварков $L=0$, $B=1/3$, то
все поля умножаются на $\exp(i\alpha(L-B))$

Поэтому в $SU(5)$ модели сохраняющейся величиной будет $B-L$, в то время как по-отдельности $B \neq const$ и $L \neq const$.

Поэтому, например, распады протона

$p \to \pi^0 + e^+$; $p \to \pi^+ + \tilde{\nu}$	$p \to \pi^+ + \nu$;
p: $B=1$, $L=0$; π^0: $B=0$, $L=0$; e^+: $B=0$, $L=-1$; $B-L=1$	p: $B=1$, $L=0$; π^+: $B=0$, $L=0$; ν: $B=0$, $L=1$
π^+: $B=0$, $L=0$; $\tilde{\nu}$: $B=0$, $L=-1$; $B-L=1$	$B-L=1$ → $B-L=-1$
разрешены	запрещён

§ 15. Сокращение аномалий в SU(5)-модели.

Также как и Стандартная модель, SU(5) ТВО представляет собой теорию с киральными фермионами и может иметь аномалии.

Ранее говорилось, что аномалии пропорциональны

$$\sum_R tr\left(T^A\{T^B, T^C\}\right) - \sum_L tr\left(T^A\{T^B, T^C\}\right)$$

В SU(5) ТВО в наших обозначениях все фермионы являются левыми и лежат в представлениях $1 + \bar{5} + 10$ группы SU(5).

$$\Rightarrow \sum_R tr\left(T^A\{T^B, T^C\}\right) = 0$$

и для сокращения аномалий необходимо, чтобы

$$0 = \sum_L tr\left(T^A\{T^B, T^C\}\right) = tr\left(T^A_{\bar{5}}\{T^B_{\bar{5}}, T^C_{\bar{5}}\}\right) +$$

$$+ tr\left(T^A_{10}\{T^B_{10}, T^C_{10}\}\right)$$

т.к. $T^A_1 = 0$.

Убедимся в справедливости этого равенства явным вычислением.

$$\psi^i \to (\omega^*)^i{}_j \psi^j \simeq \psi^i + (\alpha^*)^i{}_j \psi^j = \psi^i - (\alpha^T)^i{}_j \psi^j$$

(т.к. $\alpha^+ = -\alpha$)

Поэтому $T^A_{\bar 5} = -(t^A)^T$, где t^A - генераторы фундаментального представления.

$$\Longrightarrow \quad tr\left(T^A_{\bar 5}\{T^B_{\bar 5}, T^C_{\bar 5}\}\right) = -tr\left[(t^A)^T(t^B)^T(t^C)^T + \right.$$

$$\left. + (t^A)^T(t^C)^T(t^B)^T\right] = -tr\left[t^C t^B t^A + t^B t^C t^A\right] =$$

$$= -tr\left(t^A\{t^B, t^C\}\right)$$

Аналогичным образом

$$\psi_{ij} \longrightarrow \omega_i{}^k \omega_j{}^l \psi_{kl} \simeq \psi_{ij} + \alpha_i{}^k \psi_{kj} + \alpha_j{}^l \psi_{il}$$

Поэтому (с учётом антисимметрии)

$$(T^A_{10})_{ij}{}^{kl} = \frac{1}{2}\left[(t^A)_i{}^k \delta_j{}^l + (t^A)_j{}^l \delta_i{}^k - (t^A)_j{}^k \delta_i{}^l - (t^A)_i{}^l \delta_j{}^k\right]$$

При этом

$$tr\left(T^A_{10}\{T^B_{10}, T^C_{10}\}\right) = (T^A_{10})_{ij}{}^{kl}(T^B_{10})_{kl}{}^{mn}(T^C_{10})_{mn}{}^{ij} + (B \leftrightarrow C)$$

С учётом антисимметрии генераторов

$$(T^A_{10})_{ij}{}^{kl}(T^B_{10})_{kl}{}^{mn} = \frac{1}{4}\left(\underset{1}{(t^A)_i{}^k \delta_j{}^l} + \underset{2}{(t^A)_j{}^l \delta_i{}^k} - (i \leftrightarrow j)\right)$$

$$\cdot\left(\underset{3}{(t^B)_k{}^m \delta_l{}^n} + \underset{4}{(t^B)_l{}^n \delta_k{}^m} - (m \leftrightarrow n)\right) =$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}\left(T_{10}^A\{T_{10}^B, T_{10}^C\}\right) = \left[\underset{1}{(t^A)_i{}^k}\,\delta_j{}^l + \underset{2}{(t^A)_j{}^l}\,\delta_i{}^k\right]\cdot\left[\underset{1}{(t^B)_k{}^m}\right.$$

$$\left.\cdot\,\delta_l{}^n + \underset{2}{(t^B)_l{}^n}\,\delta_k{}^m\right]\left(T_{10}^C\right)_{mn}{}^{ij} + (B \leftrightarrow C) =$$

$$= \Big[\underset{11 \to 1}{(t^A t^B)_i{}^m\,\delta_j{}^n} + \underset{12 \to 2}{(t^A)_i{}^m (t^B)_j{}^n} + \underset{21 \to 3}{(t^A)_j{}^n (t^B)_i{}^m} +$$

$$+ \underset{22 \to 4}{(t^A t^B)_j{}^n\,\delta_i{}^m}\Big]\cdot\frac{1}{2}\Big[\underset{1}{(t^C)_m{}^i\,\delta_n{}^j} + \underset{2}{(t^C)_n{}^j\,\delta_m{}^i} - \underset{3}{(t^C)_n{}^i\,\delta_m{}^j}$$

$$- \underset{4}{(t^C)_m{}^j\,\delta_n{}^i}\Big] + (B \leftrightarrow C) = \left[\mathrm{tr}(t^A) = 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{\underset{11}{5\,\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)} + \underset{12}{0} - \underset{13}{\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)} - \underset{14}{\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)}$$

$$+ \underset{21}{0} + \underset{22}{0} - \underset{23}{\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)} - \underset{24}{\mathrm{tr}(t^B t^A t^C)} + \underset{31}{0} + \underset{32}{0} -$$

$$- \underset{33}{\mathrm{tr}(t^A t^C t^B)} - \underset{34}{\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)} + \underset{41}{0} + \underset{42}{5\,\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)}$$

$$- \underset{43}{\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)} - \underset{44}{\mathrm{tr}(t^A t^B t^C)}\Big\} + (B \leftrightarrow C) =$$

$$= \mathrm{tr}\left(t^A\{t^B, t^C\}\right)\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\left[5-1-1-1-1-1-1+5-1-1\right]}_{\frac{1}{2}(10-8) = 1} =$$

$$= \mathrm{tr}\left(t^A\{t^B, t^C\}\right)$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}\left(T_{\bar{5}}^A\{T_{\bar{5}}^B, T_{\bar{5}}^C\}\right) + \mathrm{tr}\left(T_{10}^A\{T_{10}^B, T_{10}^C\}\right) =$$

$$= -\,\mathrm{tr}(t^A\{t^B, t^C\}) + \mathrm{tr}(t^A\{t^B, t^C\}) = 0$$

и $\Rightarrow$ аномалии в рассматриваемой модели полностью сокращаются и она является непротиворечивой на квантовом уровне.

