Суперсимметрия в физике элементарных частиц 1

Глава I. Нарушение суперсимметрии

§1. Спонтанное нарушение суперсимметрии. Общая теория

Поскольку суперпартнёры известных частиц пока экспериментально не наблюдаются, суперсимметрия в расширениях Стандартной Модели должна быть нарушена. При этом, как будет далее показано, бозоны и фермионы будут иметь различные массы.

Естественно предположить, что SUSY нарушается спонтанно, т.е. теория инвариантна относительно преобразований SUSY, а вакуумное состояние — нет.

Как это записать формально?

Суперсимметрия генерируется операторами суперзарядов Q_{ia}, к-рые вместе с $P_\mu = i\partial_\mu$ и $M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$ образуют алгебру SUSY:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha} P_\beta - \eta_{\mu\beta} P_\alpha)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} - \eta_{\nu\beta} M_{\mu\alpha} + \eta_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\alpha} M_{\nu\beta})$$

$$[Q_i, P_\mu] = 0$$

$$[Q_{ia}, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2}(\gamma_{\mu\nu} Q_i)_a$$

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu$$

При этом $i = \overline{1,N}$ – индекс, нумерующий SUSY, а $a = \overline{1,4}$ – спинорный индекс.

Суперзаряды являются майорановскими спинорами, т.е. $Q_i^+ \gamma^0 = Q_i^T C$.

Важным следствием алгебры SUSY является неотрицательность энергии вакуумного состояния. Действительно,

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu \quad \Big| \; (C\gamma^0)^{ba}$$

тогда, полагая $i=j$ (без суммирования), имеем:

$$-2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu C C\gamma^0) P_\mu = (C\gamma^0)^{ba}\{Q_{ia}, Q_{ib}\} \quad \forall i$$

$$2\,\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^0)P_\mu = 2\,(C\gamma^0)^{ab}\,Q_{ia}Q_{ib}$$

$$8P_0 = 2\,(\gamma^0)_a{}^b\,(Q_i^T C)^a\,Q_{ib}$$

Используем условие майорановости

$Q_i^T C = Q_i^+\gamma^0$:

$$8P_0 = 2\,(\gamma^0)_a{}^b\,(Q_i^+\gamma^0)^a\,Q_{ib} = 2\,(Q_i^+)^b\,Q_{ib}$$

Сокращая на 2 и усредняя по вакуумному состоянию, получаем ($\forall i$)

$$4\langle 0|P_0|0\rangle = \langle 0|(Q_i^+)^b Q_{ib}|0\rangle \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad E_0 \equiv \langle 0|P_0|0\rangle \geqslant 0$$

и в суперсимметричных теориях энергия вакуумного состояния не может быть отрицательна.

Это утверждение тесно связано со спонтанным нарушением SUSY.

SUSY по определению спонтанно нарушена, если $\exists\ i, a$ т.ч. $Q_{ia}|0\rangle \neq 0$.

Утв. SUSY является спонтанно нарушенной, если $E_0 > 0$ и ненарушенной, если $E_0 = 0$. (4)

Доказательство.

Ранее было показано, что $\forall i$

$$(*) \quad E_0 = \langle 0 | P_0 | 0 \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 | (Q_i^+)^b Q_{ib} | 0 \rangle \geq 0.$$

При этом по спинорному индексу b производится суммирование, а по индексу i суммирования нет.

Если суммировать по i от 1 до N, то

$$N E_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} \langle 0 | (Q_i^+)^b Q_{ib} | 0 \rangle \geq 0.$$

Очевидно, что $E_0 = 0 \iff \forall i, b \;\; Q_{ib} | 0 \rangle = 0$

т.е. SUSY спонтанно не нарушена.

Если же $\exists\, i, b$ т.ч. $Q_{ib} | 0 \rangle \neq 0$, то

$E_0 > 0$.

Кроме того, из формулы (*) видно, что величины $\langle 0 | (Q_i^+)^b Q_{ib} | 0 \rangle$ одинаковы $\forall i$, т.к.

в случае расширенной $(N>1)$ SUSY (5)
либо все SUSY нарушены, либо все ненарушены.

К вопросу о нарушении SUSY можно подойти и по-другому.

Рассмотрим модель вида

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^{*i}\Phi_i + \left(\frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, g(\Phi_i) + \text{к.с.}\right)$$

где Φ_i – киральные скалярные суперполя,

$(1-\gamma_5)D\Phi_i = 0$ где $D \equiv \frac{\partial}{\partial\bar\theta} - i(\gamma^\mu\theta)\partial_\mu$

В терминах компонентных полей $\left(y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\right)$

$$\Phi_i(y^\mu,\theta) = \varphi_i(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, f_i(y^\mu)$$

Рассматриваемая теория инвариантна относительно преобразований SUSY

$$\begin{cases} \delta\varphi_i = \bar\varepsilon(1+\gamma_5)\psi_i \\ \delta\psi_i = (\mathrm{Re}\, f_i + i\gamma_5 \mathrm{Im}\, f_i)\varepsilon - i(\partial_\mu \mathrm{Re}\,\varphi_i + i\gamma_5\partial_\mu \mathrm{Im}\,\varphi_i)\gamma^\mu\varepsilon \\ \delta f_i = -i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_i \end{cases}$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$ - параметр преобразований SUSY – грассманово-нечётный майорановский спинор.

Если SUSY спонтанно нарушена, то (6)

$\exists$ ia, т.ч. $Q_{ia}|0\rangle \neq 0$, т.е. одна из

величин $\delta\varphi_{i0}$, $\delta\psi_{i0}$, δf_{i0} отлична от 0

где индекс 0 обозначает вакуумное значение полей. Но

$$\delta\varphi_{i0} = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi_{i0} = 0 \quad \text{(Лоренц-инвариантность)}$$

$$\delta f_{i0} = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_{i0} = 0 \quad (-''-)$$

$$\delta\psi_{i0} = (\mathrm{Re}\, f_{i0} + i\gamma_5 \,\mathrm{Im}\, f_{i0})\varepsilon - i(\partial_\mu \mathrm{Re}\,\varphi_{i0} +$$

$$+ i\gamma_5\partial_\mu \mathrm{Im}\,\varphi_{i0})\gamma^\mu\varepsilon = (\mathrm{Re}\, f_{i0} + i\gamma_5\,\mathrm{Im}\, f_{i0})\varepsilon$$

т.к. φ_{i0} – вакуумные значения скалярных полей не зависят от координат.

$\Longrightarrow$ SUSY спонтанно нарушена если хотя бы одно из вспомогательных полей f_i приобретает отличное от 0 вакуумное среднее: $f_{i0} \neq 0$.

Полностью аналогичным образом можно рассмотреть суперсимметричные калибровочные теории. Характерное действие имеет вид

$$S' = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i} \cdot$$

$$(e^{2V})_i{}^j \phi_j + \left(\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4} m^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} \lambda^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) + \text{к.с.} \right)$$

где $V = eV^A t^A$ в первом слагаемом и

$V = eV^A T^A$ – во втором

– эрмитово скалярное калибровочное суперполе.

$$W_a \equiv \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[e^{-2V} \cdot (1+\gamma_5) D_a e^{2V} \right]$$

– суперсимметричный аналог тензора напряжённости калибровочного поля.

В калибровке Весса-Зумино

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) + i\sqrt{2} (\bar{\theta}\theta) \cdot \bar{\theta} \gamma_5 \lambda(x) +$$

$$+ \frac{1}{4} (\bar{\theta}\theta)^2 D(x)$$

$$W_a(y^\mu, \theta) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \Big\{ -i\sqrt{2}\, \lambda_a(y^\mu) - \theta_a D(y^\mu) + \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \theta_a \cdot$$

$$\cdot F_{\mu\nu}(y^\mu) - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1+\gamma_5) \theta \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda_a(y^\mu) \Big\}$$

В терминах компонентных полей действие рассматриваемой теории принимает вид

$$S = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda + \underline{\frac{1}{2}D^2}\right)$$

$$+ \int d^4x \left\{ \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi + i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + \underline{f^+ f} + \right.$$

$$+ \varphi^+ D \varphi + i\sqrt{2}\,\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi$$

$$+ m^{ij}\varphi_i f_j - \frac{1}{2} m^{ij}\bar{\psi}_i(1+\gamma_5)\psi_j + \lambda^{ijk}\varphi_i\varphi_j f_k$$

$$- \lambda^{ijk}\varphi_i\bar{\psi}_j(1+\gamma_5)\psi_k + m^*_{ij}\varphi^{*i} f^{*j} - \frac{1}{2} m^*_{ij}\bar{\psi}^i(1-\gamma_5)\psi^j$$

$$\left. + \lambda^*_{ijk}\varphi^{*i}\varphi^{*j} f^{*k} - \lambda^*_{ijk}\varphi^{*i}\bar{\psi}^j(1-\gamma_5)\psi^k \right\}$$

Такая модель инвариантна относительно преобразований SUSY

$$\begin{cases} \delta A_\mu = -i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma_\mu \lambda \\ \delta\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5 \varepsilon D \\ \delta D = \sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5 \mathcal{D}_\mu \lambda \\ \delta\varphi_i = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi_i \\ \delta\psi_i = (\mathrm{Re} f_i + i\gamma_5 \mathrm{Im} f_i)\varepsilon - i(\mathrm{Re}\,\mathcal{D}_\mu\varphi_i + i\gamma_5 \mathrm{Im}\,\mathcal{D}_\mu\varphi_i)\gamma^\mu\varepsilon \\ \delta f_i = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\mathcal{D}_\mu\psi_i - i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi_i \end{cases}$$

При этом, как и ранее, очевидно, что нетривиальными для вакуума могут оказаться только

$$\delta\lambda_0 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5 \varepsilon D_0 \quad \text{или}$$

$$\delta\psi_{i0} = (Re f_{i0} + i\gamma_5 Im f_{i0})\varepsilon$$

в случае если либо $D_0^A \neq 0$, либо $f_{i0} \neq 0$ при некоторых значениях A или i.

т.о. SUSY является спонтанно нарушенной, если хотя бы одно из вспомогательных полей приобретает вакуумное среднее, и ненарушена, если вакуумные средние всех вспомогательных полей равны 0.

Выясним теперь, как связан этот критерий с предыдущим. В SUSY теориях потенциал скалярных полей φ_i и φ^{*i} возникает при исключении вспомогательных полей D^A и f_i:

$$V(\varphi_i, \varphi^{*i}) = \frac{1}{2}(D^A)^2 + f^{*i} f_i$$

где D^A и f_i должны быть выражены через φ_i с помощью уравнений

$$\begin{cases} 0 = D^A + e\varphi^{*i}(T^A)_i{}^j\varphi_j \\ 0 = f^{*i} + m^{ij}\varphi_j + \lambda^{ijk}\varphi_j\varphi_k \end{cases}$$

При этом

$$E_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(D_0^A)^2 + |f_{i0}|^2\right] \geq 0$$

Очевидно, что $E_0 = 0$ если $D_0^A = 0$ и $f_{i0} = 0$

$E_0 > 0$ если $D_0^A \neq 0$ или $f_{i0} \neq 0$

Т.о. можно сформулировать условие спонтанного нарушения SUSY в виде следующей таблицы:

ненарушенная SUSY	спонтанное нарушение SUSY
$Q_{ia}\|0\rangle = 0 \ \forall ia$ (определение)	$\exists\ ia$ т.ч. $Q_{ia}\|0\rangle \neq 0$
$E_0 = 0$	$E_0 > 0$
$D_0^A = 0$ и $f_{i0} = 0$	$D_0^A \neq 0$ или $f_{i0} \neq 0$

причём

$$E_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(D_0^A)^2 + |f_{i0}|^2\right] \geq 0 .$$

§2. Механизм Файе-Илиопулоса спонтанного нарушения суперсимметрии

— наиболее простой и наглядный механизм спонтанного нарушения суперсимметрии, но работает только в абелевом случае.

Рассмотрим $N=1$ SQED и добавим к её действию слагаемое, пропорциональное вспомогательному полю D. В суперполях такая модель описывается действием

$$S = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\left(\phi^+ e^{-2eV}\phi + \tilde\phi^+ e^{+2eV}\tilde\phi\right) + \left(\frac{1}{2}m\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde\phi\,\phi + \text{к.с.}\right)$$

$N=1$ SQED

$$+\frac{1}{2}k\int d^4x\, d^4\theta\, V \longleftarrow \text{добавка Файе-Илиопулоса}$$

где $W^a \equiv W_b C^{ba}$, $k = const$,

$W_a \equiv \frac{1}{16}\bar D(1-\gamma_5)D\left[(1+\gamma_5)D_a V\right]$ — т.к. это абелева теория.

$(1-\gamma_5)D\phi = 0$

$(1-\gamma_5)D\tilde\phi = 0$

Суперсимметрия добавленного слагаемого очевидна.

Рассматриваемая теория инвариантна отно-
сительно $U(1)$ преобразований

$$\begin{cases} \Phi \to e^{-i\Lambda}\phi \\ \tilde{\Phi} \to e^{+i\Lambda}\phi \\ V \to V + \frac{i}{2e}(\Lambda^* - \Lambda) \end{cases}$$

где Λ - киральное суперполе, $(1-\gamma_5)D\Lambda = 0$.

$$W_a \to W_a$$

Последнее слагаемое также инвариантно, т.к.

$$\int d^4x\, d^4\theta\, V \longrightarrow \int d^4x\, d^4\theta \left[V + \frac{i}{2e}\Lambda^* - \frac{i}{2e}\Lambda \right]$$

причём

$$\int d^4x\, d^4\theta\, \Lambda^* = \int d^4x\, d^2\bar\theta\, d^2\theta\, \Lambda^*$$

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta_a}(1+\gamma_5)_a{}^b \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b} = -\frac{1}{4}\bar D(1+\gamma_5)D +$$

+ полные производные, т.к.

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \Lambda^* = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}\right)\bar D(1+\gamma_5)D\Lambda^* = 0$$

Аналогичным образом

$$\int d^4x\, d^4\theta\, \Lambda = \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar\theta\, \Lambda = \int d^4x\, d^2\theta \left(-\frac{1}{4}\right)\bar D(1-\gamma_5)D\Lambda = 0$$

$\Longrightarrow$ при рассматриваемых преобразованиях

$$\int d^4x\, d^4\theta\, V = inv$$

В терминах компонентных полей в калибровке Весса-Зумино

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x)$$

$$\Phi(y^\mu,\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu)$$

$$\tilde\Phi(y^\mu,\theta) = \tilde\varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\tilde\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\tilde f(y^\mu)$$

где $y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$.

При этом $\lambda(x)$ и $D(x)$ инвариантны относительно остаточных калибровочных преобразований в абелевом случае.

$$\int d^4x\, d^4\theta\, V = \int d^4x\, d^4\theta\, \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x) = 2\int d^4x\, D(x)$$

– явно видна калибровочная инвариантность и при компонентной формулировке.

Запишем теперь полное действие в терминах компонентных полей. При этом удобно использовать обозначение

$$\Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\tilde\psi\right]$$ – дираковский спинор

$$\left(\bar\Psi = \left[\bar\psi(1-\gamma_5) + \bar{\tilde\psi}(1+\gamma_5)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Тогда

$$S = \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar\lambda\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2 + \mathcal{D}_\mu\varphi^*\mathcal{D}^\mu\varphi$$

$$+ \mathcal{D}_\mu\tilde\varphi^*\mathcal{D}^\mu\tilde\varphi + f^+f + \tilde f^+\tilde f - e(\varphi^* D\varphi - \tilde\varphi^* D\tilde\varphi)$$

$$+ m(\tilde\varphi f + \tilde f\varphi + \tilde\varphi^* f^* + \tilde f^*\varphi^*) + i\bar\psi\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar\psi\psi$$

$$- ie\bar\psi(1-\gamma_5)\lambda\varphi + ie\varphi^*\bar\lambda(1+\gamma_5)\psi + ie\tilde\varphi\bar\lambda(1-\gamma_5)\psi - ie\cdot$$

$$\cdot\bar\psi(1+\gamma_5)\lambda\tilde\varphi^* + k\cdot D\Big\}$$

добавка Файе-Илиопулоса.

где $\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi$

Заметим, что для получения электродинамики вместо e^{2V} у нас везде стоит e^{-2eV}.

Вспомогательные поля f, $\tilde f$ и D исключаются на уравнениях движения, которые имеют вид

$$\begin{cases} 0 = f^* + m\tilde\varphi & 0 = f + m\tilde\varphi^* \\ 0 = \tilde f^* + m\varphi & 0 = \tilde f + m\varphi^* \\ 0 = D - e\varphi^*\varphi + e\tilde\varphi^*\tilde\varphi + k \end{cases}$$

Из этих уравнений следует, что при $k \neq 0$

суперсимметрия спонтанно нарушена.

Действительно, если $f_0 = \tilde{f}_0 = 0$, то $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 = 0$

и $\Rightarrow$ $D = -k \neq 0$

т.о. одно из вспомогательных полей заведомо отлично от 0, т.е. суперсимметрия нарушена.

После исключения вспомогательных полей действие примет вид

$$S = \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \partial_\mu \lambda + \mathcal{D}_\mu \varphi^* \mathcal{D}^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

$$+ \mathcal{D}_\mu \tilde{\varphi}^* \mathcal{D}^\mu \tilde{\varphi} - m^2 \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

$$- ie\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi + ie\varphi^*\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi + ie\tilde{\varphi}\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi$$

$$- ie\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^* - \frac{1}{2}\left(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right)^2 \Big\}$$

Как всегда, потенциал скалярных полей в суперсимметричных теориях получается как результат исключения вспомогательных полей.

Исследуем теперь спектр частиц в полученной теории. Для этого необходимо найти вакуумное состояние, а затем в квадратичном приближении разложить около него функцию Лагранжа.

Вакуум получается при минимизации потенциала скалярных полей

$$V(\varphi,\tilde{\varphi}) = m^2\varphi^*\varphi + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\left(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}k^2 + \varphi^*\varphi\left(m^2 - ek\right) + \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\left(m^2 + ek\right) + \frac{e^2}{2}\left(\varphi^*\varphi - \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \varphi^*} = m^2\varphi - e\varphi\left(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right) \qquad \Big|\, \tilde{\varphi}$$

$+$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \tilde{\varphi}^*} = m^2\tilde{\varphi} + e\tilde{\varphi}\left(k - e\varphi^*\varphi + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right) \qquad \Big|\, \varphi$$

$\Rightarrow$ $0 = \varphi\tilde{\varphi}\cdot m^2$ и либо φ, либо $\tilde{\varphi}$, либо они оба в вакууме равны 0.

Пусть для определённости $e > 0$; $k > 0$. Тогда из вида $V(\varphi,\tilde{\varphi})$ очевидно, что $\tilde{\varphi}_0 = 0$.

Кроме того, очевидно, что $\exists$ 2 принципиально различных случая:

1) $m^2 - ek > 0$

2) $m^2 + ek < 0$

В первом случае $\varphi_0 = 0$ и калибровочная симметрия ненарушена, а во втором $\varphi_0 \neq 0$ и имеет место спонтанное нарушение калибровочной симметрии.

1) $m^2 - ek > 0$

$\varphi_0 = 0; \ \tilde{\varphi}_0 = 0$

Тогда

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - (m^2 - ek)\varphi^*\varphi$$

$$+ \partial_\mu\tilde{\varphi}^*\partial^\mu\tilde{\varphi} - (m^2 + ek)\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \underbrace{\frac{1}{2}k^2}_{>0}$$

Видно, что в спектре частиц имеются

а) Безмассовое векторное поле A_μ

б) Безмассовый майорановский спинор λ (суперпартнёр A_μ)

в) Дираковский спинор Ψ с массой m.

г) Комплексный скаляр φ с массой $\sqrt{m^2 - ek}$

д) Комплексный скаляр $\tilde{\varphi}$ с массой $\sqrt{m^2 + ek}$

(φ и $\tilde{\varphi}$ – суперпартнёры Ψ)

При этом важно заметить, что имеет место равенство

$$0 = 2(m^2 - ek) + 2(m^2 + ek) - 4m^2$$

которое можно переписать в виде

$$0 = \sum_{Б} n_Б m_Б^2 - \sum_{Ф} n_Ф m_Ф^2$$

где $n_Б$ и $n_Ф$ – числа бозонных и фермионных степеней свободы.

2) $m^2 - ek < 0$

$\varphi_0 \neq 0\ ;\ \tilde{\varphi}_0 = 0$ — спонтанное нарушение калибровочной симметрии.

Пусть $\varphi_0 \equiv v \in Re, > 0$. Тогда

$$0 = m^2 - e(k - ev^2)$$

$$e^2 v^2 = ek - m^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{e}\sqrt{\underbrace{ek - m^2}_{>0}}$$

В унитарной калибровке $\varphi = v + P$. Тогда $P, A_\mu, \tilde{\varphi}$ считаем малыми величинами, т.ч.

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - ieA_\mu \varphi \simeq \partial_\mu P - ieA_\mu v$$

$$V(\varphi, \tilde{\varphi}) = m^2 (v + P)^2 + m^2 \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\left(k - e(v+P)^2 + e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\right)^2$$

$$= m^2(v^2 + 2vP + P^2) + m^2 \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + \frac{1}{2}\Big[\underbrace{k - ev^2}_{m^2/e} - 2evP - eP^2$$

$$+ e\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}\Big]^2 \approx$$

$$\approx m^2(v^2 + \cancel{2vP + P^2}) + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} + \frac{m^4}{2e^2} - \cancel{2evP\frac{m^2}{e}}$$

$$+ 2e^2v^2P^2 - \cancel{m^2}P^2 + m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi} =$$

$$= \underbrace{m^2\left(v^2 + \frac{m^2}{2e^2}\right)}_{>0} + 2e^2v^2P^2 + 2m^2\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}$$

Поэтому в квадратичном приближении бозонная часть лагранжиана примет вид

$$\mathcal{L}_Б^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu P)^2 + e^2 v^2 A_\mu^2 - 2e^2 v^2 P^2 - 2m^2 \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi}$$

$$\underbrace{- m^2\left(v^2 + \frac{m^2}{2e^2}\right)}_{>0}$$

$\Rightarrow$ в спектре бозонных полей будут

а) Массивное векторное поле A_μ, $m_A = \sqrt{2}ev$

б) Вещественный массивный скаляр P, $m_P = \sqrt{2}ev$

в) Комплексный массивный скаляр $\tilde{\varphi}$, $m_{\tilde{\varphi}} = \sqrt{2}m$

Исследуем теперь спектр фермионов. т.к. $\varphi_0 = v \neq 0$, то в квадратичный лагранжиан также дают вклад и юкавские слагаемые:

$$\mathcal{L}_\Phi^{(2)} = i\bar{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - iev\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda$$

$$+ iev\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi =$$ (не есть сумма отдельных квадратичных лагранжианов)

$$= i\bar{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\tilde{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} - 2m\bar{\tilde{\psi}}\tilde{\psi}$$

$$- i\sqrt{2}ev\bar{\tilde{\psi}}(\cancel{1}-\underline{\gamma_5})\lambda + i\sqrt{2}ev\bar{\lambda}(\cancel{1}+\underline{\gamma_5})\tilde{\psi} =$$

$$= i\bar{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\tilde{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} - 2m\bar{\tilde{\psi}}\tilde{\psi} + 2i\sqrt{2}ev\bar{\tilde{\psi}}\gamma_5\lambda$$

Определим $\lambda' \equiv i\gamma_5\lambda$;

$$\bar{\lambda}' = (i\gamma_5\lambda)^+\gamma^0 = -i\lambda^+\gamma_5\gamma^0 = i\lambda^+\gamma^0\gamma_5 = i\bar{\lambda}\gamma_5$$

тогда

$$i\bar{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda = \cancel{i(-i)}\,\bar{\lambda}'\underbrace{\gamma_5\gamma^\mu}_{\text{"}-\text{"}}\partial_\mu(-i\gamma_5\lambda') = i\bar{\lambda}'\gamma^\mu\partial_\mu\lambda'$$

а квадратичная часть фермионного лагранжиана примет вид

$$\mathcal{L}_\Phi^{(2)} = i\bar{\lambda}'\gamma^\mu\partial_\mu\lambda' + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\tilde{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi} - 2m\bar{\psi}\tilde{\psi}$$

$$+ 2\sqrt{2}\,e v\,\bar{\psi}\lambda'$$

Затем совершаем ортогональное преобразование $(\tilde{\psi}, \lambda') \to (\tilde{\psi}', \lambda'')$, где

$$\tilde{\psi}' \equiv \left[m\tilde{\psi} - \sqrt{2}\,e v\,\lambda'\right]\frac{1}{\sqrt{m^2+2e^2v^2}}$$

$$\lambda'' \equiv \left[\sqrt{2}\,e v\,\tilde{\psi} + m\lambda'\right]\frac{1}{\sqrt{m^2+2e^2v^2}}$$

после которого

$$\mathcal{L}_\Phi^{(2)} = i\bar{\lambda}''\gamma^\mu\partial_\mu\lambda'' + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\tilde{\psi}}'\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\psi}'$$

$$- 2\sqrt{m^2+2e^2v^2}\,\bar{\psi}\tilde{\psi}'$$

Построим теперь дираковский спинор из ψ и $\tilde{\psi}'$:

$$\Psi' \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\psi'\right]$$

Тогда

$$\mathcal{L}_\Phi^{(2)} = i\bar{\lambda}''\gamma^\mu\partial_\mu\lambda'' + i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' - \sqrt{m^2+2e^2v^2}\,\bar{\Psi}'\Psi'$$

и в спектре фермионов будут присутствовать

г) Безмассовый майорановский фермион λ''

д) Массивный дираковский спинор Ψ', $m_{\Psi'} = \sqrt{m^2+2e^2v^2}$

Вычислим теперь для рассматриваемого случая величину

$$\sum_{Б} n_Б m_Б^2 - \sum_{Ф} n_Ф m_Ф^2 = 3\cdot\underset{(A_\mu)}{(\sqrt{2}\,ev)^2} + \underset{(P)}{(\sqrt{2}\,ev)^2} + 2\cdot\underset{(\tilde{\varphi})}{(\sqrt{2}\,m)^2} - \underset{(\lambda'')}{0} - 4\underset{(\Psi')}{(m^2+2e^2v^2)} =$$

$$= \cancel{4\cdot 2e^2v^2} + \cancel{2\cdot 2m^2} - \cancel{4m^2} - \cancel{8e^2v^2} = 0$$

– видно, что рассматриваемое выражение вновь равно 0, что наводит на мысль, что соотношение

$$\sum_{Б} n_Б m_Б^2 = \sum_{Ф} n_Ф m_Ф^2$$

не случайно.

Заметим, что как в случае 1), так и в случае 2) суперсимметрия нарушена, т.к. $V_0 > 0$.

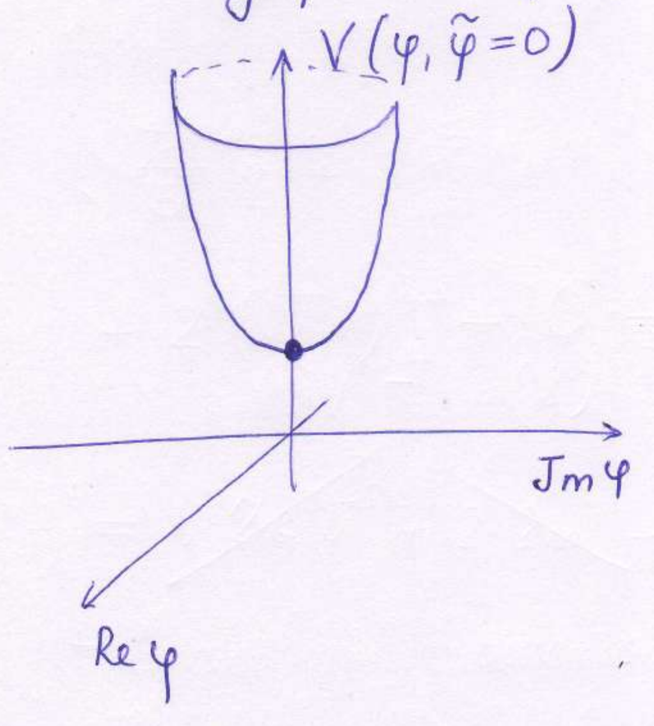
1) $m^2 - ek > 0$

$\varphi_0 = 0$; $\tilde{\varphi}_0 = 0$

(ненарушенная калибровочная симметрия)

$V_0 = \frac{1}{2}k^2 > 0$

(спонтанно нарушенная суперсимметрия)



$D_0 = e\varphi_0^*\varphi_0 - e\tilde{\varphi}_0^*\tilde{\varphi}_0 + k = k \neq 0$

$f_0 = \tilde{f}_0 = 0$

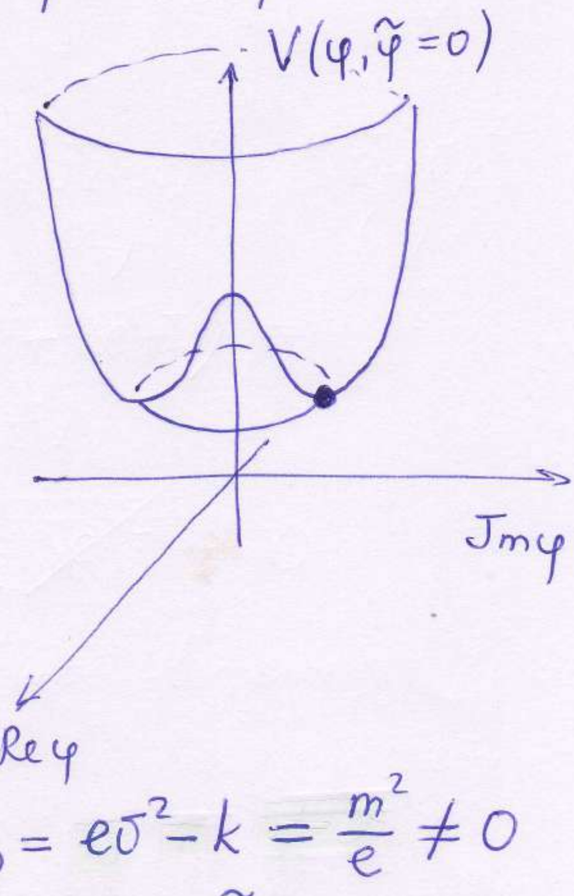
2) $m^2 - ek < 0$

$\varphi_0 = v \neq 0$, $\tilde{\varphi}_0 = 0$

(спонтанное нарушение калибровочной симметрии)

$V_0 = m^2\left(v^2 + \frac{m^2}{2e^2}\right) > 0$

(спонтанно нарушенная суперсимметрия)



$D_0 = ev^2 - k = \frac{m^2}{e} \neq 0$

$f_0 = 0$; $\tilde{f}_0 = -mv$

— видно, что в обоих случаях вспомогательное поле D имеет ненулевое вакуумное среднее.

