Суперсимметрия.

1. Что такое SUSY.
2. История открытия SUSY.
3. Улучшение УФ поведения в SUSY теориях.
4. Проблема калибровочной иерархии. Квадратичные поправки к массе хиггсовского бозона.
5. Косвенные экспериментальные доказательства
   а) Константы связи
   б) Распад протона
6. Проблема реалистичного нарушения SUSY.

Глава I. Некоторые сведения о спинорах и γ-матрицах

Сигнатура $(+---)$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\cdot 1_4 \qquad (\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

$$\gamma^{ij} = -i\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \qquad \gamma^{0i} = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

Матрица γ_5 определяется как

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\gamma_5)^2 = 1; \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_5) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}; \quad \varepsilon^{0123} = +1.$$

Матрица зарядового сопряжения

$$C \equiv i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = C^T = -C; \quad C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$$

Базис в пространстве матриц 4x4 можно выбрать в виде

$$1; \ \gamma_5; \ \gamma^\mu; \ \gamma^\mu\gamma_5; \ \gamma^{\mu\nu}$$

$$1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$$

Условие полноты – т.н. тождество Фирца:

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

$$\delta_a{}^b\delta_c{}^d + (\gamma_5)_a{}^b(\gamma_5)_c{}^d + (\gamma^\mu)_a{}^b(\gamma_\mu)_c{}^d - (\gamma^\mu\gamma_5)_a{}^b(\gamma_\mu\gamma_5)_c{}^d$$

$$-\frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu})_a{}^b(\gamma_{\mu\nu})_c{}^d = 4\delta_a{}^d\delta_c{}^b$$

Проверяется свёртками с $\delta_d{}^c$; $(\gamma_5)_d{}^c$ и т.д.
при фиксированных a и b.

<u>Дираковский спинор</u> — 4-х компонентный столбец

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

т.к. если $A_\mu \to \exp(\alpha)_\mu{}^\nu A_\nu$, то

$$\psi \to \exp\left(\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}\right)\psi$$

Компоненты ψ_a у дираковского спинора комплексные — т.к. будет 8 Re степеней свободы.

Они антикоммутируют, $\psi_a\psi_b + \psi_b\psi_a = 0$
(в классической теории поля)

<u>Дираковски сопряжённый спинор</u> $\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0$.

Дираковский спинор - аналог комплексного скалярного поля, а $\bar{\psi}$ - комплексно сопряжённого скалярного поля.

Что является аналогом Re скалярного поля?

<u>Майорановский спинор</u>

$\bar{\psi} = \psi^T C$ — не противоречит з-ну Лоренц-преобразования.

$$\psi^T C = (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_2, -\psi_1, -\psi_4, \psi_3)$$

$$\psi^+\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_3^*, \psi_4^*, \psi_1^*, \psi_2^*)$$

$\Longrightarrow$

$\psi_2 = \psi_3^*$; $\psi_1 = -\psi_4^*$, т.е. майорановский спинор в явном виде записывается как

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

Очевидно, что он имеет только 4 Re степени свободы. В частности, можно выбрать такое представление для γ-матриц, в котором компоненты майорановского спинора $\in$ Re.

Свойства майорановских спиноров

$$\bar\psi\chi = \psi^T C\chi = (\psi^T C\chi)^T = -\chi^T C^T\psi = \chi^T C\psi = \bar\chi\psi$$

$$\bar\psi\gamma_5\chi = -\chi^T (C\gamma_5)^T\psi = \bar\chi\gamma_5\psi$$

$$\bar\psi\gamma^\mu\chi = -\chi^T (C\gamma^\mu)^T\psi = -\chi^T\gamma^{\mu T} C^{-1}\psi = \chi^T C C\gamma^{\mu T} C^{-1}\psi = $$
$$= -\bar\chi\gamma^\mu\psi$$

$$\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\chi = \bar\chi\gamma^\mu\gamma_5\psi$$

$$\bar\psi\gamma^{\mu\nu}\chi = -\bar\chi\gamma^{\mu\nu}\psi$$

Если $\psi = \chi$ — майорановские спиноры, то

$\bar\psi \gamma^\mu \psi = 0$; $\bar\psi \gamma^{\mu\nu} \psi = 0$ и нетривиальны только

величины $\bar\psi\psi$; $\bar\psi\gamma_5\psi$; $\bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$

$$1 + 1 + 4 = 6 = C_4^2$$

$\psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a$

ψ_a – 4 компоненты – есть только ψ

$\psi_a\psi_b\psi_c$ – $C_4^3 = 4$ независимых комбинации – $\psi(\bar\psi\psi)$

$\psi_a\psi_b\psi_c\psi_d$ – $C_4^4 = 1$ – есть только комбинация $(\bar\psi\psi)^2$.

Любую билинейную комбинацию можно выразить через базисные с помощью тождества Фирца:

$$\delta_a{}^b \delta_c{}^d + (\gamma_5)_a{}^b (\gamma_5)_c{}^d + (\gamma^\mu)_a{}^b (\gamma^\mu)_c{}^d - (\gamma^\mu\gamma_5)_a{}^b (\gamma_\mu\gamma_5)_c{}^d$$

$$-\frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu})_a{}^b (\gamma_{\mu\nu})_c{}^d = 4\delta_a{}^d \delta_c{}^b \quad \Big|\ \psi_d \bar\psi^c \cdot \frac{1}{4}$$

$$\psi_a \bar\psi^b = -\frac{1}{4}\delta_a{}^b \bar\psi\psi - \frac{1}{4}(\gamma_5)_a{}^b \bar\psi\gamma_5\psi - \cancel{\frac{1}{4}(\gamma^\mu)_a{}^b \bar\psi\gamma_\mu\psi} \to 0$$

$$+\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma_5)_a{}^b \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi + \cancel{\frac{1}{8}(\gamma^{\mu\nu})_a{}^b \bar\psi\gamma_{\mu\nu}\psi} \to 0$$

$$(\bar{\psi}\chi)^+ = (\psi^+\gamma^0\chi)^+ = \chi^+\gamma^{0+}\psi = \chi^+\gamma^0\psi = \bar{\chi}\psi \quad = \bar{\psi}\chi$$

$$(\bar{\psi}\gamma_5\chi)^+ = (\psi^+\gamma^0\gamma_5\chi)^+ = \chi^+\gamma_5\gamma^0\psi = -\bar{\chi}\gamma_5\psi \quad = -\bar{\psi}\gamma_5\chi$$

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\chi)^+ = (\psi^+\gamma^0\gamma^\mu\chi)^+ = \chi^+\gamma^{\mu+}\gamma^0\psi = \bar{\chi}\gamma^\mu\psi \quad = -\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$$

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi)^+ = \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi$$

$$(\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi)^+ = -\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu}\psi \quad = \bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi$$

произвольные спиноры

майорановские спиноры

$\Longrightarrow$ если ψ и χ - майорановские, то

$\bar{\psi}\chi$; $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi$; $\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi$ - Re величины

$\bar{\psi}\gamma_5\chi$; $\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$ - чисто мнимые.

Заметим, что

$$\left[i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right]^+ = -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \equiv i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

интегрирование по частям

- отсюда видно, что не нужно менять знак при комплексном сопряжении, $(\psi_a\psi_b)^* \equiv \psi_b^*\psi_a^*$.

Вейлевские (киральные) спиноры

– СВ матрицы γ_5. Поскольку $(\gamma_5)^2 = 1$, то если

$\gamma_5 \psi = \lambda \psi$ и $\Rightarrow \lambda^2 = 1$

Поэтому $\lambda = \pm 1$.

$\lambda = +1$ – правый спинор ψ_R

$\lambda = -1$ – левый спинор ψ_L

Очевидно, что т.к. в наших обозначениях

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$$

– очевидно $\exists$ взаимнооднозначное соответствие между левыми (правыми) спинорами и майорановскими:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_L \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = \psi_M$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_M$$

Запишем тождество Фирца для вейлевских спиноров:

$$\psi_a \bar{\psi}^b = -\frac{1}{4}\delta_a^{\ b}\,\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(\gamma_5)_a^{\ b}\,\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma_5)_a^{\ b}\,\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$$

Умножим это равенство слева и справа на $(1+\gamma_5)$:

$$(1+\gamma_5)\psi_a \cdot \bar{\psi}(1+\gamma_5)^b = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5)_a^{\ b}\cdot\bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi$$

Аналогичным образом получаем, что

$$(1-\gamma_5)\psi_a \cdot \bar{\psi}(1-\gamma_5)^b = -\frac{1}{2}(1-\gamma_5)_a^{\ b}\,\bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi$$

Глава II. Алгебра SUSY и её представления.

§1. Алгебра SUSY.

– Z_2 градуированное расширение алгебры Пуанкаре

$$P_\mu = i\partial_\mu \ ; \quad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu$$

$$\begin{cases} [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\mu\alpha}P_\beta - \eta_{\mu\beta}P_\alpha) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta}) \end{cases}$$

– алгебра Пуанкаре

Добавим к генераторам P_μ, $M_{\alpha\beta}$ ещё N штук майорановских спиноров Q_i, $i=\overline{1,N}$

Тогда в простейшем случае

$$[Q_i, P_\mu] = 0$$

$$[Q_{ia}, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2}(\gamma_{\mu\nu} Q_i)_a$$

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu$$

— такие КС требуются, чтобы удовлетворялись Z_2-градуированные тождества Якоби.

Заметим, что матрица $(\gamma^\mu C)$ симметрична, т.к.

$$C \,\Big|\, C^T \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$$

$$\gamma^\mu C = -C\gamma^{\mu T} = C^T \gamma^{\mu T} = (\gamma^\mu C)^T$$

Если $N=1$, то суперсимметрия называется нерасширеной, а если $N>1$ — то расширеной.

Оператор P_μ^2 коммутирует со всеми генераторами алгебры SUSY — т.н. оператор Казимира. Его СЗ есть m^2 $\Rightarrow$ представления алгебры SUSY делятся на а) безмассовые с $m^2=0$

б) массивные с $m^2 \neq 0$.
(>0)

§2. Безмассовые представления алгебры SUSY.

Пусть $P_\mu^2 = 0$. Тогда можно выбрать СО, в которой $p^\mu = (E, 0, 0, E)$

$$\left(P_\mu^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 = E^2 - E^2 = 0 \right)$$

Это означает, что вектор импульса направлен по оси z. В группе вращений эту СО сохраняют только вращения вокруг 3-ей оси, т.ч. состояния характеризуются спиральностью

$$\frac{1}{E}(\vec{P}\vec{J}) = \frac{1}{E} \cdot E\, M_{12} = M_{12} \quad , \text{ т.к.}$$

$$J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} M_{jk} \quad \text{и} \quad \Rightarrow \quad J_3 = M_{12}$$

Рассмотрим состояние с некоторой спиральностью λ (которая м.б. либо целой, либо полуцелой):

$$M_{12} |E, \lambda> = \lambda |E, \lambda>$$

Рассмотрим состояния $Q_{ia}|E, \lambda>$ и найдём их спиральность:

$$M_{12} Q_{ia} |E, \lambda> = [M_{12}, Q_{ia}] |E, \lambda> + Q_{ia} M_{12} |E, \lambda> =$$

$$= \lambda Q_{ia} |E, \lambda> - \frac{i}{2} (\gamma_{12} Q_i)_a |E, \lambda>$$

При этом

$$\gamma_{12} = -i\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad M_{12}\begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} |E,\lambda> = \begin{pmatrix} \lambda-1/2 & & & 0 \\ & \lambda+1/2 & & \\ & & \lambda-1/2 & \\ 0 & & & \lambda+1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} |E,\lambda>$$

Поэтому действие операторов Q_{i1} и Q_{i3} $\swarrow \lambda$ на $1/2$, а действие операторов Q_{i2} и Q_{i4} $\nearrow \lambda$ на $1/2$.

Кроме того, для безмассовых состояний

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}\cdot E\,(\gamma^0 C - \gamma^3 C)_{ab} = 4\delta_{ij} E\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Действительно,

$$(\gamma^0-\gamma^3)C = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\right]C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0&0 \\ 0&1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1&0 \\ 0&0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right)\cdot 2C =$$

$$= 2\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0&0 \\ 0&1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1&0 \\ 0&0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0&-1 \\ 1&0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0&1 \\ -1&0 \end{matrix} \end{array}\right) = -2\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \text{ - верно}$$

$\Longrightarrow$ единственным нетривиальным антикоммутатором будет $\{Q_{i2}, Q_{j3}\} = 4\delta_{ij} E$

При этом $-\hat{Q}_1^+ = \hat{Q}_4$ в силу майорановости.
Поэтому

$$0 = \langle E,\lambda | \{\hat{Q}_1^+, Q_1\} | E,\lambda \rangle = \langle E,\lambda | \hat{Q}_1^+ \hat{Q}_1 | E,\lambda \rangle$$

$$+ \langle E,\lambda | \hat{Q}_1 \hat{Q}_1^+ | E,\lambda \rangle \quad \text{и} \quad \Rightarrow$$

$$\hat{Q}_{i1} | E,\lambda \rangle = 0 \ ; \quad \hat{Q}_{i4} | E,\lambda \rangle = 0$$

Положим теперь

$$q_i \equiv \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_{i3} \qquad \swarrow \lambda \ \text{на} \ 1/2$$

$$q_i^+ \equiv \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_{i2} \qquad \nearrow \lambda \ \text{на} \ 1/2$$

$$\{q_i, q_j^+\} = \delta_{ij} \qquad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \{q_i^+, q_j^+\} = 0$$

– получилась алгебра Клиффорда.