§ 16. Объединение бегущих констант связи в Стандартной Модели

Одним из предсказаний SU(5) ТВО является объединение констант связи

$$\alpha_5 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$$

где $\alpha_3 = \dfrac{e_3^2}{4\pi}$; $\alpha_2 = \dfrac{e_2^2}{4\pi}$; $\alpha_1 = \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{e_1^2}{4\pi}$

При этом

$\alpha_3(M_Z) \simeq (8{,}4674)^{-1}$ — явно равенство не выполняется

$\alpha_2(M_Z) \simeq (29{,}59)^{-1}$ Причина в том, что не учитываются квантовые поправки.

$\alpha_1(M_Z) \simeq (59{,}01)^{-1}$

Известно, что в однопетлевом приближении ренормгрупповая эволюция констант связи описывается формулой

комплексные скаляры

$$\frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{1}{\alpha(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\left(\frac{11}{3}C_2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\Phi} T(R_\Phi) - \frac{1}{3}\sum_{\text{ск}} T(R_{\text{ск}})\right)$$

калибровочное поле и духи

дираковские фермионы

майорановские или вейлевские фермионы

где используются следующие обозначения:

$$tr(T^A T^B) \equiv T(R)\,\delta^{AB}$$

где T^A - генераторы представления R группы G

При этом предполагается, что генераторы фундаментального представления t^A нормированы условием $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$, т.ч. $T(\text{фунд.}) = \frac{1}{2}$.

Структурные константы f^{ABC} определяются равенствами $[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C$ $\left([T^A, T^B] = i f^{ABC} T^C\right)$

$$f^{ACD} f^{BCD} \equiv C_2\,\delta^{AB}$$

т.к. $\left(T^A_{Adj}\right)_{BC} = -i f^{ABC}$, то

$$\delta^{AB}\,T(Adj) = tr\left(T^A_{Adj} \cdot T^B_{Adj}\right) = -i f^{ACD}(-i) f^{BDC} = C_2\,\delta^{AB}$$

и $\Rightarrow$ $T(Adj) = C_2$.

При этом известно, что $C_2(SU(N)) = N$; $C_2(U(1)) = 0$.

Также заметим, что в формуле для однопетлевой эволюции констант связи мы пренебрегли пороговыми эффектами. В реальности вклад каждой частицы появляется, когда энергия превышает её массу.

Исследуем по-отдельности однопетлевую эволюцию каждой из констант связи в Стандартной модели:

$SU(3)$:

глюоны и духи $\qquad C_2(SU(3)) \qquad$ ароматы $\qquad T(\text{фунд})$

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left[\frac{11}{3}\cdot 3 - \underbrace{\frac{4}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}}_{\text{кварки}}\right]$$

$[11 - 4 = 7]$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{7}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}}$$

$SU(2)$:

$C_2(SU(2)) \qquad$ только левые $\qquad T(\text{фунд}) \qquad$ лептоны $\qquad$ кварки

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left[\underbrace{\frac{11}{3}\cdot 2}_{\text{калибр. бозоны и духи}} - \underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+3)\cdot 3}_{\text{фермионы}} - \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{хиггс}}\right]$$

поколения

$$\left[\frac{22}{3} - \frac{1}{\cancel{3}}\cdot 4\cdot\cancel{3} - \frac{1}{6} = \frac{44-24-1}{6} = \frac{19}{6}\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \frac{19}{6}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}}$$

$U(1)$: Здесь вычисление несколько отличается, поскольку по $U(1)$ характеристикой является не представление, а гиперзаряд Y.

$$\alpha_{10} \equiv \frac{e_1^2}{4\pi} \qquad \alpha_1 = \frac{5}{3}\alpha_{10}.$$

Сравним выражения для вершин в абелевом и неабелевом случаях. Они получаются из ковариантных производных

$$\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi + A_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ie\,A_\mu^A T^A\psi \quad \text{(неабелев случай)}$$

$$\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi + ie\,\underset{U(1)}{A_\mu}\,Y\psi \quad \text{(абелев случай)}$$

$\Longrightarrow$ вместо $tr(T^A T^B) = T(R)\delta^{AB}$ мы будем получать Y^2 в абелевом случае. Поэтому для группы $U(1)$

$$\frac{1}{\alpha_{10}(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{10}(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left[-\frac{2}{3}\sum_{\Phi} Y_\Phi^2 - \frac{1}{3}\sum_{ck} Y_{ck}^2\right]$$

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left[-\frac{2}{3}\sum_{\Phi} Y_\Phi^2 - \frac{1}{3}\sum_{ck} Y_{ck}^2\right]$$

СМ – теория с киральными фермионами

Напомним, чему равны гиперзаряды различных полей:

поле	$\begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}_L$	ν_R	e_R	$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L$	u_R	d_R	Φ
Y	$-1/2$	0	-1	$1/6$	$2/3$	$-1/3$	$1/2$

Подставим эти величины в формулу, описывающую ренормгрупповое поведение α_1:

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\frac{3}{5}\Big[-\frac{2}{3}\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\cdot \overset{\text{верх-низ}}{2}\cdot \overset{\text{поколения}}{3}}_{\binom{\nu}{e}_L} + \underbrace{0}_{\nu_R}$$

$$+\underbrace{1\cdot \overset{\text{поколения}}{3}}_{e_R} + \underbrace{\frac{1}{36}\cdot \underset{\text{верх-низ}}{2}\cdot 3\cdot 3}_{\binom{u}{d}_L} + \underbrace{\frac{4}{9}\cdot 3\cdot 3}_{u_R} + \underbrace{\frac{1}{9}\cdot 3\cdot 3}_{d_R}\Big) - \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot \overset{\text{верх-низ}}{2}}_{\text{хиггс}}\Big]$$

цвет

$$= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\frac{3}{5}\Big[-\frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}+3+\frac{1}{2}+4+1\Big)-\frac{1}{6}\Big]$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\frac{3}{5}\Big[-\frac{2}{3}\cdot 10-\frac{1}{6}\Big] =$$

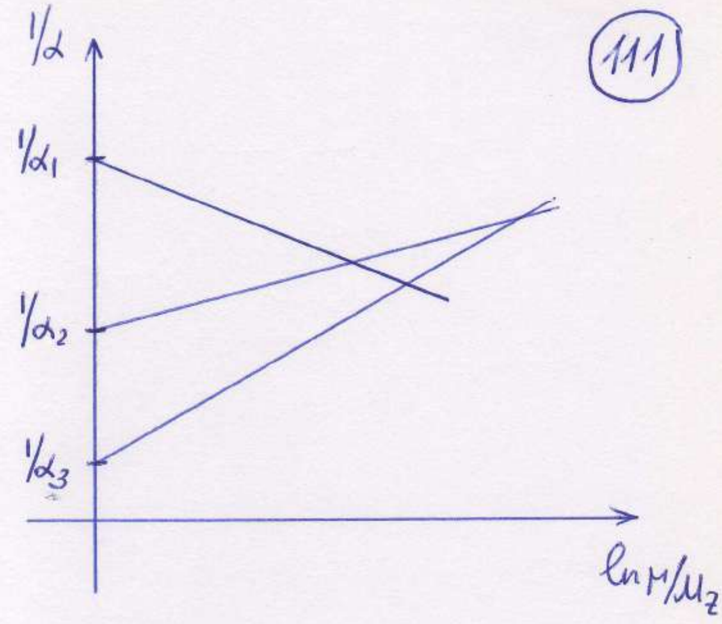
$$= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{41}{6}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{41}{10}\ln\frac{\mu}{\mu_0}}$$

Т.о. окончательные формулы, описывающие однопетлевую эволюцию констант связи в Стандартной Модели имеют вид

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_3(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{7}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\\
\frac{1}{\alpha_2(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \frac{19}{6}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\\
\frac{1}{\alpha_1(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{41}{10}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}
\end{aligned}}$$

График этих функций изображён на рисунке.