§3. Механизм спонтанного нарушения SUSY Файе-О'Райферти

В механизме Файе-Илиопулоса вакуумное среднее приобретало вспомогательное поле D. Но есть теории, в которых вакуумное среднее приобретает вспомогательное поле f. Примером является теория с действием (m, λ, M для простоты считаем Re)

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\Phi_1^*\Phi_1 + \Phi_2^*\Phi_2 + \Phi_3^*\Phi_3\right) + \Big[\frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\cdot$$

$$\cdot\left(m\Phi_1\Phi_2 + \lambda\Phi_3(\Phi_2^2 - M^2)\right) + \text{к.с.}\Big]$$

Найдём потенциал скалярных полей в этой теории. Как обычно, он получается при исключении вспомогательных полей f_i. Слагаемые в действии, которые содержат эти поля, имеют вид

$$\int d^4x \Big\{ f_1^* f_1 + f_2^* f_2 + f_3^* f_3 + m f_1\varphi_2 + m f_2\varphi_1 + \lambda f_3\varphi_2^2$$

$$+ 2\lambda\varphi_3\varphi_2 f_2 - \lambda M^2 f_3 + m f_1^*\varphi_2^* + m f_2^*\varphi_1^* + \lambda f_3^*(\varphi_2^*)^2$$

$$+ 2\lambda\varphi_3^*\varphi_2^* f_2^* - \lambda M^2 f_3^* \Big]$$

Вспомогательные поля исключаются с помощью уравнений движения, которые имеют вид

$$\begin{cases} 0 = f_1 + m\varphi_2^* \\ 0 = f_2 + m\varphi_1^* + 2\lambda\varphi_3^*\varphi_2^* \\ 0 = f_3 + \lambda(\varphi_2^*)^2 - \lambda M^2 \end{cases}$$

При этом очевидно, что все вспомогательные поля не могут одновременно иметь нулевое вакуумное среднее (если $f_{10} = 0$, то $f_{30} \neq 0$), а потенциал скалярных полей имеет вид

$$V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = m^2|\varphi_2|^2 + \lambda^2|\varphi_2^2 - M^2|^2 + |m\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2\varphi_3|^2$$

Д/З Найти спектр частиц в этой теории и убедиться, что массы суперпартнёров оказываются различными и удовлетворяют условию

$$\sum_{Б} n_Б m_Б^2 = \sum_{Ф} n_Ф m_Ф^2$$

Заметим, что вакуумное состояние удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} m\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2\varphi_3 = 0 \\ m^2\varphi_2 + 2\lambda^2\varphi_2^*(\varphi_2^2 - M^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{вакуум является вырожденным}$$

§4. Соотношение между массами бозонов и фермионов при спонтанном нарушении SUSY

Соотношение $\sum_Б n_Б m_Б^2 = \sum_Ф n_Ф m_Ф^2$ не случайно.

Его можно вывести из алгебры суперсимметрии, а именно из КС

$$[Q_{ia}, P_\mu] = 0$$

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu$$

Для этого вначале определим Z_2-градуированный коммутатор

$$[A, B\} \equiv AB - (-1)^{P_A P_B} BA$$

где $P_A = 0$ для бозонов и $P_A = 1$ для фермионов

и операцию Str, аналогичную tr.

Для чисто бозонного случая

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_n \langle n|A|n\rangle = \sum_n A\,|n\rangle\langle n|$$

Аналогично в Z_2-градуированном случае

$$\mathrm{Str}\, A \equiv \sum_n A|n\rangle\langle n| = \sum_n (-1)^{P_A P_n + P_n}\langle n|A|n\rangle$$

В частности, если в качестве оператора A взять P_μ^2 с СЗ m^2, то $(P_A = 0)$

$$\operatorname{Str} P_\mu^2 = \sum_n (-1)^{P_n} \langle n | P_\mu^2 | n \rangle = \sum_{Б} n_{Б} m_{Б}^2 -$$

$$- \sum_{\Phi} n_\Phi m_\Phi^2$$

Поэтому нам необходимо доказать, что

$$\operatorname{Str} P_\mu^2 = 0.$$

Для этого нам потребуется тождество

$$\operatorname{Str}(AB) = (-1)^{P_A P_B} \operatorname{Str}(BA)$$

Действительно, $1 = \sum_m |m\rangle\langle m|$

$$\operatorname{Str}(AB) = \sum_n (-1)^{(P_A+P_B)P_n + P_n} \langle n | AB | n \rangle =$$

$$= \sum_{n,m} (-1)^{P_n(P_A+P_B+1)} \langle n | A | m \rangle \langle m | B | n \rangle =$$

$$= \sum_{n,m} (-1)^{P_n(P_A+P_B+1)} \cdot (-1)^{(P_n+P_m+P_A)(P_n+P_m+P_B)}$$

$$\cdot \langle m | B | n \rangle \langle n | A | m \rangle$$

т.к. $P_X^2 = P_X$, то

$$P_n(P_A+P_B+1) + (P_n+P_m+P_A)(P_n+P_m+P_B) =$$

$$= P_n(\cancel{P_A} + \cancel{P_B} + \cancel{1}) + \cancel{P_n} + P_m + \cancel{P_A P_n} + P_A P_m + \cancel{P_B P_n} + P_B P_m + P_A P_B$$

$$= P_m(P_A+P_B+1) + P_A P_B + \mathrm{mod}(2).$$

Поэтому

$$Str(AB) = \sum_{n,m} (-1)^{P_A P_B} \cdot (-1)^{P_m(P_A+P_B+1)} \langle m|B|n\rangle \langle n|A|m\rangle$$

$$= (-1)^{P_A P_B} \sum_m (-1)^{P_m(P_A+P_B+1)} \langle m|BA|m\rangle =$$

$$= (-1)^{P_A P_B} Str(BA).$$

Имеем:

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij} (\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu$$

Выразим отсюда P_μ, свернув это равенство с $(C\gamma^\nu)^{ba} \cdot \delta_{ij}$ Тогда получаем, что

$$(C\gamma^\nu)^{ba} \delta_{ij} \{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2N\, tr(\gamma^\mu C \cdot C\gamma^\nu) P_\mu = 8NP^\nu$$

$\Longrightarrow$

$$P_\mu = \frac{1}{8N} (C\gamma_\mu)^{ba} \{Q_{ia}, Q_{ib}\}$$

Поэтому

$$Str\, P_\mu^2 = \frac{1}{8N} (C\gamma^\mu)^{ba} Str\left(P_\mu \{Q_{ia}, Q_{ib}\}\right) =$$

$$= \frac{1}{8N} (C\gamma^\mu)^{ba} Str\left(P_\mu Q_{ia} Q_{ib} + P_\mu Q_{ib} Q_{ia}\right) =$$

"$-$"

$$= \frac{1}{8N} (C\gamma^\mu)^{ba} Str\left(P_\mu Q_{ia} Q_{ib} - Q_{ia} P_\mu Q_{ib}\right) =$$

$$= \frac{1}{8N} (C\gamma^\mu)^{ba} \, Str\left([P_\mu, Q_{ia}] Q_{ib}\right) = 0$$

т.к. $[P_\mu, Q_{ia}] = 0$

Т.о. мы действительно убеждаемся, что равенство

$$\boxed{\sum_Б n_Б m_Б^2 - \sum_Ф n_Ф m_Ф^2 = Str\, P_\mu^2 = 0}$$

является следствием алгебры суперсимметрии.

Это равенство имеет важные феноменологические следствия. Большинство частиц в Стандартной модели являются фермионами. Поэтому большинство суперпартнёров будут бозонами. Пока суперпартнёры ещё не открыты из-за того, что они имеют большие массы. Это означает, что в среднем в суперсимметричных обобщениях Стандартной модели бозоны должны быть тяжелее чем фермионы,

$$\sum_Б n_Б m_Б^2 > \sum_Ф n_Ф m_Ф^2$$

Это создаёт сложности при построении реалистичного механизма нарушения суперсимметрии.

Поэтому в простейших моделях используется мягкое нарушение суперсимметрии, когда в теорию добавляются некоторые специальные слагаемые, не инвариантные относительно преобразований суперсимметрии.

§5. Мягкое нарушение суперсимметрии.

В отличие от спонтанного нарушения суперсимметрии при мягком нарушении в теорию добавляются слагаемые, явно нарушающие суперсимметрию. По определению, мягкими слагаемыми называются такие слагаемые, которые явно нарушают суперсимметрию, но не вносят в теорию квадратичные расходимости.

Анализ расходимостей показывает, что существуют 4 типа таких слагаемых:

1) $-m_1^2 \varphi^* \varphi$ (масса скаляра)

2) $-m_2^2 \varphi^2 + \text{к.с.}$

3) $-m_3 \varphi^3 + \text{к.с.}$

4) $-m_4 \bar{\lambda} \lambda$ (масса калибрино)

(Для простоты калибровочные индексы не выписываем)

Такие слагаемые можно записать в виде, похожем на суперсимметричные инварианты. Действительно, рассмотрим киральное суперполе

$$\phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y).$$

Также построим т.н. шпурион

$$\eta \equiv \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \quad , \quad \text{т.ч.} \quad \eta^* = \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta$$

$$\eta\eta^* = \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \cdot \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta = \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2.$$

Тогда в силу того, что максимально возможная степень θ равна 4,

$$\eta\eta^*\phi = \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2\varphi(x)$$

$$\eta\eta^*\phi\phi^* = \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2\varphi^*(x)\varphi(x)$$

Поэтому

$$\int d^4x\, d^4\theta\, \eta^*\eta\, \phi^*\phi = 4\cdot\int d^4x\, \varphi^*(x)\varphi(x)$$

поскольку $\int d^4\theta\, (\bar\theta\theta)^2 = 8.$

$$\Rightarrow \quad -m_1^2\int d^4x\, \varphi^*\varphi = -\frac{m_1^2}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \eta^*\eta\, \phi^*\phi$$

В случае калибровочных теорий нужно учесть, что в калибровке Весса-Зумино

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\, A_\mu(x) + i\sqrt{2}\,(\bar\theta\theta)(\bar\theta\gamma_5\lambda(x))$$

$$+\frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x)$$

и $\Rightarrow$ $\eta^*\eta\cdot e^{2V} = \eta^*\eta$

Поэтому в этом случае

$$-m_1^2\int d^4x\,\varphi^+\varphi = -\frac{1}{4}m_1^2\int d^4x\, d^4\theta\,\eta^*\eta\,\Phi^+ e^{2V}\Phi$$

Хотя это выражение и является интегралом от вещественной функции x^μ и θ_a по полному суперпространству, оно не будет суперсимметричным инвариантом, поскольку η не суперполе.

Аналогичным образом с помощью равенства

$\int d^2\theta\,\bar\theta(1+\gamma_5)\theta = 4$ получаем, что

$$-m_2^2\varphi^2 + \text{к.с.} = -\frac{1}{2}m_2^2\int d^4x\, d^2\theta\,\eta\,\Phi^2 + \text{к.с.}$$

$$-m_3\varphi^3 + \text{к.с.} = -\frac{1}{2}m_3\int d^4x\, d^2\theta\,\eta\,\Phi^3 + \text{к.с.}$$

– вновь получились выражения, похожие на интегралы по киральному суперпространству от кирального суперполя.

В калибровке Весса-Зумино

$$W_a(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Big\{-i\sqrt{2}\,\lambda_a(y) - \theta_a D(y)$$

$$+ \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a F_{\mu\nu}(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\lambda_a(y)\Big\}$$

$$W^a(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \equiv W_b C^{ba} = \Big\{-i\sqrt{2}\,\bar\lambda(y) - \bar\theta D(y)$$

$$-\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(y) + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\mathcal{D}_\mu\bar\lambda(y)\gamma^\mu\Big\}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)^a$$

Поэтому

$$\eta W^a W_a = \eta\cdot(-i\cancel{\sqrt{2}})\bar\lambda\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1+\gamma_5)\cdot(-i\cancel{\sqrt{2}})\lambda =$$

$$= -\eta\cdot\bar\lambda(1+\gamma_5)\lambda$$

Поэтому в абелевом случае

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \eta W^a W_a = -2\int d^4x\, \bar\lambda(1+\gamma_5)\lambda$$

$$\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta W^a W_a = -2\int d^4x\, \bar\lambda\lambda$$

Поэтому

$$-m_4\int d^4x\, \bar\lambda\lambda = \frac{1}{2}m_4\cdot\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta W^a W_a$$

В неабелевом случае

$$-m_4\int d^4x\, \bar\lambda^A\lambda^A = \frac{m_4}{e^2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta W^a W_a$$

где $W_a \equiv e W_a^A t^A$ и $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$.

– вновь получилось выражение, похожее на интеграл от кирального суперполя по киральному суперпространству, но не суперсимметричный инвариант.

Итак, мягкие слагаемые имеют вид

1) $$-m_1^2 \int d^4x\, \varphi^+ \varphi = -\frac{m_1^2}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \eta^* \eta\, \phi^+ e^{2V} \phi$$

2) $$-(m_2^2)^{ij} \int d^4x\, \varphi_i \varphi_j = -\frac{1}{2}(m_2^2)^{ij}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, \phi_i \phi_j$$

3) $$-(m_3)^{ijk} \int d^4x\, \varphi_i \varphi_j \varphi_k = -\frac{1}{2}(m_3)^{ijk}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, \phi_i \phi_j \phi_k$$

4) $$-m_4 \int d^4x\, \bar\lambda^A \lambda^A = \frac{m_4}{e^2}\, tr\, Re \int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, W^a W_a =$$

$$= \frac{m_4}{2}\, Re \int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, W^{aA} W_a^A$$

Все эти выражения явно нарушают суперсимметрию, но не вносят в теорию квадратичные расходимости. Однако их можно рассматривать как некий остаток от спонтанного нарушения суперсимметрии, действительно:

Пусть есть вещественное суперполе

$$A(x,\theta) = \dots + \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2 a(x)$$

и вспомогательное поле $a(x)$ приобретает нетривиальное вакуумное среднее: $a_0 = \sigma^2 \neq 0$. Тогда при энергиях много меньших σ суперсимметричный инвариант

$$-\int d^4x\, d^4\theta\, A \cdot \Phi^+ e^{2V}\Phi \xrightarrow[\text{даёт}]{} -\sigma^2 \int d^4x\, d^4\theta \cdot \frac{1}{4}\eta^*\eta\, \Phi^+ e^{2V}\Phi$$

Аналогичным образом, если есть киральное суперполе

$$B(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \dots + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, b(y^\mu)$$

и $b_0 = \sigma$, то

$$-\int d^4x\, d^2\theta\, B\Phi^2 \longrightarrow -\sigma\int d^4x\, d^2\theta\, \eta\Phi^2$$

$$-\int d^4x\, d^2\theta\, B\Phi^3 \longrightarrow -\sigma\int d^4x\, d^2\theta\, \eta\Phi^3$$

$$-\int d^4x\, d^2\theta\, B\, W^a W_a \longrightarrow -\sigma\int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, W^a W_a$$

$\Longrightarrow$ все мягкие слагаемое можно рассматривать как остатки от суперсимметричных инвариантов при спонтанном нарушении суперсимметрии.

Вид мягких слагаемых позволяет понять, почему мы не видим суперпартнёры фермионов и калибровочных бозонов в эксперименте: Мягкие массы могут возникать лишь для скаляров и калибрино, но не для фермионов (кварков и лептонов) и калибровочных бозонов.

Глава II Минимальная Суперсимметричная Стандартная Модель (МССМ)

§1. Состав полей МССМ.

МССМ - простейшее суперсимметричное расширение Стандартной модели. (Строго говоря, суперсимметричной она не является, поскольку нарушение суперсимметрии происходит в ней за счёт мягких слагаемых.)

Как и Стандартная модель, это - калибровочная теория с группой

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1).$$

Поэтому в ней будет 3 калибровочных поля, которые теперь включаются в состав 3-х вещественных калибровочных суперполей

$$V_{su(3)}(x,\theta)\ ;\quad V_{su(2)}(x,\theta)\quad и\quad V_{u(1)}(x,\theta)$$

При этом, как обычно, в калибровке Весса-Зумино

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\, A_{\mu}(x) + i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x)$$

Также в теории будет 3 константы связи: e_3, e_2 и e_1, т.к. калибровочная группа - прямое произведение 3-х сомножителей.

Кварки, лептоны и хиггсовские скалярные поля теперь будут компонентами киральных суперполей

$$(1-\gamma_5)D\Phi = 0$$

$$\Phi(y^{\mu},\theta) = \varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\, f(y).$$

Суперполя мы будем обозначать большими буквами, а соответствующие поля Стандартной модели - маленькими.

Киральные суперполя материи и их квантовые числа по группе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ удобно записать в виде следующей таблицы:

	Суперполе	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	поле С.М.
кварки + суперпартн.	$\tilde{Q}^I \equiv \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}^I$	антифунд.	фунд.	$-1/6$ другой знак	$\begin{pmatrix} u^c \\ d^c \end{pmatrix}^I_R$ спиноры
	U^I	фунд.	трив.	$+2/3$	u^I_R спиноры
	D^I	фунд.	трив.	$-1/3$	d^I_R спиноры
лептоны + суперпартн.	$\tilde{L}^I \equiv \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^I$	трив.	фунд.	$+1/2$ другой знак	$\begin{pmatrix} \nu^c \\ e^c \end{pmatrix}^I_R$ спиноры
	N^I	трив.	трив.	0	ν^I_R спиноры
	E^I	трив.	трив.	-1	e^I_R спиноры
хиггсы + суперпартн.	$\Phi_d = \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix}$	трив.	фунд.	$+1/2$	$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ скаляры
	$\Phi_u = \begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix}$	трив.	фунд.	$-1/2$	—

– видно, что есть ещё суперполе Φ_u, благодаря которому увеличивается число хиггсовских полей.

Почему в суперсимметричном случае нужно в 2 раза больше хиггсовских полей, чем в несуперсимметричном случае будет ясно далее.

Также мы видим, что левые и правые частицы СМ теперь описываются единообразно — с помощью киральных суперполей. Напомним при этом, что

$$(\psi^c)_R = (\psi_L)^c$$

Поэтому суперполя, включающие левые кварки и левые лептоны, (т.е. $\tilde{Q}^I$ и $\tilde{L}^I$) лежат в сопряжённых представлениях по $SU(3)$ и имеют противоположный гиперзаряд по сравнению с соответствующими полями СМ. (Представление $SU(2)$, сопряжённое к фундаментальному, унитарно эквивалентно фундаментальному).

Также заметим, что описание хиггсовских полей в суперсимметричном случае аналогично описанию кварков и лептонов. и производится с помощью киральных суперполей.

§2. Действие МССМ.

Удобно разбить действие МССМ на ряд характерных частей:

$$S = \underbrace{S_{SYM} + S_{WZ} + S_{\text{супрпот.}}}_{\text{суперсимметричная часть}} + S_{\text{мягкое}}$$

слагаемые мягко нарушающие SUSY.

$$S_{SYM} = \frac{1}{2e_3^2}\, \mathrm{Re}\, \mathrm{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \underset{SU(3)}{W^a W_a} +$$

$$+ \frac{1}{2e_2^2}\, \mathrm{Re}\, \mathrm{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \underset{SU(2)}{W^a W_a} + \frac{1}{4}\, \mathrm{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, \underset{U(1)}{W^a W_a}$$

где

$$W_a \equiv \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left(e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V} \right)$$

для групп $SU(2)$ и $SU(3)$ и

$$\underset{U(1)}{W_a} \equiv \frac{1}{16} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[(1+\gamma_5) D_a \underset{U(1)}{V} \right] =$$

$$= \frac{1}{32 e_1} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[e^{-2e_1 V_{U(1)}} (1+\gamma_5) D_a\, e^{2e_1 V_{U(1)}} \right]$$

– в данном случае удобно вынести константу связи e_1 для удобства дальнейших обозначений.

т.о. S_{SYM} – сумма кинетических слагаемых для калибровочных суперполей, присутствующих в МССМ.

Напомним, что в компонентах в калибровке Весса - Зумино

$$\frac{Re}{4e^2} tr \int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a = \frac{2}{e^2} tr \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \right.$$

$$\left. + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \right\}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$

$$\mathcal{D}_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]$$

Следующее слагаемое, S_{WZ}, представляет собой сумму всех кинетических членов для киральных суперполей материи, которые имеют структуру

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi \xrightarrow{ВЗ} \int d^4x \left\{ \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi + f^+ f \right.$$

$$+ i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + \varphi^+ D \varphi + i\sqrt{2}\,\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\cdot\varphi$$

$$\left. - i\sqrt{2}\,\varphi^+ \bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi \right\}$$

(Но теперь есть много киральных суперполей и 3 калибровочных суперполя).

$$S_{WZ} = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}^{I+} \exp\left(-2V^T_{SU(3)} + 2V_{SU(2)} - \frac{e_1}{3} V_{U(1)}\right) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}^{I} + U^{I+} \exp\left(2V_{SU(3)} + \frac{4e_1}{3} V_{U(1)}\right) U^I \right.$$

$$+ D^{I+} \exp\left(2V_{SU(3)} - \frac{2e_1}{3} V_{U(1)}\right) D^I + \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^{I+} \exp\left(2V_{SU(2)} + e_1 V_{U(1)}\right) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^{I} + N^{I+} N^I + E^{I+} \exp\left(-2e_1 V_{U(1)}\right) E^I$$

$$\left. + \Phi_d^+ \exp\left(2V_{SU(2)} + e_1 V_{U(1)}\right) \Phi_d + \Phi_u^+ \exp\left(2V_{SU(2)} - e_1 V_{U(1)}\right) \Phi_u \right\}$$

– видно, что всё нужно согласовывать с квантовыми числами, приведёнными на стр. 37.

Заметим, что формы действий S_{SYM} и S_{WZ} полностью определяются калибровочной группой и квантовыми числами суперполей материи соответственно.

$$S_{суперп.} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, g\left(\begin{matrix}\text{киральные} \\ \text{суперполя}\end{matrix}\right) + \text{к.с.}$$

где g – аналитическая функция киральных суперполей теории.

Как обычно, мы ограничиваемся перенормируемыми теориями, для которых g не более чем кубична по киральным суперполям.

g выбирается так, чтобы включать все допустимые калибровочно инвариантные структуры: (калибровочная инвариантность S_{SYM} и S_{WZ} очевидна)

$$
\begin{aligned}
S_{\text{суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \Big\{ & (Y_u)_{IJ} \overset{-1/6}{(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1/2}{\begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix}} \overset{+\frac{2}{3}=0}{U_a^J} \\
& \text{антицвет (из-за антифунд. предст.)} \\
+ & (Y_d)_{IJ} \underset{-1/6}{(\tilde{U},\tilde{D})^{aI}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{+1/2}{\begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix}} \underset{-1/3=0}{D_a^J} \longleftarrow \text{цветовой индекс} \\
+ & (Y_\nu)_{IJ} \underset{+1/2}{(\tilde{N},\tilde{E})^{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{-1/2}{\begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix}} \underset{+0=0}{N^J} \\
+ & (Y_e)_{IJ} \underset{+1/2}{(\tilde{N},\tilde{E})^{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{+1/2}{\begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix}} \underset{-1=0}{E^J} \\
+ & \frac{1}{2} \underset{\sim 10^{15}-10^{16}\ \text{ГэВ}}{M_{IJ}} \overset{0+0}{N_I N_J} + \mu \underset{-1/2}{(\Phi_{u1},\Phi_{u2})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{+1/2=0}{\begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix}} \Big\} + \text{к.с.}
\end{aligned}
$$

– Видно, что это выражение $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ калибровочно инвариантно.

(Гиперзаряды по $U(1)$ подписаны под каждым слагаемым)

$SU(3)$ инвариантность очевидна, т.к. верхний индекс везде сворачивается с нижним.

$SU(2)$ инвариантность следует из того, что

$$(\varphi_1, \varphi_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = \varphi_1\chi_2 - \varphi_2\chi_1 = \varepsilon^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\chi_\beta$$

— очевидный инвариант.

Важное отличие от Стандартной модели:

Слагаемые, пропорциональные

нарушает аналитичность

$$\cancel{\int d^4x\, d^2\theta\, (\hat{u}, \tilde{D})^a \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\phi^*_{d2}\\ \phi^*_{d1}\end{pmatrix} u_a}$$

недопустимы, т.к. нарушают суперсимметрию, поскольку Φ^* не кирально, а антикирально.

Поэтому в МССМ будет 2 хиггсовских дублета φ_d и φ_u, а, следовательно,

$8-3=5$ хиггсовских полей.

(В Стандартной модели

$4-3=1$ хиггсовское поле)

Механизм спонтанного нарушения $SU(2)\times U(1)$ симметрии будет детально изучаться далее.

Мягкие слагаемые, нарушающие суперсимметрию, собраны в $S_{\text{мягкое}}$. Его также удобно разбить на 3 части:

$$S_{\text{мягкое}} = S_{\substack{\text{масса}\\ \text{калибрино}}} + S_{\substack{\text{массы}\\ \text{скаляров}}} + S_{\substack{\text{мягкий}\\ \text{суперпотенциал}}}$$

$$S_{\substack{\text{масса}\\ \text{калибрино}}} = \frac{M_3}{e_3^2} \mathrm{Re}\, \mathrm{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \eta \underset{su(3)}{W^a W_a}$$

$$+ \frac{M_2}{e_2^2} \mathrm{Re}\, \mathrm{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \eta \underset{su(2)}{W^a W_a} + \frac{M_1}{2} \mathrm{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, \eta \underset{u(1)}{W^a W_a}$$

где $\eta \equiv \frac{1}{2} \bar\theta (1+\gamma_5) \theta$

Эти слагаемые дают массу спинорным суперпартнёрам калибровочных бозонов – калибрино. Напомним, что в компонентах

$$\frac{M}{e^2} \mathrm{Re}\, \mathrm{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, W^a W_a = - \frac{2M}{e^2} \mathrm{tr} \int d^4x\, \bar\lambda \lambda$$

Следующее слагаемое $S_{\substack{\text{массы}\\ \text{скаляров}}}$ похоже на S_{WZ} и содержит все

$$-\frac{1}{4} m^2 \int d^4x\, d^4\theta\, \eta^* \eta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi = -m^2 \int d^4x\, \varphi^+ \varphi.$$

$$S_{\substack{\text{массы}\\ \text{скаляров}}} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \eta^*\eta \Big\{ m_Q^2 \begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{D}\end{pmatrix}^+ \exp\Big(-2V^T_{SU(3)}$$

$$+ 2V_{SU(2)} - \frac{e_1}{3}V_{U(1)}\Big)\begin{pmatrix}\hat{U}\\ \tilde{D}\end{pmatrix} + m_U^2\, U^+ \exp\Big(2V_{SU(3)} + \frac{4e_1}{3}V_{U(1)}\Big) U$$

$$+ m_D^2\, D^+ \exp\Big(2V_{SU(3)} - \frac{2e_1}{3}V_{U(1)}\Big) D + m_L^2 \begin{pmatrix}\tilde{N}\\ \tilde{E}\end{pmatrix}^+ \exp\Big(2V_{SU(2)} +$$

$$+ e_1 V_{U(1)}\Big)\begin{pmatrix}\tilde{N}\\ \tilde{E}\end{pmatrix} + m_N^2 N^+N + m_E^2\, E^+ \exp\big(-2e_1 V_{U(1)}\big) E$$

$$+ m_1^2 \phi_u^+ \exp\big(2V_{SU(2)} - e_1 V_{U(1)}\big)\phi_u + m_2^2 \phi_d^+ \exp\big(2V_{SU(2)} + e_1 V_{U(1)}\big)\phi_d \Big\}$$

где для краткости мы не стали выписывать индексы поколений и цветовые индексы.