Выберем состояние с максимальной спиральностью λ_0 : $|E,\lambda_0\rangle$. Тогда очевидно, что

$$q_i^+ | E,\lambda_0 \rangle = 0 \quad \forall i$$

Пусть $|E,\lambda_0\rangle$ – 1 состояние. Тогда

$$q_i | E,\lambda_0 \rangle = | E, \lambda_0 - 1/2, i \rangle \ - \ N \ \text{состояний}$$
$$\text{с} \ \lambda = \lambda_0 - 1/2$$

$q_i q_j |E, \lambda_0\rangle = |E, \lambda_0 - 1; [ij]\rangle$ — C_N^2 состояний со спиральностью $\lambda_0 - 1$

и т.д.

Последнее состояние

$q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_N} |E, \lambda_0\rangle = |E, \lambda_0 - N/2\rangle$ — 1 состояние

Действие ещё одного q_i всегда будет давать 0 в силу антикоммутационных соотношений.

Пусть λ_0 — целое — бозон. Тогда

$$n_{\text{Б}} = \sum_{\text{чётн. } k} C_N^k \qquad n_{\text{Ф}} = \sum_{\text{нечётн. } k} C_N^k$$

и $\Rightarrow$

$$n_{\text{Б}} - n_{\text{Ф}} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k = (1-1)^N = 0$$

Поэтому $n_{\text{Б}} = n_{\text{Ф}}$ — теорема о равенстве числа бозонных и фермионных степеней свободы.

$$n_{\text{Б}} + n_{\text{Ф}} = \sum_{k=0}^{N} C_N^k = (1+1)^N = 2^N$$

Поэтому $n_{\text{Б}} = n_{\text{Ф}} = 2^{N-1}$

Примеры:

1) $N = 1$; $\lambda_0 = 1/2$ CPT-сопряж. модель ВЗ

$$\begin{array}{c||c|c} \lambda & 0 & 1/2 \\ \hline n & 1 & 1 \end{array} \; + \; \begin{array}{c||c|c} \lambda & -1/2 & 0 \\ \hline n & 1 & 1 \end{array} \; = \; \begin{array}{c||c|c|c} \lambda & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline n & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

— модель Весса-Зумино

2) $N=1 \quad \lambda_0 = 1$

$$\begin{array}{c||c|c} \lambda & 1/2 & 1 \\ \hline n & 1 & 1 \end{array} + \begin{array}{c||c|c} \lambda & -1 & -1/2 \\ \hline n & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{c||c|c|c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$N=1$ SYM

3) $N=4 \quad \lambda_0 = 1$

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$ – $N=4$ SYM

4) $N=8 \quad \lambda_0 = 2$

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c|c|c|c} \lambda & -2 & -3/2 & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ \hline n & 1 & 8 & C_8^2 & C_8^3 & C_8^4 & C_8^3 & C_8^2 & 8 & 1 \end{array}$$

$N=8$ SUGRA

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$$

При $N > 8$ в спектре частиц появляется частица со спином $5/2$, для которой не удаётся построить взаимодействующую теорию. Поэтому $N=8$ считается предельным значением.

§3. Массивные представления алгебры SUSY.

$P_\mu^2 = m^2 \Rightarrow \exists$ СО, в которой $P^\mu = (m, 0, 0, 0)$

Она инвариантна относительно группы вращений $SO(3)$ и $\Rightarrow$ состояния характеризуются значениями $\vec{J}^2$ и J_3. При этом

$$\vec{J}^2 = J(J+1)$$

$$J_3 = -J, \ldots, J-1, J$$

Также как и в безмассовом случае $J_3 = M_{12}$.

Поэтому

$$\hat{J}_3 \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} | J_3 \rangle = \begin{pmatrix} J_3 - 1/2 & & & 0 \\ & J_3 + 1/2 & & \\ & & J_3 - 1/2 & \\ 0 & & & J_3 + 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} | J_3 \rangle$$

$\Rightarrow$ операторы Q_{i1} и Q_{i3} $\swarrow$ J_3 на $1/2$

Q_{i2} и Q_{i4} $\nearrow$ J_3 на $1/2$

$\Rightarrow$ вновь бозоны переходят в фермионы и наоборот.

Но теперь

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}\, m\, (\gamma^0 C)_{ab} = 2\delta_{ij}\, m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Q_{i1} и Q_{i4} уже действуют нетривиально.

Определим операторы

$$q_I \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_{I3} & \text{если } I=\overline{1,N} \\ \frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N)1} & \text{если } I=\overline{N+1,2N} \end{cases} \qquad \downarrow J_3 \text{ на } 1/2$$

$$q_I^+ \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2m}} Q_{I2} & \text{если } I=\overline{1,N} \\ \frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N)4} & \text{если } I=\overline{N+1,2N} \end{cases} \qquad \uparrow J_3 \text{ на } 1/2$$

$I=\overline{1,2N}$

При этом $\left(\frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N)1}\right)^+ = -\frac{i}{\sqrt{2m}} Q^+_{(I-N)1} =$

$= +\frac{i}{\sqrt{2m}} Q_{(I-N)4} = q_I^+$ – верно в силу майорановости Q_i.

Операторы q_I и q_I^+ удовлетворяют АКС алгебре Клиффорда

$$\{q_I, q_J^+\} = \delta_{IJ}; \quad \{q_I, q_J\} = 0; \quad \{q_I^+, q_J^+\} = 0$$

Поэтому как и ранее

$$n_Б = n_Ф = 2^{2N-1}$$

Однако теперь если $(J_3)_{max} = J_0$, то $(J_3)_{min} = -J_0$

$$(J_3)_{min} = J_0 - \frac{2N}{2} = J_0 - N = -J_0$$

$$\Rightarrow J_0 = N/2 \quad \text{и} \quad J_3 = \overline{-N/2, N/2}$$

Какое будет число состояний с заданным J ?

J \ N	1	2	3	4
0	2	5 (6-1)	14	42
1/2	1	4	14	48
1		1	6	27
3/2			1	8
2				1

$C_6^3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} = 20$

$20-6=14$

$C_6^2 = \frac{6\cdot5}{2} = 15$

$15-1=14$

Глава III. Построение суперсимметричных теорий с использованием суперпространства

§ 1. Понятие о суперпространстве

Оператор импульса является генератором трансляций:

$$\varphi(x^\mu+a^\mu) = \exp(a^\mu\partial_\mu)\,\varphi(x) = \exp(-ia^\mu P_\mu)\,\varphi(x)$$

где $P_\mu = i\partial_\mu$.

Можно ли построить аналогичное представление для операторов суперзаряда?

Рассмотрим суперпространство, по определению, координатами которого являются (x^μ, θ_i), $i=\overline{1,N}$

где θ_i - набор из N майорановских антикоммутирующих спиноров.

Суперполями называются функции, заданные на суперпространстве, $\Phi = \Phi(x, \theta_i)$.

Попробуем построить операторы суперзаряда Q_i. Можно попробовать взять

$$Q_i = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_i}$$

по аналогии с оператором P_μ.

Но тогда не выполняется КС

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu$$

Правильным выражением является

$$Q_{ia} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_i^{\,a}} - (\gamma^\mu\theta_i)_a\partial_\mu .$$

Действительно, тогда

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = \left\{i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_i^{\,a}} - (\gamma^\mu\theta_i)_a\partial_\mu,\ i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_j^{\,b}} - (\gamma^\nu\theta_j)_b\partial_\nu\right\}$$

$$= -i(\gamma^\nu)_b{}^d\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_i^{\,a}}, \theta_{jd}\right\}\partial_\nu - i(\gamma^\mu)_a{}^c\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_j^{\,b}}, \theta_{ic}\right\}\partial_\mu$$

Для выполнения дифференцирования вспомним, что θ_i - майорановские спиноры:

$$\bar\theta = \theta^T C \Rightarrow \bar\theta C^{-1} = \theta^T \Rightarrow \theta = C\bar\theta^T$$

$$\Rightarrow \theta_a = C_{ab}\bar\theta^b$$

Поэтому $\dfrac{\partial\theta_{ai}}{\partial\bar\theta^b_j} = C_{ab}\delta_{ij}$

Как следствие,

$$\{Q_{ia}, Q_{jb}\} = -i(\gamma^\nu)_b{}^d C_{da}\partial_\nu\delta_{ij} - i(\gamma^\mu)_a{}^c\delta_{ij}C_{cb}\partial_\mu =$$

$$= -2i\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}\partial_\mu = -2\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu$$

где мы приняли во внимание ранее доказанную симметрию матрицы $(\gamma^\mu C)$:

$$(\gamma^\mu C)_{ab} = (\gamma^\mu C)_{ba}.$$

т.о. получилось правильное КС.

При этом

$$\{Q_{ia}, \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b_j}\} = \{i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^a_i} - (\gamma^\mu\theta_i)_a\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b_j}\} =$$

$$= -\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}\partial_\mu \neq 0.$$

Поэтому обычная производная по θ не инвариантна при преобразованиях суперсимметрии.

Однако можно определить т.н. суперсимметричную ковариантную производную, которая коммутирует с суперзарядом:

$$D_{ia} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar\theta^a_i} - i(\gamma^\mu \theta_i)_a \partial_\mu$$ – суперсимметричная ковариантная производная.

тогда

$$\{Q_{ia}, D_{jb}\} = \left\{ i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^a_i} - (\gamma^\mu\theta_i)_a\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b_j} - i(\gamma^\nu\theta_j)_b\partial_\nu \right\}$$

$$= -\left\{(\gamma^\mu\theta_i)_a\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b_j}\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial\bar\theta^a_i}, (\gamma^\mu\theta_j)_b\partial_\mu\right\} = 0.$$

При этом

$$\{D_{ia}, D_{jb}\} = -2i\left\{\frac{\partial}{\partial\bar\theta^a_i}, (\gamma^\mu\theta_j)_b\partial_\mu\right\} = -2i\,\delta_{ij}(\gamma^\mu C)_{ab}\partial_\mu$$

– ковариантные производные не антикоммутируют. Несложно убедиться, что ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница

$$D_{ia}(AB) = D_{ia}A\cdot B + (-1)^{P_A} A\, D_{ia} B.$$

§2. N = 1 киральное скалярное суперполе

N = 1 – нерасширенная суперсимметрия, когда индекс i может принимать только 1 значение. Тогда $\theta_i \to \theta$ и

$$Q_i \to Q = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - (\gamma^\mu\theta)\partial_\mu;$$

$$D_i \to D = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} - i(\gamma^\mu\theta)\partial_\mu.$$

Ковариантная производная позволяет накладывать связи, инвариантные относительно преобразований суперсимметрии, самой известной из к-рых является условие киральности

$$(1-\gamma_5)D\Phi = 0 \iff (1-\gamma_5)_a{}^b D_b\Phi = 0$$

Действительно, при преобразованиях SUSY

$$\Phi(x,\theta) \to \exp(-i\bar{\varepsilon}Q)\Phi$$

тогда если $(1-\gamma_5)D\Phi = 0$, то

$$(1-\gamma_5)D\Phi' = (1-\gamma_5)D\left[\exp(-i\bar{\varepsilon}Q)\Phi\right] =$$

$$= \exp(-i\bar{\varepsilon}Q)(1-\gamma_5)D\Phi = 0$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$ – антикоммутирующий майорановский спинор – параметр SUSY преобразований.

Как решить условие киральности?

Можно разложить $\Phi(x,\theta)$ по компонентам,

$$\Phi(x,\theta) = \varphi_1(x) + \bar{\theta}\psi_1(x) + (\bar{\theta}\theta)\varphi_2(x) + (\bar{\theta}\gamma_5\theta)\varphi_3(x)$$

$$+ \bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\varphi_\mu(x) + \bar{\theta}\theta\cdot\bar{\theta}\psi_2(x) + (\bar{\theta}\theta)^2\varphi_4(x)$$

подействовать ковариантной производной и приравнять результат к 0. Но можно понять, как устроен результат более простым способом:

Заметим, что

$$(1-\gamma_5)D_a\left[(1+\gamma_5)\theta_b\right] = (1-\gamma_5)_a{}^c\frac{\partial}{\partial\bar\theta^c}\,(1+\gamma_5)_b{}^d\theta_d =$$

$$= (1-\gamma_5)_a{}^c(1+\gamma_5)_b{}^d\cdot C_{dc} = \left[(1+\gamma_5)C(1-\gamma_5)\right]_{ba} = 0$$

т.к. $C = i\gamma^0\gamma^2$ – произведение чётного числа γ-матриц.

Кроме того, определим величину

$$y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta \qquad (y^\mu)^* = x^\mu - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$$

Тогда

$$(1-\gamma_5)D_a y^\mu = (1-\gamma_5)_a{}^b\left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^b} - i(\gamma^\nu\theta)_b\partial_\nu\right)\left(x^\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\right) = -i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a + \frac{i}{2}(1-\gamma_5)_a{}^b\frac{\partial}{\partial\bar\theta^b}\cdot$$

$$\cdot(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta)$$

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\bar\theta^b}(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta) = \gamma^\mu\gamma_5\theta_b + \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b}(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta) =$$

$$= \gamma^\mu\gamma_5\theta_b + \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b}(\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta) = 2\gamma^\mu\gamma_5\theta_b$$

– всё дифференцируется также как x^2

$$\left(\text{но}\quad \frac{\partial}{\partial\bar\theta^b}(\bar\theta\gamma^\mu\theta) = 0\right)$$

Поэтому

„–“

$$(1-\gamma_5)D_a y^\mu = -i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a + i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5\theta_a =$$

$$= -i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a + i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a = 0$$

$\Rightarrow$ $(1-\gamma_5)D_a$ даёт 0 при действии на y^μ и $(1+\gamma_5)\theta$. Как следствие,

$$(1-\gamma_5)D_a\Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)=0.$$

Можно доказать, что функция $\Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta)$ является наиболее общим решением условия киральности.

При этом
$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow$ любая 3-я степень равна 0.