Найдём масштабы, на которых пересекаются различные прямые.

При этом положим

$\mu_0 = M_Z$; $\mu = M_X$

(на массе M_X будет порог рождения X_μ и Y_μ полей и близок порог для хиггсовского триплета. После его прохождения все константы связи сольются в α_5 и будут бежать одинаково)

1) Уравнение $\alpha_1(M_X) = \alpha_2(M_X)$:

$$\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{41}{10}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} = \frac{1}{\alpha_1(M_X)} = \frac{1}{\alpha_2(M_X)} = \frac{1}{\alpha_2(M_Z)} + \frac{19}{6}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z}\cdot\left(\frac{41}{10}+\frac{19}{6}\right) = \frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_2(M_Z)}$$

$$\log_{10}\frac{M_X}{M_Z} = \frac{2\pi}{\ln 10}\,\frac{\left(\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_2(M_Z)}\right)}{\left(\frac{41}{10}+\frac{19}{6}\right)} \simeq 11{,}05$$

2) Уравнение $\alpha_1(M_X) = \alpha_3(M_X)$

$$\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{41}{10}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} = \frac{1}{\alpha_1(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{7}{2\pi}\cdot\ln\frac{M_X}{M_Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \log_{10}\frac{M_X}{M_Z} = \frac{2\pi}{\ln 10}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right)}{\left(\frac{41}{10}+7\right)} \simeq \underline{12{,}43}$$

3) Уравнение $\underline{\alpha_2(M_X) = \alpha_3(M_X)}$

$$\frac{1}{\alpha_2(M_Z)} + \frac{19}{6}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} = \frac{1}{\alpha_2(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{7}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z}$$

$$\log_{10}\frac{M_X}{M_Z} = \frac{2\pi}{\ln 10}\,\frac{\left(\frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right)}{\left(7-\frac{19}{6}\right)} \simeq \underline{15{,}04}$$

Среднее значение

$$\boxed{\log_{10}\frac{M_X}{M_Z} \simeq 12{,}84}$$

Поэтому $\quad M_X \sim M_Z\cdot 10^{13} \sim 10^{15}$ ГэВ.

Однако разброс значений оказывается очень большим и объединение констант связи в несуперсимметричной версии Стандартной модели. Проблема будет решена при переходе к суперсимметричному расширению Стандартной модели.

Глава III. SO(10) теория Великого объединения

— наиболее лучшая в настоящее время ТВО, т.к. все частицы Стандартной Модели можно разместить в одном неприводимом представлении 16 группы SO(10). SO(10) содержит подгруппу SU(5), по которой

$$16 = 1 + \bar{5} + 10$$

(Речь, конечно, идёт об одном поколении)

(Кроме того, также необходима и суперсимметрия)

§1. Основные сведения о группе SO(10)

$$\dim SO(10) = \frac{10\cdot 9}{2} = 45 \qquad \dim SU(5) = 24$$

$$\operatorname{rank} SO(10) = \frac{10}{2} = 5 \qquad \operatorname{rank} SU(5) = 4$$

— группа SO(10) кажется более широкой чем SU(5). В действительности, она содержит SU(5) подгруппу. Группа SO(10) состоит из 10×10 вещественных ортогональных матриц с единичным определителем:

$$\Omega^T\Omega = 1_{10}; \qquad \det\Omega = 1.$$

Убедимся, что группа SO(10) содержит подгруппу

$$U(5) = (SU(5)\times U(1))/Z_5 \qquad (e^{2\pi i k/5}\cdot 1_5,\ e^{-2\pi i k/5}) \to 1_{U(5)}$$

$$U(5) = (SU(5)\times U(1))/Z_5 \subset SO(10)$$

Рассмотрим вначале $\omega \in U(5)$, т.е. ω – комплексная 5×5 матрица, удовлетворяющая условию

$$\omega^+\omega = 1_5 .$$

Выделим в ней вещественную и мнимую части:

$\omega = B + iC$, где B и C – вещественные матрицы размера 5×5.

При действии на комплексный 5-компонентный столбец $x+iy$ получим

$$(x+iy) \longrightarrow (B+iC)(x+iy) = (Bx - Cy) + i(Cx + By)$$

Это можно эквивалентно представить в виде преобразования

$$\begin{array}{c} \\ 10 \end{array}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}}^{10}_{5\ \ \ \ 5}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array}$$

При этом в силу унитарности ω справедливо равенство

$$1_5 = \underbrace{(B^T - iC^T)}_{\omega^+}\underbrace{(B+iC)}_{\omega} = B^TB + C^TC + i(B^TC - C^TB)$$

и $\Rightarrow$
$$\begin{cases} B^TB + C^TC = 1_5 \\ B^TC = C^TB \end{cases}$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & C^T \\ -C^T & B^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} B^T B + C^T C & -B^T C + C^T B \\ \hline -C^T B + B^T C & C^T C + B^T B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1_5 & 0 \\ \hline 0 & 1_5 \end{array} \right) = 1_{10}$$

Поэтому $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \in O(10)$.

В силу связности $U(5)$ её элементы можно связать гладким путём с 1. Поэтому рассматриваемая матрица принадлежит связной компоненте $O(10)$, т.е. $SO(10)$. Т.о. мы доказали, что $U(5) \subset SO(10)$.

Выделим теперь подгруппы $SU(5)$ и $U(1)$:
Для этого удобно рассмотреть окрестность 1 и работать вначале с алгебрами Ли.

Если $\omega = e^{\alpha} \simeq 1 + \alpha \simeq (1 + \beta + i\gamma)$, то

$B \simeq 1 + \beta$; $C \simeq \gamma$ и $\Rightarrow$ элемент $u(5) \subset so(10)$ запишется в виде

$$A \equiv T(\alpha) = \begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

При этом $\alpha^+ = -\alpha$ и $\Rightarrow$ $\beta^T - i\gamma^T = -\beta - i\gamma$

и $\Rightarrow$ $\beta^T = -\beta$; $\gamma^T = \gamma$, т.ч. $A^T = -A$

В случае, если $\omega \in SU(5)$, $\mathrm{tr}\,\alpha = 0$ и $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,\gamma = 0$
($\mathrm{tr}\,\beta = 0$ автоматически)

Поэтому если $\beta^T=-\beta$; $\gamma^T=\gamma$ и $\mathrm{tr}\,\gamma=0$, то

$$\exp\left\{\begin{pmatrix}\beta & -\gamma\\ \gamma & \beta\end{pmatrix}\right\}\in SU(5)\subset SO(10)$$

$$\exp\left\{\gamma\cdot\begin{pmatrix}0 & -1_5\\ 1_5 & 0\end{pmatrix}\right\}\in U(1)\subset SO(10)\qquad(\gamma - \mathrm{Re}\ \text{число})$$

т.е. $\left[SU(5)\times U(1)\right]/Z_5\subset SO(10)$

§2. Представление 16 группы SO(10)

Элементарные частицы одного поколения размещаются в представлении 16 группы SO(10). Это — спинорное представление.