Наконец, последнее слагаемое $S_{\substack{\text{мягкий}\\ \text{суперпот.}}}$ аналогично $S_{\text{суперп.}}$:

$$S_{\substack{\text{мягкий}\\ \text{суперпот.}}} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta \Big\{ A_u \cdot (\tilde{U}, \tilde{D})^a \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{u1}\\ \phi_{u2}\end{pmatrix} U_a$$

$$+ A_d \cdot (\tilde{U}, \tilde{D})^a \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix} D_a + A_\nu (\tilde{N}, \tilde{E}) \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{u1}\\ \phi_{u2}\end{pmatrix} N$$

$$+ A_e (\tilde{N}, \tilde{E}) \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix} E - \frac{1}{2} m^2 N^2 - \mu B (\phi_{u1}, \phi_{u2})$$

$$\cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix} \Big\} + \text{к.с.}$$

где $[A] = [m] = [B] = m$

§3 Потенциал хиггсовских полей в МССМ

Следующим шагом необходимо исследовать вопрос о спонтанном нарушении калибровочной симметрии. Теперь есть очень много скалярных полей (скварки, слептоны, хиггсы). Будем предполагать, что параметры модели (прежде всего мягкие массы) таковы, что вакуумные средние приобретают именно хиггсовские поля.

Для нахождения цепочки нарушения симметрии необходимо

1. Найти потенциал хиггсовских скаляров
2. Найти вакуумное состояние
3. Найти малую группу.

Вначале построим потенциал хиггсовских полей. Он появляется из

1. Исключения вспомогательных полей
2. Мягких слагаемых, нарушающих суперсимметрию.

Более конкретно:

$$V(\varphi_u, \varphi_d) = V_D + V_f + V_m + V_{\mu B}$$

где V_D получается при исключении вспомогательных полей D.

V_f – при исключении вспомогательных полей f

V_m – из мягких слагаемых с m_1 и m_2

$V_{\mu B}$ – из μB мягкого слагаемого.

Будем последовательно вычислять все эти вклады, учитывая, что потенциал входит в функцию Лагранжа со знаком минус.

V_D получается из слагаемых в действии

$$\frac{1}{2}\left(D^A_{su(2)}\right)^2 + \frac{1}{2}D^2_{u(1)} + \varphi_d^+\left(e_2 D^A_{su(2)}\frac{\sigma^A}{2} + \frac{e_1}{2}D^A_{u(1)}\right)\varphi_d$$

$$+ \varphi_u^+\left(e_2 D^A_{su(2)}\frac{\sigma^A}{2} - \frac{e_1}{2}D^A_{u(1)}\right)\varphi_u$$

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi_d^+ e^{2V_{su(2)} + e_1 V_{u(1)}}\phi_d$$

$$\frac{1}{2e_2^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a{}_{su(2)}$$

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi_u^+ e^{2V_{su(2)} - e_1 V_{u(1)}}\phi_u$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a{}_{u(1)}$$

где также было учтено, что $V_{su(2)} = e_2 V^A_{su(2)}\dfrac{\sigma^A}{2}$

Уравнения движения для $D^A_{su(2)}$ и $D_{u(1)}$ имеют вид

$$0 = D^A_{su(2)} + \frac{1}{2} e_2 \left[\varphi_d^+ \sigma^A \varphi_d + \varphi_u^+ \sigma^A \varphi_u \right] \quad , A = \overline{1,3}$$

$$0 = D_{u(1)} + \frac{1}{2} e_1 \left[\varphi_d^+ \varphi_d - \varphi_u^+ \varphi_u \right]$$

Поэтому после исключения этих вспомогательных полей по стандартным правилам мы получаем

$$V_D = \frac{1}{2} (D^A_{su(2)})^2 + \frac{1}{2} D^2_{u(1)} = \frac{1}{8} e_2^2 \left[\varphi_d^+ \sigma^A \varphi_d + \varphi_u^+ \sigma^A \varphi_u \right]^2$$

$$+ \frac{1}{8} e_1^2 \left[\varphi_d^+ \varphi_d - \varphi_u^+ \varphi_u \right]^2$$

— видно, что 4-я степень скалярных полей с нужным знаком получается автоматически.

V_f получается из слагаемых

$$f_d^+ f_d + f_u^+ f_u + \mu (f_{u1}, f_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} +$$

$$+ \mu (\varphi_{u1}, \varphi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{d1} \\ f_{d2} \end{pmatrix} + \mu^* (f^*_{u1}, f^*_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^*_{d1} \\ \varphi^*_{d2} \end{pmatrix}$$

$$+ \mu^* (\varphi^*_{u1} \;\; \varphi^*_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^*_{d1} \\ f^*_{d2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \mu \int d^4x \, d^2\theta \, \Phi_u^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_d + \text{к.с.}$$

$$\frac{1}{4} \int d^4x \, d^4\theta \left\{ \Phi_d^+ e^{2V_{su(2)} + e_1 V_{u(1)}} \Phi_d + \Phi_u^+ e^{2V_{su(2)} - e_1 V_{u(1)}} \Phi_u \right\}$$

Уравнения движения для вспомогательных полей при этом имеют вид

$$f_{d1}^{*} - \mu \varphi_{u2} = 0 \qquad f_{u1}^{*} + \mu \varphi_{d2} = 0$$

$$f_{d2}^{*} + \mu \varphi_{u1} = 0 \qquad f_{u2}^{*} - \mu \varphi_{d1} = 0$$

Поэтому после исключения f_u и f_d получим

$$V_f = f_d^{+} f_d + f_u^{+} f_u = |\mu|^2 (\varphi_u^{+} \varphi_u + \varphi_d^{+} \varphi_d)$$

V_m получается из мягких слагаемых

$$-\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \eta^* \eta \left\{ m_1^2 \Phi_u^{+} e^{2V_{SU(2)} - e_1 V_{U(1)}} \Phi_u + m_2^2 \Phi_d^{+} e^{2V_{SU(2)} + e_1 V_{U(1)}} \Phi_d \right\}$$

и имеет вид

$$V_m = m_1^2 \varphi_u^{+} \varphi_u + m_2^2 \varphi_d^{+} \varphi_d$$

$V_{\mu B}$ получается из слагаемого

$$-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta \cdot \mu B \, (\Phi_{u1}\ \Phi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix} + \text{к.с.}$$

и имеет вид

$$V_{\mu B} = \mu B \, (\varphi_{u1}, \varphi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} + (\mu B)^* (\varphi_{u1}^{*}\ \varphi_{u2}^{*}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1}^{*} \\ \varphi_{d2}^{*} \end{pmatrix}$$

Заметим, что с помощью преобразования полевых переменных $\begin{pmatrix}\phi_{u1}\\ \phi_{u2}\end{pmatrix} \to e^{i\alpha}\begin{pmatrix}\phi_{u1}\\ \phi_{u2}\end{pmatrix}$ и

$\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix} \to e^{i\alpha}\begin{pmatrix}\phi_{d1}\\ \phi_{d2}\end{pmatrix}$ где $\alpha = const$

можно добиться, чтобы $\mu B \in Re$ и $\mu B > 0$, что мы всегда будем предполагать далее.

Таким образом, потенциал скалярных полей в МССМ будет иметь вид

$$V(\varphi_u, \varphi_d) = \frac{1}{8} e_2^2 \left[\varphi_d^+ \sigma^A \varphi_d + \varphi_u^+ \sigma^A \varphi_u \right]^2 + \frac{1}{8} e_1^2 \left[\varphi_d^+ \varphi_d - \varphi_u^+ \varphi_u \right]^2 + (m_1^2 + |\mu|^2)\, \varphi_u^+ \varphi_u + (m_2^2 + |\mu|^2)\, \varphi_d^+ \varphi_d$$
$$+ \mu B \,(\varphi_{u1}\ \varphi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} + \mu B \,(\varphi_{u1}^*\ \varphi_{u2}^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{d1}^* \\ \varphi_{d2}^* \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы упростить это выражение, воспользуемся тождеством

$$(\sigma^A)_i{}^j (\sigma^A)_k{}^l + \delta_i{}^j \delta_k{}^l = 2\, \delta_i{}^l \delta_k{}^j$$

Действительно, при свёртке с $\delta_j{}^i$ получим

$$\underbrace{\cancel{\operatorname{tr} \sigma^A}}_{0} \cdot (\sigma^A)_k{}^l + 2\delta_k{}^l = 2\delta_k{}^l \quad \text{– верно}$$

а при свёртке с $(\sigma^B)_j{}^i$

$$\underbrace{\operatorname{tr}(\sigma^A \sigma^B)}_{2\delta^{AB}} \cdot (\sigma^A)_k{}^l + \underbrace{\operatorname{tr}(\cancel{\sigma^B})}_{0}\, \delta_k{}^l = 2(\sigma^B)_k{}^l \quad \text{– верно}$$

Тогда, например,

$$\varphi_d^+ \sigma^A \varphi_d \cdot \varphi_u^+ \sigma^A \varphi_u = \varphi_d^{*i} (\sigma^A)_i{}^j \varphi_{dj} \cdot \varphi_u^{*k} (\sigma^A)_k{}^l \varphi_{ul}$$

$$= \varphi_d^{*i} \varphi_{dj} \, \varphi_u^{*k} \varphi_{ul} \left(2 \delta_i{}^l \delta_k{}^j - \delta_i{}^j \delta_k{}^l \right) =$$

$$= 2 \varphi_d^+ \varphi_u \cdot \varphi_u^+ \varphi_d - \varphi_d^+ \varphi_d \cdot \varphi_u^+ \varphi_u$$

Аналогичным образом

$$(\varphi_d^+ \sigma^A \varphi_d)^2 = 2(\varphi_d^+ \varphi_d)^2 - (\varphi_d^+ \varphi_d)^2 = (\varphi_d^+ \varphi_d)^2$$

$$(\varphi_u^+ \sigma^A \varphi_u)^2 = (\varphi_u^+ \varphi_u)^2$$

Тогда

$$\left[\varphi_d^+ \sigma^A \varphi_d + \varphi_u^+ \sigma^A \varphi_u \right]^2 = (\varphi_d^+ \varphi_d)^2 + (\varphi_u^+ \varphi_u)^2 -$$

$$- 2 \varphi_d^+ \varphi_d \cdot \varphi_u^+ \varphi_u + 4 |\varphi_d^+ \varphi_u|^2$$

Это позволяет переписать потенциал скалярных полей в виде

$$\boxed{\begin{aligned} V(\varphi_u, \varphi_d) &= \frac{1}{8}(e_1^2 + e_2^2) \left[|\varphi_d|^2 - |\varphi_u|^2 \right]^2 + \frac{e_2^2}{2} |\varphi_d^+ \varphi_u|^2 \\ &+ (m_1^2 + |\mu|^2) |\varphi_u|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2) |\varphi_d|^2 + \mu B (-\varphi_{u2} \varphi_{d1} + \\ &+ \varphi_{u1} \varphi_{d2}) + \mu B (-\varphi_{u2}^* \varphi_{d1}^* + \varphi_{u1}^* \varphi_{d2}^*) \end{aligned}}$$

§4. Вакуумное состояние и спонтанное нарушение калибровочной симметрии в МССМ

Большая часть слагаемых в $V(\varphi_u, \varphi_d)$ зависят только от $|\varphi_u|^2$ и $|\varphi_d|^2$. Пусть эти величины фиксированы. Найдём как устроены φ_{u0} и φ_{d0}. Они должны минимизировать величину

$$\frac{e_2^2}{4}|\varphi_d^+\varphi_u|^2 + \mu B(-\varphi_{u2}\varphi_{d1} + \varphi_{u1}\varphi_{d2}) + \mu B(-\varphi_{u2}^*\varphi_{d1}^* + \varphi_{u1}^*\varphi_{d2}^*)$$

при условии, что $|\varphi_u|^2 = v_u^2$; $|\varphi_d|^2 = v_d^2$ (Мы считаем, что v_u и v_d – вещественные положительные числа)

Минимальное значение $|\varphi_d^+\varphi_u|^2$ очевидно равно 0. т.к. $\mu B \in Re$ и $\mu B > 0$, то остальные слагаемые будут минимальны если $\varphi_{u2} = v_u$
$\varphi_{d1} = v_d$

т.е.

$$\varphi_{u0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \qquad \varphi_{d0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

При этом величины v_u и v_d определяются из условия минимальности выражения

$$V(v_u, v_d) = V(\varphi_u \to \varphi_{u0};\ \varphi_d \to \varphi_{d0}) =$$

$$= \frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)(v_u^2 - v_d^2)^2 + (m_1^2 + |\mu|^2) v_u^2 + (m_2^2+|\mu|^2) v_d^2$$

$$- 2\mu B v_u v_d$$

Условия минимума этого выражения будут изучены далее.

Пока же выясним относительно какой части калибровочных преобразований будет инвариантен вакуум

$$\varphi_{u0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \quad \varphi_{d0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е., другими словами, найдём малую группу.

При $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ преобразованиях хиггсовские поля меняются по закону

$$\begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2 e^{-ie_1\alpha_1/2} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2 e^{+ie\alpha_1/2} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}$$

где $\omega_2 \in SU(2)$ и может быть записан в виде

$$\omega_2 = \exp\left(ie_2\alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix}0\\ v_u\end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left(ie_2\alpha_2^A\frac{\sigma^A}{2} - ie_1\frac{\alpha_1}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\ v_u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ v_u\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}v_d\\ 0\end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left(ie_2\alpha_2^A\frac{\sigma^A}{2} + ie_1\frac{\alpha_1}{2}\right)\begin{pmatrix}v_d\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_d\\ 0\end{pmatrix}$$

для преобразований из малой группы H.

$\Longrightarrow$

$$0 = \left(ie_2\alpha_2^A\frac{\sigma^A}{2} - ie_1\frac{\alpha_1}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\ v_u\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 & e_2\left(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2\right) \\ e_2\left(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2\right) & -e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v_u\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_2^1 = 0; \quad \alpha_2^2 = 0; \quad e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 = 0$$

$$0 = \left(ie_2\alpha_2^A\frac{\sigma^A}{2} + ie_1\frac{\alpha_1}{2}\right)\begin{pmatrix}v_d\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2\left(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2\right) \\ e_2\left(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2\right) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_d\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_2^1 = 0; \quad \alpha_2^2 = 0; \quad e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 = 0$$

— в обоих случаях получаются одни и те же равенства, т.е. из 4-х независимых параметров остаётся только 1.

При этом под действием преобразований малой группы

$$\begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left\{ i e_1 \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left\{ i e_1 \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}$$

Поэтому очевидно, что малая группа H будет $S'U(3) \times U(1)_{em}$ (При $SU(3)$ преобразованиях хиггсовские поля вообще не меняются)

Квантовые числа Φ_d и $\tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}$ совпадают.

Внутри $\tilde{L}$ размещены, в частности,

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}^c = \begin{pmatrix} \nu^c \\ e^c \end{pmatrix}_R \quad \text{с зарядами} \quad e \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

Поэтому мы отождествляем $e_1\alpha_1$ с $e\alpha_{em}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left\{ i e \alpha_{em} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left\{ i e \alpha_{em} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{d1} \\ \varphi_{d2} \end{pmatrix}$$

и можно легко увидеть, какие электрические заряды имеют различные компоненты φ_u и φ_d.

Т.о. $\boxed{SU(3) \times SU(2) \times U(1) \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}}$

§ 5. Массы калибровочных бозонов в МССМ

т.к. $SU(3)\times SU(2)\times U(1) \longrightarrow SU(3)\times U(1)_{em}$, то также как и в Стандартной модели $4-1=3$ векторных бозона должны стать массивными.

Массы векторных бозонов получаются из слагаемых

$$\mathcal{D}_\mu \varphi_u^+ \mathcal{D}^\mu \varphi_u + \mathcal{D}_\mu \varphi_d^+ \mathcal{D}^\mu \varphi_d$$

где
$$\mathcal{D}_\mu \varphi_u = \partial_\mu \varphi_u + \frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \varphi_u - \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \varphi_u$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi_d = \partial_\mu \varphi_d + \frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A \varphi_d + \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \varphi_d$$

(Напомним, что если $\varphi \to \exp(ie_1 Y \alpha_1)\varphi$

$\underset{U(1)}{A_\mu} \to \underset{U(1)}{A_\mu} - \partial_\mu \alpha_1$, то

$\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ie_1 Y \underset{U(1)}{A_\mu} \varphi$)

Массовые слагаемые для векторных бозонов получаются если заменить скалярные поля на их вакуумные средние:

$$\mathcal{D}_\mu \varphi_u \longrightarrow \left(\frac{i}{2} e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^A} \sigma^A - \frac{i}{2} e_1 \underset{U(1)}{A_\mu}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2 \underset{su(2)}{A^3_\mu} - e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} & e_2 (A^1_\mu - iA^2_\mu)_{su(2)} \\ e_2 (A^1_\mu + iA^2_\mu)_{su(2)} & -e_2 \underset{su(2)}{A^3_\mu} - e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i v_u}{2}\begin{pmatrix} e_2 (A^1_\mu - iA^2_\mu)_{su(2)} \\ -e_2 \underset{su(2)}{A^3_\mu} - e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} \end{pmatrix}$$

Аналогично

$$\mathcal{D}_\mu \varphi_d \longrightarrow \left(\frac{i}{2} e_2 \underset{su(2)}{A^A_\mu} \sigma^A + \frac{i}{2} e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} \right)\begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} e_2 \underset{su(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} & e_2 (A^1_\mu - iA^2_\mu)_{su(2)} \\ e_2 (A^1_\mu + iA^2_\mu)_{su(2)} & -e_2 \underset{su(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{i v_d}{2}\begin{pmatrix} e_2 \underset{su(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} \\ e_2 (A^1_\mu + iA^2_\mu)_{su(2)} \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$|\mathcal{D}_\mu \varphi_u|^2 + |\mathcal{D}_\mu \varphi_d|^2 \longrightarrow \frac{1}{4}(v_u^2 + v_d^2) e_2^2 \left[(\underset{su(2)}{A^1_\mu})^2 + (\underset{su(2)}{A^2_\mu})^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{4}(v_u^2 + v_d^2)\left[e_2 \underset{su(2)}{A^3_\mu} + e_1 \underset{u(1)}{A_\mu} \right]^2$$

– действительно получилось 3 массивных векторных бозона.

Как обычно, полагаем

$$W_\mu^1 \equiv \underset{su(2)}{A_\mu^1}\ ; \quad W_\mu^2 \equiv \underset{su(2)}{A_\mu^2}$$

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2}}\left[e_2 \underset{su(2)}{A_\mu^3} + e_1 \underset{u(1)}{A_\mu}\right] = \cos\theta_W \underset{su(2)}{A_\mu^3} + \sin\theta_W \underset{u(1)}{A_\mu}$$

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{e_1^2+e_2^2}}\left[e_2 \underset{u(1)}{A_\mu} - e_1 \underset{su(2)}{A_\mu^3}\right] = \cos\theta_W \underset{u(1)}{A_\mu} - \sin\theta_W \underset{su(2)}{A_\mu^3}$$

(Здесь обозначения немного отличаются от Стандартной модели, но по сути ничего не меняется)

При этом, как обычно,

$$e = e_1 \cos\theta_W = e_2 \sin\theta_W$$

Тогда часть лагранжиана, содержащая векторные бозоны, в квадратичном приближении примет вид

$$\mathcal{L}^{(2)} \longrightarrow -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{4} e_2^2 (v_u^2 + v_d^2)}_{\frac{1}{2} m_W^2} \cdot$$

$$\left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2\right] + \underbrace{\frac{1}{4}(e_1^2+e_2^2)(v_u^2+v_d^2)}_{\frac{1}{2} m_Z^2} Z_\mu^2$$

т.о. для масс векторных бозонов мы получаем выражения, похожие на Стандартную модель:

$$m_W^2 = \frac{1}{2} e_2^2 (v_u^2 + v_d^2) \equiv \frac{1}{2} e_2^2 v^2$$

$$m_Z^2 = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2)(v_u^2 + v_d^2) = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) v^2$$

где, как и в Стандартной модели,

$v \simeq 174{,}4$ ГэВ.

При этом видно, что вместо v_u и v_d удобно использовать новые параметры:

$(v_u, v_d) \longrightarrow (v, \operatorname{tg}\beta)$ где

$$\begin{cases} v_u \equiv v \sin\beta \\ v_d \equiv v \cos\beta \end{cases} \iff \begin{cases} v = \sqrt{v_u^2 + v_d^2} \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_u}{v_d} \end{cases}$$

Величина $\operatorname{tg}\beta$ в настоящее время пока ещё не определена экспериментально.

§6. Хиггсовские бозоны в МССМ

Исходно в МССМ есть $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ степеней свободы у полей φ_u и φ_d. Из них 3 являются голдстоуновскими бозонами, которых "съедают" векторные поле $W_\mu^{1,2}$ и Z_μ.

Важно уметь разделять хиггсовские и голдстоуновские степени свободы. Голдстоуновские степени свободы можно занулить выбором калибровочных параметров. При калибровочных преобразованиях

$$\varphi_u \equiv \begin{pmatrix} \varphi'_{u1} \\ v_u + \varphi'_{u2} \end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left(ie_2\alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2}\right) e^{-ie_1\alpha_1/2} \varphi_u$$

$$\varphi_d \equiv \begin{pmatrix} v_d + \varphi'_{d1} \\ \varphi'_{d2} \end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left(ie_2\alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2}\right) e^{+ie_1\alpha_1/2} \varphi_d$$

где $\varphi'_{u1} \equiv \varphi_{u1}$; $\varphi'_{u2} \equiv \varphi_{u2} - v_u$

$\varphi'_{d1} \equiv \varphi_{d1} - v_d$; $\varphi'_{d2} \equiv \varphi_{d2}$

В низшем порядке по α и φ' получаем, что

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi'_{u1} \\ \delta\varphi'_{u2} \end{pmatrix} = \left[ie_2\alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} - \frac{ie_1\alpha_1}{2}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 - e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & -(e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} = \frac{i}{2} v_u \begin{pmatrix} e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ -(e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1) \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом

$$\begin{pmatrix}\delta\varphi'_{d1}\\ \delta\varphi'_{d2}\end{pmatrix} = \left[i e_2 \alpha_2^A \frac{\sigma^A}{2} + \frac{i e_1 \alpha_1}{2} \right] \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i v_d}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2) \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$\delta\varphi'_{u1} = \frac{i e_2 v_u}{2}(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2)$$

$$\delta\varphi'^{*}_{u1} = -\frac{i e_2 v_u}{2}(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2)$$

$$\delta \operatorname{Re}\varphi'_{u2} = 0$$

$$\delta \operatorname{Im}\varphi'_{u2} = -\frac{1}{2} v_u (e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1)$$

$$\delta \operatorname{Re}\varphi'_{d1} = 0$$

$$\delta \operatorname{Im}\varphi'_{d1} = \frac{1}{2} v_d (e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1)$$

$$\delta\varphi'_{d2} = \frac{i e_2 v_d}{2}(\alpha_2^1 + i\alpha_2^2)$$

$$\delta\varphi'^{*}_{d2} = -\frac{i e_2 v_d}{2}(\alpha_2^1 - i\alpha_2^2)$$

Из этих формул видно, что удобно ввести новые переменные

$$(\operatorname{Im}\varphi'_{u2}, \operatorname{Im}\varphi'_{d1}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{v_u^2+v_d^2}}\left(v_d \operatorname{Im}\varphi'_{u2} + v_u \operatorname{Im}\varphi'_{d1}\right) = \cos\beta \operatorname{Im}\varphi'_{u2} + \sin\beta \operatorname{Im}\varphi'_{d1} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{v_u^2+v_d^2}}\left(-v_u \operatorname{Im}\varphi'_{u2} + v_d \operatorname{Im}\varphi'_{d1}\right) = -\sin\beta \operatorname{Im}\varphi'_{u2} + \cos\beta \operatorname{Im}\varphi'_{d1} \end{cases}$$

и аналогично

$$(\varphi'_{u1}, \varphi'_{d2}) \longrightarrow \begin{cases} \cos\beta \cdot \varphi'_{u1} + \sin\beta\, \varphi'^{*}_{d2} \\ -\sin\beta\, \varphi'_{u1} + \cos\beta\, \varphi'^{*}_{d2} \end{cases}$$

Действительно, в этом случае

$$\delta\left[\cos\beta\, \mathrm{Im}\, \varphi'_{u2} + \sin\beta\, \mathrm{Im}\, \varphi'_{d1}\right] = \cos\beta \cdot \left(-\frac{1}{2} v_u\right)\left(e_2 \alpha_2^3 + e_1 \alpha_1\right)$$

$$+ \sin\beta \cdot \frac{1}{2} v_d \left(e_2 \alpha_2^3 + e_1 \alpha_1\right) = \frac{1}{2}\left(-\cos\beta \sin\beta + \sin\beta \cdot \cos\beta\right) \cdot v$$

$$\cdot \left(e_2 \alpha_2^3 + e_1 \alpha_1\right) = 0$$

$$\delta\left[-\sin\beta\, \mathrm{Im}\, \varphi'_{u2} + \cos\beta\, \mathrm{Im}\, \varphi'_{d1}\right] = \frac{1}{2}\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) v \cdot$$

$$\cdot \left(e_2 \alpha_2^3 + e_1 \alpha_1\right) = \frac{1}{2} v \left(e_2 \alpha_2^3 + e_1 \alpha_1\right)$$

Аналогично

$$\delta\left[\cos\beta\, \varphi'_{u1} + \sin\beta\, \varphi'^{*}_{d2}\right] = \cos\beta \cdot \frac{1}{2} e_2 v_u \left(\alpha_2^2 + i\alpha_2^1\right) - \sin\beta \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2} e_2 v_d \left(\alpha_2^2 + i\alpha_2^1\right) = 0$$

$$\delta\left[-\sin\beta\, \varphi'_{u1} + \cos\beta\, \varphi'^{*}_{d2}\right] = -\sin\beta \cdot \frac{1}{2} e_2 v_u \left(\alpha_2^2 + i\alpha_2^1\right) \cdot$$

$$- \cos\beta \cdot \frac{1}{2} e_2 v_d \left(\alpha_2^2 + i\alpha_2^1\right) = -\frac{1}{2} e_2 v \left(\alpha_2^2 + i\alpha_2^1\right)$$

т.о. теперь мы можем разделить поле на хиггсовские и голдстоуновские бозоны.

Голдстоуновскими полями (которые зануляются в унитарной калибровке и не присутствуют в спектре частиц) будут

$$\left.\begin{aligned} &-\sin\beta\, Jm\,\varphi'_{u2} + \cos\beta\, Jm\,\varphi'_{d1} \\ &-\sin\beta\,\varphi'_{u1} + \cos\beta\,\varphi'^{*}_{d2} \\ &-\sin\beta\,\varphi^{*\prime}_{u1} + \cos\beta\,\varphi'_{d2} \end{aligned}\right\}$$ т.к. эти поля можно занулить выбором α_2^1, α_2^2 и $e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1$.

Хиггсовскими полями (которые дают хиггсовские бозоны) будут

	q_{em}	
$Re\,\varphi'_{u2} \equiv \tilde{\varphi}_u$	0	– всего 5 хиггсовских бозонов, 3 нейтральных и 2 заряженных
$Re\,\varphi'_{d1} \equiv \tilde{\varphi}_d$	0	
$\cos\beta\, Jm\,\varphi'_{u2} + \sin\beta\, Jm\,\varphi'_{d1} \equiv A$	0	
$\cos\beta\,\varphi'_{u1} + \sin\beta\,\varphi'^{*}_{d2} \equiv \varphi^-$	-1	
$\cos\beta\,\varphi'^{*}_{u1} + \sin\beta\cdot\varphi_{d2} \equiv \varphi^+ = (\varphi^-)^*$	$+1$	

Вычислим теперь электрические заряды этих полей. Ранее было показано, что при остаточных $U(1)_{em}$ преобразованиях

$$\begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left\{ i e\alpha_{em} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi_{u1} \\ \varphi_{u2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\varphi_{d1}\\ \varphi_{d2}\end{pmatrix} \longrightarrow \exp\left\{ie\alpha_{em}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\varphi_{d1}\\ \varphi_{d2}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d$ и A электрически нейтральны, а φ^+ и φ^- имеют электрические заряды $+1$ и -1 соответственно.

(Заряды φ'_{u1} и φ'^{*}_{d2} по отношению к $U(1)_{em}$ совпадают)

Запишем теперь выражения для хиггсовских дуплетов в унитарной калибровке, когда все голдстоуновские поля полагаются равными 0:

$$\varphi_u = \begin{pmatrix}\varphi'_{u1}\\ v_u + \varphi'_{u2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\beta\,(\cos\beta\,\varphi'_{u1} + \sin\beta\,\varphi'^{*}_{d2}) - \sin\beta\,\underbrace{(-\sin\beta\,\varphi'_{u1} + \cos\beta\,\varphi'^{*}_{d2})}_{0}\\ v_u + \mathrm{Re}\,\varphi'_{u2} + i\cos\beta\,(\cos\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{u2} + \sin\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{d1}) - i\sin\beta\,\underbrace{(-\sin\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{u2} + \cos\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{d1})}_{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\beta\,\varphi^-\\ v_u + \tilde{\varphi}_u + i\cos\beta\,A\end{pmatrix}$$

$$\varphi_d = \begin{pmatrix}v_d + \varphi'_{d1}\\ \varphi'_{d2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_d + \mathrm{Re}\,\varphi'_{d1} + i\sin\beta\,(\cos\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{u2} + \sin\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{d1}) + i\cos\beta\,\underbrace{(-\sin\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{u2} + \cos\beta\,\mathrm{Jm}\,\varphi'_{d1})}_{0}\\ \sin\beta\,(\cos\beta\,\varphi'^{*}_{u1} + \sin\beta\,\varphi'_{d2}) + \cos\beta\,\underbrace{(-\sin\beta\,\varphi'^{*}_{u1} + \cos\beta\,\varphi'_{d2})}_{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_d + \tilde{\varphi}_d + i\sin\beta\,A\\ \sin\beta\,\varphi^+\end{pmatrix}$$

§7. Массы хиггсовских бозонов в МССМ.