Вторые степени тождеством Фирца сводятся к $\bar\theta(1+\gamma_5)\theta$, т.к.

$$(1+\gamma_5)\theta_a\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)^b = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5)_a{}^b\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta.$$

Поэтому

$$\Phi(y^\mu,(1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y^\mu)+\bar\theta(1+\gamma_5)\psi(y^\mu)+\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu)$$

где φ и f – комплексные скаляры, а ψ – майорановский спинор (удобно).

Поля φ, ψ и f называются компонентными полями.

Найдём закон преобразования компонентных полей под действием преобразований SUSY:

$$\delta\phi = -i\bar{\varepsilon}Q\phi,$$

где $Q = i\dfrac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\theta\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$

Перейдём к координатам (θ, y^μ): $(\theta' = \theta)$

$$Q = i\frac{\partial\bar{\theta}'}{\partial\bar{\theta}}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}'} + i\frac{\partial y^\mu}{\partial\bar{\theta}}\cdot\frac{\partial}{\partial y^\mu} - (\gamma^\mu\theta)\cdot\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\partial\bar{\theta}'}{\partial x^\mu}}}_{0}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}'}$$

$$+\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\Big) = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\left(\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\right)\frac{\partial}{\partial y^\mu}\cdot\frac{i}{2} -$$

$$-(\gamma^\mu\theta)\frac{\partial}{\partial y^\mu} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\gamma_5\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu} - \gamma^\mu\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu} =$$

$$= i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu}.$$

Поэтому

$$\delta\phi = -i\bar{\varepsilon}\left(i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\Big(\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y)$$

$$+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)\Big) =$$

$$= \left(\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\Big(\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y)$$

$$+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)\Big) =$$

$$= \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi(y) + \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\theta f(y) + i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y^\mu} + i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial \psi}{\partial y^\mu} = (\text{т. Фирца})$$

$$= \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\varepsilon f(y) - i\bar{\theta}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\varepsilon\, \partial_\mu \varphi(y) - \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(y) \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta =$$

$$= \delta\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\delta\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\delta f(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon \cdot f - i\gamma^\mu\varepsilon \cdot \partial_\mu\varphi\right] \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi \end{cases}$$

Для того, чтобы убрать проектор $(1+\gamma_5)$ в законе преобразования спинорного суперполя, рассмотрим величину

$$\Phi^* = \left(\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)\right)^*$$

принимая во внимание, что

$$(y^\mu)^* = \left(x^\mu + \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\right)^* = x^\mu - \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta.$$

$$\Rightarrow$$

$$\Phi^* = \varphi^*(y^*) + \bar{\theta}(1-\gamma_5)\psi(y^*) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta f^*(y^*)$$

Видно, что Φ^* отличается от Φ заменой $\varphi \to \varphi^*$; $f \to f^*$ и $\gamma_5 \to -\gamma_5$. Поэтому Φ^* является антикиральным суперполем,

$$(1+\gamma_5)D\Phi^* = 0$$

Полностью аналогично случаю Φ, применяя к Φ^* оператор $-i\bar{\varepsilon}Q$, получаем, что

$$\begin{cases} \delta\varphi^* = \bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\psi \\ \delta\left[(1-\gamma_5)\psi\right] = (1-\gamma_5)\left[\varepsilon f^* - i\gamma^\mu \varepsilon \partial_\mu \varphi^*\right] \\ \delta f^* = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi \end{cases}$$

Первое и третье равенства - просто на комплексное сопряжение отличаются от предыдущих. Но теперь можно получить

$$\delta\psi = \frac{1}{2}\delta\left[(1-\gamma_5)\psi\right] + \frac{1}{2}\delta\left[(1+\gamma_5)\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\left[(\mathrm{Re} f - i\,\mathrm{Im} f)\varepsilon - i\gamma^\mu(\partial_\mu \mathrm{Re}\varphi - i\partial_\mu \mathrm{Im}\varphi)\varepsilon\right]$$

$$+ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\left[(\mathrm{Re} f + i\,\mathrm{Im} f)\varepsilon - i\gamma^\mu(\partial_\mu \mathrm{Re}\varphi + i\partial_\mu \mathrm{Im}\varphi)\varepsilon\right]$$

$$= (\mathrm{Re} f + i\gamma_5 \mathrm{Im} f)\varepsilon - i(\partial_\mu \mathrm{Re}\varphi + i\gamma_5\partial_\mu \mathrm{Im}\varphi)\gamma^\mu\varepsilon$$

$\Rightarrow$ окончательно получаем законы SUSY преобразований компонентных полей в виде

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\psi = (\mathrm{Re} f + i\gamma_5 \mathrm{Im} f)\varepsilon - i(\partial_\mu \mathrm{Re}\varphi + i\gamma_5 \partial_\mu \mathrm{Im}\varphi)\gamma^\mu \varepsilon \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu \psi . \end{cases}$$

Видно, что бозоны переходят в фермионы и обратно. Параметр преобразований – антикоммутирующий майорановский спинор $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$. (Без гравитации SUSY является глобальной симметрией)

§3. Построение явно суперсимметричных действий

Рассмотрим киральное суперполе

$$\Phi(y,\theta) = \varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)$$

$$(1-\gamma_5)D\Phi = 0$$

Тогда при преобразованиях суперсимметрии

$$\delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi = \partial_\mu\left(-i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi\right)$$

– старшая компонента кирального суперполя сдвигается на полную производную.

Поэтому с точностью до поверхностных членов Re и SUSY-инвариантным выражением будет

$$S_1 = 2\int d^4x\,(\mathcal{F} + \mathcal{F}^*)$$

Запишем это выражение в более красивом виде:

Пусть α - грассманова переменная. Тогда по определению положим

$$\int d\alpha \cdot 1 = 0\,; \quad \int d\alpha\, \alpha = 1 \iff \int d\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

С помощью аналогичного интегрирования можно выделить $\mathcal{F}$ из Φ:

$$\bar\theta(1+\gamma_5)\theta = \theta^T C(1+\gamma_5)\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right]\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{bmatrix} = (\theta_2, -\theta_1, -\theta_4, \theta_3)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\theta_3 \\ 2\theta_4\end{bmatrix} =$$

$$= -2\theta_4\theta_3 + 2\theta_3\theta_4 = 4\theta_3\theta_4.$$

Эту величину можно убрать с помощью интегрирования

$$\int d^2\theta \equiv \int d\theta_4\, d\theta_3 \quad , \text{ действительно,}$$

$$\int d^2\theta \cdot 1 = 0 \qquad \int d^2\theta\, \theta_3 = \int d^2\theta\, \theta_4 = 0$$

$$\int d^2\theta \cdot \bar\theta(1+\gamma_5)\theta = \int d\theta_4\, d\theta_3 \cdot 4\theta_3\theta_4 = 4\int d\theta_4\theta_4 = 4.$$

Эту величину можно записать в виде

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta}$$

, поскольку тогда

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\left[\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\right] = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1+\gamma_5)\cdot 2(1+\gamma_5)\theta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_a}(1+\gamma_5)_a{}^b\theta_b = tr(1+\gamma_5) = 4$$ - верно.

Остальные равенства также очевидно выполняются.

Поэтому

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi(y,\theta) = \int d^4x\, d^2\theta \Big[\Phi(x,\theta) + \cancel{\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\Phi(x,\theta)}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\partial_\nu\Phi(x,\theta)}\Big]$$

полные производные

$$= \int d^4x\, d^2\theta\left[\underbrace{\cancel{\varphi(x)}}_{0} + \underbrace{\cancel{\bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x)}}_{0} + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(x)\right]$$

$$= 2\int d^4x\, f(x).$$

Аналогичным образом можно рассмотреть антикиральное поле

$$\Phi^*(y^*,\theta) = \varphi^*(y^*) + \bar\theta(1-\gamma_5)\psi(y^*) + \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta f^*(y^*)$$

В этом случае необходимо рассмотреть величину

$$\bar\theta(1-\gamma_5)\theta = \theta^T C(1-\gamma_5)\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = (\theta_2, -\theta_1, -\theta_4, \theta_3)\begin{pmatrix}2\theta_1\\ 2\theta_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= 2\theta_2\theta_1 - 2\theta_1\theta_2 = 4\theta_2\theta_1 .$$

Эту величину можно убрать интегрированием

$$\int d^2\bar\theta \equiv \int d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

под действием которого

$$\int d^2\bar\theta\ \bar\theta(1-\gamma_5)\theta = \int d\theta_1 d\theta_2 \cdot 4\theta_2\theta_1 = 4 .$$

Тогда аналогично случаю кирального суперполя

$$\int d^4x\, d^2\bar\theta\ \Phi^* = \int d^4x\left[2f^* + \text{п. производные}\right]$$

Поэтому с точностью до интегралов от полных производных SUSY инвариант может быть записан в виде

$$S_1 = 2\int d^4x\,(f + f^*) = \int d^4x\, d^2\theta\, \Phi + \int d^4x\, d^2\bar\theta\, \Phi^*$$

$$= \int d^4x\, d^2\theta\, \Phi + \text{к.с.}$$

где Φ – произвольное киральное суперполе, которое по определению удовлетворяет условию

$$(1-\gamma_5) D\Phi = 0 .$$

Ещё один инвариант может быть построен исходя из Re скалярного суперполя $\mathbb{V}$,

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}^*$$

Легко понять, что его старшая компонента (коэффициент при $(\bar\theta\theta)^2$) будет при SUSY преобразованиях сдвигаться на полную производную:

$$\mathbb{V}(x,\theta) = \ldots + \bar\theta\theta \cdot \bar\theta \lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 \mathbb{D}(x)$$

где $\lambda(x)$ – майорановский спинор, $\mathbb{D}(x) \in Re$ в силу Re суперполя $\mathbb{V}(x,\theta)$.

Чтобы найти законы преобразования компонентных полей, применим оператор суперзаряда:

$$\delta \mathbb{V} = -i\bar\varepsilon Q \mathbb{V} \qquad \text{где} \quad Q = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - \gamma^\mu\theta\,\partial_\mu .$$

Чтобы получилось $(\bar\theta\theta)^2$ нужно, чтобы

либо $\frac{\partial}{\partial\bar\theta}$ действовал на $\theta^5 = 0$ – нет

либо $-\gamma^\mu\theta\,\partial_\mu$ действовало бы на θ^3:

$$\delta\mathbb{V} = \ldots + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 \delta\mathbb{D}(x) = \ldots + \bar\theta\theta \cdot i\bar\varepsilon\gamma^\mu\theta \cdot \bar\theta\,\partial_\mu \lambda(x)$$

в силу тождества Фирца

$$\theta\cdot\bar\theta = -\frac{1}{4}(\bar\theta\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5\cdot\bar\theta\gamma_5\theta + \frac{1}{4}(\gamma^\nu\gamma_5)\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta$$

Далее будет показано, что

$$\bar\theta\theta \cdot \bar\theta\gamma_5\theta = 0; \quad \bar\theta\theta \cdot \bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta = 0$$

и $\Rightarrow$

$$\delta \mathbb{V} = \ldots + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 \delta \mathbb{D}(x) = -\frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 \cdot i\bar\varepsilon\gamma^\mu\partial_\mu \lambda(x) + \ldots$$

$$\Rightarrow \delta\mathbb{D} = -i\bar\varepsilon\gamma^\mu\partial_\mu\lambda = [\varepsilon \neq \varepsilon(x)] = \partial_\mu[-i\bar\varepsilon\gamma^\mu\lambda]$$

– $\mathbb{D}$ также меняется на полную производную. Поэтому (с учётом вещественности $\mathbb{D}$) в качестве инварианта можно выбрать

$$S_2 = 2\int d^4x\, \mathbb{D}.$$

Старшую компоненту $\mathbb{V}$ можно выделить с помощью интегрирования по θ:

$$(\bar\theta\theta)^2 = (\theta^T C\theta)^2 = \left[(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{pmatrix}\right]^2 =$$

$$= [\theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2 - \theta_4\theta_3 + \theta_3\theta_4]^2 = [2\theta_2\theta_1 + 2\theta_3\theta_4]^2 =$$

$$= 8\theta_2\theta_1\theta_3\theta_4$$

Эта величина очевидным образом устраняется действием

$$\int d^4\theta \equiv \int d^2\theta\, d^2\bar\theta = \int d\theta_4\, d\theta_3 \int d\theta_1 d\theta_2 .$$

При этом

$$\int d^4\theta \, (\bar\theta\theta)^2 = \int d\theta_4 d\theta_3 d\theta_1 d\theta_2 \cdot 8\theta_2\theta_1\theta_3\theta_4 = 8$$

Как следствие,

$$\int d^4\theta = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)^2 \quad \text{, действительно,}$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)^2(\bar\theta\theta)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta_a}\cdot 4\theta_a(\bar\theta\theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)\left[4(\bar\theta\theta) + 2\theta_a\bar\theta^a\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\cdot(\bar\theta\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_a}\cdot 2\theta_a = 2\cdot 4 = 8.$$

Т.о. мы можем записать рассматриваемый инвариант в виде

$$S_2 = \int d^4x\, d^4\theta\, \mathbb{V} \quad \text{где} \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^*$$

Окончательно мы получаем, что SUSY инвариантное действие может быть записано в виде

$$S' = \int d^4x\, d^4\theta\, \mathbb{V} + \left(\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi + \text{к.с.}\right)$$

где $\mathbb{V} = \mathbb{V}^*$ и $(1-\gamma_5)D\Phi = 0$.

§ 1. Простейший вариант модели Весса-Зумино

Рассмотрим $N=1$ киральное скалярное суперполе Φ, т.ч. $(1-\gamma_5)D\Phi = 0$.