Чтобы его построить, вначале запишем коммутационные соотношения генераторов группы SO(10). Генераторы фундаментального представления SO(10) имеют вид

$$t^A=\frac{i}{2}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & i & j\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & 1\\ & -1 & \\ & & \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ i\\ j\\ \ \end{array}\end{array},\quad j>i\qquad \mathrm{tr}\left(t^At^B\right)=\frac{1}{2}\delta^{AB}.$$

Удобно нумеровать их двумя индексами: $A\to ij$.

$$\left(t_{ij}\right)_{kl}=\frac{i}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}\right),\quad i,j=\overline{1,10}$$

$$[t_{ij}, t_{kl}]_{mn} = (t_{ij})_{mp}(t_{kl})_{pn} - (t_{kl})_{mp}(t_{ij})_{pn} =$$

$$= -\frac{1}{4}(\underset{1}{\delta_{im}}\delta_{jp} - \underset{2}{\delta_{ip}}\delta_{jm})(\underset{1}{\delta_{kp}}\delta_{ln} - \underset{2}{\delta_{kn}}\delta_{lp}) + \frac{1}{4}(\underset{1}{\delta_{km}}\delta_{lp} -$$

$$- \underset{2}{\delta_{kp}}\delta_{lm})(\underset{1}{\delta_{ip}}\delta_{jn} - \underset{2}{\delta_{in}}\delta_{jp}) =$$

$$= -\frac{1}{4}\underset{11}{\delta_{im}}\underline{\delta_{jk}}\delta_{ln} + \frac{1}{4}\underline{\underline{\delta_{ik}}}\underset{21}{\delta_{jm}}\delta_{ln} + \frac{1}{4}\underset{12}{\delta_{im}}\delta_{jl}\delta_{kn} - \frac{1}{4}\delta_{il}\delta_{jm}\underset{22}{\delta_{kn}}$$

$$+ \frac{1}{4}\delta_{km}\underset{11}{\delta_{li}}\delta_{jn} - \frac{1}{4}\underline{\underline{\delta_{ki}}}\underset{21}{\delta_{lm}}\delta_{jn} - \frac{1}{4}\delta_{km}\underset{12}{\delta_{in}}\delta_{jl} + \frac{1}{4}\underline{\delta_{kj}}\underset{22}{\delta_{lm}}\delta_{in}$$

$$= \frac{i}{2}\underline{\delta_{jk}}\cdot\frac{i}{2}(\delta_{im}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{lm}) - \frac{i}{2}\underline{\underline{\delta_{ik}}}\cdot\frac{i}{2}(\delta_{jm}\delta_{ln} - \delta_{jn}\delta_{lm})$$

$$- \frac{i}{2}\delta_{jl}\cdot\frac{i}{2}(\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}) + \frac{i}{2}\delta_{il}\cdot\frac{i}{2}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) =$$

$$= \frac{i}{2}\delta_{jk}(t_{il})_{mn} - \frac{i}{2}\delta_{ik}(t_{jl})_{mn} - \frac{i}{2}\delta_{jl}(t_{ik})_{mn} + \frac{i}{2}\delta_{il}(t_{jk})_{mn}$$

$$\Rightarrow \boxed{[t_{ij}, t_{kl}] = \frac{i}{2}\left[\delta_{jk}t_{il} - \delta_{ik}t_{jl} - \delta_{jl}t_{ik} + \delta_{il}t_{jk}\right]}$$

- КС для группы SO(10) очень похожи на КС группы Лоренца.

Чтобы построить представление алгебры Ли so(10), достаточно задать генераторы, удовлетворяющие тем же самым КС.

Как и в случае группы Лоренца, генераторы спинорного представления $SO(10)$ строятся на основе Γ-матриц, теперь уже в Евклидовом пространстве сигнатуры $\underbrace{(++\ldots+)}_{10\ \text{шт.}}$

Они должны удовлетворять равенству

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}$$

Γ-матрицы строятся рекурсивно.

D=2: $\Gamma_1 = \sigma_1$; $\Gamma_2 = \sigma_2$ Размер 2×2.

Также можно построить $\Gamma_3 \equiv -i\Gamma_1\Gamma_2 = -i\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$ которая удовлетворяет условию $\{\Gamma_3, \Gamma_i\} = 0$, $i=1,2$.

D=3: $\Gamma_i = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Размер 2×2

но Γ_4 определить нельзя.

D=4: Здесь необходимо увеличить размер в 2 раза: Размер 4×4.

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

– легко проверяется, что $\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}$

Также можно построить Γ_5, т.ч. $\{\Gamma_5, \Gamma_i\} = 0$:

$$\Gamma_5 \equiv -\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -i\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{D=5}$: Γ_i, $i=\overline{1,5}$ берём из предыдущей размерности

Размер 4×4

Далее процесс повторяется, например,

$\underline{D=6}$: $\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_i^{D=5} \\ \Gamma_i^{D=5} & 0 \end{pmatrix}$ 8 $\quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

8

$i=\overline{1,5}$

Размер 8×8 и $\exists$ матрица Γ_7 т.ч. $\{\Gamma_7, \Gamma_i\} = 0$

На основе вышесказанного становится ясной закономерность: Γ_i – эрмитовы, $\Gamma_i^+ = \Gamma_i$

В чётной размерности D Г-матрицы имеют размер $2^{D/2}\times 2^{D/2}$,

а в нечётной – $2^{\frac{D-1}{2}}\times 2^{\frac{D-1}{2}}$.

В чётной $\exists$ матрица Γ_{D+1} т.ч. $\{\Gamma_{D+1}, \Gamma_i\} = 0$,

а в нечётной – нет.