Для нахождения масс хиггсовских бозонов необходимо вначале записать потенциал хиггсовских полей, а затем разложить его с точностью до квадратичных слагаемых.

Ранее было показано, что

$$V(\varphi_u,\varphi_d) = \frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)\left(|\varphi_d|^2-|\varphi_u|^2\right)^2 + \frac{e_2^2}{2}|\varphi_d^+\varphi_u|^2 +$$

$$+ (m_1^2+|\mu|^2)|\varphi_u|^2 + (m_2^2+|\mu|^2)|\varphi_d|^2 + \mu B(-\varphi_{u2}\varphi_{d1}+\varphi_{u1}\varphi_{d2})$$

$$+ \mu B(-\varphi_{u2}^*\varphi_{d1}^*+\varphi_{u1}^*\varphi_{d2}^*)$$

где
$$\varphi_u = \begin{pmatrix} \cos\beta\,\varphi^- \\ v_u+\tilde\varphi_u+i\cos\beta A \end{pmatrix} \qquad \varphi_d = \begin{pmatrix} v_d+\tilde\varphi_d+i\sin\beta A \\ \sin\beta\,\varphi^+ \end{pmatrix}$$

благодаря чему

$$|\varphi_u|^2 = \cos^2\beta\left(|\varphi^+|^2+A^2\right) + (v_u+\tilde\varphi_u)^2$$

$$|\varphi_d|^2 = \sin^2\beta\left(|\varphi^+|^2+A^2\right) + (v_d+\tilde\varphi_d)^2$$

$$|\varphi_d^+\varphi_u|^2 = \left|\left(v_d+\tilde\varphi_d-i\sin\beta A,\ \sin\beta\,\varphi^-\right)\begin{pmatrix}\cos\beta\,\varphi^- \\ v_u+\tilde\varphi_u+i\cos\beta A\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left| \left(v_d + \tilde{\varphi}_d - \cancel{i \sin\beta A}\right)\cos\beta\, \varphi^- + \left(v_u + \tilde{\varphi}_u + \cancel{i\cos\beta A}\right)\sin\beta\, \varphi^- \right|^2$$

$$= |\varphi^+|^2 \left(v_d \cos\beta + v_u \sin\beta + \tilde{\varphi}_d \cos\beta + \tilde{\varphi}_u \sin\beta \right)^2 =$$

$$= |\varphi^+|^2 \left(v + \tilde{\varphi}_d \cos\beta + \tilde{\varphi}_u \sin\beta \right)^2$$

$$- \varphi_{u2}\varphi_{d1} + \varphi_{u1}\varphi_{d2} = -\left(v_u + \tilde{\varphi}_u + i\cos\beta A\right)\left(v_d + \tilde{\varphi}_d + i\sin\beta A\right)$$

$$+ \cos\beta\, \varphi^- \cdot \sin\beta\, \varphi^+$$

$$\Longrightarrow$$

$$- \varphi_{u2}\varphi_{d1} + \varphi_{u1}\varphi_{d2} + \text{к.с.} = -2\left(v_u + \tilde{\varphi}_u\right)\left(v_d + \tilde{\varphi}_d\right) +$$

$$+ 2\sin\beta\cos\beta \left(|\varphi^+|^2 + A^2 \right)$$

Подставляя все эти выражения в потенциал хиггсовских полей, получаем

$$V(\varphi_u, \varphi_d) = \frac{1}{8}\left(e_1^2 + e_2^2\right)\Big[\cos 2\beta \left(|\varphi^+|^2 + A^2\right) + \left(v_u + \tilde{\varphi}_u\right)^2 -$$

$$- \left(v_d + \tilde{\varphi}_d\right)^2\Big]^2 + \frac{e_2^2}{4} |\varphi^+|^2 \left(v + \tilde{\varphi}_d \cos\beta + \tilde{\varphi}_u \sin\beta\right)^2$$

$$+ \left(m_1^2 + |\mu|^2\right)\left[\cos^2\beta \left(|\varphi^+|^2 + A^2\right) + \left(v_u + \varphi_u\right)^2\right]$$

$$+ \left(m_2^2 + |\mu|^2\right)\left[\sin^2\beta \left(|\varphi^+|^2 + A^2\right) + \left(v_d + \varphi_d\right)^2\right]$$

$$- 2\mu B \left(v_u + \tilde{\varphi}_u\right)\left(v_d + \tilde{\varphi}_d\right) + \mu B \sin 2\beta \cdot \left(|\varphi^+|^2 + A^2\right)$$

Для исследования спектра масс хиггсовских бозонов нам необходимы слагаемые, квадратичные по полям $\varphi^{\pm}$, A, $\tilde{\varphi}_u$ и $\tilde{\varphi}_d$ (В нулевом порядке получается несущественная постоянная, а линейные слагаемые исчезают, поскольку разложение производится вблизи точки минимума) Тогда

$$V(\varphi_u, \varphi_d) \longrightarrow V^{(2)} = \frac{1}{8}(e_1^2 + e_2^2)\Big[4(v_u\tilde{\varphi}_u - v_d\tilde{\varphi}_d)^2$$

$$+ 2(v_u^2 - v_d^2)(\tilde{\varphi}_u^2 - \tilde{\varphi}_d^2) + 2(v_u^2 - v_d^2)\cos 2\beta\cdot(|\varphi^+|^2 + A^2)\Big]$$

$$+ \frac{e_2^2}{2}|\varphi^+|^2 v^2 + (m_1^2 + |\mu|^2)\left[\cos^2\beta\,(|\varphi^+|^2 + A^2) + \tilde{\varphi}_u^2\right]$$

$$+ (m_2^2 + |\mu|^2)\left[\sin^2\beta\,(|\varphi^+|^2 + A^2) + \tilde{\varphi}_d^2\right] - 2\mu B\,\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d$$

$$+ \mu B\sin 2\beta\,(|\varphi^+|^2 + A^2)$$

– видно, что это выражение распадается на 2 части. Одна из них содержит поля $\varphi^{\pm}$ и A, а другая – поля $\tilde{\varphi}_u$ и $\tilde{\varphi}_d$:

$$V^{(2)} = V_1(\varphi^{\pm}, A) + V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d)$$

Рассмотрим вначале часть, которая содержит поля $\varphi^{\pm}$ и A.

$$V_1(\varphi^\pm, A) = \frac{1}{4}(e_1^2+e_2^2)v^2(-\cos^2 2\beta)(|\varphi^+|^2+A^2)$$

$$+ \frac{e_2^2}{2}v^2|\varphi^+|^2 + (m_1^2+|\mu|^2)\cos^2\beta\,(|\varphi^+|^2+A^2)$$

$$+ (m_2^2+|\mu|^2)\sin^2\beta\,(|\varphi^+|^2+A^2) + \mu B\sin 2\beta\,(|\varphi^+|^2+A^2)$$

$$= (|\varphi^+|^2+A^2)\cdot\Big\{-\frac{1}{2}m_Z^2\cos^2 2\beta + |\mu|^2 + \frac{1}{2}m_1^2(1+\cos 2\beta)$$

$$+ \frac{1}{2}m_2^2(1-\cos 2\beta) + \mu B\sin 2\beta\Big\} + m_W^2|\varphi^+|^2$$

где мы приняли во внимание, что

$$m_Z^2 = \frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)v^2; \qquad m_W^2 = \frac{1}{2}e_2^2v^2.$$

Мы видим, что большинство слагаемых содержит комбинацию $(|\varphi^+|^2+A^2)$ и только последнее слагаемое зависит только от $|\varphi^+|^2$. Поэтому

$$m_{\varphi^\pm}^2 = m_A^2 + m_W^2$$

$\Rightarrow$ заряженные хиггсовские бозоны оказываются тяжелее, чем электрически нейтральный хиггсовский бозон A.

Выразим теперь m_A через параметры теории. Для этого нужно избавиться от величины $\operatorname{tg}\beta$.

Вспомним, что величины υ_u и υ_d получаются при минимизации величины

$$V(\upsilon_u, \upsilon_d) = \frac{1}{8}(e_1^2 + e_2^2)(\upsilon_u^2 - \upsilon_d^2)^2 + (m_1^2 + |\mu|^2)\upsilon_u^2 +$$

$$+ (m_2^2 + |\mu|^2)\upsilon_d^2 - 2\mu B \upsilon_u \upsilon_d$$

Условия минимальности имеют вид

$$\begin{array}{l} \upsilon_d\times \\ \pm \\ \upsilon_u\times \end{array} \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial V}{\partial \upsilon_u} = \dfrac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)\upsilon_u(\upsilon_u^2 - \upsilon_d^2) + 2(m_1^2+|\mu|^2)\upsilon_u - 2\mu B \upsilon_d \\ \\ 0 = \dfrac{\partial V}{\partial \upsilon_d} = -\dfrac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)\upsilon_d(\upsilon_u^2 - \upsilon_d^2) + 2(m_2^2+|\mu|^2)\upsilon_d - 2\mu B \upsilon_u \end{cases}$$

Первое ур-е умножаем на υ_d, а второе – на υ_u, а потом складываем и вычитаем:

При сложении получаем

$$0 = \cancel{2}(m_1^2 + |\mu|^2)\upsilon_u\upsilon_d - \cancel{2}\mu B \upsilon_d^2 + \cancel{2}(m_2^2 + |\mu|^2)\upsilon_u\upsilon_d - \cancel{2}\mu B \upsilon_u^2$$

а при вычитании

$$0 = (e_1^2+e_2^2)\upsilon_u\upsilon_d(\upsilon_u^2 - \upsilon_d^2) + 2(m_1^2 - m_2^2)\upsilon_u\upsilon_d + 2\mu B \upsilon_u^2 - 2\mu B \upsilon_d^2$$

Переписываем получившуюся систему уравнений в терминах υ и $\operatorname{tg}\beta$, принимая во внимание, что $\upsilon_u = \upsilon \sin\beta$; $\upsilon_d = \upsilon\cos\beta$.

$$0 = (m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2)\, v^2 \sin\beta \cos\beta - \mu B v^2$$

– из этого уравнения можно найти $tg\,\beta$:

$$\boxed{\sin 2\beta = \frac{2\mu B}{(m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2)}}$$

Величина v^2 после этого определяется из второго уравнения:

$$0 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)\, v^4 \sin\beta \cos\beta\, (\sin^2\beta - \cos^2\beta) + (m_1^2 - m_2^2)\cdot v^2$$

$$\cdot \sin\beta \cdot \cos\beta + \mu B (\sin^2\beta - \cos^2\beta)\, v^2$$

Учитывая, что

$$m_Z^2 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2)\, v^2$$

результат удобно представить в виде

$$0 = m_Z^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\beta\,(-\cos 2\beta) + (m_1^2 - m_2^2)\frac{1}{2}\sin 2\beta - \mu B \cos 2\beta$$

Подставляя в это уравнение найденный ранее $\sin 2\beta$, находим m_Z^2, а, следовательно, и v. Но более удобно переписать это уравнение в виде

$$\boxed{\begin{aligned}(m_1^2 - m_2^2) &= m_Z^2 \cos 2\beta + 2\mu B\, \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \\ &= \cos 2\beta\,(m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2 + m_Z^2)\end{aligned}}$$

Упростим теперь выражение для

$$m_A^2 = -\frac{1}{2} m_Z^2 \cos^2 2\beta + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2) + \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2)\cos 2\beta + \mu B \sin 2\beta$$

с помощью этих равенств. Имеем:

$$m_A^2 = -\cancel{\frac{1}{2} m_Z^2 \cos^2 2\beta} + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2) + \frac{1}{2}\cos^2 2\beta \cdot (m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2 + \cancel{m_Z^2}) + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2)\sin^2 2\beta$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2$$

т.о. мы получаем, что

$$\boxed{\begin{aligned} m_A^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2 \\ m_{\varphi^\pm}^2 &= m_A^2 + m_W^2 \end{aligned}}$$

т.к. величины m_1^2, m_2^2 и $|\mu|^2$ пока не определены экспериментально, то массы этих хиггсовских бозонов могут быть достаточно велики.

Кроме того, мы получили, что

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\beta &= \frac{2\mu B}{m_A^2} \\ m_1^2 - m_2^2 &= \cos 2\beta \cdot (m_A^2 + m_Z^2) \end{aligned}}$$

Исследуем теперь спектр масс в секторе, содержащем поля $\tilde{\varphi}_u$ и $\tilde{\varphi}_d$:

$$V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d) \overset{\text{стр. 67}}{=} \frac{1}{8}(e_1^2+e_2^2)\Big[4(v_u\tilde{\varphi}_u - v_d\tilde{\varphi}_d)^2 +$$

$$+ 2(v_u^2 - v_d^2)(\tilde{\varphi}_u^2 - \tilde{\varphi}_d^2)\Big] + (m_1^2+|\mu|^2)\tilde{\varphi}_u^2 + (m_2^2+|\mu|^2)\tilde{\varphi}_d^2$$

$$- 2\mu B\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d$$

Запишем это выражение вначале в терминах v и $\operatorname{tg}\beta$:

$$V_2(\tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_d) = \frac{1}{2}(e_1^2+e_2^2)v^2\Big[(\sin\beta\,\tilde{\varphi}_u - \cos\beta\,\tilde{\varphi}_d)^2$$

$$+ \frac{1}{2}(\sin^2\beta - \cos^2\beta)(\tilde{\varphi}_u^2 - \tilde{\varphi}_d^2)\Big] + (m_1^2+|\mu|^2)\tilde{\varphi}_u^2 + (m_2^2+|\mu|^2)\tilde{\varphi}_d^2$$

$$- 2\mu B\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d =$$

$$= m_Z^2\Big[\sin^2\beta\,\tilde{\varphi}_u^2 + \cos^2\beta\,\tilde{\varphi}_d^2 - 2\sin\beta\cos\beta\,\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d - \frac{1}{2}\cos 2\beta\cdot$$

$$\cdot\tilde{\varphi}_u^2 + \frac{1}{2}\cos 2\beta\cdot\tilde{\varphi}_d^2\Big] + \frac{1}{2}(m_A^2 + m_1^2 - m_2^2)\tilde{\varphi}_u^2 + \frac{1}{2}(m_A^2 +$$

$$+ m_2^2 - m_1^2)\tilde{\varphi}_d^2 - m_A^2\sin 2\beta\cdot\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d =$$

$$= m_Z^2\Big[\frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)\tilde{\varphi}_u^2 + \frac{1}{2}(1+\cos 2\beta)\tilde{\varphi}_d^2 - \sin 2\beta\,\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d$$

$$- \frac{1}{2}\cancel{\cos 2\beta}\,\tilde{\varphi}_u^2 + \frac{1}{2}\cancel{\cos 2\beta}\,\tilde{\varphi}_d^2\Big] + \frac{1}{2}m_A^2(\tilde{\varphi}_u^2 + \tilde{\varphi}_d^2)$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2\beta\,(m_A^2 + \cancel{m_Z^2})\,\tilde{\varphi}_u^2 - \frac{1}{2}\cos 2\beta\,(m_A^2 + \cancel{m_Z^2})\,\tilde{\varphi}_d^2$$

$$- m_A^2 \sin 2\beta\,\tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d =$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_u^2\left[m_Z^2 + m_A^2 + (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_d^2\left[m_Z^2 + m_A^2 - (m_A^2 - m_Z^2)\cos 2\beta\right]$$

$$- \tilde{\varphi}_u\tilde{\varphi}_d \sin 2\beta\left[m_A^2 + m_Z^2\right]$$

– видно, что лагранжиан содержит перекрёстные слагаемые. Поэтому его нужно привести к нормальным координатам, совершая ортогональное преобразование $\tilde{\varphi}_u$ и $\tilde{\varphi}_d$. При этом определённые массы будут иметь линейные комбинации

$$\begin{cases} H \equiv \cos\alpha\cdot\tilde{\varphi}_u + \sin\alpha\cdot\tilde{\varphi}_d \\ h \equiv -\sin\alpha\cdot\tilde{\varphi}_u + \cos\alpha\cdot\tilde{\varphi}_d \end{cases}$$

где угол α определяется из требования диагональности массовой матрицы.

Сами массы^2 будут представлять собой собственные значения массовой матрицы, определяемые из уравнения

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[m_Z^2+m_A^2+(m_A^2-m_Z^2)\cos 2\beta\right]-\lambda & -\frac{1}{2}\sin 2\beta\,(m_A^2+m_Z^2) \\ -\frac{1}{2}\sin 2\beta\,(m_A^2+m_Z^2) & \frac{1}{2}\left[m_Z^2+m_A^2-(m_A^2-m_Z^2)\cos 2\beta\right]-\lambda \end{pmatrix}=0$$

или, эквивалентно,

$$0=\left[\frac{1}{2}(m_Z^2+m_A^2)-\lambda\right]^2-\frac{1}{4}(m_A^2-m_Z^2)^2\cos^2 2\beta-\frac{1}{4}(m_A^2+m_Z^2)^2$$

$$\cdot\sin^2 2\beta=\left[\frac{1}{2}(m_Z^2+m_A^2)-\lambda\right]^2-\frac{1}{4}\left[m_A^4+m_Z^4-2m_A^2m_Z^2\cos 4\beta\right]$$

$\Longrightarrow$

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\pm\frac{1}{2}\sqrt{m_A^4+m_Z^4-2m_A^2m_Z^2\cos 4\beta}$$

Рассмотрим меньшее собственное значение λ_-:

$$\lambda_-=\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)-\frac{1}{2}\sqrt{m_A^4+m_Z^4-2m_A^2m_Z^2\cos 4\beta}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)-\frac{1}{2}\sqrt{(m_A^2-m_Z^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)-\frac{1}{2}\left|m_A^2-m_Z^2\right|=$$

$$=\left.\begin{cases}\text{если } m_A^2\geqslant m_Z^2 & =m_Z^2\\ \text{если } m_A^2\leqslant m_Z^2 & =m_A^2\leqslant m_Z^2\end{cases}\right\}\leqslant m_Z^2$$

Это означает, что в МССМ масса легчайшего хиггсовского бозона должна быть меньше чем m_Z.

Если $m_A \gg m_Z$, то

$$m_h^2 = \lambda_- \approx \frac{1}{2}\left(m_A^2 + m_Z^2\right) - \frac{1}{2} m_A^2 \sqrt{1 - \frac{2m_Z^2}{m_A^2}\cos 4\beta}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\cancel{m_A^2} + m_Z^2\right) - \frac{1}{2}\left(\cancel{m_A^2} - m_Z^2 \cos 4\beta\right) = \frac{1}{2} m_Z^2 \left(1 + \cos 4\beta\right)$$

$$= m_Z^2 \cos^2 2\beta$$

$\Rightarrow$ в пределе $m_A \gg m_Z$ масса легчайшего хиггсовского бозона примерно равна

$$m_h \approx m_Z \cos 2\beta .$$

Однако $m_Z = 91,1876\,(21)$ GeV (2017)

$m_h = 125,09 \pm 0,24$ GeV

$\Rightarrow$ эта формула не может быть верной.

Причина в том, что имеются квантовые поправки к массе хиггсовского бозона:

$$m_h^2 \approx m_Z^2 \cos^2 2\beta + \frac{3\alpha_2 m_t^4}{4\pi m_W^2} \ln \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 m_{\tilde{t}_2}^2}{m_t^4}$$

где m_t - масса t-кварка, а $m_{\tilde{t}_1}$ и $m_{\tilde{t}_2}$ - массы 2-х скалярных суперпартнёров t-кварка.

При этом

$$\alpha_2(M_Z) = (29{,}59)^{-1}$$

$$m_W = 80{,}385(15)\ \mathrm{GeV}$$

$$m_t = 173{,}1 \pm 0{,}6\ \mathrm{GeV}$$

Тогда $$m_h^2 \simeq 8315 \cdot \cos^2 2\beta + 4486 \ln \frac{\sqrt{m_{\tilde t_1} m_{\tilde t_2}}}{m_t}\ \mathrm{GeV}^2$$

$$= 15647\ \mathrm{GeV}^2$$

Если $\cos 2\beta$ мал, то тогда $\sqrt{m_{\tilde t_1} m_{\tilde t_2}} \simeq 5{,}6\ \mathrm{TeV}$ – максимальное значение массы суперпартнёров t-кварка.

§ 8. Массы кварков, лептонов и их скалярных суперпартнёров в МССМ

Вычислим теперь как в МССМ получаются массы кварков, лептонов и их скалярных суперпартнёров. Начнём с масс фермионов, которые получаются из суперпотенциала благодаря юкавскому взаимодействию.

Напомним, что слагаемые, содержащие суперполя кварков и лептонов в суперпотенциале МССМ имеют вид

Кварки и лептоны в МССМ приобретают массы аналогично случаю Стандартной модели. Напомним, что в вакуумном состоянии

$$\varphi_{u0} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \sin\beta \end{pmatrix} \qquad \varphi_{d0} = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

а суперпотенциал МССМ имеет вид

$$S_{\text{суперп.}} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \Big\{ (Y_u)_{IJ} (\tilde{U}, \tilde{D})^{aI} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix} U_a^J$$

$$+ (Y_d)_{IJ} (\tilde{U}, \tilde{D})^{aI} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix} D_a^J$$

$$+ (Y_\nu)_{IJ} (\tilde{N}, \tilde{E})^I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix} N^J$$

$$+ (Y_e)_{IJ} (\tilde{N}, \tilde{E})^I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix} E^J$$

$$+ \frac{1}{2} M_{IJ} N^I N^J + \mu (\Phi_{u1}, \Phi_{u2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix} \Big\} + \text{к.с.}$$

При низких энергиях хиггсовские суперполя можно заменить на их вакуумные средние. Если нас интересуют только массы фермионов, то достаточно рассмотреть только низшую компоненту (хотя f_u и f_d также имеют нетривиальные вакуумные средние)

$$\Phi_u \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \qquad \Phi_d \longrightarrow \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда суперпотенциал даст слагаемое

$$S_{супер.} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left\{ v_u (Y_u)_{IJ} \tilde{U}^{aI} U_a^J \right.$$

$$- v_d (Y_d)_{IJ} \tilde{D}^{aI} D_a^J + v_u (Y_\nu)_{IJ} \tilde{N}^I N^J$$

$$\left. - v_d (Y_e)_{IJ} \tilde{E}^I E^J + \frac{1}{2} M_{IJ} N^I N^J \right\} + \text{к.с.}$$

Известно, что структура

$$\frac{m}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{\Phi}\Phi + \text{к.с.}$$

даёт дираковскую массу фермиону

$$\Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\tilde{\psi}\right]$$

равную m. (См. курс „Суперсимметрия")

Поэтому для кварков и заряженных лептонов мы получаем массы

$$v_u Y_u = v \sin\beta \cdot Y_u \; ; \quad v_d Y_d = v\cos\beta \cdot Y_d$$

$$v_d Y_e = v \cos\beta \cdot Y_e$$

(знак не существенен)

У нейтрино ситуация более сложная — возникает массовая матрица,

$$\longrightarrow \frac{1}{4}\int d^4x\, d^2\theta\ (\tilde{N}, N)\begin{pmatrix} 0 & v_u Y_\nu \\ v_u Y_\nu^T & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{N} \\ N \end{pmatrix} + \text{к.с.}$$

В 2×2 случае одно СЗ $\sim M \sim 10^{16}$ ГэВ, а другое $\sim (v_u Y_\nu)^2/M \sim \frac{10^4}{10^{16}}$ ГэВ $\sim 10^{-3}$ эВ.

Нейтрино с массой M, конечно, не наблюдаемое, а нейтрино с малой массой — обычное нейтрино.

Можно при анализе масс нейтрино исключить поле N^I гауссовым интегрированием.

Тогда $\quad M_{IJ} N^J + v_u (Y_\nu^T)_{IJ} \tilde{N}^J = 0$

$$N = -M^{-1} v_u Y_\nu^T \tilde{N}$$

Подставляя это в суперпотенциал, получим

$$-\frac{1}{4}\int d^4x\, d^2\theta\ \tilde{N}^T Y_\nu M^{-1} Y_\nu^T \tilde{N}\cdot v_u^2 + \text{к.с.}$$

— видно, что для левого нейтрино естественным образом возникает малая майорановская масса.

Массы скварков и слептонов:

У каждого кирального фермиона имеется суперпартнёр, описываемый комплексным скалярным полем. Есть несколько источников масс этих скаляров:

1) Слагаемые типа $\frac{m}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{\Phi}\Phi$, обсуждавшиеся выше $+ f^+ f$ слагаемые дают вклады

$$-m^2|\varphi|^2 - m^2|\tilde{\varphi}|^2$$

2) Мягкие массы

$$-m_\varphi^2|\varphi|^2 - m_{\tilde{\varphi}}^2|\tilde{\varphi}|^2$$

3) Слагаемые типа $\varphi^+ D \varphi \longrightarrow \varphi^+ D_0 \varphi$

где

$$\underset{u(1)}{D_0} = -\frac{e_1}{2}\left(v_d^2 - v_u^2\right) = -\frac{e_1}{2} v^2 \cos 2\beta$$

$$\underset{su(2)}{D_0^3} = -\frac{e_2}{2}\left(v_d^2 - v_u^2\right) = -\frac{e_2}{2} v^2 \cos 2\beta$$

$$\underset{su(2)}{D_0^1} = \underset{su(2)}{D_0^2} = 0$$ (см. стр. 48)

4) Вакуумные средние компонент f_u и f_d,

$$f_{d0} = \mu^* \begin{pmatrix} v_u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_{u0} = \mu^* \begin{pmatrix} 0 \\ v_d \end{pmatrix}$$

генерируют слагаемые типа

$$\mu^* \sigma \tilde{\varphi} \varphi$$

5) Аналогичные структуры возникают из мягких слагаемых (стр. 45) при замене Φ_u и Φ_d на вакуумные средние, $\sim A \sigma \tilde{\varphi} \varphi$.

Т.о. для полей φ и $\tilde{\varphi}$ возникают массовые матрицы

$$(\varphi, \tilde{\varphi}) \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{12}^2 & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}$$

а поле с определёнными квадратами масс получаются как линейные комбинации φ и $\tilde{\varphi}$. Квадраты масс при этом, как обычно, представляют собой собственные значения массовой матрицы.

§9. Глобальные законы сохранения в МССМ.

Также как и в Стандартной модели, в МССМ имеются глобальные симметрии, приводящие к определённым законам сохранения.

Например, действие МССМ инвариантно относительно преобразований $(\beta \in Re,\ \beta \neq \beta(x))$

$$U^I \to e^{i\beta/3} U^I; \qquad \begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{D}\end{pmatrix}^I \to e^{-i\beta/3} \begin{pmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{D}\end{pmatrix}^I$$

$$D^I \to e^{i\beta/3} D^I;$$

(остальные суперполя неизменны)

Эта симметрия приводит к сохранению барионного числа.

Также почти все слагаемые в МССМ инвариантны

$$N^I \to e^{i\alpha} N^I \qquad \begin{pmatrix}\tilde{N}\\ \tilde{E}\end{pmatrix}^I \to e^{-i\alpha} \begin{pmatrix}\tilde{N}\\ \tilde{E}\end{pmatrix}^I$$

$$E^I \to e^{i\alpha} E^I$$

где $\alpha \neq \alpha(x)$ – Re число.

Не инвариантна только майорановская масса правого нейтрино и соответствующее мягкое слагаемое. Но ситуацию легко исправить, введя поле S с нетривиальным вакуумным средним, т.е. $S \to e^{-2i\alpha} S$ и заменив

$$M_{IJ} N^I N^J \to (Y_S)_{IJ} S N^I N^J$$

Тогда получится закон сохранения лептонного числа.

§ 10. R-чётность и стабильность легчайшего суперпартнёра

Можно также заметить, что в МССМ есть дискретная Z_2-симметрия, которая оставляет поле Стандартной модели (и дополнительный хиггсовский дуплет) неизменными, но меняет знак их суперпартнёров. Как её описать?

Калибровочные бозоны A_μ часть $V(x,\theta)$, которое в калибровке Весса-Зумино имеет вид

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\, A_\mu(x) + i\sqrt{2}\,(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x)$$

$$+\frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x)$$

$\Longrightarrow$ если $V(x,\theta) \longrightarrow V(x,-\theta)$, то

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x); \quad \lambda(x) \longrightarrow -\lambda(x); \quad D(x) \longrightarrow D(x)$$

– верно.

Хиггсовские бозоны – низшие компоненты киральных суперполей

$$\Phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot f(y^\mu)$$

где $y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta$

Если $\Phi(y^\mu, \theta) \to \Phi(y^\mu, -\theta)$, то

$$\varphi(x) \to \varphi(x); \quad \psi(x) \to -\psi(x); \quad f(x) \to f(x)$$

– как и должно быть.

Кварки и лептоны – спинорные компоненты киральных суперполей. Поэтому для них

$$\Phi(y^\mu, \theta) \to -\Phi(y^\mu, -\theta)$$

и $\Rightarrow$ $\varphi(x) \to -\varphi(x); \quad \psi(x) \to +\psi(x); \quad f(x) \to -f(x)$

– также правильно.

т.о. преобразования R-чётности имеют вид

$$\begin{cases} V(x,\theta) \to V(x,-\theta) \\ \Phi(y^\mu, \theta) \to \Phi(y^\mu, -\theta) \quad \text{для } \Phi_u \text{ и } \Phi_d \\ \Phi(y^\mu, \theta) \to -\Phi(y^\mu, -\theta) \quad \text{для суперполей, содержащих кварки и лептоны} \end{cases}$$

Инвариантность действия МССМ может быть легко проверена.