В терминах компонент

$$\Phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y)$$

Построим из Φ вещественное скалярное суперполе

$$\mathbb{V} \equiv \frac{1}{4}\Phi^*\Phi$$

Очевидно, что $\mathbb{V}^* = \frac{1}{4}\Phi^*\Phi = \mathbb{V}$

Поэтому действие

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^*\Phi} \longleftarrow \text{модель Весса-Зумино}$$

будет являться SUSY инвариантным.

Запишем действие модели ВЗ в терминах компонентных полей.

Для этого нужно взять интеграл по $d^4\theta$. Но предварительно нужно записать Φ через x^μ и θ, разлагая функции

$y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$ в окрестности x^μ.

$$\phi = \varphi(y) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y) =$$

$$= \varphi(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta\cdot$$

$$\cdot\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(x)\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$$

$$+ \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu f(x)$$

(Все остальные слагаемые равны 0, поскольку максимальная степень θ равна 4).

Все слагаемые 4-й степени по θ должны сводиться к $(\bar\theta\theta)^2$, например,

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta = C^{\mu\nu}(\bar\theta\theta)^2$$

Коэффициент $C^{\mu\nu}$ можно вычислить, применяя к обоим частям равенства $\int d^4\theta$:

$$8C^{\mu\nu} = \int d^4\theta\, C^{\mu\nu}(\bar\theta\theta)^2 = \int d^4\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)^2\left[\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[2\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta + (\mu\leftrightarrow\nu)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\gamma^\mu\gamma_5\theta_a\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5{}^a\cdot 2 + (\mu\leftrightarrow\nu)\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)$$

$$\cdot\left[\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5\theta + (\mu\leftrightarrow\nu)\right] = +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\right)\cdot 2\eta^{\mu\nu}(\bar\theta\theta)$$

$$= \eta^{\mu\nu} \cdot 2 \frac{\partial}{\partial\theta_a}\theta_a = 8\eta^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow C^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ и мы получаем тождество

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta \cdot \bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta = \eta^{\mu\nu}(\bar\theta\theta)^2$$

Аналогичным образом проверяется (Д/3), что

$$(\bar\theta\gamma_5\theta)^2 = -(\bar\theta\theta)^2$$

$$\bar\theta\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\theta = 0; \quad \bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0; \quad \bar\theta\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0.$$

Ещё одним полезным тождеством будет выражение для $\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta$ через $(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta$

Чтобы лоренцевы индексы совпали необходимо, чтобы

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta = c\cdot(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5$$

где постоянную c можно определить с помощью умножения на $\gamma^\nu\gamma_5\theta$:

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta = c\cdot(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma_5\theta$$

$$\eta^{\mu\nu}(\bar\theta\theta)^2 \qquad\qquad -c\cdot(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta(\eta^{\mu\nu}+\cancelto{0}{\gamma^{\mu\nu}})\theta = -c\eta^{\mu\nu}(\bar\theta\theta)^2$$

$\Rightarrow c = -1$ и получается тождество

$$\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta = -(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5 .$$

Поэтому выражение для кирального суперполя можно записать в виде

$$\Phi(x,\theta) = \varphi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot$$

$$\cdot\partial_\mu\varphi(x) - \frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\varphi(x)$$

Аналогичным образом для антикирального суперполя

$$\Phi^*(x,\theta) = \varphi^*(x) + \bar\theta(1-\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta f^*(x) - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot$$

$$\cdot\partial_\mu\varphi^*(x) - \frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi(x) - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\varphi^*(x)$$

Подставим эти разложения в действие модели Весса-Зумино

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^*\Phi = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\Big[\varphi^*\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\varphi$$

$$+ \bar\psi(1-\gamma_5)\underline{\theta}\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)(\bar\theta\theta)\,\underline{\bar\theta}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta f^*\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi^*\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\partial_\nu\varphi$$

$$- \frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\psi(1+\gamma_5)\underline{\theta\cdot\bar\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\varphi^*\cdot\varphi\Big]$$

Используем приведённые выше тождества, а также тождество Фирца

$$\theta\cdot\bar\theta = -\frac{1}{4}(\bar\theta\theta) - \frac{1}{4}\gamma_5\cdot\bar\theta\gamma_5\theta + \frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma_5\cdot\bar\theta\gamma^\alpha\gamma_5\theta$$

тогда

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \Big\{ -\frac{1}{8}\varphi^* \partial_\mu^2 \varphi\, (\bar\theta\theta)^2 + \frac{i}{8}(\bar\theta\theta)^2 \cdot \bar\psi(1-\gamma_5)\cdot$$

$$\cdot\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2 f^* f + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi$$

$$+ \frac{i}{8}(\bar\theta\theta)^2 \bar\psi(1+\gamma_5)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\varphi^*\cdot\varphi \Big\} =$$

$$\left[\int d^4\theta\, (\bar\theta\theta)^2 = 8 \right]$$

$$= \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}\varphi^*\partial_\mu^2\varphi + \frac{i}{2}\bar\psi(1-\cancel{\gamma_5})\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^* f$$

$$+ \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + \frac{i}{2}\bar\psi(1+\cancel{\gamma_5})\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{4}\partial_\mu^2\varphi^*\cdot\varphi \Big\} =$$

(интегрируем по частям слагаемые со скалярным полем)

$$= \int d^4x \Big\{ \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^* f \Big\}$$

$$= \int d^4x \Big\{ \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^* f \Big\}$$

т.о. окончательно получаем, что

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^*\Phi = \int d^4x \Big\{ \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^* f \Big\}}$$

§2. Инвариантность модели Весса-Зумино относительно преобразований суперсимметрии.

Убедимся, что

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta\, \Phi^* \Phi = \int d^4x \left[\partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f \right]$$

инвариантно относительно преобразований

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\psi = (Re f + i\gamma_5 Jm f)\varepsilon - i(\partial_\mu Re\varphi + i\gamma_5 \partial_\mu Jm\varphi)\gamma^\mu \varepsilon \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu \psi \end{cases}$$

где $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$.

Заметим, что f - вспомогательное поле, которое может быть исключено на уравнениях движения: $f = 0$; $f^* = 0$, т.ч.

$$S \rightleftarrows \int d^4x \left[\partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \right]$$

Относительно каких преобразований будет инвариантно это действие? Предположительно,

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\psi = -i(\partial_\mu Re\varphi + i\gamma_5 \partial_\mu Jm\varphi)\gamma^\mu \varepsilon \end{cases}$$

тогда как

$$0 = \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi = -i\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\gamma^{\mu}\partial_\mu\psi$$

в силу уравнения движения для спинорного поля.

Убедимся, что такая инвариантность действительно есть и заодно найдём соответствующий сохраняющийся ток.

Это можно сделать с помощью т.н. метода Нётер.

Положим формально $\varepsilon = \varepsilon(x)$ и предположим, что

$$\delta S = \int d^4x\, \partial_\mu \bar{\varepsilon}\, J^{\mu}.$$

Тогда при $\varepsilon \neq \varepsilon(x)$ $\delta S = 0$ - получается глобальная инвариантность.

УД получаются из ур-я $\delta S = 0$ и $\Rightarrow$ на уравнениях движения

$$0 = \delta S = \int d^4x\, \partial_\mu \bar{\varepsilon}\, J^{\mu} = -\int d^4x\, \bar{\varepsilon}(x)\, \partial_\mu J^{\mu}$$

$\Rightarrow$ в силу произвольности $\varepsilon(x)$ получаем з-н сохранения

$$\partial_\mu J^{\mu} = 0,$$

т.е. J^{μ} оказывается сохраняющимся током.

Итак, вычислим

$$\delta_\varepsilon S = \delta \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right)$$

при преобразованиях

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(x) \cdot (1+\gamma_5)\psi \\ \delta\psi = -i\left(\partial_\mu \mathrm{Re}\,\varphi + i\gamma_5 \partial_\mu \mathrm{Im}\,\varphi\right)\gamma^\mu \varepsilon(x). \end{cases}$$

Имеем:

$$\delta_\varepsilon S = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \delta\varphi^* \cdot \partial_\mu \varphi + \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \delta\varphi + i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \right.$$

$$\left. + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi \right\} = \int d^4x \left\{ -\delta\varphi^* \partial_\mu^2 \varphi - \delta\varphi\, \partial_\mu^2 \varphi^* + \right.$$

$$\left. + 2i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi \right\} =$$

$$= \int d^4x \left\{ -\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\psi \partial_\mu^2 \varphi - \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \partial_\mu^2 \varphi^* + 2i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[-i\left(\partial_\nu \mathrm{Re}\,\varphi + i\gamma_5 \partial_\nu \mathrm{Im}\,\varphi\right)\gamma^\nu \varepsilon(x) \right] \right\} =$$

$$= \int d^4x \left\{ -\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\psi \partial_\mu^2 \varphi - \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \partial_\mu^2 \varphi^* + 2\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^\nu \cdot \right.$$

$$\cdot \partial_\mu \partial_\nu \left(\mathrm{Re}\,\varphi - i\gamma_5 \mathrm{Im}\,\varphi\right)\varepsilon + 2\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^\nu \left(\partial_\nu \mathrm{Re}\,\varphi - i\gamma_5 \partial_\nu \mathrm{Im}\,\varphi\right)$$

$$\left. \cdot \partial_\mu \varepsilon \right\} =$$

$$= \int d^4x \left\{ -\bar{\varepsilon}\cancel{(1-\gamma_5)}\psi\partial_\mu^2\varphi - \bar{\varepsilon}\cancel{(1+\gamma_5)}\psi\partial_\mu^2\varphi^* + 2\bar{\psi}\cancel{(\partial_\mu^2 Re\varphi -}\right.$$

$$\left. \cancel{- i\gamma_5\partial_\mu^2 Jm\varphi)}\varepsilon + 2\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\nu Re\varphi - i\gamma_5\partial_\nu Jm\varphi)\partial_\mu\varepsilon \right\}$$

$$= \int d^4x \cdot 2\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu(\partial_\nu Re\varphi - i\gamma_5\partial_\nu Jm\varphi)\partial_\mu\varepsilon$$

При этом

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\chi = \bar{\psi}(\eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu})\chi = \bar{\chi}\psi\cdot\eta^{\mu\nu} - \bar{\chi}\gamma^{\mu\nu}\psi =$$

$$= \bar{\chi}(\eta^{\mu\nu} + \gamma^{\nu\mu})\psi = \bar{\chi}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi.$$

Поэтому δS можно окончательно записать в виде

$$\delta_\varepsilon S = 2\int d^4x\, \partial_\mu\bar{\varepsilon}\,\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu Re\varphi - i\gamma_5\partial_\nu Jm\varphi)\psi \equiv$$

$$\equiv \int d^4x\, \partial_\mu\bar{\varepsilon}\, J^\mu$$

где $J^\mu = 2\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu Re\varphi - i\gamma_5\partial_\nu Jm\varphi)\psi$

— т.н. суперток.

Суперток является майорановским антикоммутирующим спинором, также как и параметр преобразования суперсимметрии.

Сохранение супертока может быть легко проверено явным вычислением:

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left[2\gamma^\nu \gamma^\mu (\partial_\nu Re\,\varphi - i\gamma_5 \partial_\nu Im\,\varphi)\psi \right] =$$

$$= 2\gamma^\nu\gamma^\mu (\partial_\mu\partial_\nu Re\,\varphi - i\gamma_5 \partial_\mu\partial_\nu Im\,\varphi)\psi +$$

$$+ 2\gamma^\nu\gamma^\mu(\partial_\nu Re\,\varphi - i\gamma_5\partial_\nu Im\,\varphi)\partial_\mu\psi =$$

$$= 2(\partial_\mu^2 Re\,\varphi - i\gamma_5 \partial_\mu^2 Im\,\varphi)\psi + 2(\partial_\nu Re\,\varphi - i\gamma_5\partial_\nu Im\,\varphi)$$

$$\cdot \gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$$

в силу уравнений движения для скалярного поля $\partial_\mu^2\varphi = 0$ и спинорного поля $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$.

§3. Количество степеней свободы бозонов и фермионов в модели ВЗ

Вне массовой пов-сти есть 2 ст. свободы у φ, 2 ст. св. у f и 4 ст. св. у ψ

$\Rightarrow$ число бозонных и фермионных степеней свободы совпадает.

На массовой поверхности

$$f = 0; \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad \partial_\mu^2 \varphi = 0.$$

Поэтому у φ – 2 ст. свободы ($k_\alpha^2 = 0$)
Что будет с ψ?

$$0 = \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_0 \psi + \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \bar{\nabla} \psi$$

Если $\psi \sim e^{-ik_\alpha x^\alpha}$, то $\partial_0 \psi = -ik_0 \psi$

$$\bar{\nabla} \psi = i\bar{k} \psi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & -ik_0 \\ -ik_0 & 0 \end{pmatrix} \psi + \begin{pmatrix} 0 & i\bar{\sigma}\bar{k} \\ -i\bar{\sigma}\bar{k} & 0 \end{pmatrix} \psi,$$ сокращая на $-i$, получим, что

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & k_0 - \bar{\sigma}\bar{k} \\ k_0 + \bar{\sigma}\bar{k} & 0 \end{pmatrix} \psi. \quad \text{где} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k_0 - \bar{\sigma}\bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0 \\ (k_0 + \bar{\sigma}\bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

– первое уравнение следует из второго, действительно,

$$(k_0 + \bar{\sigma}^* \bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} = 0$$

$$-(k_0 + \bar{\sigma}^* \bar{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} = 0$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (k_0 + \bar{\sigma}^* \bar{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0$$

$$\sigma_2 (k_0 + \bar{\sigma}^* \bar{k}) \sigma_2 \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0$$

$$(k_0 - \bar{\sigma}\bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} = 0 \quad \text{- верно.}$$

$$0 = (k_0 + \bar{\sigma}\bar{k}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det = k_0^2 - k_3^2 - k_1^2 - k_2^2 = k_0^2 - \bar{k}^2 \quad \text{- верно}$$

$\Rightarrow$ ψ_2 можно выразить через ψ_1 и остаются только 2 независимые компоненты

$\Longrightarrow$ Майорановский спинор на массовой пов-сти имеет 2 ст. свободы

т.о. число бозонных и фермионных ст. свободы on shell совпадает.