В частности, если $\underline{D=10}$ то размер Г-матриц равен $2^{10/2}\times 2^{10/2} = 32\times 32$, и $\exists$ матрица Γ_{11}

Как и в случае группы Лоренца генераторы спинорного представления пропорциональны

$$\Gamma_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i\right) = -\Gamma_{ji}$$

Действительно, используя равенства

$$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C] = \{A,B\}C - B\{A,C\},$$

получаем:

$$[\Gamma_{ij}, \Gamma_{kl}] = [\Gamma_i\Gamma_j - \delta_{ij}\cdot 1,\ \Gamma_k\Gamma_l - \delta_{kl}\cdot 1] = [\Gamma_i\Gamma_j, \Gamma_k\Gamma_l]$$

$$= \Gamma_i[\Gamma_j, \Gamma_k\Gamma_l] + [\Gamma_i, \Gamma_k\Gamma_l]\Gamma_j = \Gamma_i\left(\{\Gamma_j,\Gamma_k\}\Gamma_l - \Gamma_k\{\Gamma_j,\Gamma_l\}\right)$$

$$+ \left(\{\Gamma_i,\Gamma_k\}\Gamma_l - \Gamma_k\{\Gamma_i,\Gamma_l\}\right)\Gamma_j = 2\delta_{jk}\Gamma_i\Gamma_l - 2\delta_{jl}\Gamma_i\Gamma_k +$$

$$+ 2\delta_{ik}\Gamma_l\Gamma_j - 2\delta_{il}\Gamma_k\Gamma_j = 2\delta_{jk}(\Gamma_{il} + \cancel{\delta_{il}}) - 2\delta_{jl}(\Gamma_{ik} + \cancel{\delta_{ik}})$$

$$+ 2\delta_{ik}(\Gamma_{lj} + \cancel{\delta_{lj}}) - 2\delta_{il}(\Gamma_{kj} + \cancel{\delta_{kj}}) = 2\delta_{jk}\Gamma_{il} - 2\delta_{ik}\Gamma_{jl}$$

$$- 2\delta_{jl}\Gamma_{ik} + 2\delta_{il}\Gamma_{jk}$$

– видно, что получаются КС похожие на КС для t_{ij}.

Определяем $T_{ij} \equiv \frac{i}{4}\Gamma_{ij}$. Тогда

$$[T_{ij}, T_{kl}] = \frac{i}{2}\left(\delta_{jk}T_{il} - \delta_{ik}T_{jl} - \delta_{jl}T_{ik} + \delta_{il}T_{jk}\right)$$

– получились те же КС, что и для t_{ij} $\Rightarrow$ задано представление алгебры Ли $so(10)$ размерности 32.

Представление 32 является приводимым.

Действительно, в $D=10$ $\exists$ Γ_{11} : $\{\Gamma_i, \Gamma_{11}\}=0$.

Инвариантными подпространствами размерности 16 будут пространства правых и левых спиноров, т.к. если $(1 \pm \Gamma_{11})\psi = 0$, то

$$(1 \pm \Gamma_{11})(-i\alpha_{ij} T_{ij})\psi = -i\alpha_{ij} T_{ij}(1 \pm \Gamma_{11})\psi = 0$$

т.к. T_{ij} – произведение чётного числа Г-матриц

Генераторы представлений 16 и $\overline{16}$ будут соответственно

$$\underset{(16)}{T_{ij}} = \frac{i}{8}\Gamma_{ij}(1+\Gamma_{11}); \quad \underset{(\overline{16})}{T_{ij}} = \frac{i}{8}\Gamma_{ij}(1-\Gamma_{11})$$

При этом $32 = 16 + \overline{16}$

§3. Разложение представления 16 по представлениям подгруппы $SU(5)\times U(1)$

Представим Г-матрицы в $D=10$ в виде

$$\begin{cases} \Gamma_i \equiv \chi_i + \chi^{+i} & i=\overline{1,5} \\ \Gamma_{i+5} \equiv -i(\chi_i - \chi^{+i}) & i=\overline{1,5} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \chi_i = \frac{1}{2}(\Gamma_i + i\Gamma_{i+5}) \\ \chi^{+i} = \frac{1}{2}(\Gamma_i - i\Gamma_{i+5}) \end{cases}$$

– в силу эрмитовости Г-матриц χ^{+i} действительно эрмитово сопряжено к χ_i.

Матрицы χ_i и χ^{+i} $(i=\overline{1,5})$ имеют размер 32x32 и удовлетворяют КС

$$\{\chi_i,\chi_j\} = \frac{1}{4}\{\Gamma_i + i\Gamma_{i+5}, \Gamma_j + i\Gamma_{j+5}\} = \frac{1}{4}(2\delta_{ij} - 2\delta_{ij}) = 0$$

$$\{\chi^{+i},\chi^{+j}\} = \frac{1}{4}\{\Gamma_i - i\Gamma_{i+5}, \Gamma_j - i\Gamma_{j+5}\} = \frac{1}{4}(2\delta_{ij} - 2\delta_{ij}) = 0$$

$$\{\chi_i,\chi^{+j}\} = \frac{1}{4}\{\Gamma_i + i\Gamma_{i+5}, \Gamma_j - i\Gamma_{j+5}\} = \frac{1}{4}(2\delta_{ij} + 2\delta_{ij}) = \delta_i^j$$

– получается алгебра Клиффорда.

Представления этой алгебры хорошо известны.

Необходимо построить вектор $|0\rangle$ $(\neq 0)$, т.ч.

$\chi_i|0\rangle = 0 \quad \forall\ i=\overline{1,5}$

[Например, в $D=2$ $\quad \chi = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.ч.

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot \text{const} \qquad \chi^+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]

Можно доказать, что в $D=10$ $\quad \Gamma_{11}|0\rangle = |0\rangle$

(В $D=2$ „+"; в $D=4,6$ „–"; в $D=8,10$ „+")

Затем строим векторы

$|0\rangle$; $\chi^{+i}|0\rangle$; $\chi^{+i}\chi^{+j}|0\rangle$; $\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}|0\rangle$;

1 шт. $\quad C_5^1 = 5$ шт. $\quad C_5^2$ шт $\quad C_5^3$ шт

$\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle$; $\quad \chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}\chi^{+m}|0\rangle$

C_5^4 шт. $\quad C_5^5$ шт.

Они ортогональны (очевидно) и $\Rightarrow$ линейно независимы.

Всего этих векторов

$$\sum_{k=0}^{5} C_5^k = (1+1)^5 = 2^5 = 32$$

$\Longrightarrow$ они образуют базис в пространстве столбцов с 32 компонентами. Поэтому произвольный 32-компонентный столбец $|\psi>$ можно разложить по этому базису как

$$|\psi> = |0>\psi + \chi^{+i}|0>\tilde{\psi}_i + \frac{1}{2!}\chi^{+i}\chi^{+j}|0>\psi_{ij} +$$

$$+ \frac{1}{3!2!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}|0> \varepsilon_{ijklm}\tilde{\psi}^{lm} + \frac{1}{4!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0> \qquad (*)$$

$$\cdot\, \varepsilon_{ijklm}\psi^m + \frac{1}{5!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}\chi^{+m}|0> \varepsilon_{ijklm}\tilde{\psi}$$

При этом все индексы пробегают значения от 1 до 5. Далее мы убедимся, что это - настоящие тензорные индексы, соответствующие подгруппе $SU(5)$. При этом очевидно, что $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$ и $\tilde{\psi}^{ij} = -\tilde{\psi}^{ji}$.