т.к. $D_a = \dfrac{\partial}{\partial \bar\theta^a} - i(\gamma^\mu \theta)_a \partial_\mu$, то

$$W_a(y^\mu, \theta) = \frac{1}{32} \bar D (1-\gamma_5) D \left(e^{-2V} D_a e^{2V}\right) \to -W_a(y^\mu, -\theta)$$

Принимая во внимание, что при замене $\theta \to -\theta$ меры интегрирования $\int d^2\theta$ и $\int d^4\theta$ остаются инвариантными, получаем, что величины типа

$$\frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a$$

$$\frac{1}{4} \int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi$$

и аналогичные member слагаемые (содержащие также шпурион $\eta = \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta$) будут инвариантны. В суперпотенциале инвариантными будут слагаемые, имеющие чётные степени по полям кварков и лептонов (которые меняют знак). Но в МССМ присутствуют только такие слагаемые, например,

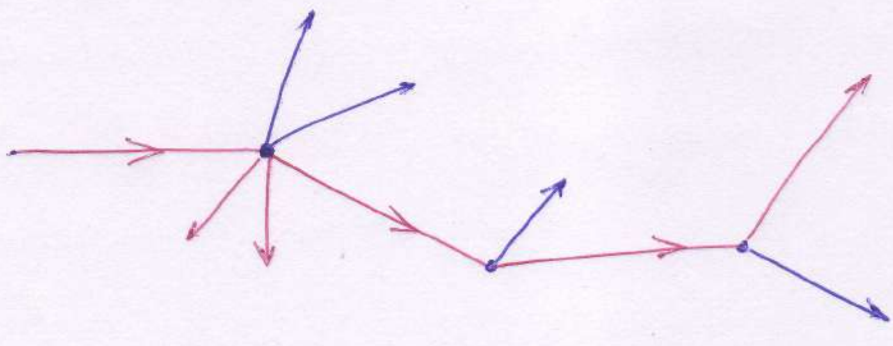
$$\frac{1}{2} \int d^4x\, d^2\theta\, (Y_u)_{IJ} \left(\tilde{U}, \tilde{D}\right)^{aI} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix} U_a^J + \text{к.с.}$$

Тоже самое относится и к соответствующим мягким слагаемым.

Т.о. лагранжиан МССМ инвариантен относительно R-чётности.

Следствием этой инвариантности является стабильность легчайшего суперпартнёра в МССМ.

Действительно, R-чётность оставляет неизменными поля Стандартной модели и дополнительный хиггсовский дуплет, но меняет знаки суперпартнёров. В силу инвариантности в любую вершину суперпартнёры входят только в чётной степени. Поэтому при распаде суперпартнёра всегда должен образовываться суперпартнёр



⇒ легчайший суперпартнёр должен оказаться стабильным, т.к. ему не на что распадаться.

Это хороший кандидат на роль тёмной материи во Вселенной.

Однако легчайший суперпартнёр может не оказаться стабильной частицей, т.к. к действию МССМ можно добавить калибровочно инвариантные слагаемые, нарушающие R-чётность:

$$\Delta S = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \Big\{ \lambda_{IJK} \overset{+1/2}{(\tilde N, \tilde E)^I} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{+1/2}{\begin{pmatrix} \tilde N \\ \tilde E \end{pmatrix}^J} \cdot \overset{-1\,=\,0}{E^K}$$

$$+ \lambda'_{IJK} \overset{-1/6}{(\tilde u, \tilde D)^{aI}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{+1/2}{\begin{pmatrix} \tilde N \\ \tilde E \end{pmatrix}^J} \overset{-1/3\,=\,0}{D^k_a}$$

$$+ \lambda''_{IJK}\, \overset{+2/3-1/3-1/3\,=\,0}{\varepsilon^{abc}\, U^I_a D^J_b D^k_c} + \mu_I \overset{+1/2}{(\tilde N, \tilde E)^I} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1/2\,=\,0}{\begin{pmatrix} \Phi_{H1} \\ \Phi_{H2} \end{pmatrix}} \Big\} + \text{к.с.}$$

$SU(3)$ и $SU(2)$ инвариантности этого выражения очевидны, а суммы гиперзарядов выписаны над каждым слагаемым. Поскольку все они равны 0, то также имеет место и $U(1)$-инвариантность.

R-чётность нарушается поскольку все эти слагаемые имеют нечётные степени по полям кварков и лептонов и $\Rightarrow$ меняют знак при преобразованиях R-чётности.

При наличии указанных выше слагаемых легчайший суперпартнёр уже не будет стабильной частицей.

Также R-чётность иногда записывают в виде $R_p = (-1)^{3B+L+2S}$

где B – барионное число
L – лептонное число
S – спин.

Справедливость этой формулы следует из таблицы

поля	B	L	S	R_p
кварки	$1/3$	0	$1/2$	$+1$
скварки	$1/3$	0	0	-1
лептоны	0	1	$1/2$	$+1$
слептоны	0	1	0	-1
хиггсы	0	0	0	$+1$
хиггсино	0	0	$1/2$	-1
калибровочные бозоны	0	0	1	$+1$
калибрино	0	0	$1/2$	-1

– видно, что для частиц СМ $R_p = +1$, а для суперпартнёров $R_p = -1$.

§ 11. Объединение бегущих констант связи в МССМ.

Важным предсказанием ряда теорий Великого объединения (например, с группами $SU(5)$, $SO(10)$ или E_6) является объединение констант связи

$$\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$$

где $\alpha_3 = \frac{e_3^2}{4\pi}$; $\alpha_2 = \frac{e_2^2}{4\pi}$; $\alpha_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{e_1^2}{4\pi}$

множитель кодирующий значение $\sin^2\theta_W = 3/8$.

При этом на массе Z-бозона

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3(M_Z) &\simeq (8{,}4674)^{-1} \\ \alpha_2(M_Z) &\simeq (29{,}59)^{-1} \\ \alpha_1(M_Z) &\simeq (59{,}01)^{-1} \end{aligned}\right\}$$

на M_Z равенство не выполняется. Причина в том, что необходимо учитывать квантовые поправки.

В однопетлевом приближении ренормгрупповая эволюция констант связи описывается формулой

$$\frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{1}{\alpha(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{11}{3}C_2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\Phi} T(R_\Phi) - \frac{1}{3}\sum_{\text{ск.}} T(R_{\text{ск.}})\right)$$

калибровочные поля и духи

дираковские фермионы

майорановские или вейлевские фермионы

комплексные скаляры

При этом $T(R)$ определяется формулой

$$tr(T^A T^B) \equiv T(R)\,\delta^{AB}$$

где T^A – генераторы представления R группы G. При этом предполагается, что генераторы фундаментального представления t^A нормированы условием

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}, \quad \text{т.е.} \quad T(\text{фунд.}) = \frac{1}{2}$$

Константа C_2 определяется равенством

$$f^{ACD} f^{BCD} \equiv C_2\,\delta^{AB}$$

где f^{ABC} – структурные константы, т.е.

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C \;; \quad [T^A, T^B] = i f^{ABC} T^C$$

Поскольку $(T^A_{Adj})_{BC} = -i f^{ABC}$, то

$$\delta^{AB}\,T(Adj) = tr(T^A_{Adj} T^B_{Adj}) = -i f^{ACD}(-i) f^{BDC} =$$

$$= C_2\,\delta^{AB}, \quad \text{то} \Rightarrow \quad T(Adj) = C_2 .$$

Известно, что $C_2(SU(N)) = N \;; \quad C_2(U(1)) = 0$.

Заметим, что в формуле для эволюции констант связи мы пренебрегли пороговыми эффектами и вкладами высших петель.

Исследуем по-отдельности однопетлевую эволюцию каждой из констант связи в МССМ:

SU(3):

$C_2(SU(3))$

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\Big[\frac{11}{3}\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 3$$

глюоны и духи

глюино (майоран.)

$$\underbrace{-\frac{4}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}}_{\text{кварки}}\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}}_{\text{скварки}}\Big]$$

2 суперпартнёра у каждого дираковского фермиона

T(фунд.)

ароматы

$$\frac{11}{3}\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{4}{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{11}{3}-\frac{2}{3}\right)}_{\text{вклад калибр. суперполя и духов}}\cdot 3-\underbrace{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)}_{\text{вклад кирального суперполя}}\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=9-6=3$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_3(\mu)}=\frac{1}{\alpha_3(\mu_0)}+\frac{3}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}}$$

(Ранее, в СМ было $7/2\pi \ln \mu/\mu_0$. Изменение коэффициента произошло из-за вкладов глюино и скварков)

SU(2):

калибр. бозоны и духи

$C_2(SU(2))$

калибрино

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\Big[\frac{11}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 2$$

T(фунд.) поколения

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+3)\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+3)\cdot 3 - \overbrace{\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}^{\text{хиггсино}}$$

кварки

лептоны

скварки

слептоны

$$-\underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}_{\text{хиггсы}}\Big]$$

цвет

T(фунд)

2 дуплета

T(фунд.)

2 дуплета

$$\frac{11}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+3)\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(1+3)\cdot 3$$

$$-\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 3\cdot 2 - \frac{1}{2}(1+3)\cdot 3 - 1$$

$$= 6 - 6 - 1 = -1$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}}$$

(Ранее в СМ было $+\frac{19}{6}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}$, видно, что сменился знак)

$U(1)$: Здесь вычисление отличается, поскольку по $U(1)$ характеристикой является не представление, а гиперзаряд Y.

Сравним выражения для вершин в абелевом и неабелевом случаях. Они получаются из ковариантных производных

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie A_\mu^A T^A \quad (\text{неабелев случай})$$

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie \underset{U(1)}{A_\mu} Y \cdot \psi \quad (\text{абелев случай})$$

$\Longrightarrow$ вместо $tr(T^A T^B) = T(R)\delta^{AB}$ в абелевом случае мы будем получать Y^2. Поэтому для группы $U(1)$ для $\alpha_{10} \equiv e_1^2/4\pi$ получаем

$$\frac{1}{\alpha_{10}(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{10}(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left[-\frac{2}{3}\sum_\phi Y_\phi^2 - \frac{1}{3}\sum_{ck} Y_{ck}^2\right]$$

В суперсимметричном варианте это даёт

$$\frac{1}{\alpha_{10}(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{10}(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\sum_{\substack{\text{киральн.}\\ \text{суперполе}}} Y^2$$

и $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\sum_{\substack{\text{киральн.}\\ \text{суперполе}}} Y^2$$

Напомним, что в МССМ гиперзаряды киральных суперполей имеют вид

суперполе	$\begin{pmatrix}\tilde U\\ \tilde D\end{pmatrix}^I$	U^I	D^I	$\begin{pmatrix}\tilde N\\ \tilde E\end{pmatrix}^I$	N^I	E^I	Φ_d	Φ_u
Y	$-1/6$	$+2/3$	$-1/3$	$+1/2$	0	-1	$+1/2$	$-1/2$

Поэтому

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\Big[\underset{\begin{pmatrix}\tilde U\\ \tilde D\end{pmatrix}}{\left(-\frac{1}{6}\right)^2\cdot \overset{\text{покол.}}{3}\cdot\overset{\text{цвет}}{3}\cdot\overset{\text{верх.-ниж.}}{2}}$$

поколения

$$+\underset{U}{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 3\cdot 3} + \underset{D}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 3\cdot 3} + \underset{\begin{pmatrix}\tilde N\\ \tilde E\end{pmatrix}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3\cdot 2} + \underset{N}{0}$$

цвет

$$+\left(-1\right)^2\cdot \underset{E}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot \underset{\Phi_d}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot \underset{\Phi_u}{2}\Big] =$$

поколения верх.-ниж.

$$= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\left[\frac{1}{2}+4+1+\frac{3}{2}+3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}\cdot 11$$

Т.о. окончательно

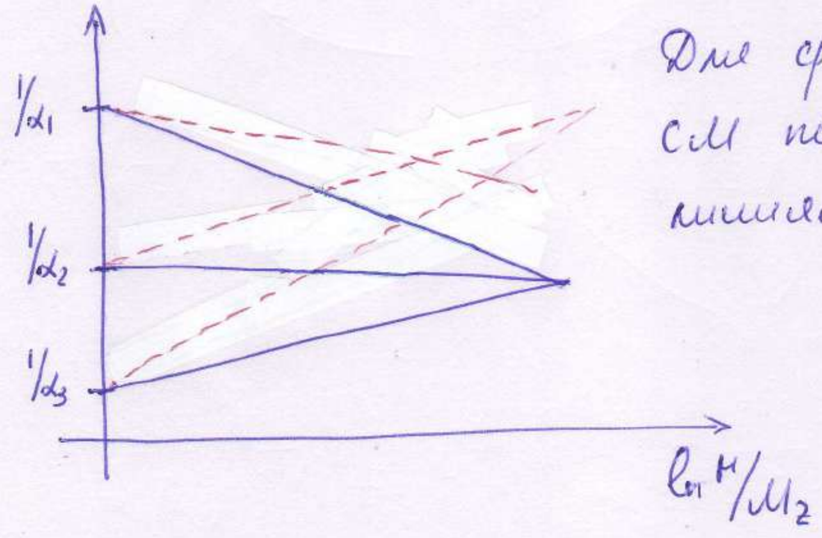
$$\boxed{\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{33}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}}$$

(Ранее в СМ $-\frac{41}{10}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}$)

т.о. в МССМ однопетлевая эволюция констант связи описывается уравнениями

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_3(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{3}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} \\ \frac{1}{\alpha_2(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} \\ \frac{1}{\alpha_1(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{33}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0} \end{aligned}}$$

График этих функций изображён на рисунке синими линиями.



Для сравнения случай СМ показан красными линиями.

Найдём масштабы, на которых пересекаются различные прямые. При этом положим

$\mu_0 = M_Z$; $\mu = M_X$.

(На M_X начинают рождаться X_μ и Y_μ бозоны и близок порог для хиггсовского триплета.

После прохождения этих порогов все константы связи сольются в одну и будут бежать вместе.)

1) Уравнение $\alpha_1(M_X) = \alpha_2(M_X)$:

$$\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{33}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} = \frac{1}{\alpha_1(M_X)} = \frac{1}{\alpha_2(M_X)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z}\cdot\left(\frac{33}{5}-1\right) = \frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_2(M_Z)}$$

$$\log_{10}\frac{M_X}{M_Z} = \frac{2\pi}{\ln 10}\,\frac{\left(\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_2(M_Z)}\right)}{\left(\frac{33}{5}-1\right)} \simeq 14{,}34$$

2) Уравнение $\alpha_1(M_X) = \alpha_3(M_X)$

$$\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{33}{5}\cdot\frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} = \frac{1}{\alpha_1(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_X)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{3}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\log_{10}\frac{M_X}{M_Z} = \frac{2\pi}{\ln 10}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right)}{\left(\frac{33}{5}+3\right)} \simeq 14{,}37$$

3) Уравнение $\underline{\alpha_2(M_X) = \alpha_3(M_X)}$

$$\frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z} = \frac{1}{\alpha_2(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_X)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{3}{2\pi}\ln\frac{M_X}{M_Z}$$

$\Longrightarrow$

$$\log_{10}\frac{M_X}{M_Z} = \frac{2\pi}{\ln 10}\,\frac{\left(\frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right)}{(1+3)} \simeq \underline{14{,}41}$$

Сравним теперь предсказания для объединения констант связи в Стандартной модели и в МССМ:

константы	$\alpha_1 = \alpha_2$	$\alpha_1 = \alpha_3$	$\alpha_2 = \alpha_3$	среднее
масштаб (СМ)	11,05	12,43	15,04	12,84
масштаб (МССМ)	14,34	14,37	14,41	14,37

– видно, что в МССМ точность объединения намного выше, а .

$$\boxed{M_X \sim M_Z \cdot 10^{14{,}37} \sim 2{,}1 \cdot 10^{16}\ \text{ГэВ}}$$

тогда как в СМ

$$M_X \sim M_Z \cdot 10^{12{,}84} \sim 6{,}3 \cdot 10^{14}\ \text{ГэВ}$$ (примерно в 30 раз меньше)

Глава III. Суперсимметричная теория Великого объединения с группой $SU(5)$

§ 1. Состав полей суперсимметричной теории Великого объединения с группой $SU(5)$

Теория с группой $SU(5)$ является наиболее простой теорией Великого объединения.

Группа МССМ $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ является максимальной подгруппой $SU(5)$:

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1) \subset SU(5)$$

причём не существует G отличной от $SU(5)$ или $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, т.ч.

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset G\subset SU(5)$$

В явном виде вложение $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ в $SU(5)$ записывается в виде

$$\begin{array}{c|c} & \overset{3}{\longleftrightarrow}\quad\overset{2}{\longleftrightarrow} \\ 5\updownarrow & \left(\begin{array}{c|c} \omega_3 e^{-2i\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \omega_2^* e^{+3i\alpha} \end{array}\right) \\ & \underset{5}{\longleftrightarrow} \end{array} \in SU(3)\times SU(2)\times U(1)\subset SU(5)$$

где $\omega_3 \in SU(3)$

$\omega_2 \in SU(2)$ (комплексное сопряжение написано для удобства дальнейших обозначений)

α – вещественное число

Поскольку группа $SU(5)$ простая, то в соответствующей теории Великого объединения (ТВО) будет только одна константа связи

$$\alpha_5 = \frac{e_5^2}{4\pi} = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1 \quad \text{где} \quad \alpha_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{e_1^2}{4\pi}$$

и $\sin^2\theta_W = 3/8$ (см. курс „Теория Великого объединения")

и одно калибровочное суперполе

$$\underset{SU(5)}{V} = e_5 \underset{SU(5)}{V^A} \underset{SU(5)}{t^A}, \quad \underset{SU(5)}{V^+}(x,\theta) = \underset{SU(5)}{V}(x,\theta)$$

Как и в МССМ, в теории присутствуют киральные суперполя материи, которые делятся на 2 группы:

1. Суперполя, включающие кварки или лептоны (3 поколения)

2. Суперполя, включающие различные хиггсовские поля.

Ключевым аргументом в пользу ТВО является то, что квантовые числа полей СМ (или МССМ) могут быть получены, если разместить (супер)поля материи в нескольких неприводимых представлениях калибровочной группы ТВО.

В случае SU(5) SUSY ТВО суперполя кварков и лептонов одного поколения размещаются в представлениях

$$\underbrace{1}_{\text{синглет}} + \underbrace{5}_{\text{фундаментальное представление}} + \underbrace{\overline{10}}_{\text{антисимм. тензор второго ранга}}$$

При этом

$$1 \sim N$$

$$5_i = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix} \qquad \overline{10}^{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & U_3 & -U_2 & \tilde{U}^1 & \tilde{D}^1 \\ -U_3 & 0 & U_1 & \tilde{U}^2 & \tilde{D}^2 \\ U_2 & -U_1 & 0 & \tilde{U}^3 & \tilde{D}^3 \\ \hline -\tilde{U}^1 & -\tilde{U}^2 & -\tilde{U}^3 & 0 & E \\ -\tilde{D}^1 & -\tilde{D}^2 & -\tilde{D}^3 & -E & 0 \end{array}\right)$$

В отличие от несуперсимметричного случая нигде нет зарядового сопряжения, все элементы являются киральными суперполями.

Также у этих суперполей есть индекс $I = \overline{1,3}$, нумерующий поколения.

Хиггсовские поля (входящие в киральное суперполе) должны обеспечивать цепочку нарушения симметрии

$$SU(5) \xrightarrow{H} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{\Phi_u,\, \Phi_d} SU(3) \times U(1)_{em}.$$

Далее мы поймём, что минимальное представление $SU(5)$, в котором может лежать хиггс, нарушающий $SU(5)$ до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ есть $Adj = 24$. Соответствующее киральное суперполе мы обозначаем через $H_i^{\;j} \equiv H^A (t^A_{SU(5)})_i^{\;j}$, а его скалярную компоненту через $h_i^{\;j}$.

Для нарушения $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ до $SU(3) \times U(1)_{em}$ ранее (в МССМ) использовались суперполя Φ_u и Φ_d в фундаментальном представлении $SU(2)$, тривиальном представлении $SU(3)$ и гиперзарядами $-1/2$ и $+1/2$ соответственно.

Их можно включить в суперполе

$(\Phi_d)_i \in 5$

$(\Phi_u)^i \in \overline{5}$

которое, при этом, также будут содержать триплеты (3 верхние компоненты), которых не было в МССМ.

§2. Получение квантовых чисел суперполей МССМ из квантовых чисел по группе SU(5)

Т.к. представления SU(5) определяют и законы преобразования (супер)полей по подгруппе $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, то необходимо проверить, что соответствующие квантовые числа получаются правильно. (Для простоты преобразования - глобальные)

N - синглет по $SU(5)$, а $\Rightarrow$ и по $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ - верно.

$$5_i = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \omega_3 e^{-2i\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \omega_2^* e^{+3i\alpha} \end{array}\right) \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_3 e^{-2i\alpha} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ D_a лежит в фундаментальном представлении $SU(3)$ и тривиальном по $SU(2)$.

Т. к. α определено с точностью до нормировки, то гиперзаряд определить нельзя. Требуя, чтобы $Y = -1/3$, мы получаем, что если $\alpha \equiv \frac{1}{6}\alpha_0$, то коэффициент перед $i\alpha_0$ в экспоненте будет гиперзарядом – фиксация нормировки.

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2^* e^{3i\alpha} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2 e^{i\alpha_0/2} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ тривиальное представление $SU(3)$, фундаментальное $SU(2)$ и $Y = +1/2$ – верно.

$$\overline{10}^{ij} \longrightarrow (\omega_5^*)^i{}_k (\omega_5^*)^j{}_l \overline{10}^{kl}$$

Представим индекс $i = \overline{1,5}$ как совокупность $i = (a, \alpha)$ где $a = \overline{1,3}$; $\alpha = 4,5$. Тогда

$$\overline{10}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot E \longrightarrow (\omega_S^*)^{\alpha}_{\cdot\gamma} (\omega_S^*)^{\beta}_{\cdot\delta} \, \overline{10}^{\gamma\delta}$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E \longrightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \omega_2^T \cdot e^{-3i\alpha} \cdot e^{-3i\alpha} E$$

При этом т.к. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ коммутирует с 1 и σ_2 и антикоммутирует с σ_1 и σ_3, то

$$\omega_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \left(a_4 \cdot 1_2 + i\vec{\sigma}\vec{a}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(a_4 \cdot 1_2 - i\vec{\sigma}^*\vec{a}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \omega_2^*$$

т.к. $\omega_2^* \omega_2^T = (\omega_2 \omega_2^+)^T = 1$, то $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{-6i\alpha} E$$

(Матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ фактически представляет собой 2-мерный ε-символ, который является инвариантным тензором для группы $SU(2)$).

$$\Rightarrow \quad E \longrightarrow e^{-i\alpha_0} E$$

– тривиальное представление по $SU(3)$ и $SU(2)$ и $Y = -1$ – верно.

$$\overline{10}^{\alpha a} = \begin{pmatrix} -\tilde{u}^a \\ -\tilde{D}^a \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \alpha=4 \\ \leftarrow \alpha=5 \end{matrix} \longrightarrow (\omega_5^*)^\alpha_{\cdot\beta} (\omega_5^*)^a_{\cdot b}\, \overline{10}^{\beta b}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^a \\ \tilde{D}^a \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2\, e^{-3i\alpha} \cdot (\omega_3^*)^a_{\cdot b}\, e^{2i\alpha} \begin{pmatrix} \tilde{u}^b \\ \tilde{D}^b \end{pmatrix} =$$

$$= \omega_2 \cdot (\omega_3^*)^a_{\cdot b}\, e^{-i\alpha_0/6} \begin{pmatrix} \tilde{u}^b \\ \tilde{D}^b \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ фундаментальное представление $SU(2)$
антифундаментальное представление $SU(3)$
$Y = -1/6$ - верно.

$$\overline{10}^{ab} = \varepsilon^{abd} u_d \longrightarrow (\omega_5^*)^a_{\cdot e} (\omega_5^*)^b_{\cdot f}\, \varepsilon^{efd} u_d =$$

$$= (\omega_3^*)^a_{\cdot e} (\omega_3^*)^b_{\cdot f}\, e^{4i\alpha}\, \varepsilon^{efg} \cdot \delta^d_g\, u_d =$$

$$\delta^d_g = (\omega_3^*)^c_{\cdot g} \cdot (\omega_3^T)^d_{\cdot c}$$

$$= \underbrace{(\omega_3^*)^a_{\cdot e} (\omega_3^*)^b_{\cdot f} (\omega_3^*)^c_{\cdot g}\, \varepsilon^{efg}}_{\varepsilon^{abc}} \cdot e^{2i\alpha_0/3} (\omega_3^T)^d_{\cdot c}\, u_d$$

ε^{abc}, т.к. ε-символ - инвариантный тензор для группы $SU(3)$.

$$= \varepsilon^{abc} e^{2i\alpha_0/3} (\omega_3)_c{}^d u_d$$

$$\Longrightarrow \quad u_a \longrightarrow e^{2i\alpha_0/3} (\omega_3)_a{}^b u_b$$

$\Longrightarrow$ фундаментальное представление $SU(3)$
тривиальное представление $SU(2)$, $Y = 2/3$
— верно.

Аналогично рассматриваются и суперполя $(\Phi_d)_i \in 5$ и $(\Phi_u)^i \in \overline{5}$:

триплет

$$(\Phi_d)_i = \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \\ \Phi_{d3} \\ \hline \Phi_{d4} \\ \Phi_{d5} \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \omega_3 e^{-2i\alpha} & 0 \\ \hline 0 & \omega_2^* e^{3i\alpha} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \\ \Phi_{d3} \\ \hline \Phi_{d4} \\ \Phi_{d5} \end{pmatrix}$$

дуплет

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \Phi_{d4} \\ \Phi_{d5} \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2^* e^{i\alpha_0/2} \begin{pmatrix} \Phi_{d4} \\ \Phi_{d5} \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} \Phi_{d5} \\ -\Phi_{d4} \end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2 e^{i\alpha_0/2} \begin{pmatrix} \Phi_{d5} \\ -\Phi_{d4} \end{pmatrix}$$

— тривиальное представление по $SU(3)$,
фундаментальное представление по $SU(2)$,
$Y = +1/2$

$\Longrightarrow$ столбец $\begin{pmatrix} \Phi_{d5} \\ -\Phi_{d4} \end{pmatrix}$ можно отождествить с полем Φ_d в МССМ.

$$(\Phi_u)^i = \left(\begin{array}{c}\Phi_{u1}\\ \Phi_{u2}\\ \Phi_{u3}\\ \hline \Phi_{u4}\\ \Phi_{u5}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c}\omega_3 e^{-2i\alpha} & 0\\ \hline 0 & \omega_2^* e^{3i\alpha}\end{array}\right)^* \left(\begin{array}{c}\Phi_{u1}\\ \Phi_{u2}\\ \Phi_{u3}\\ \hline \Phi_{u4}\\ \Phi_{u5}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\Phi_{u4}\\ \Phi_{u5}\end{pmatrix} \longrightarrow \omega_2 e^{-3i\alpha}\begin{pmatrix}\Phi_{u4}\\ \Phi_{u5}\end{pmatrix} = \omega_2 e^{-i\alpha_0/2}\begin{pmatrix}\Phi_{u4}\\ \Phi_{u5}\end{pmatrix}$$

– тривиальное представление по $SU(3)$,
– фундаментальное представление по $SU(2)$,
$Y = -1/2$.

$\Rightarrow$ столбец $\begin{pmatrix}\Phi_{u4}\\ \Phi_{u5}\end{pmatrix}$ можно отождествить с полем Φ_u в МССМ.

Однако видно, что также возникают ещё 2 триплета хиггсовских суперполей, которых не должно быть при низких энергиях. (Иначе нарушится объединение бегущих констант связи)

§3. Действие SUSY SU(5) ТВО

Удобно представить действие SUSY SU(5) ТВО в виде суммы нескольких характерных частей, как это уже делалось в случае МССМ.

$$S = \underbrace{S_{SYM} + S_{WZ} + S_{\text{суперпот.}}}_{\text{суперсимметричная часть}} + S_{\text{мягкое}}$$

$\uparrow$ слагаемое, мягко нарушающие SUSY.

Как и ранее S_{SYM} и S_{WZ} полностью определяются калибровочной группой и представлениями, в которых лежат киральные суперполя материи:

$$S_{SYM} = \frac{1}{2e_5^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \underset{su(5)}{W^a W_a}$$

где

$$\underset{su(5)}{W_a} = \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left(e^{-2V} (1+\gamma_5) \underset{su(5)}{D_a} e^{2V} \right)$$

При этом, поскольку калибровочная группа $SU(5)$ является простой, S_{SYM} содержит только одно слагаемое и только одну константу связи e_5.

Напомним, что $e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\, e_1$ после нарушения симметрии до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

S_{WZ} содержит слагаемое $\frac{1}{4} \int d^4x\, d^4\theta\, \phi^+ e^{2V} \phi$ для всех киральных суперполей материи:

$$S'_{WZ} = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \Big\{ N^{+I} N^I + 5^{+iI} (e^{2V})_i{}^j 5_j^I$$

$$+ (\overline{10})^{+I}_{ij} (e^{2V})^{ij}{}_{kl} (\overline{10})^{klI} + \Phi_d^{+i} (e^{2V})_i{}^j \Phi_{dj}$$

$$+ \Phi^+_{ui} (e^{-2V^T})^i{}_j \Phi_u^j \Big\} + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, H^+ e^{2V} H e^{-2V}$$

где $I = \overline{1,3}$ – индекс, нумерующий поколения.