§4. Модель Весса-Зумино с массой и взаимодействием

$$S = \int d^4x\, d^4\theta\, \mathbb{V} + \left(\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi + \text{к.с.} \right)$$

– общая форма SUSY инварианта.

Мы строим теорию исходя из кирального скалярного суперполя ϕ:

$$(1-\gamma_5) D\phi = 0$$

$$\phi = \varphi(y^\mu) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(y^\mu) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(y^\mu)$$

где $\quad y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$

$$\mathbb{V} = \frac{1}{4}\phi^*\phi = \mathbb{V}^*$$

Выберем теперь

$$\Phi = \frac{m}{4}\phi^2 + \frac{\lambda}{6}\phi^3$$

Это суперполе является киральным, поскольку

$$(1-\gamma_5) D\Phi = \frac{m}{2}\phi\cdot(1-\gamma_5)D\phi + \frac{\lambda}{2}\phi^2\cdot(1-\gamma_5)D\phi = 0$$

Поэтому инвариантное действие может быть записано в виде.

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^*\phi + \left(\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4}m\phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\phi^3 \right) + \text{к.с.} \right)$$

– модель ВЗ с массой и взаимодействием.

Запишем это действие в терминах компонентных полей.

Ранее было доказано, что

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^*\Phi = \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + f^* f\right)$$

Остаётся вычислить

$$\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4} m \Phi^2 + \frac{1}{6}\lambda \Phi^3\right) + \text{к.с.}$$

Важно: т.к. $(1-\gamma_5) D \Phi = 0$, то

$$\Phi = \Phi\left(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta\right)$$

Поэтому

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi\left(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta\right) = \int d^4x\, d^2\theta \Big[\Phi\left(x^\mu, (1+\gamma_5)\theta\right)$$

$$+ \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\, \partial_\mu \Phi\left(x^\mu, (1+\gamma_5)\theta\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta \cdot \frac{i}{2}\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta$$

$$\cdot \partial_\mu \partial_\nu \Phi\left(x^\mu, (1+\gamma_5)\theta\right)\Big] = \int d^4x\, d^2\theta\, \Phi\left(x^\mu, (1+\gamma_5)\theta\right)$$

полные производные

$\Rightarrow$ при вычислении действия можно формально заменить y^μ на x^μ, что сильно упрощает вычисления.

Поэтому

$$\int d^4x\, d^2\theta \left[\frac{1}{4} m \Phi^2(y,\theta) + \frac{1}{6}\lambda \Phi^3(y,\theta)\right] \overrightarrow{=}$$

$$\overrightarrow{=} \int d^4x\, d^2\theta \left[\frac{1}{4} m \Phi^2(x,\theta) + \frac{1}{6}\lambda \Phi^3(x,\theta)\right] =$$

$$= \int d^4x\, d^2\theta \Big[\frac{1}{4} m \left(\varphi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(x)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{6}\lambda\left(\varphi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f(x)\right)^3\Big] =$$

(выживают только 2-е степени $(1+\gamma_5)\theta$)

$$= \int d^4x\, d^2\theta \Big[\frac{1}{4} m\left(\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\varphi f + \bar\psi(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\psi\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\lambda\cdot\left(\frac{3}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\varphi^2 f + 3\varphi\cdot\bar\psi(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\psi\right)\Big] =$$

[Используем теперь тождество Фирца

$$(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5) = -\frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot(1+\gamma_5).$$

тогда]

$$= \int d^4x\, d^2\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\Big[\frac{1}{4} m\cdot\varphi f - \frac{1}{8} m\bar\psi(1+\gamma_5)\psi +$$

$$+ \frac{1}{4}\lambda\varphi^2 f - \frac{1}{4}\lambda\varphi\bar\psi(1+\gamma_5)\psi\Big] = \left[\int d^2\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta = 4\right]$$

$$= \int d^4x\left[m\varphi f - \frac{1}{2} m\bar\psi(1+\gamma_5)\psi + \lambda\varphi^2 f - \lambda\varphi\bar\psi(1+\gamma_5)\psi\right]$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^*\Phi + \left[\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4} m\Phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\Phi^3\right) + \text{к.с.}\right]$$

$$= \int d^4x \Big\{ \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^*f + m\varphi f$$

$$- \frac{1}{2} m\bar\psi(1+\gamma_5)\psi + \lambda\varphi^2 f - \lambda\varphi\bar\psi(1+\gamma_5)\psi + m\varphi^* f^*$$

$$- \frac{1}{2} m\bar\psi(1-\gamma_5)\psi + \lambda\varphi^{*2} f^* - \lambda\varphi^*\bar\psi(1-\gamma_5)\psi \Big\} =$$

$$= \int d^4x \Big\{ \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^*f + m\varphi f + m\varphi^* f^*$$

$$+ \lambda f\varphi^2 + \lambda f^*\varphi^{*2} - m\bar\psi\psi - \lambda\varphi\bar\psi(1+\gamma_5)\psi - \lambda\varphi^*\bar\psi(1-\gamma_5)\psi \Big\}$$

– видно, что появилось массовое слагаемое для поля ψ. Но это – майорановская масса. Для того, чтобы получить массу скалярного поля φ, необходимо исключить вспомогательное поле f (и f^*) из уравнений движения:

$$f: \quad f^* + m\varphi + \lambda\varphi^2 = 0$$

$$f^*: \quad f + m\varphi^* + \lambda\varphi^{*2} = 0$$

Как исключать вспомогательное поле?

Если в лагранжиане присутствует

$$\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + x_i B_i = \frac{1}{2} x^T A x + x^T B$$

то ур-е движения для x_i имеет вид

$$0 = A_{ij} x_j + B_i$$

$$\Rightarrow x_i = -(A^{-1})_{ij} B_j \iff x = -A^{-1} B$$

Подставляем это в исходное выражение:

$$\frac{1}{2} x^T A x + x^T B \Rightarrow \frac{1}{2} B^T A^{-1} A A^{-1} B - B^T A^{-1} B =$$

$$= B^T A^{-1} B \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{2} B^T A^{-1} B \Leftarrow -\frac{1}{2} x^T A x$$

вклад линейных слагаемых в (−2) раза
больше вклада квадратичных

$\Rightarrow$ При исключении вспомогательных полей можно взять квадратичное слагаемое с обратным знаком и подставить в них решение ур-й движения.

Поэтому слагаемые с полями f и f^* дадут

$$-f^* f = -|m\varphi + \lambda \varphi^2|^2$$

Т.о. после исключения вспомогательных полей f и f^* действие примет вид

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^*\Phi + \left[\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4}m\Phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\Phi^3\right) + \text{к.с.}\right]$$

$$\Longrightarrow \int d^4x \left\{ \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi + i\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar\Psi\Psi - |m\varphi + \lambda\varphi^2|^2 \right.$$

$$\left. - \lambda\varphi\bar\Psi(1+\gamma_5)\Psi - \lambda\varphi^*\bar\Psi(1-\gamma_5)\Psi \right\}$$

– появилась масса скалярного поля, которая оказывается равной массе спинорного поля – характерная особенность SUSY теорий.

Есть φ^4 и юкава, причём константы взаимодействия также взаимосвязаны.

Потенциал скалярных полей

$$V = |m\varphi + \lambda\varphi^2|^2$$

автоматически оказывается положительно определённым – также особенность SUSY теорий.

Глава V. N=1 суперсимметричные калибровочные теории

§1. Калибровочно инвариантное обобщение модели Весса-Зумино

Построим SUSY калибровочные теории. План аналогичен классической теории поля:

$$\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi \longrightarrow \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi$$

где $\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i A_\mu \varphi$

(В наших обозначениях $A_\mu = e A_\mu^A T^A$, где T^A - эрмитовы генераторы, $(T^A)^+ = T^A$.
Для нормировки генераторов фундаментального представления t^A используем условие

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB})$$

Тогда если $\begin{cases} \varphi \longrightarrow \omega \varphi \\ A_\mu \longrightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} - i \omega \partial_\mu \omega^{-1} \end{cases}$

то

$$\mathcal{D}_\mu \varphi \to \partial_\mu (\omega \varphi) + i (\omega A_\mu \omega^{-1} - i \omega \partial_\mu \omega^{-1}) \omega \varphi$$

$$= \cancel{\partial_\mu \omega} \cdot \varphi + \omega \partial_\mu \varphi + i \omega A_\mu \varphi + \cancel{\omega \partial_\mu \omega^{-1}} \omega \varphi =$$

$$= \omega (\partial_\mu \varphi + i A_\mu \varphi) = \omega \mathcal{D}_\mu \varphi.$$

Затем строим тензор поля

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu] \longrightarrow \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}$$

$$(F_{\mu\nu} = e F_{\mu\nu}^A t^A)$$

и добавляем в теорию

$$-\frac{1}{2e^2} tr F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^A)^2 \text{ , т.е.}$$

получается теория с

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + \mathcal{D}_\mu\varphi^+\mathcal{D}^\mu\varphi - V(\varphi,\varphi^+)$$

инвариантная относительно локальных калибровочных преобразований.

Аналогом $\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi$ является модель ВЗ

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+\Phi \qquad \text{где} \quad (1-\gamma_5)D\Phi = 0.$$

Она инвариантна относительно глобальных преобразований

$$\Phi \to \omega\Phi \qquad (\omega^+ = \omega^{-1})$$
$$\Phi^+ \to \Phi^+\omega^{-1}$$

где $\omega \neq \omega(x)$

Но локальной инвариантности нет:

$\Phi \to \omega(x)\Phi$ нарушает условие киральности:

$(1-\gamma_5)D(\omega(x)\Phi) \neq 0$

а если $\Phi \to \omega(y)\Phi$, то $\Phi^+ \to \Phi^+\omega^{-1}(y^*)$.

где $y^{\mu *} = x^\mu - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta \neq y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$

Поэтому $\omega^{-1}(y^*)\,\omega(y) \neq 1$

Это разумно, т.к. для $\exists$ локальной инвариантности нужно калибровочное поле.

Для того, чтобы получить локально калибровочно инвариантную теорию, необходимо добавить калибровочное поле.

Калибровочное поле A_μ входит как компонента в вещественное скалярное суперполе $V(x,\theta)$:

$$V(x,\theta) = C(x) + i\bar\theta\gamma_5\xi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta\theta\cdot K(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma_5\theta\cdot H(x)$$

$$-\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot A_\mu(x) + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\xi(x) + i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)$$

$$\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2\left(D(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C(x)\right)$$

Тогда действие калибровочно инвариантного обобщения модели Весса-Зумино можно записать в виде

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V}\Phi \qquad \text{где} \quad \Phi = \begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \vdots\\ \Phi_n\end{pmatrix}$$

При этом локальная калибровочная инвариантность имеет вид

$$\begin{cases}\Phi \to e^{i\Lambda}\Phi\\ \Phi^+ \to \Phi^+ e^{-i\Lambda^+}\\ e^{2V} \to e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda}\end{cases}$$

где Λ - произвольное киральное суперполе,

$$(1-\gamma_5)D\Lambda = 0$$

Важно, что в неабелевом случае экспоненты нельзя объединить в одну.

Внутри V содержится очень много степеней свободы, но и калибровочный произвол в Λ также очень велик. Оказывается, что можно убрать часть степеней свободы внутри V с помощью калибровочного произвола. Покажем это в абелевом случае. Тогда

$$e^{2V} \to e^{i\Lambda^* + 2V - i\Lambda}$$

$$\Longleftrightarrow \quad V \to V + \frac{i}{2}\left(\Lambda^* - \Lambda\right)$$

$$\Lambda(y,\theta) \equiv \alpha(y) + \bar\theta(1+\gamma_5)\beta(y) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\,\gamma(y)$$

где $y^\mu \equiv x^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta$

$$\Lambda(x,\theta) = \alpha(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\beta(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\,\gamma(x) + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot$$

$$\cdot\partial_\mu\alpha(x) - \frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\beta(x) - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\alpha(x)$$

Беря комплексное сопряжение, получаем, что

$$\Lambda^*(x,\theta) = \alpha^*(x) + \bar\theta(1-\gamma_5)\beta(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta\,\gamma^*(x) - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot$$

$$\cdot\partial_\mu\alpha^*(x) - \frac{i}{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\beta(x) - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\alpha^*(x)$$

где учтено, что в абелевом случае эрмитово сопряжение заменяется на комплексное сопряжение.