Применим теперь оператор $\frac{1}{2}(1+\Gamma_{11})$ к формуле (*), принимая во внимание, что $\frac{1}{2}(1+\Gamma_{11})|0> = |0>$, а χ^{+i} содержат нечётное число Г-матриц,

$$\frac{1}{2}(1+\Gamma_{11})|\psi> = |0>\psi + \frac{1}{2!}\chi^{+i}\chi^{+j}|0>\psi_{ij} + \frac{1}{4!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0>$$

$$\cdot\, \varepsilon_{ijklm}\psi^m$$

причём все слагаемые с нечётным числом χ^{+i} зануляются в силу равенства $\frac{i}{2}(1-\Gamma_{11})|0\rangle = 0$.

Если $i, j \ldots$ — тензорные индексы $SU(5)$, то мы получаем равенство

$$16 = 1 + \bar{5} + 10 \quad \text{где} \quad 1 \sim \psi; \ \bar{5} \sim \psi^i; \ 10 \sim \psi_{ij}.$$

Чтобы это доказать запишем генераторы подгруппы $SU(5) \times U(1) \subset SO(10)$.

Напомним, что $\beta + i\gamma \in u(5)$ где $\beta^T = -\beta$; $\gamma^T = \gamma$ соответствует

$$\begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \in so(10)$$

$$\begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} = \beta_{ij}(-i)\left(t_{ij} + t_{i+5,j+5}\right) + \gamma_{ij}(-i)\left(t_{i+5,j} - t_{i,j+5}\right)$$

Поэтому в представлении 32 этому элементу будет соответствовать

$$\beta_{ij}(-i)\frac{i}{4}\left(\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5}\right) + \gamma_{ij}(-i)\frac{i}{4}\left(\Gamma_{i+5,j} - \Gamma_{i,j+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\beta_{ij}\left(\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5}\right) + \frac{1}{4}\gamma_{ij}\left(\Gamma_{i+5,j} + \Gamma_{j+5,i}\right)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\left(\beta_i{}^j + i\gamma_i{}^j\right)\left(\chi^{+i}\chi_j - \frac{1}{2}\delta^i_j\right) =$$

$$= \left(\beta_i{}^j + i\gamma_i{}^j\right)\frac{1}{4}\left(\Gamma_i - i\Gamma_{i+5}\right)\left(\Gamma_j + i\Gamma_{j+5}\right) - \frac{i}{2}\operatorname{tr}\gamma$$

$$= (\beta_{ij} + i\gamma_{ij})\,\frac{1}{4}\left[\Gamma_i\Gamma_j + \Gamma_{i+5}\Gamma_{j+5} - i\Gamma_{i+5}\Gamma_j + i\Gamma_i\Gamma_{j+5} - 2\delta_{ij}\right]$$

$$= (\beta_{ij} + i\gamma_{ij})\,\frac{1}{4}\left[\underbrace{\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5}}_{\text{антисимм.}} \underbrace{- i\Gamma_{i+5,j} - i\Gamma_{j+5,i}}_{\text{симметрична}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\beta_{ij}\left(\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5}\right) + \frac{1}{4}\gamma_{ij}\left(\Gamma_{i+5,j} + \Gamma_{j+5,i}\right)$$

в силу антисимметрии β и симметрии γ

Поэтому генераторы подгруппы $U(5)$ можно записать в виде

$$T(\beta + i\gamma) = (\beta_i{}^j + i\gamma_i{}^j)\left(\chi^{+i}\chi_j - \frac{1}{2}\delta^i_j\right)$$

т.е. $\chi^{+i}\chi_j$ – образ матрицы $\begin{array}{cc} & j \\ \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} & i \end{array}$

В частности генераторами $SU(5)$ будут

$$\chi^{+i}\chi_j - \frac{1}{5}\delta^i_j\,\chi^{+m}\chi_m$$

а генератором подгруппы $U(1)$ будет $\left(\frac{1}{5}\chi^{+m}\chi_m - \frac{1}{2}\right)\delta^i_j$

теперь можно найти как преобразуются различные тензоры в формуле

$$|\psi\rangle = |0\rangle\psi + \chi^{+i}|0\rangle\tilde{\psi}_i + \frac{1}{2!}\chi^{+i}\chi^{+j}|0\rangle\psi_{ij} +$$

$$+ \frac{1}{3!2!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}|0\rangle\,\varepsilon_{ijklm}\tilde{\psi}^{lm} + \frac{1}{4!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle\,\cdot$$

$$\cdot\,\varepsilon_{ijklm}\psi^m + \frac{1}{5!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}\chi^{+m}|0\rangle\,\varepsilon_{ijklm}\tilde{\psi}$$

под действием подгрупп $SU(5)$ и $U(1)$.

Имеем:

$$\psi = \langle 0|\psi\rangle \qquad \tilde{\psi}^{ij} = -\frac{1}{3!}\varepsilon^{ijklm}\langle 0|\chi_k\chi_l\chi_m|\psi\rangle$$

$$\tilde{\psi}_i = \langle 0|\chi_i|\psi\rangle \qquad \psi^m = \frac{1}{4!}\varepsilon^{ijklm}\langle 0|\chi_i\chi_j\chi_k\chi_l|\psi\rangle$$

$$\psi_{ij} = -\langle 0|\chi_i\chi_j|\psi\rangle \qquad \tilde{\psi} = \frac{1}{5!}\varepsilon^{ijklm}\langle 0|\chi_i\chi_j\chi_k\chi_l\chi_m|\psi\rangle$$

Действительно, например,

$$\langle 0|\chi_i\chi_j|\psi\rangle = \frac{1}{2!}\langle 0|\chi_i\chi_j\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle\psi_{kl} = \langle 0|\chi_i\chi^{+l}|0\rangle\cdot$$

$$\cdot\psi_{jl} = \psi_{ji} = -\psi_{ij}$$

$$\langle 0|\chi_k\chi_l\chi_m|\psi\rangle\left(-\frac{1}{3!}\right)\varepsilon^{ijklm} = \frac{1}{2!}\varepsilon_{mlkpq}\tilde{\psi}^{pq}\cdot\varepsilon^{ijklm}\left(-\frac{1}{3!}\right)$$

$$= \tilde{\psi}^{ij}$$

$$\langle 0|\chi_i\chi_j\chi_k\chi_l|\psi\rangle\frac{1}{4!}\varepsilon^{ijklm} = \varepsilon_{lkjin}\psi^n\cdot\frac{1}{4!}\varepsilon^{ijklm} = \psi^m$$

$$\langle 0|\chi_i\chi_j\chi_k\chi_l\chi_m|\psi\rangle\cdot\frac{1}{5!}\varepsilon^{ijklm} = \frac{1}{5!}\varepsilon_{mlkji}\varepsilon^{ijklm}\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$$

Преобразуем теперь спинор $|\psi\rangle$ по группе $SU(5)$, вложенной в $SO(10)$ указанным ранее образом. Если $\omega_i{}^j \simeq (1+\beta+i\gamma)_i{}^j$ где $\beta^T=-\beta$; $\gamma^T=\gamma$; $tr\,\gamma=0$ — элемент $SU(5)$, то

$$T(\beta+i\gamma) = (\beta_i{}^j + i\gamma_i{}^j)\chi^{+i}\chi_j \equiv \alpha_i{}^j\chi^{+i}\chi_j \quad , \ \alpha\in su(5)$$