Все слагаемые в этом выражении однотипны.

Действительно, N лежит в тривиальном представлении $SU(5)$, в котором генераторы равны 0.

Поэтому $\quad e^{2V} \longrightarrow e^{2\cdot 0} = 1.$

Для $\overline{10}^{kl}$ необходимо раскладывать раскладывать $\underset{su(5)}{V}$ по генераторам представления $\overline{10}$:

$$(\underset{SU(5)}{V})^{ij}{}_{kl} = e_5 \underset{SU(5)}{V^A} (T^A_{\overline{10}})^{ij}{}_{kl}$$

Если $\quad 5_i \longrightarrow \omega_i{}^j 5_j \simeq (1+\alpha)_i{}^j 5_j$, то

$$\overline{10}^{ij} \longrightarrow ((\omega^{-1})^T)^i{}_k ((\omega^{-1})^T)^j{}_l \overline{10}^{kl} \simeq (1-\alpha^T)^i{}_k \cdot$$

$$\cdot (1-\alpha^T)^j{}_l \overline{10}^{kl} \simeq \overline{10}^{ij} - (\alpha^T)^i{}_k \overline{10}^{kj} - (\alpha^T)^j{}_k \overline{10}^{ik}$$

и $\Rightarrow$ с учётом антисимметрии $\overline{10}^{ij}$

$$(T^A_{\overline{10}})^{ij}{}_{kl} = -\frac{1}{2}(t^{A^T})^i{}_{\cdot k}\,\delta^j_l - \frac{1}{2}(t^{A^T})^j{}_{\cdot l}\,\delta^i_k$$

$$+\frac{1}{2}(t^{A^T})^i{}_{\cdot l}\,\delta^j_k + \frac{1}{2}(t^{A^T})^j{}_{\cdot k}\,\delta^i_l$$

где t^A – генераторы фундаментального представления (5).

Аналогичным образом

$$(T^A_{\overline{5}})^i{}_{\cdot j} = -(t^{A^T})^i{}_{\cdot j} \qquad \text{(нужно для } \Phi_u\text{)}$$

Для поля $H \in Adj = 24$ удобно использовать обозначение $H = H^A t^A$. Тогда известно, что

$$(e^{2V})_{Adj} H = e^{2V} H e^{-2V}$$

Различие нормировочных коэффициентов связано с тем, что необходимо учесть нормировку генераторов $tr(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$.

$S_{\text{суперпот.}}$, как и в MSSM, строится из следующих требований:

1. Перенормируемость ($a \Rightarrow$ степень по киральным суперполям не должна превышать 3)
2. Калибровочная инвариантность
3. R-чётность (не обязательно)

$$S'_{\text{суперпот.}} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \Big\{ (Y_{\overline{10}})_{IJ}\, \varepsilon_{ijklm} (\overline{10})^{ijI} \cdot (\overline{10})^{klJ} \phi_u^m + (Y_5)_{IJ} (\overline{10})^{ijI} 5_i^J \phi_{dj} + (Y_1)_{IJ} \cdot 5_i^I \cdot N^J \cdot \phi_u^i + \frac{1}{2} M_{IJ} N^I N^J + m\, \phi_u^i \cdot \phi_{di} + x \cdot \mathrm{tr}\, H^2 + y \cdot \mathrm{tr}\, H^3 + \lambda \phi_u^i H_i{}^j \phi_{dj} \Big\} + \text{к.с.}$$

Это выражение является калибровочно инвариантным, поскольку верхние $SU(5)$ индексы везде свёрнуты с нижними, а ε_{ijklm} — инвариантный тензор для группы $SU(5)$.

Коэффициенты $(Y)_{IJ}$; y и λ при кубичных слагаемых являются безразмерными, а коэффициенты M_{IJ}; m и x при квадратичных слагаемых имеют размерность массы.

Инвариантность относительно R-чётности очевидна, поскольку суперполя N, 5_i и 10^{ij}, которые включают кварки и лептоны, входят во все слагаемые в чётных степенях.

Также как и в МССМ, мягкие слагаемые, нарушающие SUSY, можно разделить на 3 характерные группы:

$$S_{\text{мягкое}} = S_{\substack{\text{масса}\\ \text{калибрино}}} + S_{\substack{\text{массы}\\ \text{скаляров}}} + S_{\substack{\text{мягкий}\\ \text{суперпотенциал}}}$$

где

$$S_{\substack{\text{масса}\\ \text{калибрино}}} = \frac{M_5}{e_5^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, \underset{SU(5)}{W^a W_a}$$

$$\left(\eta \equiv \frac{1}{2} \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \ - \text{шпурион} \right)$$

— видно, что есть только одно такое слагаемое. Следовательно, также как и для констант связи, для масс калибрино будет справедливо условие объединения

$$M_5 = M_3 = M_2 = M_1$$

(которое, конечно, должно выполняться на масштабе нарушения SU(5) симметрии)

$S_{\substack{\text{массы}\\ \text{скаляров}}}$ похоже на S_{WZ} и содержит слагаемые

вида $\quad -\frac{1}{4} m^2 \int d^4x\, d^4\theta\, \eta^* \eta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi = -m^2 \int d^4x\, \varphi^+ \varphi.$

$$S_{\substack{\text{массы}\\ \text{скаляров}}} = -\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \eta^*\eta \Big\{ m_N^2 N^+ N +$$

$$+ m_5^2\, 5^{+i} (e^{2V})_i{}^j 5_j + m_{10}^2\, \overline{10}^+_{ij} (e^{2V})^{ij}{}_{kl}\, \overline{10}^{kl}$$

$$+ m_1^2\, \Phi^+_{ui} (e^{-2V^T})^i{}_j \Phi_u^j + m_2^2\, \Phi_d^{+i} (e^{2V})_i{}^j \Phi_{dj} \Big\}$$

$$- \frac{m_H^2}{2} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, \eta^*\eta\, H^+ e^{2V} H e^{-2V}$$

где для краткости не были выписаны индексы, нумерующие поколения.

Наконец, $S_{\substack{\text{мягкий}\\ \text{суперпотенц.}}}$ аналогично $S_{\text{суперпот.}}$:

$$S_{\substack{\text{мягкий}\\ \text{суперпот.}}} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta \Big\{ A_{\overline{10}} \cdot \varepsilon_{ijklm} (\overline{10})^{ij} (\overline{10})^{kl} \Phi_u^m$$

$$+ A_5 \cdot \overline{10}^{ij}\, 5_i \Phi_{dj} + A_1 \cdot 5_i \cdot N \Phi_u^i - \frac{1}{2} m^2 N^2$$

$$+ A_\Phi \Phi_u^i \Phi_{di} + A_x \cdot \operatorname{tr} H^2 + A_y \operatorname{tr} H^3 + A_H \Phi_u^i H_i{}^j \Phi_{dj} \Big\} + \text{к.с.}$$

где $A_1, A_5, A_{\overline{10}}, m, A_y$ и A_H имеют размерность массы, а величины A_Φ и A_x — размерность квадрата массы.

§ 4. Нарушение калибровочной симметрии в SUSY SU(5) ТВО

Набор хиггсовских полей рассматриваемой теории должен обеспечивать цепочку нарушения калибровочной симметрии

$$SU(5) \xrightarrow{H} SU(3)\times SU(2)\times U(1) \xrightarrow{\Phi_u,\,\Phi_d} SU(3)\times U(1)_{em}$$

При этом вакуумное среднее поле h (скалярной компоненты суперполя H) нарушает $SU(5)$ до $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, а вакуумные средние φ_u и φ_d (скалярные компоненты Φ_u и Φ_d) – $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ до $SU(3)\times U(1)_{em}$.

Т.к. константы связи объединяются на масштабе $\sim 10^{16}$ ГэВ, то $h_0 \sim 10^{16}$ ГэВ – масштаб нарушения $SU(5)$-симметрии.

Масштаб нарушения $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ – это $M_Z \sim 10^2$ ГэВ.

Из-за такой разницы в масштабах нарушения симметрии при изучении нарушения $SU(5) \to SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ можно пренебречь всеми слагаемыми, содержащими Φ_u и Φ_d.

Тогда существенными будут только следующие слагаемые в суперпотенциале:

$$S_{\text{суперпот.}} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left(x\cdot \mathrm{tr}\, H^2 + y\cdot \mathrm{tr}\, H^3\right) + \text{к.с.}$$

где y – безразмерная постоянная, а $x \sim 10^{16}$ ГэВ определяет масштаб нарушения $SU(5)$ симметрии.

При этом суперполе H удовлетворяет условию связи $\mathrm{tr}\, H = 0$, т.к. $H \in Adj$. (Пространством присоединённого представления является алгебра Ли, матрицы которой бесследовы для $SU(5)$).

Чтобы учесть условие бесследовости, удобно добавить в суперпотенциал слагаемое $z\cdot \mathrm{tr}\, H$, содержащее множитель Лагранжа z,

$$S_{\text{суперпот.}} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left(x\cdot \mathrm{tr}\, H^2 + y\cdot \mathrm{tr}\, H^3 + z\cdot \mathrm{tr}\, H\right) + \text{к.с.}$$

Тогда компоненты H_i^j можно рассматривать как независимые, а условие $\mathrm{tr}\, H = 0$ получается при дифференцировании по z.

Получим теперь потенциал для скалярной компоненты h суперполя H. (Из него получается вакуум h_0, $a \Rightarrow$ и малая группа)

В чисто суперсимметричных теориях скалярной потенциал получается при исключении вспомогательных полей. Поэтому $V(h)$ получает из

1) Исключения вспомогательного поля $D^A_{su(5)}$

2) Исключения вспомогательного поля f_H

$$\left(H(y^\mu; (1+\gamma_5)\theta) \equiv h(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi_H(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \cdot f_H(y^\mu) \right)$$

3) Мягких слагаемых.

Вычислим последовательно все вклады

1) Слагаемые, содержащие $D^A_{su(5)}$ имеют вид

$$\underbrace{\frac{1}{2}(D^A_{su(5)})^2}_{S_{SYM}} + \underbrace{2\cdot \operatorname{tr} h^+[D_{su(5)}, h]}_{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, H^+ e^{2V} H e^{-2V}} =$$

$$= \frac{1}{2}(D^A_{su(5)})^2 + i f^{ABC} h^{+A} D^B h^C \cdot e_5 \longrightarrow$$

$$\overrightarrow{=} -\frac{1}{2}\underset{su(5)}{(D^A)^2}$$

где $D^A = if^{ABC} h^{+B} h^C \cdot e_5 \quad (\in Re)$

$$\Longrightarrow \Delta_1 V(h) = \frac{e_5^2}{2}\left(if^{ABC}h^{+B}h^C\right)^2 = e_5^2 \, tr\,[h^+, h]^2$$

2) Слагаемые, содержащие f_H, имеют вид

$$2\, tr f_H^+ f_H + \left(z\cdot tr f_H + 2x\cdot tr f_H\cdot h + 3y\cdot tr f_H h^2 + \text{к.с.}\right)$$

$$\frac{1}{2}\, tr\int d^4x\, d^4\theta\, H^+ e^{2V} H e^{-2V}$$

$$\frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\left(z\, trH + x\, trH^2 + y\, trH^3\right)$$

Уравнение движения для f_H имеет вид

$$2f_H^+ + z + 2x\cdot h + 3y h^2 = 0 \qquad \Big|\, tr$$

$$\Longrightarrow \quad z = -\frac{1}{5}\, tr\left(2f_H^+ + 2x\cdot h + 3yh^2\right) = -\frac{3y}{5}\, tr\, h^2$$

$$\Delta_2 V(h) = 2\, tr\, f_H^+ f_H = \frac{1}{2}\, tr\left|z + 2x\cdot h + 3y h^2\right|^2$$

3) Мягкие слагаемые, содержащие только h, записываются следующим образом:

$$-\frac{m_H^2}{2}\,tr\int d^4x\,d^4\theta\,\eta^*\eta\,H^+e^{2V}He^{-2V}+\Big(\frac{1}{2}\int d^4x\,d^2\theta\cdot$$

$$\cdot\eta\left[A_x\,tr H^2+A_y\cdot tr H^3\right]+\text{к.с.}\Big)=$$

$$=-2m_H^2\,tr\int d^4x\;h^+h+\Big(\int d^4x\left[A_x\,tr h^2+A_y\,tr h^3\right]+\text{к.с.}\Big)$$

$\Longrightarrow$

$$\Delta_3 V(h)=2m_H^2\,tr(h^+h)+\Big(A_x\,tr h^2+A_y\,tr h^3+\text{к.с.}\Big)$$

Т.о. окончательное выражение для потенциала скалярного поля h принимает вид

$$V(h)=e_5^2\,tr\left[h^+,h\right]^2+\frac{1}{2}\,tr\left|z+2x\cdot h+3yh^2\right|^2$$

(*)

$$+\,2m_H^2\,tr(h^+h)+\Big(A_x\,tr h^2+A_y\,tr h^3+\text{к.с.}\Big)$$

Заметим, что $x\sim10^{16}$ ГэВ, а величины $m_H,\ \sqrt{A_x},\ A_y\ \sim10^3$ ГэВ если считать, что все параметры мягкого нарушения суперсимметрии имеют один и тот же порядок.

Поэтому слагаемые во второй строчке формулы (*) намного меньше, чем в первой.

Пусть необходимо найти минимум функции

$$f(x) \equiv f_0(x) + \varepsilon f_1(x)$$

где ε - малый параметр. Тогда в точке минимума

$$0 = f'(x) = f_0'(x) + \varepsilon f_1'(x)$$

Если x_0 т.ч. $f_0'(x_0) = 0$, то очевидно, что

$$x \simeq x_0 + \varepsilon x_1 \quad \text{где} \quad x_1 \simeq -\frac{f_1'(x_0)}{f_0''(x_0)}$$

– минимум $f(x)$ отличается от минимума $f_0(x)$ на малую величину. Тогда

$$f_{min} \simeq f(x_0 + \varepsilon x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)$$

$$= f(x_0) - \varepsilon^2 f_1'(x_0) \cdot x_1 + O(\varepsilon^2) = f_0(x_0) + \varepsilon f_1(x_0) + O(\varepsilon^2)$$

Поэтому при нахождении вакуумного среднего h можно пренебречь мягкими слагаемыми. При этом для нахождения потенциала в минимуме можно просто подставить найденное таким образом h_0 в формулу (*).

Итак, начинаем с минимизации выражения

$$V(h) = e_5^2 \operatorname{tr}[h^+, h]^2 + \frac{1}{2} \operatorname{tr} |z + 2x \cdot h + 3y \cdot h^2|^2$$

У нас имеется калибровочная инвариантность, под действием которой $h \to \omega h \omega^{-1}$ где $\omega \in SU(5)$. Этот произвол можно использовать для того, чтобы диагонализовать величину

$$(Re\, h^A) t^A \equiv Re\, h, \qquad (Re\, h)^+ = Re\, h$$

причём на диагонали очевидно будут стоять вещественные числа.

$$e_5^2 \operatorname{tr}[h^+, h]^2 = e_5^2 \operatorname{tr}[Re\, h - iJm\, h, Re\, h + iJm\, h]^2$$

(где $Jm\, h \equiv (Jm\, h^A) \cdot t^A$)

$$= -4e_5^2 \operatorname{tr}[Re\, h, Jm\, h]^2 = 4e_5^2 (f^{ABC} Re\, h^B \cdot Jm\, h^C)^2$$

$\geqslant 0$.

Это выражение достигает нулевого минимума, если

$$[Re\, h_0, Jm\, h_0] = 0$$

и $\Rightarrow$ $Jm\, h_0$ является также диагональной (если у $Re\, h_0$ какие-то диагональные элементы совпадают, то имеется остаточная инвариантность, которая позволяет диагонализовать ту часть $Jm\, h_0$, которая не зафиксируется условием $[Re\, h_0, Jm\, h_0] = 0$.)

Т.о. мы можем считать, что

$$h_0 = \begin{pmatrix} h_1 & & & & 0 \\ & h_2 & & & \\ & & h_3 & & \\ & & & h_4 & \\ 0 & & & & h_5 \end{pmatrix}$$

где h_i - вообще говоря комплексные числа.

$$tr\, h_0 = \sum_{i=1}^{5} h_i = 0$$

Второе слагаемое, $\frac{1}{2} tr \left| z + 2x \cdot h + 3y\, h^2 \right|^2 \geq 0$

достигает нулевого минимума, если

$$z + 2x \cdot h_i + 3y\, h_i^2 = 0 \qquad \forall\ i = \overline{1,5}$$

У этого уравнения может быть не более 2-х различных решений. Поэтому возможны 3 различные ситуации:

1) $h_0 = 0$ (все $h_i = 0$)

Это решение соответствует ненарушенной симметрии, т.е. $H = SU(5)$

(где H - малая группа, т.е. группа, оставляющая вакуумное состояние инвариантным)

2)
$$h_0 = V \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -4 \end{pmatrix}, \quad H = SU(4)\times U(1)$$

При этом $h^{(1)} = V$; $h^{(2)} = -4V$,

$$\begin{cases} z + 2x\,h^{(1)} + 3y\,h^{(1)2} = 0 \\ z + 2x\,h^{(2)} + 3y\,h^{(2)2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2x\left(h^{(1)} - h^{(2)}\right) + 3y\left(h^{(1)} - h^{(2)}\right)\left(h^{(1)} + h^{(2)}\right) = 0$$

$$2x + 3y\left(h^{(1)} + h^{(2)}\right) = 0$$

В рассматриваемом случае

$$2x + 3y\left(V - 4V\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V = +\frac{2x}{9y} \qquad \left(x \sim 10^{16}\,\text{ГэВ} \Rightarrow V \sim 10^{16}\,\text{ГэВ}\right)$$

3)
$$h_0 = V \cdot \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ 0 & & & & -3 \end{pmatrix} \qquad H = SU(3)\times SU(2)\times U(1)$$

$h^{(1)} = 2V$; $h^{(2)} = -3V$

$$2x + 3y\left(2V - 3V\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2x}{3y} \sim 10^{16}\,\text{ГэВ}.$$

В теории, которая не содержит мягкие слагаемые, потенциал во всех этих минимумах равен 0 и $\Rightarrow$ невозможно выбрать какой-то из них.

Однако при наличии мягких слагаемых V_{min} будет отличаться в различных вакуумах.

Например, если $x, y \in Re$, $m_H = 0$; $A_x = 0$, то $V \in Re$ и (см. стр. 119)

$$V_{min} = A_y \operatorname{tr} h^3 + \text{k.c.}$$

1) $H = SU(5)$

$$V_{min} = 0$$

2) $H = SU(4) \times U(1)$

$$V_{min} = A_y \cdot \frac{x^3}{y^3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot (4-64) + \text{k.c.} =$$

$$= A_y \frac{x^3}{y^3} \cdot \left(-\frac{160}{243}\right) + \text{k.c.}$$

3) $H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

$$V_{min} = A_y \frac{x^3}{y^3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 (3 \cdot 8 - 2 \cdot 27) + \text{k.c.}$$

$$= A_y \frac{x^3}{y^3} \left(-\frac{80}{9}\right) + \text{k.c.}$$

Поэтому имеется область значений мягких параметров, например, $m_H = 0$; $A_x = 0$, $A_y \frac{x^3}{y^3} \in Re$, > 0, в которой минимум, соответствующий $H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ является самым низким.

Далее будем считать, что мы находимся в этой области и =>

$$SU(5) \longrightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

тогда как

$$h_0 = V \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ 0 & & & & -3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V = \frac{2x}{3y} \sim \\ \sim 10^{16} \text{ ГэВ}$$

Выясним теперь как будет происходить второе нарушение симметрии

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \longrightarrow SU(3) \times U(1)_{em}$$

которое должно быть на масштабе 10^2 ГэВ засчёт ненулевых вакуумных средних скалярных компонент суперполей Φ_u^i и Φ_{di}.

Рассмотрим вначале слагаемое, которое содержат только хиггсовские поля в суперпотенциале и мягком суперпотенциале.

$$S_{\text{суперп.}} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left(m\Phi_u^i \Phi_{di} + \lambda \Phi_u^i H_i{}^j \Phi_{dj} \right)$$

$$+\, \text{к.с.} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi_u^i \left[m\delta_i^j + (h_0)_i{}^j \right] \Phi_{dj} + \text{к.с.}$$

где мы подставили вместо суперполя $H_i{}^j$ вакуумное среднее его скалярной компоненты

$$h_0 = V \cdot \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$m\delta_i^j + (h_0)_i{}^j = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} (m+2V)\cdot 1_3 & 0 \\ \hline 0 & (m-3V)\cdot 1_2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \updownarrow 3 \\ \updownarrow 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{3} & \quad \overset{\longleftrightarrow}{2} \end{array} & \end{array}$$

Напомним, что

$$\Phi_u^i = \begin{pmatrix} \Phi_u^1 \\ \Phi_u^2 \\ \Phi_u^3 \\ \Phi_u^4 \\ \Phi_u^5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{триплет} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{дуплет} = \Phi_u \ (\text{мссм}) \end{array} \qquad \Phi_{di} = \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \\ \Phi_{d3} \\ \hline \Phi_{d4} \\ \Phi_{d5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{триплет} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{дуплет} \end{array} \qquad \underset{(\text{мссм})}{\Phi_d} = \begin{pmatrix} \Phi_{d5} \\ -\Phi_{d4} \end{pmatrix}$$

В МССМ в суперпотенциале присутствовало слагаемое

$$\frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \mu \left(\Phi_{u1}, \Phi_{u2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \end{pmatrix} + \text{к.с.}$$

причём μ не может быть очень большой величиной, т.к. $m_A^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2$ и $\Rightarrow$ при очень больших μ из-за пороговых эффектов будет нарушаться объединение констант связи.

У нас аналогичное слагаемое имеет вид

$$\frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \underbrace{\left(\Phi_u^4, \Phi_u^5\right) \begin{pmatrix} \Phi_{d4} \\ \Phi_{d5} \end{pmatrix}}_{-\Phi^T_{u\,(\text{мссм})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_{d\,(\text{мссм})}} (m - 3V) + \text{к.с.}$$

$$\Rightarrow \mu = 3V - m.$$

Но $V \sim 10^{16}$ ГэВ, $\mu \sim 10^3$ ГэВ $\Rightarrow m \sim 10^{16}$ ГэВ — разность 2-х больших чисел должна дать маленькое — т.н. проблема тонкой подстройки. Если всё же потребовать, чтобы

$$\mu = 3V - m \sim 10^3 \text{ ГэВ}$$

то у триплета возникает очень большая масса:

$$\frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left(\Phi_u^1 \Phi_u^2 \Phi_u^3\right) \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \\ \Phi_{d3} \end{pmatrix} \cdot (m+2V) + \text{к.с.} =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left(\Phi_u^1 \Phi_u^2 \Phi_u^3\right) \begin{pmatrix} \Phi_{d1} \\ \Phi_{d2} \\ \Phi_{d3} \end{pmatrix} \underbrace{(\overset{10^3\,\text{ГэВ}}{-\mu} + \overset{10^{16}\,\text{ГэВ}}{5V})}_{10^{16}\,\text{ГэВ}} + \text{к.с.}$$

Но при расщеплении дуплета и триплета возникает проблема точной подстройки, которая характерна для большинства теорий Великого объединения.

Аналогичная ситуация возникает и для мягких слагаемых.

$$S_{\substack{\text{мягкий} \\ \text{суперпот.}}} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta \left\{ A_\Phi \Phi_u^i \Phi_{di} + A_H \Phi_u^i H_i{}^j \Phi_{dj} \right\}$$

$$+ \text{к.с.} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta \left\{ A_\Phi \Phi_u^i \Phi_{di} + A_H \Phi_u^i h_i{}^j \Phi_{dj} \right\} + \text{к.с.}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \eta\, \Phi_u^T \left(\begin{array}{c|c} A_\Phi + 2VA_H & 0 \\ \hline 0 & A_\Phi - 3VA_H \end{array}\right) \Phi_d + \text{к.с.}$$

и вновь, $A_\Phi - 3VA_H$ должно быть $\sim 10^3$ ГэВ и совпасть с μB, а $A_\Phi + 2VA_H \sim 10^{16}$ ГэВ $\Longrightarrow$ вновь имеется проблема точной подстройки.

§ 5. Получение суперпотенциала МССМ из суперпотенциала SU(5) ТВО.

Рассмотрим теперь часть суперпотенциала SU(5) ТВО, которая содержит суперполе, включающие кварки и лептоны, и вычислим, что она даёт в пределе низких ($\sim 10^2 - 10^3$ ГэВ) энергий:

$$S_{\text{суперпот.}} \longrightarrow \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \Big\{ (Y_{\overline{10}})_{IJ}\, \varepsilon_{ijklm}\, (\overline{10})^{ijI} (\overline{10})^{klJ} \phi_u^m + (Y_5)_{IJ}\, (\overline{10})^{ijI}\, 5_i^J \phi_{dj} + (Y_1)_{IJ}\, 5_i^I N^J \phi_u^i + \frac{1}{2} M_{IJ} N^I N^J \Big\} + \text{к.с.}$$

где

$$5_i = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hline \widetilde{E} \\ -\widetilde{N} \end{pmatrix} \qquad \overline{10}^{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & U_3 & -U_2 & \widetilde{u}^1 & \widetilde{D}^1 \\ -U_3 & 0 & U_1 & \widetilde{u}^2 & \widetilde{D}^2 \\ U_2 & -U_1 & 0 & \widetilde{u}^3 & \widetilde{D}^3 \\ \hline -\widetilde{u}^1 & -\widetilde{u}^2 & -\widetilde{u}^3 & 0 & E \\ -\widetilde{D}^1 & -\widetilde{D}^2 & -\widetilde{D}^3 & -E & 0 \end{array}\right)$$

При низких энергиях хиггсовские триплеты с массой $\sim 10^{16}$ ГэВ можно считать равными 0 (У них вакуумные средние равны 0)

$$\Longrightarrow \phi_u^i \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \boxed{\begin{matrix}\phi_u^4 \\ \phi_u^5\end{matrix}} \end{pmatrix} = \underset{(\text{МССМ})}{\phi_u}\ ; \quad \phi_{di} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \phi_{d4} \\ \phi_{d5} \end{pmatrix} \qquad \underset{(\text{МССМ})}{\phi_d} = \begin{pmatrix} \phi_{d5} \\ -\phi_{d4} \end{pmatrix}$$

Поэтому при низких энергиях

$$(Y_1)_{IJ}\, 5_i^{\,I} N^J \phi_u^{\,i} \longrightarrow (Y_1)_{IJ}\, (\tilde{E}, -\tilde{N})^I N^J \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} =$$

(Здесь хиггсовские поля обозначаем как в МССМ)

$$= (Y_1)_{IJ}\, (\tilde{N}, \tilde{E})^I \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{u1} \\ \phi_{u2} \end{pmatrix} N^J$$

$\Longrightarrow$ сравнивая с аналогичным слагаемым в МССМ (см. стр. 42), заключаем, что

$$(Y_\nu)_{IJ} = -(Y_1)_{IJ}.$$

Следующее слагаемое: $i = (a, \alpha)$ $a = \overline{1,3}$, $\alpha = 4,5$

$$(Y_5)_{IJ}\, (\overline{10})^{ij\,I} 5_i^{\,J} \phi_{dj} \longrightarrow \Big[\phi_{d5} \to \underset{\text{МССМ}}{\phi_{d1}} ; \ \phi_{d4} \to \underset{\text{МССМ}}{-\phi_{d2}} \Big]$$

$$\longrightarrow (Y_5)_{IJ}\, (\overline{10})^{i4\,I} 5_i^{\,J} (-\phi_{d2}) + (Y_5)_{IJ}\, (\overline{10})^{i5\,I} 5_i^{\,J} \phi_{d1}$$

$$= (Y_5)_{IJ} \Big\{ (\overline{10})^{a4\,I} 5_a^{\,J} (-\phi_{d2}) + (\overline{10})^{a5} 5_a^{\,J} \phi_{d1}$$

$$+ (\overline{10})^{54\,I} 5_5^{\,J} (-\phi_{d2}) + (\overline{10})^{45\,I} 5_4^{\,J} \phi_{d1} \Big\} =$$

$$= (Y_5)_{IJ} \Big\{ \tilde{u}^{aI} D_a^{\,J} (-\phi_{d2}) + \tilde{D}^{aI} D_a^{\,J} \phi_{d1} - E^I \tilde{N}^J \phi_{d2}$$

$$+ E^I \tilde{E}^J \phi_{d1} \Big\} =$$

$$= (Y_5)_{IJ} \left\{ (\tilde{u}, \tilde{D})^{aI} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix} D^J_a + (\tilde{N}, \tilde{E})^J \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{d1} \\ \phi_{d2} \end{pmatrix} \cdot E^I \right\}$$

Сравнивая с аналогичными слагаемыми в МССМ, видим, что

$$(Y_d)_{IJ} = (Y_5)_{IJ} \; ; \quad (Y_e)_{IJ} = -(Y_5)_{JI}$$

и $\Rightarrow$ $(Y_d)_{IJ} = -(Y_e)_{JI}$

- $SU(5)$ симметрия накладывает некоторые связи на юкавские константы. Чем более симметрична теория, тем больше будет таких связей.