Поскольку $V \to V + \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda)$, то

$$\delta V = \frac{i}{2}(\Lambda^* - \Lambda) \quad , \text{ т.е.}$$

$$\delta\Big[C + i\bar\theta\gamma_5\zeta + \frac{1}{2}\bar\theta\theta\cdot K + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma_5\theta\cdot H - \frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu$$

$$+ \frac{1}{2}\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\zeta + i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2\big(D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C\big)\Big]$$

$$= \frac{i}{2}\Big\{\alpha^* + \bar\theta(1-\gamma_5)\beta + \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta\,\gamma^* - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\alpha^*$$

$$- \frac{i}{2}\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\beta - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\alpha^* - \alpha - \bar\theta(1+\gamma_5)\beta$$

$$- \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\,\gamma - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\alpha + \frac{i}{2}\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\beta$$

$$+ \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\alpha\Big\} =$$

$$= \mathrm{Im}\,\alpha - i\bar\theta\gamma_5\beta + \frac{1}{2}\bar\theta\theta\cdot\mathrm{Im}\,\gamma - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma_5\theta\,\mathrm{Re}\,\gamma + \frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot$$

$$\cdot\partial_\mu\mathrm{Re}\,\alpha - \frac{1}{2}\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\beta - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\,\mathrm{Im}\,\alpha$$

Поэтому

$$\boxed{\begin{aligned} \delta C &= \mathrm{Im}\,\alpha \\ \delta\zeta &= -\beta \\ \delta K &= \mathrm{Im}\,\gamma \\ \delta H &= -\mathrm{Re}\,\gamma \\ \delta A_\mu &= -\partial_\mu\mathrm{Re}\,\alpha \end{aligned}}$$

$$\delta\Big[i\sqrt{2}\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\zeta\Big] =$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\beta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta\lambda = 0}$$

$$\delta\Big[D - \frac{1}{2}\partial_\mu^2 C\Big] = -\frac{1}{2}\partial_\mu^2\,\mathrm{Im}\,\alpha$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta D = 0}$$

Поэтому можно выбрать $Im\alpha$, β, $Re\gamma$ и $Im\gamma$ т.ч. занулить поле C, ζ, K и H.

– получается т.н. калибровка Весса-Зумино, в которой

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda(x) +$$

$$+\frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x)$$

В такой калибровке имеется остаточная инвариантность относительно преобразований с $\Lambda(y,\theta) = Re\,\alpha(y) \equiv a(y)$, т.е.

$$\begin{cases} \phi \to e^{ia(y)}\phi \\ \phi^* \to e^{-ia(y^*)}\phi^* \\ V \to V + \frac{i}{2}\left(a(y^*) - a(y)\right) \end{cases}$$

(напомним, что это – абелев случай)

При этом мы получаем, что при таких преобразованиях

$$\varphi \to e^{ia}\varphi\ ;\quad \psi \to e^{ia}\psi\ ;\quad f \to e^{ia}f$$

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu a\ ;\quad \lambda \to \lambda\ ;\quad D \to D$$

т.е. остаточная инвариантность в калибровке ВЗ соответствует обычным калибровочным преобразованиям.

В абелевом случае также можно выбрать калибровку ВЗ

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D(x)$$

Но теперь при остаточных преобразованиях с

$$\Lambda(y,\theta) = a(y)$$

$$\begin{cases} \Phi \to e^{ia(y)}\Phi; \qquad \Phi^+ \to \Phi^+ e^{-ia(y^*)} \\ e^{2V} \to e^{ia(y^*)} e^{2V} e^{-ia(y)} \end{cases}$$

Выясним как поля A_μ, λ и D меняются при этих остаточных преобразованиях.

Имеем:

$$e^{2V} = 1 + 2V + \frac{1}{2}(2V)^2 + \underbrace{\ldots}_{\text{нет в калибровке ВЗ, т.к. } V\sim\theta^2} \overset{\text{ВЗ}}{=} 1 + 2V + 2V^2 =$$

$$= 1 - \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2 D +$$

$$+ 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu \cdot \bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\nu =$$

$$= 1 - \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\mu^2)$$

Также принимаем во внимание, что

$e^{-ia(y)}$ – киральное суперполе

$e^{+ia(y^*)}$ – антикиральное суперполе.

Поэтому

$$e^{-ia(y)} = e^{-ia(x)} + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu e^{-ia(x)} - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2 e^{-ia(x)}$$

$$e^{ia(y^*)} = e^{ia(x)} - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu e^{ia(x)} - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2 e^{+ia(x)}$$

Поэтому при остаточных калибровочных преобразованиях

$$1 - \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A'_\mu + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda' + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D' + A'^2_\mu) =$$

$$= \left(e^{ia} - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\alpha\gamma_5\theta\,\partial_\alpha e^{ia} - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\alpha^2 e^{ia}\right)\Big(1 - \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu$$

$$+ 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\mu^2)\Big)\Big(e^{-ia} + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\beta\gamma_5\theta$$

$$\cdot\partial_\beta e^{-ia} - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\beta^2 e^{-ia}\Big)$$

Перемножим всё в правой части, вводя обозначение $\omega \equiv e^{ia}$; $\omega^{-1} = e^{-ia}$. Тогда

$$-A'_\mu = \omega(-A_\mu)\omega^{-1} + \omega\cdot\underline{\frac{i}{2}\partial_\mu}\,\omega^{-1} - \frac{i}{2}\underline{\partial_\mu\omega\cdot\omega^{-1}}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{A'_\mu = \omega A_\mu\omega^{-1} - i\,\omega\partial_\mu\omega^{-1}}$$

– правильный закон преобразования поля Янга-Миллса в используемых обозначениях

$$\boxed{\lambda' = \omega \lambda \omega^{-1}}$$ – закон преобразования поля в присоединённом представлении калибровочной группы

$$D' + A_\mu'^2 = \omega(D + A_\mu^2)\omega^{-1} + i\partial_\mu\omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega A_\mu \partial_\mu \omega^{-1}$$

$$-\frac{1}{4}\partial_\mu^2\omega\cdot\omega^{-1} - \frac{1}{4}\omega\partial_\mu^2\omega^{-1} + \frac{1}{2}\partial_\mu\omega\cdot\partial_\mu\omega^{-1}$$

Выразим из этого равенства величину D':

$$D' = -(\omega A_\mu \omega^{-1} + i\partial_\mu\omega\cdot\omega^{-1})(\omega A_\mu \omega^{-1} - i\omega\partial_\mu\omega^{-1})$$

$$+\omega(D + A_\mu^2)\omega^{-1} + i\partial_\mu\omega A_\mu\omega^{-1} - i\omega A_\mu\partial_\mu\omega^{-1} -$$

$$-\frac{1}{4}\partial_\mu^2\omega\cdot\omega^{-1} - \frac{1}{4}\omega\partial_\mu^2\omega^{-1} + \frac{1}{2}\partial_\mu\omega\cdot\partial_\mu\omega^{-1} =$$

$$= -\cancel{\omega A_\mu^2\omega^{-1}} - \cancel{i\partial_\mu\omega A_\mu\omega^{-1}} + \cancel{i\omega A_\mu\partial_\mu\omega^{-1}} - \cancel{\partial_\mu\omega\,\partial_\mu\omega^{-1}}$$

$$+\omega(D + \cancel{A_\mu^2})\omega^{-1} + \cancel{i\partial_\mu\omega A_\mu\omega^{-1}} - \cancel{i\omega A_\mu\partial_\mu\omega^{-1}}$$

$$-\frac{1}{4}\partial_\mu^2\omega\cdot\omega^{-1} - \frac{1}{4}\omega\partial_\mu^2\omega^{-1} \cancel{+}\!- \frac{1}{2}\partial_\mu\omega\cdot\partial_\mu\omega^{-1} =$$

$$= \omega D\omega^{-1} - \frac{1}{4}\partial_\mu^2\omega\cdot\omega^{-1} - \frac{1}{4}\omega\partial_\mu^2\omega^{-1} - \frac{1}{2}\partial_\mu\omega\cdot\partial_\mu\omega^{-1}$$

$$= \omega D\omega^{-1} - \frac{1}{4}\partial_\mu^2(\omega\cdot\omega^{-1}) = \omega D\omega^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{D' = \omega D \omega^{-1}}$$ – также присоединённое представление.

Вычислим теперь действие калибровочно инвариантного обобщения модели ВЗ в калибровке ВЗ в терминах компонентных полей:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V}\Phi = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+\Phi +$$

$$+ \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+(e^{2V}-1)\Phi \equiv S_0 + S_1$$

Величина S_0 была найдена ранее,

$$S_0 = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+\Phi = \int d^4x \Big[\partial_\mu\varphi^+\partial_\mu\varphi + i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

$$+ f^+f \Big],$$

поэтому остаётся только вычислить

$$S_1 = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+(e^{2V}-1)\Phi$$

При этом в калибровке ВЗ

$$e^{2V}-1 \overset{ВЗ}{=} 2V + 2V^2 = -\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\mu^2)$$

В терминах x^μ и θ поля Φ и Φ^+ примут вид

$$\Phi(x,\theta) = \varphi + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta f + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi$$

$$- \frac{i}{2}\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\varphi$$

$$\Phi^+(x,\theta) = \varphi^+ + \bar\psi(1-\gamma_5)\theta + \frac{1}{2}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta f^+ - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\partial_\mu\varphi^+$$
$$+ \frac{i}{2}\bar\theta\theta\cdot\partial_\mu\bar\psi(1+\gamma_5)\gamma^\mu\theta - \frac{1}{8}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu^2\varphi^+$$

Поэтому с учётом того, что $\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0$
$\bar\theta\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta = 0$
и что все степени θ, начиная с пятой равны 0, получаем

$$S_1 = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\left(\varphi^+ + \bar\psi(1-\gamma_5)\theta - \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\alpha\gamma_5\theta\partial_\alpha\varphi^+\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\mu^2)\right)$$
$$\cdot\left(\varphi + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi + \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\beta\gamma_5\theta\partial_\beta\varphi\right) \Longrightarrow$$

(оставляем только слагаемые 4-й степени по θ)

$$\Longrightarrow \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\Big\{-\varphi^+\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\beta\gamma_5\theta\partial_\beta\varphi$$
$$+ \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\alpha\gamma_5\theta\partial_\alpha\varphi^+\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu\cdot\varphi + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2\varphi^+(D + A_\mu^2)\varphi$$
$$- \bar\psi(1-\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\psi + 2i\sqrt{2}\,\bar\psi(1-\gamma_5)\theta\cdot$$
$$\cdot\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda\cdot\varphi + 2i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\psi\Big\} =$$
$$= \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\Big\{-\frac{i}{2}(\bar\theta\theta)^2\varphi^+A_\mu\partial_\mu\varphi + \frac{i}{2}(\bar\theta\theta)^2\partial_\mu\varphi^+A_\mu\varphi$$
$$+ \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2\varphi^+(D + A_\mu^2)\varphi - \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\frac{1}{4}\bar\theta\gamma^\alpha\gamma_5\theta\cdot$$
$$\cdot\bar\psi(1-\gamma_5)\gamma^\alpha\gamma_5(1+\gamma_5)A_\mu\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar\theta\theta)^2\bar\psi(1-\gamma_5)\gamma_5\lambda\cdot\varphi$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar\theta\theta)^2\varphi^+\bar\lambda\gamma_5(1+\gamma_5)\psi\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, (\bar\theta\theta)^2\Big\{-\frac{i}{2}\varphi^+A_\mu\partial_\mu\varphi + \frac{i}{2}\partial_\mu\varphi^+A_\mu\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\varphi^+(D+A_\mu^2)\varphi - \frac{1}{2}\bar\Psi(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\Psi(1-\gamma_5)\lambda\varphi$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varphi^+\bar\lambda(1+\gamma_5)\psi\Big\}$$

Для вычисления интеграла используем равенство $\int d^4\theta\,(\bar\theta\theta)^2 = 8$, с помощью которого получаем, что

$$S_1 = \int d^4x\Big\{-i\varphi^+A_\mu\partial_\mu\varphi + i\partial_\mu\varphi^+A_\mu\varphi + \varphi^+(D+A_\mu^2)\varphi$$

$$-\bar\Psi(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\psi + i\sqrt{2}\,\bar\Psi(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar\lambda(1+\gamma_5)\psi\Big\}$$

Сложим теперь это выражение со слагаемым S_0:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+e^{2V}\Phi = S_0 + S_1 =$$

$$= \int d^4x\Big\{\partial_\mu\varphi^+\partial^\mu\varphi - i\varphi^+A_\mu\partial_\mu\varphi + i\partial_\mu\varphi^+A_\mu\varphi + \varphi^+A_\mu^2\varphi$$

$$+\varphi^+D\varphi + i\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar\Psi(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\psi + i\sqrt{2}\,\bar\Psi(1-\gamma_5)\lambda\varphi$$

$$-i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar\lambda(1+\gamma_5)\psi + f^+f\Big\}$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi^+ = \partial_\mu \varphi^+ - i\varphi^+ A_\mu .$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i A_\mu \varphi$$

Поэтому

$$\mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - i\varphi^+ A_\mu \partial_\mu \varphi + i \partial_\mu \varphi^+ A_\mu \varphi +$$

$+ \varphi^+ A_\mu^2 \varphi$ — именно такая структура и получилась.

Для спинорного поля необходимо ещё добавить полную дивергенцию

$- i\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -\frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi)$, действительно,

$$\Pi 4 = -\frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi - \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -i\bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

Тогда слагаемые, квадратичные по ψ, примут вид

$$i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu A_\mu\psi =$$

$$= i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(\partial_\mu\psi + iA_\mu\psi) = i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi$$

где $\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi + iA_\mu\psi$

и $\Rightarrow$ все обычные производные превратились в ковариантные.

Окончательно, действие для калибровочно инвариантного обобщения модели Весса-Зумино запишется в виде

$$\boxed{S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V}\Phi = \int d^4x \Big\{ \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi + i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + f^+ f + \varphi^+ D \varphi + i\sqrt{2}\,\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi \Big\}}$$

Напомним, что компонентное выражение здесь написано в калибровке Весса-Зумино.