Поэтому при рассматриваемых преобразованиях

$|\psi\rangle \to |\psi\rangle + \alpha_i{}^j \chi^{+i}\chi_j |\psi\rangle$

тогда

$$\psi = \langle 0|\psi\rangle \longrightarrow \langle 0|\psi\rangle + \alpha_i{}^j \langle 0|\chi^{i+}\chi_j|\psi\rangle =$$

$$= \langle 0|\psi\rangle = \psi$$

– получился инвариант по отношению к $SU(5)$ преобразованиям, т.е. представление 1.

$$\tilde{\psi}_i = \langle 0|\chi_i|\psi\rangle \longrightarrow \langle 0|\chi_i|\psi\rangle + \alpha_k{}^l \langle 0|\chi_i \chi^{+k}\chi_l|\psi\rangle$$

$$= \tilde{\psi}_i + \alpha_i{}^l \langle 0|\chi_l|\psi\rangle = (1+\alpha)_i{}^j \tilde{\psi}_j$$

– закон преобразования вектора – получилось фундаментальное представление 5. (Оказалось, что i – настоящий тензорный индекс по группе $SU(5)$)

Аналогичном образом

$$\psi_{ij} = \langle 0|\chi_j\chi_i|\psi\rangle \longrightarrow \langle 0|\chi_j\chi_i|\psi\rangle + \langle 0|\chi_j\chi_i \cdot \alpha_k{}^l$$

$$\cdot \chi^{+k}\chi_l|\psi\rangle = \psi_{ij} + \langle 0|\chi_j \cdot \alpha_i{}^l \chi_l|\psi\rangle - \langle 0|\alpha_j{}^l \chi_i \chi_l|\psi\rangle$$

$$= \psi_{ij} + \alpha_i{}^l \psi_{lj} + \alpha_j{}^l \psi_{il}$$

– получился закон преобразования (антисимметричного) тензора второго ранга, т.е. $\psi_{ij} \sim 10$.

Аналогичным образом проверяется, что

$\langle 0 | \chi_k \chi_l \chi_m | \psi \rangle$ — антисимметричный тензор 3-го ранга

$\Longrightarrow$

$$-\frac{1}{3!}\varepsilon^{ijklm}\langle 0|\chi_k \chi_l \chi_m|\psi\rangle = \tilde{\psi}^{ij}$$

— антисимметричный тензор с 2-мя верхними индексами.

Тот же метод доказывает, что ψ^m — вектор с верхним индексом, а $\tilde{\psi}$ — скаляр.

Т.о. мы получаем, что из формулы

$$\frac{1}{2}(1+\Gamma_{11})|\psi\rangle = |0\rangle\psi + \frac{1}{2!}\chi^{+i}\chi^{+j}|0\rangle\psi_{ij} + \frac{1}{4!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle \cdot \varepsilon_{ijklm}\psi^m$$

следует разложение $\boxed{16 = 1 + \bar{5} + 10}$, а из формулы

$$\frac{1}{2}(1-\Gamma_{11})|\psi\rangle = \chi^{+i}|0\rangle\tilde{\psi}_i + \frac{1}{3!\,2!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}|0\rangle\varepsilon_{ijklm}\tilde{\psi}^{lm}$$

$$+ \frac{1}{5!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}\chi^{+m}|0\rangle\varepsilon_{ijklm}\tilde{\psi}$$

— разложение $\boxed{\overline{16} = 1 + 5 + \overline{10}}$

Остаётся найти только заряды, соответствующие подгруппе $U(1)$ во вложении

$$SU(5)\times U(1) \subset SO(10).$$

Ранее было показано, что генератор $U(1)$ подгруппы в спинорном представлении 32 может быть записан в виде

$$T(1+2i\gamma) = 1 + i\gamma\,(2\chi^{+m}\chi_m - 5) \qquad (\text{т.е. } \gamma_i{}^j = 2\gamma\,\delta_i^j)$$

Тогда

$$\psi = \langle 0|\psi\rangle \longrightarrow \langle 0|\psi\rangle + i\gamma\,\langle 0|\,\cancel{2\chi^{+m}\chi_m} - 5\,|\psi\rangle$$

$$= \langle 0|\psi\rangle - 5i\gamma\,\langle 0|\psi\rangle = (1-5i\gamma)\psi$$

$\Longrightarrow$ заряд поля ψ (в этой нормировке) равен (-5).

Аналогично,

$$\tilde\psi_i = \langle 0|\chi_i|\psi\rangle \longrightarrow \tilde\psi_i + i\gamma\,\langle 0|\chi_i\,(2\chi^{+m}\chi_m - 5)\,|\psi\rangle$$

$$= \left(1 + i\gamma\,(2-5)\right)\tilde\psi_i = (1-3i\gamma)\,\tilde\psi_i$$

$$\psi_{ij} \longrightarrow (1-i\gamma)\,\psi_{ij}$$

$$\tilde\psi^{ij} \longrightarrow (1+i\gamma)\,\tilde\psi^{ij} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} 16 &= 1(-5) + \bar 5(3) + 10(-1) \\ \overline{16} &= 1(5) + 5(-3) + \overline{10}(1) \end{aligned}}$$

$$\psi^i \longrightarrow (1+3i\gamma)\,\psi^i \qquad\qquad SO(10) \supset SU(5)\times U(1)$$

$$\tilde\psi \longrightarrow (1+5i\gamma)\,\tilde\psi$$

Сравним эти формулы с преобразованиями B-L:

$$\psi_{ij} \to e^{-i\alpha/5}\psi_{ij}\,; \quad \psi^i \to e^{3i\alpha/5}\psi^i\,; \quad (\nu^c)_L \to e^{-i\alpha}(\nu^c)_L$$

– совпадает с точностью до нормировки

Поэтому во вложении $SU(5)\times U(1)\subset SO(10)$ подгруппа $U(1)$ отождествляется с

$$U(1)_F \equiv U(1)_{B-L}.$$

Она является генератором преобразований, благодаря которым сохраняется $B-L$.

§4. Лагранжиан SO(10) модели.

Лагранжиан $SO(10)$ МВО может быть представлен в виде суммы нескольких характерных частей:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ЯМ} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{Хиггс} + \mathcal{L}_{Юкава}$$

юкавское взаимодействие

лагранжиан Янга-Миллса

кинетические слагаемые для фермионов

хиггсовская часть ответственная за нарушение симметрии.

Калибровочная группа $G = SO(10)$ и представление для материи $R = 3\times 16$ однозначно определяют $\mathcal{L}_{ЯМ}$ и $\mathcal{L}_\phi$.

поколения

$$\mathcal{L}_{ЯМ} = -\frac{1}{4}\left(F^A_{\mu\nu}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(F^{ij}_{\mu\nu}\right)^2$$

где $i,j=\overline{1,10}$, а дополнительная $1/2$ появляется, чтобы избежать двойного суммирования.