Последнее слагаемое: ($(Y_{\overline{10}})_{IJ}$ очевидно симметрична)

$$(Y_{\overline{10}})_{IJ}\, \varepsilon_{ijklm} (\overline{10})^{ij\,I} (\overline{10})^{kl\,J} \phi_u^m \longrightarrow \begin{bmatrix} \phi_u^4 \to \underset{(\text{мссм})}{\phi_{u1}} \\ \phi_u^5 \to \underset{(\text{мссм})}{\phi_{u2}} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow 4 (Y_{\overline{10}})_{IJ}\, \varepsilon_{abc45} (\overline{10})^{ab\,I} (\overline{10})^{c4J} \phi_{u2} +$$

$$+ 4 (Y_{\overline{10}})_{IJ}\, \varepsilon_{abc54} (\overline{10})^{ab\,I} (\overline{10})^{c5J} \phi_{u1} =$$

$$= 4 (Y_{\overline{10}})_{IJ}\, \varepsilon_{abc} \cdot \varepsilon^{abd} u^I_d \left[\tilde{u}^{cJ} \phi_{u2} - \tilde{D}^{cJ} \phi_{u1} \right] =$$

$$= 8(Y_{\overline{10}})_{IJ}\,(\tilde{U},\tilde{D})^{aJ}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{u1}\\ \Phi_{u2}\end{pmatrix} U_a^I$$

Сравнивая это выражение с аналогичным слагаемым на стр. 42, получаем, что

$$(Y_u)_{IJ} = 8(Y_{\overline{10}})_{JI}$$

и все слагаемые суперпотенциала МССМ воспроизводятся из суперпотенциала $SU(5)$ ТВО, но на юкавские константы возникают некоторые ограничения.

§6. Объединение слагаемых, нарушающих R-чётность

Поскольку ранее написанное действие $SU(5)$ ТВО содержит суперполя, включающие кварки и лептоны, только в чётных степенях, то оно, также как и МССМ, инвариантно относительно Z_2 преобразований R-чётности, которые аналогичны тем, которые вписывались в МССМ. (теперь $\overline{10}^{ij}$, 5_i и N меняют знак)

В суперпотенциал можно добавить слагаемое

$$\Delta S = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left\{ \Lambda_{IJk}\, 5_i^I\, \overline{10}^{ijk}\, 5_j^J - \mu_I\, 5_i^I \phi_u^i \right\}$$

$+ \text{k.c.}$, где $\Lambda_{IJk} = -\Lambda_{JIk}$

Первое слагаемое в этом выражении может быть переписано в виде

$$\Lambda_{IJk}\, 5_i^I\, \overline{10}^{ijk}\, 5_j^J = \Lambda_{IJk}\, 5_a^I\, \overline{10}^{abk}\, 5_b^J$$

$$+ \Lambda_{IJk} \cdot 2 \cdot 5_a^I \cdot \overline{10}^{a\alpha k}\, 5_\alpha^J + \Lambda_{IJk} \cdot 5_\alpha^I\, \overline{10}^{\alpha\beta k}\, 5_\beta^J$$

$$= \Lambda_{IJk}\, D_a^I \cdot \varepsilon^{abc}\, U_c^k \cdot D_b^J + 2\Lambda_{IJk}\, D_a^I \left(\tilde{U}^a, \tilde{D}^a\right)^k \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^J + \Lambda_{IJk} \cdot \left(\tilde{E}, -\tilde{N}\right)^I \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ -\tilde{N} \end{pmatrix}^J =$$

$$= \Lambda_{JkI}\, \varepsilon^{abc}\, U_a^I D_b^J D_c^k + 2\Lambda_{kJI} \left(\tilde{U}, \tilde{D}\right)^{aI} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^J$$

$$\cdot D_a^k + \Lambda_{IJk} \left(\tilde{N}, \tilde{E}\right)^I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{E} \end{pmatrix}^J E^k$$

— получились такие же слагаемые, как и ранее на стр. 87, но коэффициенты уже связаны друг с другом.

А именно, мы получили, что

$$\left.\begin{aligned} \lambda''_{IJk} &= \Lambda_{JkI} \\ \lambda'_{IJk} &= 2\Lambda_{kJI} \\ \lambda_{IJk} &= \Lambda_{IJk} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

для наличия $SU(5)$-симметрии нужно, чтобы на масштабе объединения

$$\lambda_{IJk} = \frac{1}{2}\lambda'_{kJI} = \lambda''_{kIJ}$$

Второе слагаемое в формуле для ΔS мы изучим в пределе низких энергий, когда можно положить хиггсовский триплет равным 0.

Тогда

$$-\mu_I 5_i^I \Phi_u^i \longrightarrow -\mu_I (\tilde{E}, -\tilde{N})^I \begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix} =$$

(мссм)

$$= \mu_I (\tilde{N}, \tilde{E}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{pmatrix}$$

– получилось такое же слагаемое, как и на стр. 87.

Т.о. в $SU(5)$ ТВО также могут присутствовать слагаемые, нарушающие R-чётность, а, следовательно, и стабильность легчайшего суперпартнёра.

Глава IV. Нарушение суперсимметрии с помощью супергравитации.

§1. Формализмы 2-го и 1-го порядков в обычной гравитации.

Действие гравитационного поля записывается в виде

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{-g}\, R \equiv -\frac{1}{2k^2}\int d^4x \sqrt{-g}\, R$$

где $k^2 \equiv 8\pi G$

(Постоянная k имеет размерность обратной массы или длины)

При этом $g \equiv \det g_{\mu\nu}$

$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$; $R_{\mu\nu} \equiv R_{\alpha\mu\cdot\nu}{}^{\alpha}$ где

$$R_{\mu\nu\cdot\beta}{}^{\alpha} \equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\beta}$$

– тензор кривизны.

($R_{\mu\nu}$ называется тензором Риччи, а R – скалярной кривизной)

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right)$$

– символы Кристоффеля.

Т. к. $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ содержит первые производные метрики, то R, $R_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ содержат вторые производные метрического тензора. Поэтому такое описание гравитации называется формализмом 2-го порядка.

Если в теории присутствуют спинорные поля, то нужно использовать тетрадный формализм:

$g_{\mu\nu} = e^{a}_{\cdot\mu} e_{a\nu}$ где $e_{a\mu}$ – тетрада

локально лоренцев индекс эйнштейновский индекс

$\eta_{ab} = e_{a\mu} e_{b\nu} g^{\mu\nu}$

где $\eta_{ab} = diag(1,-1,-1,-1)$ – метрика пространства Минковского.

Тогда действие гравитационного поля можно переписать в виде

$S = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x \sqrt{-g}\, e^{m\mu} e_{n\cdot}^{\ \nu} R_{\mu\nu m\cdot}^{\ \ \ \ n}$, где

$$R_{\mu\nu m\cdot}{}^{n} = \partial_\mu \omega_{\nu m}{}^{n} - \partial_\nu \omega_{\mu m}{}^{n} + \omega_{\mu m}{}^{a}\omega_{\nu a}{}^{n} - \omega_{\nu m}{}^{a}\omega_{\mu a}{}^{n}$$

$$\omega_{\mu a}{}^{b} \equiv e_{a\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}e^{b\beta} + e_{a\alpha}\partial_\mu e^{b\beta} = -\omega_{\mu\cdot}{}^{b}{}_{a}$$

— т.н. спиновая связность, которая, очевидно, выражается через тетраду и её первые производные.

Можно показать, что

$$R_{\mu\nu m}{}^{n} e^{m\alpha} e_{n\beta} = R_{\mu\nu\cdot\beta}^{\ \ \ \alpha} \longleftarrow$$ был определён ранее.

Т.к. приведённое выше действие содержит вторые производные тетрады, то это также будет формализм второго порядка.

Спиноры в гравитационном поле описываются действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\left(i\bar{\psi}\gamma^m e_m{}^\mu \nabla_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi\right)$$

где $\nabla_\mu \psi \equiv \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^{ab}\right)\psi$

а $\gamma^{ab} \equiv \frac{1}{2}\left(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a\right)$

(γ-матрицы имеют локально-лоренцев индекс.)

Однако можно описывать гравитацию и по-другому, с помощью т.н. формализма первого порядка.

Пусть $\bar{\omega}_{\mu a}{}^{b}$ – произвольное поле с одним эйнштейновским и 2-мя локально лоренцевыми индексами, т.ч. $\bar{\omega}_{\mu ab} = -\bar{\omega}_{\mu ba}$. Определим по нему тензор кривизны

$$\bar{R}_{\mu\nu a}{}^{b} \equiv \partial_\mu \bar{\omega}_{\nu a}{}^{b} - \partial_\nu \bar{\omega}_{\mu a}{}^{b} + \bar{\omega}_{\mu a}{}^{c} \bar{\omega}_{\nu c}{}^{b} - \bar{\omega}_{\nu a}{}^{c} \bar{\omega}_{\mu c}{}^{b}$$

При этом теперь $\bar{\omega}_{\mu a}{}^{b}$ никак не связано с тетрадой.

Рассмотрим действие

$$\bar{S} \equiv -\frac{1}{2k^2}\int d^4x \sqrt{-g}\, \bar{R}_{\mu\nu a}{}^{b} e^{a\mu} e_b{}^{\nu}$$

которое является функционалом от 2-х независимых полей – тетрады $e_{a\mu}$ и связности $\omega_{\mu ab}$. При этом оно содержит только первые производные полей, поэтому такое описание гравитации называют формализмом 1-го порядка. Покажем, что он также правильно описывает гравитацию.

Представим $\bar{\omega}_{\mu ab}$ в виде

$$\bar{\omega}_{\mu ab} \equiv \omega_{\mu ab} + K_{\mu ab}$$

связность, согласованная с тетрадой

тензор конторсии.

Тогда несложно убедиться, что

$$\bar{R}_{\mu\nu a}{}^{b} = R_{\mu\nu a}{}^{b} + \nabla_\mu K_{\nu a}{}^{b} - \nabla_\nu K_{\mu a}{}^{b} + K_{\mu a}{}^{c} K_{\nu c b} - K_{\nu a}{}^{c} K_{\mu c}{}^{b}$$

производные по связности, согласованной с тетрадой.

Как следствие,

$$\bar{S} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\, \sqrt{-g}\, e^{a\mu} e_b{}^{\nu} \left[R_{\mu\nu a}{}^{b} + \nabla_\mu K_{\nu a}{}^{b} - \nabla_\nu K_{\mu a}{}^{b} + K_{\mu a}{}^{c} K_{\nu c}{}^{b} - K_{\nu a}{}^{c} K_{\mu c}{}^{b} \right] =$$

дают полные производные

$$= -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\, \sqrt{-g}\, R - \frac{1}{2k^2}\int d^4x\, \sqrt{-g}\, e^{a\mu} e_b{}^{\nu} \left(K_{\mu a}{}^{c} K_{\nu c}{}^{b} - K_{\nu a}{}^{c} K_{\mu c}{}^{b} \right) + \text{поверхностные слагаемые}.$$

— видно, что поле $K_{\mu ab}$ является вспомогательным полем, которое может быть исключено из уравнений движения.

Несложно убедиться, что решением ур-й движения для $K_{\mu ab}$ будет $K_{\mu ab}=0$. Поэтому после исключения этого поля мы получим, что

$$\bar{S} \Longrightarrow -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,R = S$$

и формализм 1-го порядка будет эквивалентен формализму 2-го порядка.

Но если в теории есть спинорное поле, то это уже не так:

$$\bar{S} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\bar{R} + \int d^4x\sqrt{-g}\left(i\bar{\psi}e_m{}^{\mu}\gamma^m\bar{\nabla}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi\right) \longrightarrow$$

по связности $\bar{\omega}_{\mu ab}$

$$\longrightarrow -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R + e^{a\mu}e_b{}^{\nu}\left[K_{\mu a}{}^{c}K_{\nu c}{}^{b} - K_{\nu a}{}^{c}K_{\mu c}{}^{b}\right]\right)$$

$$+\int d^4x\sqrt{-g}\left(i\bar{\psi}e_m{}^{\mu}\gamma^m\nabla_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}e_m{}^{\mu}\gamma^m\frac{1}{4}K_{\mu ab}\cdot\gamma^{ab}\psi\right)$$

по связности $\omega_{\mu ab}$

— теперь ур-е для $K_{\mu ab}$ будет иметь в правой части слагаемое $\sim\psi^2$ и при исключении $K_{\mu ab}$ возникнут дополнительные слагаемые $\sim\psi^4$.

§2 Простая $N = 1$ супергравитация.

Теории супергравитации помимо гравитона должны содержать и его суперпартнёр гравитино. Простейшая теория супергравитации соответствует таблице

λ	-2	$-3/2$	----	$3/2$	2
$n_{сост.}$	1	1	0	1	1

гравитино

гравитон

Т.о. в теории должна обязательно присутствовать частица спина $3/2$, что предполагает описание с помощью поля, имеющего один тензорный и один спинорный индексы: $\psi_{\mu a}$

эйнштейн. индекс

спинорный индекс

(Далее спинорные индексы явно выписывать не будем, чтобы не путать их с локально лоренцевыми)

Чтобы такой объект имел бы только 2 степени свободы на массовой поверхности, действие для него должно иметь некоторую симметрию.

Кроме того, для уменьшения числа степеней свободы, накладывается условие майорановости:

$$\bar{\psi}_\mu = \psi_\mu^T C$$

При этом действие для свободного гравитино записывается в виде

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\alpha \psi_\beta$$

(В данном случае речь идёт о действии в пространстве Минковского)

Однако в такой форме оно может быть записано только в $D=4$. Для возможных обобщений на случай других размерностей более удобна эквивалентная форма этого действия

$$S = -\frac{i}{2}\int d^4x\, \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu \psi_\sigma$$

где $\gamma^{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{3!}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma \pm \text{перестановки}\right)$

— антисимметризованное произведение трёх γ-матриц.

Рассматриваемое действие инвариантно относительно преобразований

$$\psi_\mu \longrightarrow \psi_\mu + \partial_\mu \varepsilon$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x)$ – грассманово нечётный майорановский спинор. Действительно, например,

$$S' = \frac{1}{2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\alpha \psi_\beta \longrightarrow S' + \frac{1}{2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \cdot \left[\partial_\mu \bar{\varepsilon}\, \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\alpha \psi_\beta + \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\alpha \partial_\beta \varepsilon \right] =$$

0 (свёртка симметричного тензора с антисимметричным)

$$= S' - \frac{1}{2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \bar{\varepsilon}\, \gamma_\nu \gamma_5 \partial_\mu \partial_\alpha \psi_\beta = S'$$

Аккуратный подсчёт числа степеней свободы показывает, что на массовой поверхности у ψ_μ их будет только 2.

$N = 1$ супергравитация представляет собой теорию, в которой присутствуют поле тетрады $e_{a\mu}$ и гравитино ψ_μ, инвариантную относительно преобразований суперсимметрии.

Наивно можно предположить, что такая теория описывается действием

$$S = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,R + \frac{1}{2}\int d^4x\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\bar{\psi}_\mu\, e_{n\nu}\,\gamma^n\gamma_5 \cdot \nabla_\alpha \psi_\beta$$

преобразуется как $\sqrt{-g}$, и $\Rightarrow$ еще $\sqrt{-g}$ не нужен

где $\nabla_\alpha \psi_\beta = \partial_\alpha \psi_\beta - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\psi_\sigma + \frac{1}{4}\omega_{\alpha ab}\gamma^{ab}\psi_\beta$

Но в этом случае оказывается, что из ур-я движения для гравитино следует, что $R_{\mu\nu}=0$

Поэтому этот вариант неверен

Правильное действие для $N=1$ супергравитации получается при использовании т.н. формализма порядка 1,5, который представляет собой что-то среднее между формализмами первого и второго порядка. А именно, рассмотрим

$$S = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\bar{R}(e,\bar{\omega}) + \frac{1}{2}\int d^4x\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\bar{\psi}_\mu\, e_{n\nu}\,\gamma^n\gamma_5 \cdot \bar{\nabla}_\alpha(e,\bar{\omega})\,\psi_\beta\ ,$$ где

$$\overline{\nabla}_\alpha(e,\overline{\omega})\psi_\beta \equiv \partial_\alpha\psi_\beta - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(e)\psi_\sigma + \frac{1}{4}\overline{\omega}_{\alpha ab}\gamma^{ab}\psi_\beta$$

После этого представляем $\overline{\omega}_{\mu ab}$ в виде

$$\overline{\omega}_{\mu ab} \equiv \omega_{\mu ab}(e) + K_{\mu ab}$$

Тензор кручения $K_{\mu ab}$ тогда будет вспомогательным полем, которое можно исключить на ур-ях движения. Тогда (см., например, К.В. Степаньянц „Классическая теория поля")

$$K_{\mu ab} = -\frac{ik^2}{4}\left(\overline{\psi}_a\gamma_\mu\psi_b + \overline{\psi}_\mu\gamma_a\psi_b - \overline{\psi}_\mu\gamma_b\psi_a\right)$$

где $\gamma_\mu \equiv e_{m\mu}\gamma^m$; $\psi_b \equiv e_b{}^\mu\psi_\mu$ и т.д.

После этого подставляем это выражение для $K_{\mu ab}$ в выражение для действия:

$$\boxed{S = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\overline{R}(e,\overline{\omega}(e,\psi)) + \frac{1}{2}\int d^4x\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\cdot \overline{\psi}_\mu e_{n\nu}\gamma^n\gamma_5\overline{\nabla}_\alpha(e,\overline{\omega}(e,\psi))\psi_\beta \qquad (*)}$$

где $\overline{\omega}_{\mu ab}(e,\psi) = \omega_{\mu ab}(e) - \frac{ik^2}{4}\left(\overline{\psi}_a\gamma_\mu\psi_b + \overline{\psi}_\mu\gamma_a\psi_b - \overline{\psi}_\mu\gamma_b\psi_a\right)$

Полученное выражение зависит от вторых производных тетрады (как в формализме второго порядка), но получается с использованием формализма 1-го порядка. Поэтому и говорят о формализме порядка 1,5.

Действие (*) для $N = 1$ супергравитации отличается от наивного действия, приведённого на стр. 143 наличием слагаемых, пропорциональных ψ^4.

Оно является инвариантным относительно преобразований суперсимметрии

$$\begin{cases} \delta e^{a}_{\cdot\mu} = -\frac{ik}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^a\psi_\mu \\ \delta\psi_\mu = \frac{1}{k}\bar{\nabla}_\mu(\bar{\omega}(e,\psi))\varepsilon \end{cases}$$

где $\bar{\nabla}_\mu(\bar{\omega}(e,\psi))\varepsilon = \partial_\mu\varepsilon + \frac{1}{4}\left(\omega_{\mu ab}(e) + K_{\mu ab}(e,\psi)\right)$

$\cdot\,\gamma^{ab}\varepsilon$

а $\varepsilon = \varepsilon(x)$ — грассманово нечётный майорановский спинор, зависящий от координат пространства-времени.

Т.о. при наличии гравитации преобразования суперсимметрии становятся локальными.

Можно рассматривать гравитино как калибровочное поле, локализирующее преобразования суперсимметрии.

Также можно построить и действие $N=1$ супергравитации при наличии космологической постоянной:

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2k^2}\sqrt{-g}\,\bar{R}(e,\bar{\omega}(e,\psi)) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\bar{\psi}_\alpha \gamma_\beta \gamma_5 \cdot \bar{\nabla}_\mu(e,\bar{\omega}(e,\psi))\psi_\nu + \sqrt{-g}\left(\frac{3}{k^2}m^2 - \frac{m}{2}\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu}\psi_\nu\right)\right\}$$

которое инвариантно относительно преобразований

$$\begin{cases} \delta e^a_{\cdot\mu} = -\frac{ik}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^a\psi_\mu \\ \delta\psi_\mu = \frac{1}{k}\left(\bar{\nabla}_\mu(\bar{\omega}(e,\psi))\varepsilon + \frac{im}{2}\gamma^\mu\varepsilon\right) \end{cases}$$

При этом величина m представляет собой массу гравитино, а космологическая постоянная равна $\Lambda = -3m^2$ (случай AdS)

(В наших обозначениях $S_{(\text{грав.}+\Lambda)} = -\frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R+2\Lambda)$)

§3. Взаимодействие супергравитации с материей

Рассмотрим теорию инвариантную относительно преобразований глобальной суперсимметрии (в пространстве Минковского), которая описывается суперполевым действием

$$S = \frac{1}{4} \mathrm{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, f_{AB}(\Phi_i)\, W^{aA} W_a^B \qquad (*)$$

$$+ \frac{1}{4} \int d^4x\, d^4\theta\, \Phi(\phi^+ e^{2V}, \phi) + \left(\frac{1}{2} \int d^4x\, d^2\theta\, g(\Phi_i) + \text{к.с.} \right)$$

где Φ_i – киральные суперполя материи,

$$\Phi_i(y^\mu, \theta) \equiv \varphi_i(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\chi_i(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f_i(y^\mu)$$

(Спинорная компонента обозначена через χ_i, чтобы не путать её с гравитино ψ_μ)

$f_{AB}(\Phi_i)$ и $g(\Phi_i)$ – аналитические функции киральных суперполей материи.

$\Phi(\phi^+ e^{2V}, \phi)$, где $V_i{}^j \equiv e V^A (T^A)_i{}^j$, – вещественная функция.

При этом мы предполагаем, что все эти функции выбраны так, чтобы получилась калибровочно инвариантная теория.

Стандартная перенормируемая $N=1$ суперсимметричная калибровочная теория получается если

$$f_{AB}(\phi_i) \longrightarrow \delta_{AB}$$

$$\Phi(\phi^+ e^{2V}, \phi) \longrightarrow \phi^+ e^{2V} \phi$$

$$g(\phi_i) \longrightarrow \frac{1}{2} m^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} \lambda^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k$$

Однако теории супергравитации неперенормируемы, поэтому теперь это требование мы накладывать не будем.

В литературе известно (очень большое) выражение для обобщения действия (*) на случай наличия $N=1$ суперсимметричного взаимодействия с мультиплетом супергравитации. (т.е. теория формулируется в искривлённом пространстве и включает гравитино)

Полное действие может быть найдено в работе H.P. Nilles „Supersymmetry, supergravity and particle physics", Phys. Rept. 110 (1984), 1.

Здесь мы только обсудим его общую структуру и приведём существенные для дальнейшего изложения слагаемые.

Наиболее важно, что оно зависит от функций Φ и g только в комбинации

$$\boxed{G(\varphi^{*i}, \varphi_i) \equiv 3 \ln\left[-\frac{k^2}{3}\Phi(\varphi^{*i}, \varphi_i)\right] - \ln\left(k^6 |g(\varphi_i)|^2\right)}$$

где $k \equiv \sqrt{8\pi G}$ имеет порядок планковской длины, а φ_i – скалярные компоненты киральных суперполей исходного действия (*).

Далее аргументы φ^{*i} и φ_i мы выписывать не будем, т.е.

$$G = 3 \ln\left(-\frac{k^2}{3}\Phi\right) - \ln\left(k^6|g|^2\right)$$

Кроме того, мы будем использовать обозначения

$$G_i \equiv \frac{\partial G}{\partial \varphi^{*i}}; \quad G^i \equiv \frac{\partial G}{\partial \varphi_i}; \quad G_{ij} \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^{*i}\partial\varphi^{*j}};$$

$$G_k^{ij} \equiv \frac{\partial^3 G}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j \partial\varphi^{*k}} \quad \text{и т.д.}$$

Действие рассматриваемой теории ($N=1$ SUGRA с материей) можно разбить на 4 характерных части:

$$S = S_{\text{Бозе}} + S_{\substack{\text{кин.}\\ \text{ферм.}}} + S_{\text{ферм.}^2} + S_{\text{ферм}^4}$$

где

часть потенциала скаляров

$$\mathcal{L}_{\text{Бозе}} = \sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{k^4}e^{-G}\left(3 + G_i (G^{-1})_j^{\ i} G^j\right)$$

кинетический член для скаляров

$$-\frac{1}{k^2}G_i^{\ j}\mathcal{D}_\mu \varphi_j \mathcal{D}^\mu \varphi^i - \frac{e^2}{2k^4}(\mathrm{Re}\, f)^{-1}_{AB}\left(G^i (T^A)_i^{\ j}\varphi_j\right)\cdot$$

аналог $-\frac{1}{2}(D^A)^2$

$$\cdot\left(G_k (T^B)_\ell^{\ k}\varphi^{*\ell}\right) - \frac{1}{4}(\mathrm{Re}\, f)_{AB} F^A_{\mu\nu} F^{\mu\nu B}$$

Янг-Миллс

$$+\frac{i}{4}(\mathrm{Im}\, f)_{AB} F^A_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu B} - \frac{1}{2k^2}R(e)\Big\}$$

топологическое слагаемое

гравитация

– чисто бозонная часть действия. Она не содержит фермионов и является наиболее простым слагаемым.

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$ – дуальный тензор поля.

$$(G^{-1})_i^{\ j} G_j^{\ k} \equiv \delta_i^{\ k}.$$

$$\mathcal{L}_{\substack{\text{кин.}\\ \text{ферм.}}} = \sqrt{-g}\Big\{ -\frac{i}{16}(\mathrm{Re}\,f)_{AB}\bar{\lambda}^A\gamma^\mu\gamma_5\lambda^B\cdot G^i\mathcal{D}_\mu\varphi_i$$

кинет. член калибрино

$$+\frac{i}{4}f_{AB}\bar{\lambda}^A(1+\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda^B + \frac{ik}{8}f_{AB}\bar{\lambda}^A\gamma^\mu\gamma^{\alpha\beta}\psi_\mu F^B_{\alpha\beta}$$

кинет. член гравитино

$$+\frac{1}{8}f^i_{AB}\bar{\chi}_i(1+\gamma_5)\gamma^{\alpha\beta}F^A_{\alpha\beta}\lambda^B + \frac{1}{4\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\nabla_\alpha\psi_\beta$$

$$-\frac{1}{8\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\bar{\psi}_\alpha\gamma_\beta\psi_\gamma G^i\mathcal{D}_\mu\varphi_i + \frac{1}{2k}G^i_j\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu(1-\gamma_5)\chi^j\cdot$$

$$\cdot\mathcal{D}_\mu\varphi_i + \frac{i}{2k^2}\bar{\chi}_i(1+\gamma_5)\gamma^\mu\chi^j\mathcal{D}_\mu\varphi_k\left(G^{ik}_j + \frac{1}{2}G^i_jG^k\right)$$

кинетич. член для фермионов

$$-\frac{i}{2k^2}G^i_j\bar{\chi}_i(1+\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\chi^j + \text{к.с.}\Big\}$$

– сумма слагаемых, квадратичных по фермионным полям, которые содержат производные.

(λ^A здесь в $\sqrt{2}$ раза отличается от того, которое было в теориях с глобальной суперсимметрией)

$\mathcal{L}_{\text{ферм}^2}$ – сумма остальных слагаемых, квадратичных по фермионным полям

$\mathcal{L}_{\text{ферм}^4}$ – сумма слагаемых четвёртого порядка по фермионным полям

Приведём явное выражение для слагаемых,
квадратичных по фермионным полям:

масса гравитино

$$\mathcal{L}_{\text{ферм}^2} = \sqrt{-g}\,\Big\{ -\frac{1}{4k} e^{-G/2}\,\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu}(1-\gamma_5)\psi_\nu$$

масса калибрино

$$-\frac{1}{8k} e^{-G/2} (G^{-1})_i^{\ j} f^i_{AB}\, G_j\, \bar{\lambda}^A (1+\gamma_5)\lambda^B + \frac{i}{2k^2} e^{-G/2} G^i \cdot$$

смешивание гравитино с фермионами

$$\cdot\,\bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (1+\gamma_5)\chi_i + \frac{1}{2k^3} e^{-G/2}\left(G^{ij} - G^i G^j - G^l (G^{-1})_l^{\ k} G_k^{ij}\right)$$

массы фермионов

смешивание гравитино и калибрино

$$\cdot\,\bar{\chi}_i (1+\gamma_5)\chi_j + \frac{e}{4k} G^i \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu (1+\gamma_5)\lambda^A (T^A)_i^{\ j}\varphi_j + \frac{ie}{k^2} G_i^{\ j}$$

юкава

$$\cdot\,\bar{\chi}^i (1-\gamma_5)\lambda^A (T^A)_j^{\ k}\varphi_k + \frac{ie}{4k^2}(\mathrm{Re} f)^{-1}_{AB}\, G^j f^i_{AC}\, \bar{\chi}_i (1+\gamma_5)\lambda^C \cdot$$

$$\cdot\,(T^B)_j^{\ k}\varphi_k + \text{к.с.} \Big\}$$

Выражение для $\mathcal{L}_{\text{ферм.}^4}$ существенно больше и здесь не приводится.