§2 Преобразования суперсимметрии в калибровке Весса-Зумино

В калибровке ВЗ

$$V(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x)$$

Но калибровка ВЗ не является суперсимметрично инвариантной:

$$\delta V = -i\bar{\varepsilon}QV \quad \text{где} \quad Q = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^\mu\theta\partial_\mu .$$

$\Longrightarrow$ в δV будут присутствовать слагаемые, линейные по θ, которых нет в калибровке ВЗ

Т.о. преобразования SUSY "сбивают" калибровку ВЗ. Но её можно восстановить с помощью некоторого калибровочного преобразования:

$$\delta = \delta_{SUSY} + \delta_{gauge}$$

Это преобразование удобно строить с использованием не V, а суперполя e^{2V}, поскольку в этом случае калибровочные преобразования более простые:

$$e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \qquad (1-\gamma_5)D\Lambda = 0$$

и $\Rightarrow$ если Λ мало, то

$$\delta_{gauge} e^{2V} = i\Lambda^+ e^{2V} - i e^{2V}\Lambda$$

(Соответствующее выражение для $\delta_{gauge} V$ известно, но намного сложнее)

Ранее было показано, что в калибровке ВЗ

$$e^{2V} = 1 - \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\mu^2)$$

$$\delta_{SUSY} e^{2V} = -i\bar\varepsilon Q e^{2V} = -i\bar\varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - \gamma^\mu\theta\partial_\mu\right)e^{2V} =$$

$$= \left(\bar\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\bar\varepsilon\gamma^\mu\theta\partial_\mu\right)\Big(1 - \bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\nu + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\mu^2)\Big)$$

$$D/3 = -2\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 4i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\gamma_5\lambda + 2i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda$$

$$+2\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\theta\,(D+A_\mu^2) - i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\partial_\mu A_\nu - 2\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\theta\cdot$$

$$\cdot\bar{\theta}\gamma_5\partial_\mu\lambda\cdot\bar{\theta}\theta =$$

$$= -2\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu \cancel{- i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda} - i\sqrt{2}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\cdot\bar{\varepsilon}\lambda$$

$$+ i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\lambda + \cancel{2}i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda + 2\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\theta(D+A_\mu^2)$$

$$+ i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta\,\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\lambda\,(\bar{\theta}\theta)^2 =$$

$$\boxed{\begin{aligned} D/3 &= -2\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda - i\sqrt{2}(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\bar{\varepsilon}\lambda \\ &+ i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\lambda + 2\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\theta\cdot(D+A_\mu^2) + i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\theta\cdot \\ &\cdot\bar{\theta}\theta\,\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\lambda\cdot(\bar{\theta}\theta)^2 \end{aligned}}$$

При этом подчёркнутых слагаемых в калибровке ВЗ нет. Их необходимо сократить с помощью специально подобранного бесконечно малого калибровочного преобразования

$$\delta_{gauge}\, e^{2V} = i\Lambda^+ e^{2V} - ie^{2V}\Lambda$$

При этом оказывается, что правильным выбором Λ будет

$$\Lambda\left(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta\right) = +i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot$$

$$\cdot\bar\varepsilon(1-\gamma_5)\lambda(y)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\Lambda = +i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(x) + i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\underbrace{\theta\cdot\frac{i}{2}\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta}_{-\gamma^\nu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\theta}\partial_\nu A_\mu(x)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\varepsilon(1-\gamma_5)\lambda(x) =$$

$$= +i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(x) - \frac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu(1-\gamma_5)\theta\cdot(\bar\theta\theta)\partial_\nu A_\mu(x)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\varepsilon(1-\gamma_5)\lambda(x)$$

Как следствие,

$$\Lambda^+ = +i\bar\varepsilon\gamma^\mu(1-\gamma_5)\theta A_\mu(x) - \frac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta\theta\cdot\partial_\nu A_\mu(x)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta\cdot\bar\varepsilon(1+\gamma_5)\lambda(x)$$

С помощью этих выражений находим (D/3)

$$\delta_{gauge}e^{2V} = i\Lambda^+e^{2V} - ie^{2V}\Lambda =$$

$$= \Big(-\bar\varepsilon\gamma^\mu(1-\gamma_5)\theta A_\mu - \frac{i}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta\theta\,\partial_\nu A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot$$

$$\cdot\bar\theta(1-\gamma_5)\theta\cdot\bar\varepsilon(1+\gamma_5)\lambda\Big)\Big(1 - \bar\theta\gamma^\alpha\gamma_5\theta A_\alpha + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda +$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\nu^2)\Big) - \Big(1 - \bar\theta\gamma^\alpha\gamma_5\theta A_\alpha + 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2(D + A_\nu^2)\Big)\Big(-\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu - \frac{i}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu(1-\gamma_5)\theta\cdot$$

$$\cdot\bar\theta\theta\cdot\partial_\nu A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\varepsilon(1-\gamma_5)\lambda\Big) =$$

$$= -\bar\varepsilon\gamma^\mu(1-\gamma_5)\theta A_\mu - \frac{i}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta\theta\cdot\partial_\nu A_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta(1-\gamma_5)\theta$$

$$\cdot\bar\varepsilon(1+\gamma_5)\lambda + \bar\varepsilon\gamma^\mu(1-\gamma_5)\theta A_\mu\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\nu - 2i\sqrt{2}\cdot\bar\varepsilon\gamma^\mu(1-\gamma_5)\theta A_\mu$$

$$\cdot\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu + \frac{i}{2}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu(1-\gamma_5)\theta\cdot\bar\theta\theta\,\partial_\nu A_\mu$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar\varepsilon(1-\gamma_5)\lambda - \bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\nu\cdot\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu$$

$$+ 2i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda\cdot\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu =$$

$$= 2\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu - i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\varepsilon\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\,\bar\theta\gamma_5\theta\cdot\bar\varepsilon\lambda -$$

$$- i\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\theta\cdot\partial_\nu A_\mu - \bar\varepsilon\gamma^\mu(1-\gamma_5)\gamma^\nu\overset{+1}{\cancel{\gamma_5}}\theta(\bar\theta\theta)A_\mu A_\nu$$

$$+ \bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\gamma^\nu\overset{-1}{\cancel{\gamma_5}}\theta(\bar\theta\theta)A_\nu A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\varepsilon\gamma^\mu(1-\gamma_5)\overset{-1}{\cancel{\gamma_5}}A_\mu\lambda(\bar\theta\theta)^2$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\varepsilon\gamma^\mu(1+\gamma_5)\overset{+1}{\cancel{\gamma_5}}\lambda A_\mu(\bar\theta\theta)^2 =$$

$$= 2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta A_{\mu} - i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\varepsilon}\lambda$$

$$- i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta\,\partial_{\nu}A_{\mu} - \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\theta\cdot\bar{\theta}\theta\,(A_{\mu}A_{\nu} + A_{\nu}A_{\mu})$$

$$- \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta\,[A_{\mu}, A_{\nu}] - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\cdot\big(A_{\mu}\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda +$$

$$+ \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda\,A_{\mu}\big) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5[A_{\mu},\lambda] =$$

D/3

$$\boxed{\begin{aligned} &= 2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta A_{\mu} - i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\varepsilon}\lambda \\ &- i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\big(\partial_{\nu}A_{\mu} - i[A_{\mu},A_{\nu}]\big) - 2\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\theta\cdot A_{\mu}^2 \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\big(A_{\mu}\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda + \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda\cdot A_{\mu}\big) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5[A_{\mu},\lambda] \end{aligned}}$$

Поэтому

$$\delta_{susy}\, e^{2V} + \delta_{gauge}\, e^{2V} = -\cancel{2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta A_{\mu}} + \cancel{i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda}$$

$$-\cancel{i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\varepsilon}\lambda} + i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta\,\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda + 2\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\theta\,(D + \cancel{A_{\mu}^2})$$

$$+ i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\partial_{\mu}A_{\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\partial_{\mu}\lambda\cdot(\bar{\theta}\theta)^2$$

$$+ \cancel{2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5\theta A_{\mu}} - \cancel{i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma_5\lambda} + \cancel{i\sqrt{2}\,\bar{\theta}\gamma_5\theta\cdot\bar{\varepsilon}\lambda}$$

$$- i\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma_5\theta\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\big(\partial_{\nu}A_{\mu} - i[A_{\mu},A_{\nu}]\big) - \cancel{2\bar{\varepsilon}\theta\cdot\bar{\theta}\theta\,A_{\mu}^2}$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\big(A_{\mu}\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda + \bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\lambda\cdot A_{\mu}\big) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\bar{\varepsilon}\gamma^{\mu}\gamma_5[A_{\mu},\lambda]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&= i\sqrt{2}\,\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot\bar\varepsilon\gamma^\mu\lambda + 2\bar\varepsilon\theta\cdot\bar\theta\theta\cdot D + i\bar\varepsilon\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\theta\cdot\\ &\cdot\bar\theta\theta\cdot F_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{D}_\mu\lambda\cdot(\bar\theta\theta)^2 - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar\theta\theta)^2(A_\mu\cdot\bar\varepsilon\gamma^\mu\lambda\\ &+\bar\varepsilon\gamma^\mu\lambda\cdot A_\mu)\end{aligned}}$$

Это выражение отождествляется с

$$\delta e^{2V} = -\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\delta A_\mu + 2i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma_5\delta\lambda + \frac{1}{2}(\bar\theta\theta)^2\cdot$$

$$\cdot\delta(D + A_\mu^2)$$

$$\Rightarrow \quad \delta A_\mu = -i\sqrt{2}\,\bar\varepsilon\gamma^\mu\lambda$$

$$\delta(D + \underline{A_\mu^2}) = \sqrt{2}\,\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{D}_\mu\lambda - \underline{i\sqrt{2}\,(A_\mu\cdot\bar\varepsilon\gamma^\mu\lambda + \bar\varepsilon\gamma^\mu\lambda\,A_\mu)}$$

$$\Rightarrow \quad \delta D = \sqrt{2}\,\bar\varepsilon\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{D}_\mu\lambda$$

$$2i\sqrt{2}(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma_5\delta\lambda = -i\bar\theta\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\varepsilon(\bar\theta\theta)F_{\mu\nu} + 2\bar\theta\varepsilon(\bar\theta\theta)D$$

$$\Rightarrow \quad \delta\lambda = -\gamma_5\frac{i\sqrt{2}}{4}\left[-i\gamma^{\mu\nu}\gamma_5\varepsilon F_{\mu\nu} + 2\varepsilon D\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D$$

Поэтому окончательно преобразования SUSY калибровочного мультиплета в калибровке ВЗ примут вид

$$\boxed{\begin{aligned} \delta A_\mu &= -i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda \\ \delta\lambda &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D \\ \delta D &= \sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{D}_\mu\lambda \end{aligned}}$$

Кроме того, модифицируются и преобразования SUSY для кирального мультиплета:

$$\delta\Phi = \delta_{SUSY}\Phi + \delta_{gauge}\Phi = -i\bar{\varepsilon}Q\Phi + i\Lambda\Phi$$

т.к. $\Phi \to e^{i\Lambda}\Phi$ при калибровочных преобразованиях.

Вычислим добавок:

$$i\Lambda\Phi = i\left(i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda(y)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)\right) =$$

$$= -\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(y)\varphi(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda(y)\varphi(y)$$

$$-\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta A_\mu(y)\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) =$$

$$= \bar{\theta}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\varepsilon A_\mu\varphi(y) - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi(y)$$

$$+\frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)A_\mu\psi(y)$$

Поэтому

$$\begin{cases} \delta_{gauge}\varphi = 0 \\ \delta_{gauge}\left[(1+\gamma_5)\psi\right] = (1+\gamma_5)\gamma^\mu\varepsilon A_\mu\varphi \\ \delta_{gauge} f = -i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi + \bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)A_\mu\psi \end{cases}$$

Ранее было показано, что

$$\begin{cases} \delta_{SUSY}\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta_{SUSY}\left[(1+\gamma_5)\psi\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon\cdot f - i\gamma^\mu\varepsilon\,\partial_\mu\varphi\right] \\ \delta_{SUSY} f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi \end{cases}$$

Складывая, получаем з-и преобразований компонент кирального мультиплета в калибровке Весса-Зумино:

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon\cdot f - i\gamma^\mu\varepsilon\,\mathcal{D}_\mu\varphi\right] \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\mathcal{D}_\mu\psi - i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi \end{cases}$$

Убираем проектор также как и ранее:

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\psi = (\mathrm{Re}f + i\gamma_5\,\mathrm{Im}f)\varepsilon - i(\mathrm{Re}\,\mathcal{D}_\mu\varphi + i\gamma_5\,\mathrm{Im}\,\mathcal{D}_\mu\varphi)\gamma^\mu\varepsilon \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\mathcal{D}_\mu\psi - i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi \end{cases}$$

§3. Суперсимметричный аналог тензора напряжённости калибровочного поля.

В неабелевом случае

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$$

При локальных калибровочных преобразованиях

$$F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1} \quad \text{где} \quad \omega \in G$$

Построим суперполе, которое является суперсимметричным аналогом $F_{\mu\nu}$. Оказывается, что оно представляет собой вейлевский спинор

$$W_a \equiv \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V} \right]$$

Постараемся понять, почему это так.

Вначале опишем основные свойства W_a:

1) $(1-\gamma_5)_a{}^b W_b = 0$, т.к. $(1-\gamma_5)(1+\gamma_5) = 0$

$\Rightarrow W$ действительно является вейлевским (правым) спинором.

2) W_a – киральное суперполе,

$$(1-\gamma_5) D_b W_a = 0$$

– следствие антикоммутации компонент $(1-\gamma_5)D$.

Действительно, у $(1-\gamma_5)D$ только 2 компоненты, поэтому, если они антикоммутируют, то любая 3-я степень будет равна 0.