При этом

$$F_{\mu\nu} = ie\cdot\frac{1}{2}F^{ij}_{\mu\nu}t^{ij} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

где $A_\mu = ie\cdot\frac{1}{2}A^{ij}_\mu t^{ij}$

Напомним, что $tr(t^{ij}t^{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk})$, т.ч.

$$\frac{1}{2e^2}\,tr\,F^2_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}tr(t^{ij}t^{kl})F^{ij}_{\mu\nu}F^{kl}_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}(F^{ij}_{\mu\nu})^2$$

Фермионы 3-х поколений в представлении 16:

ψ^I_a, $I=\overline{1,3}$; $a=\overline{1,16}$. (по группе Лоренца они левые)

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar\psi^I\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi^I = i\bar\psi^I\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA^A_\mu T^A_{16})\psi^I \equiv$$

$$\equiv i\bar\psi^I\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{ie}{2}A^{ij}_\mu T^{ij}_{16})\psi$$

где $T^{ij}_{16} = \frac{i}{8}\Gamma^{ij}(1+\Gamma_{11})$

Из этих 2-х частей лагранжиана при условии правильного нарушения калибровочной симметрии (т.е. $SO(10)\to\ldots\to SU(3)\times SU(2)\times U(1)$) получаются все квантовые числа элементарных частиц.

Цепочка нарушения симметрии определяется составом и лагранжианом хиггсовских полей.

Например, возможна цепочка

$$SO(10) \to SU(5) \to SU(3)\times SU(2)\times U(1) \to SU(3)\times U(1)_{em}$$

Но возможны и другие варианты, например,

$$SO(10) \to SU(4)\times SU(2)\times SU(2) \to SU(4)\times SU(2)\times U(1) \to$$

$$\to SU(3)\times SU(2)\times U(1)\times U(1) \to SU(3)\times SU(2)\times U(1) \to$$

$$\to SU(3)\times U(1)_{em}$$

и т. д.

(Существует довольно много возможностей)

Однозначно сказать, какой вариант реализуется, в настоящее время невозможно.

Однако юкавское взаимодействие может содержать только определённые хиггсовские поля.

Для построения юкавского лагранжиана вначале построим 10-мерный аналог матрицы зарядового сопряжения B.

Для этого заметим, что среди ранее построенных Г-матриц

Γ_{2i} антисимметричны $(i=\overline{1,5})$

Γ_{2i-1} симметричны $(i=\overline{1,5})$

Определим B как произведение всех антисимметричных Г-матриц:

$$B \equiv \Gamma_2\Gamma_4\Gamma_6\Gamma_8\Gamma_{10}$$

тогда

$$B^{-1} = \Gamma_{10}\Gamma_8\Gamma_6\Gamma_4\Gamma_2 = (-1)^{4+3+2+1}\Gamma_2\Gamma_4\Gamma_6\Gamma_8\Gamma_{10} = \Gamma_2\Gamma_4\Gamma_6\Gamma_8\Gamma_{10} = B$$

а также будет верно равенство

$$B^{-1}\Gamma_i B = -\Gamma_i^T \qquad i = \overline{1,10}$$

(это аналог равенства $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$ в $D=4$)

Действительно

$$B^{-1}\Gamma_{2i}B = \Gamma_{2i}B^{-1}B = \Gamma_{2i} = -\Gamma_{2i}^T$$

4 антикоммутации
1 коммутация

5 антикоммутаций

$$B^{-1}\Gamma_{2i-1}B = -\Gamma_{2i-1}B^{-1}B = -\Gamma_{2i-1} = -\Gamma_{2i-1}^T$$

Рассмотрим теперь билинейные комбинации вида

$$\psi^T C B \Gamma_{i_1 \dots i_k}\psi$$

скаляр по группе Лоренца

тензор по $SO(10)$

Т.к. $\psi = \frac{1}{2}(1+\Gamma_{11})\psi$ для $\psi \in 16$, то можно не добавлять Γ_{11}.

Базис в пр-ве 32×32 матриц имеет вид

$1;\ \Gamma_{11};\ \Gamma_i;\ \Gamma_i\Gamma_{11};\ \Gamma_{ij};\ \Gamma_{ij}\Gamma_{11};\ \Gamma_{ijk};\ \Gamma_{ijk}\Gamma_{11};\ \Gamma_{ijkl};\ \Gamma_{ijkl}\Gamma_{11};$
Γ_{ijklm} — всего $\sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k = (1+1)^{10} = 2^{10} = 32\cdot 32$

После исключения произведений с Γ_{11} получаем набор

$1, \Gamma_i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijklm}$.

Примем во внимание, что ψ – киральн ($\in 16$).
Внутри B – 5 Γ-матриц. Поэтому ненулевыми будут только величины с нечётным числом Γ-матриц в произведении $\Gamma_{i_1 \dots i_k}$ (т.е. k)
$\Longrightarrow$ нетривиальны будут только величины

$$\psi^T C B \Gamma_i \psi; \quad \psi^T C B \Gamma_{ijk} \psi; \quad \psi^T C B \Gamma_{ijklm} \psi$$

$$C_{10}^1 = 10 \qquad C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120 \qquad \frac{1}{2} C_{10}^5 = 126$$

$$\left(\frac{1}{2} C_{10}^5 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{10} \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 3 \cdot 42 = 126 \right)$$

$\frac{1}{2}$ возникает поскольку

$$-\frac{i}{5!} \varepsilon^{ijklmpqrst} \Gamma_{pqrst} = \Gamma^{ijklm} \Gamma_{11}, \text{ действительно,}$$

$$-i \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10} \overset{?}{=} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5 \cdot \Gamma_{11} = \left[\Gamma_{11} = (-i)^{10/2} \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{10} \right]$$

$$= \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5 \cdot (-1) e^{5i\pi/2} \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{10} = -i (\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5) \cdot$$

$$\cdot (\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5)(\Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10}) = -i (-1)^{4+3+2+1} \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10} =$$

$$= -i \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10}$$

$$\Longrightarrow -\frac{i}{5!} \varepsilon^{ijklmpqrst} \psi^T C B \Gamma_{pqrst} \psi = \psi^T C B \Gamma^{ijklm} \psi$$

– получается аналог условия (анти)самодуальности, который уменьшает число компонент в 2 раза.

Т.о.

$$\mathcal{L}_{\text{Юкава}} = (Y_{10})_{IJ}\, \psi^{T\,I} C B \Gamma_i \psi^J \phi_i + (Y_{120})_{IJ}\, \psi^{T\,I} C B \Gamma_{ijk} \psi^J \phi_{ijk}$$

$$+ (Y_{126})_{IJ}\, \psi^{T\,I} C B \Gamma_{ijklm} \psi^J \phi_{ijklm}$$

где $\phi_i \in 10$; $\phi_{ijk} \in 120$; $\phi_{ijklm} \in 126$

(антисимметричные тензоры, а для 126 есть ещё условие

$$-\frac{i}{5!}\, \varepsilon^{ijklmpqrst}\, \phi_{pqrst} = \phi_{ijklm})$$

$\Longrightarrow$ в юкавском взаимодействии могут участвовать только хиггсы в представлениях 10, 120 и 126.

$\psi_a \psi_b$ можно разложить с помощью тождества, аналогичного тождеству Фирца.

$$\boxed{16 \times 16 = 256 = 10 + 120 + 126}$$ – равенство из теории групп.

– тождество из теории групп.

(С учётом индексов по группе Лоренца $\psi_a^T C \psi_b$)