(Вообще говоря, все G, G_i и т.д. зависят от скалярных полей φ_i и φ^{*i}. Поэтому подписи соответствуют слагаемым, получающимся, когда эти поля заменяются на вакуумное средние. То же самое относится и к f_{AB}, f^i_{AB})

Приведённые выражения были получены после исключения вспомогательных полей из уравнений движения. При этом

$$D^A = (\mathrm{Re} f)^{-1}_{AB}\Big[-\frac{e}{2k^2}G^i (T^B)_i{}^j \varphi_j - \frac{e}{2k^2}G_i (T^B)_j{}^i \varphi^{*j}$$

$$+ \text{слагаемые, квадратичные по фермионам}\Big]$$

$$f_i = \frac{1}{k} e^{-G/2} (G^{-1})_i{}^j G_j + \text{слагаемые, квадратичные по фермионам.}$$

(f_i отличается знаком от курса суперсимметрии)

Преобразования суперсимметрии, относительно которых инвариантно действие N=1 SUGRA с материей, могут быть записаны в виде

$$\delta e_{a\mu} = -\frac{ik}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_a \psi_\mu$$

$$\delta\big[(1+\gamma_5)\psi_\mu\big] = \frac{1}{k}(1+\gamma_5)\nabla_\mu \varepsilon + \frac{1}{4k} G_i \mathcal{D}_\mu \varphi^{*i}(1+\gamma_5)\varepsilon$$

$$-\frac{1}{4k} G^i \mathcal{D}_\mu \varphi_i (1+\gamma_5)\varepsilon + \frac{i}{2k^2} e^{-G/2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu \varepsilon$$

+ слагаемые, квадратичные по фермионным полям

(ε в 2 раза отличается от курса суперсимметрии)

$$\delta\varphi_i = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\chi_i$$

$$\delta\big[(1+\gamma_5)\chi_i\big] = -\frac{1}{2k} e^{-G/2}(G^{-1})_i{}^j G_j (1+\gamma_5)\varepsilon$$

$-\frac{i}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\varepsilon\mathcal{D}_\mu\varphi_i$ + слагаемое, квадратичное по фермионным полям.

$$\delta A_\mu^A = \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda^A$$

(λ в $\sqrt{2}$ раза отличается от курса суперсимметрии)

$$\delta\left[(1+\gamma_5)\lambda^A\right] = \frac{-1}{4}\gamma^{\mu\nu}(1+\gamma_5)\varepsilon F_{\mu\nu}^A + \frac{ie}{2k^2}(1+\gamma_5)\varepsilon\cdot(\operatorname{Re} f)^{-1}_{AB}\cdot$$

$\cdot G^i(T^B)_i{}^j\varphi_j$ + слагаемое, квадратичное по фермионным полям.

§4. Спонтанное нарушение локальной суперсимметрии.

Глобальная суперсимметрия спонтанно нарушена в случае, если вспомогательные поля D^A или f_i приобретают вакуумное среднее. Эквивалентно в этом случае вакуумная энергия E_0 будет строго положительна.

В случае локальной суперсимметрии первый критерий по-прежнему будет верен. Действительно, если

$$f_{i0} = \frac{1}{k}e^{-G/2}(G^{-1})_i{}^j G_j\Big|_{\varphi_k\to\varphi_{k0}} \neq 0\text{, то}$$

$$\delta\left[(1+\gamma_5)\chi_i\right]\Big|_{\varphi\to\varphi_0} = -\frac{1}{2k}e^{-G/2}(G^{-1})_i{}^j G_j\Big|_{\varphi\to\varphi_0}(1+\gamma_5)\varepsilon \neq 0$$

и $\Rightarrow$ суперсимметрия спонтанно нарушена.

Аналогичным образом, если

$$D_0^A = (\mathrm{Re}\, f)^{-1}_{AB}\left[-\frac{e}{2k^2}G^i(T^B)_i{}^j\varphi_j - \frac{e}{2k^2}G_i(T^B)_j{}^i\varphi^{*j}\right]\Big|_{\varphi\to\varphi_0}$$

то

$$\delta\left[(1+\gamma_5)\lambda^A\right]\Big|_{\varphi\to\varphi_0} = +\frac{ie}{2k^2}(1+\gamma_5)\varepsilon\,(\mathrm{Re}\, f)^{-1}_{AB}\,G^i\cdot(T^B)_i{}^j\varphi_j\Big|_{\varphi\to\varphi_0} \neq 0$$

и вновь суперсимметрия будет нарушена.

При этом в случае спонтанного нарушения локальной суперсимметрии в квадратичной части лагранжиана появляются слагаемые

$$\frac{i}{2k^2}e^{-G/2}G^i\Big|_{\varphi\to\varphi_0}\cdot\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu(1+\gamma_5)\chi_i + \text{к.с.}$$

или

$$+\frac{e}{4k}G^i\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu(1+\gamma_5)\lambda^A(T^A)_i{}^j\varphi_j + \text{к.с.},$$

которые приводят к смешиванию грави-
тино с фермионами. Это часто называют
„супер-хиггсовским эффектом" по аналогии с
возникновением смешивания калибровочного
бозона и голдстоуновского скаляра при обыч-
ном механизме Хиггса, $\sim A_\mu \partial_\mu S \cdot v$.

Масса гравитино получается из слагаемого

$$-\frac{1}{4k} e^{-G/2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu}(1-\gamma_5)\psi_\nu + \text{к.с.} = -\frac{1}{2k} e^{-G/2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu$$

и оказывается равной

$$\boxed{m_{3/2} = \frac{1}{k} e^{-G/2}\Big|_{\varphi\to\varphi_0}}$$

Вычислим теперь, чему будет равна вакуум-
ная энергия (космологическая постоянная)
Соответствующие слагаемые на стр. 150 имеют
вид

$$\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{k^4} e^{-G}\left(3 + G_i (G^{-1})_j{}^i G^j\right) - \frac{e^2}{2k^4}(\operatorname{Re} f)^{-1}_{AB} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left(G^i (T^A)_i{}^j \varphi_j\right)\left(G_k (T^B)_l{}^k \varphi^{*l}\right)\right\}$$

Предположим для простоты, что

$$G^i (T^A)_i{}^j \varphi_j \Big|_{\varphi\to\varphi_0} = 0 \quad \text{и} \Rightarrow D_0^A = 0.$$

Тогда в вакуумном состоянии рассматриваемые слагаемые дадут

$$\sqrt{-g}\,\frac{1}{k^4}\, e^{-G}\left(3 + G_i (G^{-1})_j{}^i G^j\right)\Big|_{\varphi\to\varphi_0}.$$

Стандартный кинетический член для скалярных полей получается, если

$$\boxed{G_i{}^j = -k^2 \delta_i^j}$$

т.к. в этом случае (см. стр. 150)

$$-\frac{1}{k^2} G_i{}^j \mathcal{D}_\mu \varphi_j \mathcal{D}^\mu \varphi^{*i} = \mathcal{D}_\mu \varphi_i \mathcal{D}^\mu \varphi^{*i}.$$

Тогда космологическая постоянная определяется слагаемым

$$\sqrt{-g}\,\frac{1}{k^4}\, e^{-G}\left(3 - \frac{1}{k^2} G_i G^i\right)$$

которое не является знакоопределённым. Это существенное отличие теорий с локальной суперсимметрией от теорий с глобальной суперсимметрией.

Космологическая постоянная является очень малой величиной,

$$m_\Lambda c^2 \equiv \left(\frac{\hbar^3 \Lambda}{G \cdot c}\right)^{1/4} \cdot c^2 \simeq 5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$$

а соответствующее слагаемое в действии пропорционально

$$m_\Lambda^4 \int d^4x \sqrt{-g}\,.$$

Поэтому можно считать эту величину приблизительно равной 0. Это может быть достигнуто, если

$$G_i G^i \Big|_{\varphi \to \varphi_0} = 3k^2$$

Тогда

$$f_{i0} = \frac{1}{k} e^{-G/2} (G^{-1})_i{}^j G_j \Big|_{\varphi \to \varphi_0} \sim \frac{1}{k} e^{-G/2} \frac{1}{k^2} k \Big|_{\varphi \to \varphi_0}$$

$$= \frac{1}{k^2} e^{-G/2} \Big|_{\varphi \to \varphi_0}$$ – характерный масштаб нарушения суперсимметрии, который мы будем обозначать буквой μ^2, т.к. $[f_i] = m^2$.

Тогда

$$\mu^2 \sim \frac{1}{k^2} e^{-G/2} \Big|_{\varphi \to \varphi_0} = \frac{1}{k} m_{3/2}$$

т.о. по порядку величины масштаб нарушения суперсимметрии будет равен

$$\mu \sim \sqrt{M_{PL} \cdot m_{3/2}}$$

Эту величину можно оценить с помощью аналога формулы $Str\, P_\mu^2 = 0$ (в случае глобальной суперсимметрии). Теперь аналогичное равенство имеет вид

$$\boxed{Str\, P_\mu^2 = 2(n-1)\, m_{3/2}^2}$$

где $n = \delta_i^i$ – число киральных суперполей материи. т.о.

$$\sum_{Б} n_Б m_Б^2 - \sum_{Ф} n_Ф m_Ф^2 = 2(n-1)\, m_{3/2}^2$$

– видно, что (как и должно быть) бозонные суперпартнёры суммарно тяжелее фермионных без учёта гравитино. Поэтому масса гравитино порядка масс суперпартнёров, т.е. $10^3 - 10^5$ ГэВ.

$m_{3/2} \sim 10^3 - 10^5$ ГэВ.

$$\Rightarrow \quad \mu \sim \sqrt{M_{PL}\, m_{3/2}} \sim 10^{11} - 10^{12}\ \text{ГэВ}$$

т.о. в теории возникает некоторый проме-жуточный масштаб, на котором нарушается суперсимметрия.

§5. Нарушение суперсимметрии с помощью супергравитации в реалистичных моделях.

Основные идеи.

В реалистичных моделях типа МССМ или ТВО скалярные поля имеют стандартный кинетический член $\mathcal{D}_\mu \varphi^{*i} \mathcal{D}_\mu \varphi_i$, а космологическая постоянная фактически равна 0. Поэтому

$$G_i^{\ j} = -k^2 \delta_i^{\ j}$$

$$G_i G^i \Big|_{\varphi \to \varphi_0} = 3k^2$$

Второе условие накладывается руками. Фактически получается некоторая точная подстройка космологической постоянной. Объяснение её малой (но всё же ненулевой) величины – одна из важнейших задач современной физики.

Из условия

$$-k^2\delta_i^j = G_i^j \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial\varphi_j\partial\varphi^{*i}}$$ получаем, что

$$\boxed{G = -k^2\varphi^{*i}\varphi_i - \ln\left(k^6|g(\varphi_i)|^2\right)} \qquad (*)$$

поскольку $g(\varphi_i)$ - аналитическая функция и

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi_j\partial\varphi^{*i}} = -k^2\delta_i^j - \frac{\partial^2}{\partial\varphi_j\partial\varphi^{*i}}\left[\underbrace{\ln(k^3 g)}_{0} + \underbrace{\ln(k^3 g^*)}_{0}\right]$$

Вычислим теперь скалярный потенциал, который получается из функции G, даваемой формулой $(*)$ (для простоты без D-вклада)

$$V(\varphi,\varphi^*) = -\frac{1}{k^4}e^{-G}\left(3 + G_i(G^{-1})_j{}^i G^j\right)$$

$$G_i = \frac{\partial G}{\partial\varphi^{*i}} = -k^2\varphi_i - \frac{1}{g^*}\cdot\frac{\partial g^*}{\partial\varphi^{*i}}$$

$$(G^{-1})_j{}^i = -\frac{1}{k^2}\delta_j^i$$

$\Rightarrow$

$$V(\varphi,\varphi^*) = -\frac{1}{k^4}\exp\left(k^2\varphi^{*i}\varphi_i\right)\cdot k^6|g|^2\cdot\Big(3 -$$

$$-\frac{1}{k^2}\left|k^2\varphi^{*i} + \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial\varphi_i}\right|^2\Big) =$$

$$= \exp(k^2\varphi^{*i}\varphi_i)\left\{\left|\frac{\partial g}{\partial\varphi_i} + k^2\varphi^{*i} g\right|^2 - 3k^2|g|^2\right\}$$

При этом суперсимметрия нарушена, если

$$0 \neq G^i\Big|_{\varphi\to\varphi_0} = -k^2\varphi_0^{*i} - \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial\varphi_i}\Big|_{\varphi\to\varphi_0}$$

т.е.

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi_i} + k^2 g\varphi^{*i}\Big|_{\varphi\to\varphi_0} \neq 0.$$

Для равенства 0 космологической постоянной необходимо выполнение условия

$$\left|\frac{\partial g}{\partial\varphi_i} + k^2\varphi^{*i} g\right|^2 - 3k^2|g|^2\Big|_{\varphi\to\varphi_0} = 0$$

Анализ причин его справедливости необходимо проводить отдельно уже из других соображений, которые в настоящее время неизвестны. Заметим однако, что если $n=1$ и выбрать G в несколько ином виде, а именно

$$G = +3\ln[k\varphi + k\varphi^*],$$

то рассматриваемая часть скалярного потен-

циала будет автоматически равна 0.
Действительно, тогда

$$G^i \rightarrow \frac{\partial G}{\partial \varphi} = + \frac{3}{\varphi + \varphi^*}$$

$$G_i \rightarrow + \frac{3}{\varphi + \varphi^*}$$

$$G_i{}^j = - \frac{3}{(\varphi + \varphi^*)^2} \qquad (G^{-1})_i{}^j = - \frac{(\varphi + \varphi^*)^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad V(\varphi, \varphi^*) = - \frac{1}{k^4} e^{-G} \left(3 + G_i (G^{-1})_j{}^i G^j\right) =$$

$$= - \frac{1}{k^4} k^3 (\varphi + \varphi^*)^3 \left(3 - \frac{9}{(\varphi + \varphi^*)^2} \cdot \frac{(\varphi + \varphi^*)^2}{3}\right) = 0 .$$

(Это т.к. „no-scale" супергравитация, которую, однако, мы рассматривать не будем)

Вернёмся к функции G, даваемой формулой (*) на стр. 161.

Разделим киральное суперполе материи на 2 части:

1. Скрытый сектор. В нём будет происходить нарушение суперсимметрии.

2. Наблюдаемый сектор. (Поля МССМ или ТВО). В него нарушение суперсимметрии будет передаваться из скрытого с помощью супергравитации.

§ 6. Нарушение суперсимметрии в скрытом секторе. Модель Полони.

Как именно нарушается суперсимметрия в скрытом секторе, нам неизвестно. Однако, можно построить некоторую „игрушечную" модель, которая иллюстрирует, как это может происходить. Она называется моделью Полони.

В модели Полони $n=1$ (одно киральное суперполе) с суперпотенциалом

$$g(\varphi) = \mu^2(\varphi+\beta)$$

где μ и β - некоторые постоянные, имеющие размерность массы.

Соответствующий скалярный потенциал, который соответствует

$$G = -k^2\varphi^*\varphi - \ln\left(k^6|g(\varphi)|^2\right),$$

принимает вид (см. стр. 162)

$$V(\varphi,\varphi^*) = \exp\left(k^2\varphi^*\varphi\right)\left\{\left|\frac{\partial g}{\partial\varphi} + k^2\varphi^* g\right|^2 - 3k^2|g|^2\right\}$$

$$= \exp\left(k^2\varphi^*\varphi\right)|\mu|^4\cdot\left\{\left|1 + k^2\varphi^*(\varphi+\beta)\right|^2 - 3k^2|\varphi+\beta|^2\right\}$$

Постоянную β мы тоже подстраиваем таким образом, чтобы космологическая постоянная была бы равна 0. (Заведомо неестественная процедура, которая не должна появляться в хорошей модели). Поэтому в вакууме должны выполняться уравнения

$$\begin{cases} V(\varphi_0, \varphi_0^*) = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0, \varphi_0^*) = 0 \end{cases}$$

Первое из них даёт

$$0 = \left|1 + k^2 \varphi^*(\varphi + \beta)\right|^2 - 3k^2 |\varphi + \beta|^2$$

а второе (при учёте первого) даёт

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big\{ \big(1 + k^2\varphi^*(\varphi+\beta)\big)\big(1 + k^2\varphi(\varphi^*+\beta)\big) -$$

$$- 3k^2(\varphi+\beta)(\varphi^*+\beta)\Big\} = k^2\varphi^*\big(1 + k^2\varphi(\varphi^*+\beta)\big)$$

$$+ k^2(\varphi^*+\beta)\big(1 + k^2\varphi^*(\varphi+\beta)\big) - 3k^2(\varphi^*+\beta)$$

Будем предполагать, что вакуумное среднее является вещественным. Тогда

$$\begin{cases} 1 + k^2\varphi(\varphi+\beta) = \pm\sqrt{3}\,k(\varphi+\beta) \\ (2\varphi+\beta)\cdot\left(1+k^2\varphi(\varphi+\beta)\right) = 3(\varphi+\beta) \end{cases}$$

Делим второе уравнение на первое:

$$(2\varphi+\beta) = \pm\sqrt{3}\,k^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pm\sqrt{3}\,k^{-1}-\beta}{2}$$

Подставляем это в первое уравнение:

$$1 + k^2\left(\frac{\pm\sqrt{3}\,k^{-1}-\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pm\sqrt{3}\,k^{-1}+\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{3}\,k\left(\frac{\pm\sqrt{3}\,k^{-1}+\beta}{2}\right)$$

$$1 + \frac{k^2}{4}\left(\frac{3}{k^2}-\beta^2\right) = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,k\beta}{2}$$

$$\frac{k^2\beta^2}{4} \pm \frac{\sqrt{3}\,k\beta}{2} + \frac{3}{2} - 1 - \frac{3}{4} = 0$$

$$k^2\beta^2 \pm 2\sqrt{3}\,k\beta - 1 = 0$$

$$D = 12k^2 + 4k^2 = 16k^2$$

$$\beta = \frac{\mp 2\sqrt{3}\,k \pm 4k}{2k^2} = \left(\mp\sqrt{3} \pm 2\right)\frac{1}{k}$$

знаки не согласованы

Это соответствует

$$\varphi_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2k} - \frac{\beta}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2k} - \frac{1}{2k}\left(\mp\sqrt{3} \pm 2\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\pm\sqrt{3} \mp 1\right)$$

При этом можно показать (например, построив график в MAPLE), что минимумам соответствуют

$$\boxed{\beta = \pm\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{1}{k} \qquad \varphi_0 = \pm\frac{1}{k}\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

а 2 другие решения будут максимами.

Масштаб нарушения суперсимметрии при этом будет

$$f_{i0} = \frac{1}{k} e^{-G/2} (G^{-1})_i^{\ j} G_j \Big|_{\varphi\to\varphi_0} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow f_0 = \frac{1}{k}\exp\left(\frac{k^2}{2}|\varphi_0|^2 + \frac{1}{2}\ln\left(k^6|g|^2\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cdot$$

$$\left(-k^2\varphi - \frac{1}{g^*}\frac{\partial g^*}{\partial\varphi^*}\right)\Big|_{\varphi\to\varphi_0} = \frac{1}{k}\cdot k^3|g|\left(\varphi + \frac{1}{k^2 g^*}\frac{\partial g^*}{\partial\varphi^*}\right)\Big|_{\varphi\to\varphi_0}$$

$$\cdot\exp\left(\frac{k^2}{2}|\varphi_0|^2\right) = |\mu|^2|\varphi_0+\beta|\left(k^2\varphi_0 + \frac{1}{\varphi_0^*+\beta}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(\frac{k^2}{2}|\varphi_0|^2\right)$$

Подставляя $\varphi_0 = +\frac{1}{k}(\sqrt{3}-1)$ и $\beta = +\frac{1}{k}(2-\sqrt{3})$,

получаем, что

$$f_0 = |\mu|^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2\right)\cdot\left(1+(\sqrt{3}-1)\left(\cancel{\sqrt{3}}-1+2-\cancel{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= |\mu|^2 \exp(2-\sqrt{3})\,\sqrt{3} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ суперсимметрия спонтанно нарушена, и масштаб нарушения суперсимметрии равен параметру потенциала μ.

Масса гравитино в модели Полони оказывается равной

$$m_{3/2} = \frac{1}{k} e^{-G/2}\Big|_{\varphi\to\varphi_0} = \frac{1}{k}\exp\left(\frac{k^2}{2}|\varphi_0|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left(k^6|g|^2\right)\right) = \frac{1}{k}k^3|g|\exp\left(\frac{k^2}{2}|\varphi_0|^2\right) =$$

$$= k^2|\mu|^2|\varphi_0+\beta|\exp\left(\frac{k^2}{2}|\varphi_0|^2\right) =$$

$$= k^2|\mu|^2 \cdot \frac{1}{k}\left(\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}\right)\exp\left(2-\sqrt{3}\right) =$$

$$= k|\mu|^2\exp\left(2-\sqrt{3}\right) \sim \frac{\mu^2}{M_{Pl}}$$

§7. Появление мягких слагаемых в результате взаимодействия наблюдаемого и скрытого секторов.

Предположим теперь, что в теории есть как скрытый, так и наблюдаемый сектора, причём нарушение суперсимметрии происходит в скрытом секторе.

Скалярные поля наблюдаемого сектора будем обозначать через φ_a, а скалярные поля скрытого сектора – через $\tilde{\varphi}_\alpha$. т.о.

$$\varphi_i = \{\underbrace{\varphi_a}_{\text{наблюдаемый сектор}}, \underbrace{\tilde{\varphi}_\alpha}_{\text{скрытый сектор}}\}$$

При этом суперпотенциал представляем в виде

$$g(\varphi_i) \equiv g_1(\varphi_a) + g_2(\tilde{\varphi}_\alpha)$$

а функция G, как обычно, даётся формулой

$$G = -k^2 \varphi^{*i}\varphi_i - \ln\left(k^6 |g(\varphi_i)|^2\right) =$$

$$= -k^2\left(\varphi^{*a}\varphi_a + \tilde{\varphi}^{*\alpha}\tilde{\varphi}_\alpha\right) - \ln\left[k^6 |g_1(\varphi_a) + g_2(\tilde{\varphi}_\alpha)|^2\right]$$

Далее мы будем использовать обозначение

$$\mathcal{M} \equiv \frac{1}{k} \sim \mathcal{M}_{PL} \sim 10^{19}\ \text{ГэВ}.$$

По аналогии с моделью Полони мы будем предполагать, что в вакуумном состоянии

$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{\varphi}_{\alpha 0} \equiv \frac{1}{k} b_\alpha = \mathcal{M} b_\alpha \\ &g_2 \Big|_{\tilde{\varphi} \to \tilde{\varphi}_0} \equiv m \mathcal{M}^2 \\ &\frac{\partial g_2}{\partial \tilde{\varphi}_\alpha}\Big|_{\tilde{\varphi} \to \tilde{\varphi}_0} \equiv a^{*\alpha} m \mathcal{M} \end{aligned}}$$

Действительно, для модели Полони ($\varphi \to \tilde{\varphi}$)

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{k}(\sqrt{3} - 1) \quad \Rightarrow \quad \underline{b = \sqrt{3} - 1}$$

$$g_2(\tilde{\varphi}) = \mu^2(\tilde{\varphi} + \beta) \quad \Rightarrow$$

$$g_2(\tilde{\varphi}_0) = \mu^2(\tilde{\varphi}_0 + \beta) = \frac{\mu^2}{k}\left(\sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3}\right) = \mu^2 \mathcal{M}$$

$\Rightarrow \quad \underline{m = \frac{\mu^2}{\mathcal{M}}}$ – масштаб порядка массы гравитино.

$$\frac{\partial g_2}{\partial \tilde{\varphi}_\alpha} \longrightarrow \frac{\partial g_2}{\partial \tilde{\varphi}} = \mu^2 = m\mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 1}$$

Вернёмся теперь к случаю, когда потенциал скрытого сектора неизвестен. Масса гравитино будет тогда даваться формулой

$$m_{3/2} = \frac{1}{k} e^{-G/2}\Big|_{\tilde\varphi\to\tilde\varphi_0} = \frac{1}{k}\exp\left(\frac{k^2}{2}\tilde\varphi^{*\alpha}\tilde\varphi_\alpha\right)\cdot k^3|g_2|\Big|_{\tilde\varphi\to\tilde\varphi_0}$$

(где предполагается, что вакуумные средние полей наблюдаемого сектора малы и $\Rightarrow$ они не влияют на массу гравитино).

$$m_{3/2} = \frac{1}{\cancel{M}^2}\exp\left(\frac{1}{2}|b_\alpha|^2\right)\cdot m\cancel{M}^2 = m\exp\left(\frac{1}{2}|b_\alpha|^2\right)$$

т.о. и в общем случае параметр m по порядку величины равен массе гравитино.

Скалярный потенциал рассматриваемой модели записывается в виде

стр. 162

$$V(\varphi,\tilde\varphi_0) = -\frac{1}{k^4} e^{-G}\left(3 + G_i (G^{-1})_j^{\ i} G^j\right) =$$

$$= \exp\left(k^2\varphi^{*i}\varphi_i\right)\left\{-3k^2|g|^2 + \left|\frac{\partial g}{\partial\varphi_i} + k^2\varphi^{*i}g\right|^2\right\}\Big|_{\tilde\varphi\to\tilde\varphi_0}$$

на больших масштабах поля скрытого сектора заменяются на их вакуумные средние.

Вновь в экспоненте пренебрегаем вакуумными средними полей наблюдаемого сектора. Тогда получаем, что

$$V(\varphi, \tilde{\varphi}_0) = \exp\left(k^2 \tilde{\varphi}^{*\alpha}\tilde{\varphi}_\alpha + k^2 \varphi^{*a}\varphi_a\right)\cdot\left\{-3k^2|g_1+g_2|^2\right.$$

$$\left.+\left|\frac{\partial g_1}{\partial \varphi_a} + k^2\varphi^{*a}(g_1+g_2)\right|^2 + \left|\frac{\partial g_2}{\partial \tilde{\varphi}_\alpha} + k^2\tilde{\varphi}^{*\alpha}(g_1+g_2)\right|^2\right\}_{\tilde{\varphi}\to\tilde{\varphi}_0}$$

$$= \exp\left(|b_\alpha|^2\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{M^2}\varphi^{*a}\varphi_a\right)\cdot\left\{-\frac{3}{M^2}|g_1+mM^2|^2\right.$$

$$+\left|\frac{\partial g_1}{\partial\varphi_a} + \varphi^{*a}\frac{1}{M^2}(g_1+mM^2)\right|^2 + \left|a^{*\alpha}mM + \frac{1}{M^2}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot M b^{*\alpha}(g_1+mM^2)\right|^2\right\}$$

При этом величина $M \sim 10^{19}$ ГэВ очень велика. Поэтому слагаемые, подавленные степенями M^{-1}, мы будем отбрасывать.

В ведущем порядке рассматриваемое выражение пропорционально M^2 и записывается в виде

$$\exp\left(\frac{1}{2}|b_\alpha|^2\right)\cdot\left\{-\frac{3}{M^2}\cdot m^2M^4+m^2M^2|a^{*\alpha}+b^{*\alpha}|^2\right\}$$

$$=\underbrace{m^2M^2}_{\sim(10^{11}-10^{12}\,\text{ГэВ})^4}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}|b_\alpha|^2\right)\left\{|a_\alpha+b_\alpha|^2-3\right\}$$

Это слагаемое даёт космологическую постоянную, которая должна быть $\sim(5\cdot10^{-3}\,\text{эВ})^4$ (Речь идёт о величине $1/G$). Поэтому с очень высокой точностью параметры a_α и b_α должны удовлетворять условию

$$\boxed{|a_\alpha+b_\alpha|^2=3}$$

причины которого не известны. Здесь получается неестественная точная подстройка. Это говорит о неполноте модели и не понимании причин малости космологической постоянной.

Благодаря условию $|a_\alpha+b_\alpha|^2=3$ можно пренебречь слагаемыми $\frac{1}{M^2}|\varphi_a|^2$ в экспоненте.

Отбрасывая слагаемые, подавленные степенями M^{-1}, мы получаем, что выражение на стр. 172 даёт

$|a_\alpha + b_\alpha|^2 = 3$

$$V(\varphi, \tilde{\varphi}_0) \Rrightarrow \exp\left(|b_\alpha|^2\right) \cdot \Big\{ -3m\left(g_1 + g_1^*\right)$$

$$+ \left|\frac{\partial g_1}{\partial \varphi_a}\right|^2 + m\left(\frac{\partial g_1}{\partial \varphi_a}\varphi_a + \frac{\partial g_1^*}{\partial \varphi^{*a}}\varphi^{*a}\right) + m^2|\varphi_a|^2$$

$$+ m g_1 (a_\alpha + b_\alpha) b^{*\alpha} + m g_1^* (a^{*\alpha} + b^{*\alpha}) b_\alpha \Big\}$$

Определим величины

$$\boxed{\begin{aligned} A &\equiv b^{*\alpha}(a_\alpha + b_\alpha) \\ g_0(\varphi_a) &\equiv \exp\left(\tfrac{1}{2}|b_\alpha|^2\right) g_1(\varphi_a) \end{aligned}}$$

и вспомним, что $m_{3/2} = m \exp\left(\frac{1}{2}|b_\alpha|^2\right)$.

Тогда приведённое выше выражение можно переписать в виде

$$\boxed{\begin{aligned} V(\varphi, \tilde{\varphi}_0) \Rrightarrow\ & m_{3/2}^2 |\varphi_a|^2 + \left|\frac{\partial g_0}{\partial \varphi_a}\right|^2 + m_{3/2}\Big(\frac{\partial g_0}{\partial \varphi_a}\varphi_a \\ & + (A-3) g_0 + \text{к.с.}\Big) \end{aligned}}$$

одинаковая для всех полей мягкая масса скаляров.

обычное слагаемое, получаемое при исключении F_a.

в перенормир. теориях квадратичные и кубичные мягкие слагаемые.

Т.о. мы видим, что, благодаря взаимодействию скрытого и наблюдаемого секторов посредством супергравитации, получаются слагаемые, мягко нарушающие суперсимметрию.

Их вид определяется двумя параметрами $m_{3/2}$ и A. Поэтому предсказания такой теории легко проверить, например, об одинаковой мягкой массе скалярных суперпартнёров. (Конечно, речь идёт о массовых слагаемых, а не физической массе частиц, см. соответствующее обсуждение на стр. 80 и 81)

Заметим, что калибровочный сектор мы здесь не рассматривали, но это, конечно, может быть сделано.