Однако

$$\{D_a, D_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab}\, i\partial_\mu \neq 0.$$

тем не менее, при умножении на $(1-\gamma_5)_c{}^a (1-\gamma_5)_d{}^b$ получаем

$$\{(1-\gamma_5)D_c, (1-\gamma_5)D_d\} = -2\left[(1-\gamma_5)\gamma^\mu C(1-\gamma_5)\right]_{cd} i\partial_\mu = 0$$

т.к. $\gamma^\mu C$ является произведением 3-х γ-матриц и $\Rightarrow$

$$(1-\gamma_5)\gamma^\mu C(1-\gamma_5) = (1-\gamma_5)(1+\gamma_5)\gamma^\mu C = 0.$$

Поэтому компоненты $(1-\gamma_5)D$ антикоммутируют и $\Rightarrow$

$$(1-\gamma_5)D_a \cdot (1-\gamma_5)D_b \cdot (1-\gamma_5)D_c = 0$$

В частности, $(1-\gamma_5)D_a \cdot \bar{D}(1-\gamma_5)D =$

$$= \frac{1}{2}C^{bc}(1-\gamma_5)D_a \cdot (1-\gamma_5)D_b \cdot (1-\gamma_5)D_c = 0$$

Поэтому величина $\bar{D}(1-\gamma_5)D$ при действии на любое суперполе будет давать киральное суперполе.

3) Найдём теперь как W_a меняется при калибровочных преобразованиях:

Ранее мы поняли, что при калибровочных преобразованиях

$$e^{2V} \longrightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \quad \text{где} \quad (1-\gamma_5) D \Lambda = 0$$

и $\Rightarrow$ $e^{-2V} \longrightarrow e^{i\Lambda} e^{-2V} e^{-i\Lambda^+}$.

Поэтому

$$W_a = \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V} \right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[e^{i\Lambda} e^{-2V} \cancel{e^{-i\Lambda^+}} (1+\gamma_5) D_a \left(\cancel{e^{i\Lambda^+}} e^{2V} e^{-i\Lambda} \right) \right]$$

поскольку Λ^+ антикирально и $\Rightarrow$ $(1+\gamma_5) D_a e^{i\Lambda^+} = 0$.

киральность Λ и $\Rightarrow$ $e^{i\Lambda}$.

$$= e^{i\Lambda} \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a \left(e^{2V} e^{-i\Lambda} \right) \right] =$$

(правило Лейбница для ковариантной производной)

$$= e^{i\Lambda} \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[e^{-2V} \left((1+\gamma_5) D_a e^{2V} \right) e^{-i\Lambda} \right]$$

$$+ e^{i\Lambda} \frac{1}{32} \bar{D}(1-\gamma_5) D \left[(1+\gamma_5) D_a e^{-i\Lambda} \right] =$$

$$= e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda} + e^{i\Lambda} \frac{1}{32} \bar{D}^b \left\{ (1-\gamma_5) D_b, (1+\gamma_5) D_a \right\} e^{-i\Lambda}$$

При этом

$$\left\{ (1-\gamma_5) D_b, (1+\gamma_5) D_a \right\} = -2 \left[(1-\gamma_5) \gamma^\mu C (1+\gamma_5) \right]_{ba} i\partial_\mu =$$

$$= -4\left[(1-\gamma_5)\gamma^\mu C\right]_{ba}\, i\partial_\mu .$$

Поэтому при калибровочных преобразованиях

$$W_a \to e^{+i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda} - \frac{i}{8} e^{i\Lambda} (\bar{D}(1-\gamma_5)\gamma^\mu C)_a\, \partial_\mu e^{-i\Lambda}$$

CC^{-1}

$$= e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda} + \frac{i}{8} e^{i\Lambda} \partial_\mu \left(D_b C^{bc} C_{cd}\left((1-\gamma_5)\gamma^{\mu T}\right)^d{}_a\right) e^{-i\Lambda}$$

$$= e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda} - \frac{i}{8} e^{i\Lambda} \partial_\mu \left(\gamma^\mu (1-\gamma_5) D\right)_a e^{-i\Lambda}$$

0 (киральность $e^{-i\Lambda}$)

Поэтому $$\boxed{W_a \to e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}}$$

– похоже на закон преобразования тензора поля. Кроме того, видно, что калибровочные преобразования переводят киральное суперполе снова в киральное.

4) Наконец, вычислим W_a в калибровке Весса-Зумино. В калибровке ВЗ калибровочное суперполе имеет вид

$$V_{B3}(x,\theta) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\, A_\mu(x) + i\sqrt{2}\,(\bar{\theta}\theta)\,\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x)$$

– разложение начинается со второй степени θ.

Поэтому

$$e^{-2V} D_\theta e^{2V} = (1-2V+2V^2) D_\theta (1+2V+2V^2) =$$

$$= (1-2V+\cancel{2V^2})(\underbrace{2D_\theta V}_{\sim\theta^1} + 2V D_\theta V + 2D_\theta V \cdot V) =$$

$$= 2D_\theta V + \underline{2V D_\theta V} + 2D_\theta V \cdot V - \underline{4V D_\theta V} =$$

$$= 2D_\theta V + 2D_\theta V \cdot V - 2V D_\theta V = 2D_\theta V - 2[V, D_\theta V]$$

Подставляем в это выражение V_{B3} и

$$D = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} - i(\gamma^\mu\theta)\partial_\mu .$$

$$D V_{B3} = \left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - i(\gamma^\mu\theta)\partial_\mu\right)\left(-\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta A_\nu + i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D\right) = -\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + 2i\sqrt{2}\,\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot$$

$$\cdot\gamma_5\lambda + \theta\cdot(\bar\theta\theta)D + \frac{i}{2}(\gamma^\mu\theta)\cdot\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\partial_\mu A_\nu + (\gamma^\mu\theta)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{2}\,(\bar\theta\theta)\cdot\bar\theta\gamma_5\partial_\mu\lambda =$$

$$= \gamma_5\gamma^\mu\theta A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\theta\cdot\gamma_5\lambda - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\gamma_5\theta\cdot\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\cdot$$

$$\cdot\gamma^\mu\lambda + i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\gamma_5\lambda + \theta\cdot(\bar\theta\theta)D - \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\theta\cdot\bar\theta\theta\cdot$$

$$\cdot\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2\sqrt{2}}(\bar\theta\theta)^2\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\lambda =$$

$$= \gamma_5 \gamma^\mu \theta A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\theta \cdot \gamma_5\lambda - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\gamma_5\theta\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot$$

$$\cdot \bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\gamma^\mu\lambda + \theta\cdot(\bar\theta\theta)D - \frac{i}{2}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\theta\cdot\bar\theta\theta\,\partial_\mu A_\nu$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(\bar\theta\theta)^2\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\lambda$$

Кроме того, нам необходим

$$[V, D_b V]_{B3} = \Big[-\frac{1}{2}\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta A_\mu + i\sqrt{2}\,\bar\theta\theta\cdot\bar\theta\gamma_5\lambda + \cancelto{0}{\frac{1}{4}(\bar\theta\theta)^2 D},$$

$$\Big(\gamma_5\gamma^\nu\theta A_\nu + \frac{i}{\sqrt{2}}\cancelto{0}{\bar\theta\theta}\cdot\gamma_5\lambda - \frac{i}{\sqrt{2}}\cancelto{0}{\bar\theta\gamma_5\theta}\,\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\gamma^\nu\lambda$$

$$+ \theta\cdot\cancelto{0}{(\bar\theta\theta)}D - \frac{i}{2}\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\theta\cdot\cancelto{0}{(\bar\theta\theta)}\partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cancelto{0}{(\bar\theta\theta)^2}\gamma_5\gamma^\nu\partial_\nu\lambda\Big)\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma_5\gamma^\nu\theta\cdot\bar\theta\gamma^\mu\gamma_5\theta\,[A_\mu, A_\nu] - \frac{i}{2\sqrt{2}}\underline{(\bar\theta\theta)^2\gamma^\mu}[A_\mu,\lambda]$$

$$+ i\sqrt{2}\underline{\left(-\frac{1}{4}\right)(\bar\theta\theta)^2}\cancel{\gamma_5}\gamma^\nu\cancel{\gamma_5}[\lambda, A_\nu] =$$

"–"

$$= \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\theta(\bar\theta\theta)[A_\mu, A_\nu] - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar\theta\theta)^2\gamma^\mu[A_\mu,\lambda]$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)_a{}^b\cdot e^{-2V}D_b e^{2V} = \frac{1}{2}e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V} =$$

$$= (1+\gamma_5)D_a V - [V, (1+\gamma_5)D_a V] =$$

$$= (1+\gamma_5)\Big\{ \gamma^\mu \theta A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar\theta(1-\gamma_5)\theta \cdot \lambda + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar\theta \gamma^\mu \gamma_5 \theta\, \gamma^\mu \lambda$$

$$+ \theta \cdot (\bar\theta\theta) D - \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \theta \cdot \bar\theta\theta \cdot \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar\theta\theta)^2 \gamma^\mu \partial_\mu \lambda$$

$$- \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \theta \cdot \bar\theta\theta \cdot [A_\nu, A_\mu] + \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar\theta\theta)^2 \gamma^\mu [A_\mu, \lambda] \Big\}_a$$

„ − "

Д/З

$$= (1+\gamma_5)\Big\{ \gamma^\mu \theta_a A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_a \cdot \bar\theta(1-\gamma_5)\theta + \gamma^\mu \lambda_a \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \bar\theta \gamma^\mu \gamma_5 \theta$$

$$+ \theta_a (\bar\theta\theta)\Big(D - \frac{i}{2}\partial_\mu A_\mu\Big) - \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \theta_a \cdot (\bar\theta\theta) \Big(\partial_\mu A_\nu + i[A_\mu, A_\nu]\Big)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar\theta\theta)^2 \gamma^\mu \Big(\partial_\mu \lambda_a + 2i[A_\mu, \lambda_a]\Big)\Big\} = \frac{1}{2} e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V}$$

После этого к полученному выражению необходимо применить оператор $\frac{1}{16} \bar D (1-\gamma_5) D$.

При этом $\bar D^a \equiv D_b C^{ba} = C^{ba}\Big(\frac{\partial}{\partial \bar\theta^b} - i(\gamma^\mu\theta)_b \partial_\mu\Big)$.

Имеем:
$$(-C\gamma^\mu\theta)^T = (-C\gamma^\mu C^{-1} C\theta)^T = (\gamma^{\mu T} C\theta)^T =$$

$$= \theta^T C^T \gamma^\mu = -\bar\theta \gamma^\mu$$

$$C^{ba} \frac{\partial}{\partial \bar\theta^b} = C^{ba} \frac{\partial \theta_c}{\partial \bar\theta^b} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_c} = (\text{стр. } 19) = C^{ba} C_{cb} \frac{\partial}{\partial \theta_c} = -\frac{\partial}{\partial \theta_a}$$

Поэтому

$$\bar{D} = -\frac{\partial}{\partial \theta} + i\bar{\theta}\gamma^\mu \partial_\mu$$

Как следствие,

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{D}(1-\gamma_5)D &= \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\bar{\theta}\gamma^\mu\partial_\mu\right)(1-\gamma_5)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\gamma^\nu\theta\partial_\nu\right) = \\ &\overset{Д/З}{=} -\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\partial_\mu + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\partial^2\end{aligned}}$$

На какой бы объект не действовал бы этот оператор, всегда будет получаться киральное суперполе. Действительно, переберём все возможности:

а) $\bar{D}(1-\gamma_5)D\,\varphi(x) = \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\partial^2\varphi(x) = \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\partial^2\varphi(y)$

б) $\bar{D}(1-\gamma_5)D\left(\theta_a\varphi(x)\right) = -2i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_a\partial_\mu\varphi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\cdot\theta_a\partial^2\varphi(x)$

$= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(y)$

т.к. $= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(x) + \gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\cdot\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x)$

$= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(x) - \gamma^\mu(1+\gamma_5)\gamma^\nu\cancelto{-1}{\gamma_5}\theta_a(\bar{\theta}\theta)\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x)$

$= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(x) + (1-\gamma_5)\theta_a(\bar{\theta}\theta)\,\partial^2\varphi(x)$

$= -2i\gamma^\mu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\mu\varphi(x) + \theta_a\cdot\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\partial^2\varphi(x)$ – верно.

в) $$\underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D\left(\bar{\theta}\theta\cdot\varphi(x)\right)} = -\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\cdot 2\theta\cdot\varphi(x)$$

$$+2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\cdot 2\theta\,\partial_\mu\varphi(x) + (\bar{\theta}\theta)^2\partial_\mu^2\varphi(x) =$$

$$= -8\varphi(x) - 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x) + (\bar{\theta}\theta)^2\partial^2\varphi(x) = \underline{-8\varphi(y)}$$

г) $$\underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D\left(\bar{\theta}\gamma_5\theta\,\varphi(x)\right)} = 8\varphi(x) + 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x)$$

$$+(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2\partial^2\varphi(x) = \underline{+8\varphi(y)}$$

д) $$\underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D\left(\bar{\theta}\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\varphi(x)\right)} = 2i\bar{\theta}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\cdot 2\gamma^\nu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x)$$

$$= 4i\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma_5)\theta\,\partial_\mu\varphi(x) = \underline{4i\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\partial^\nu\varphi(y)}$$

е) $$\underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D\left(\theta_a(\bar{\theta}\theta)\varphi(x)\right)} = \left(-\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\gamma^\mu\theta\,\partial_\mu\right)\left(\theta_a(\bar{\theta}\theta)\varphi(x)\right) = (1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^b}\left(\delta_a^b\,\bar{\theta}\theta + 2\theta_a\bar{\theta}^b\right)\varphi(x)$$

$$-2i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\theta_b\cdot\left(\delta_a^b\,\bar{\theta}\theta + 2\theta_a\bar{\theta}^b\right)\partial_\mu\varphi(x) =$$

$$= \left(4(1-\gamma_5)\theta_a - 8\theta_a\right)\varphi(x) - 2i(1-\gamma_5)\gamma^\mu\overset{\swarrow\gamma_5}{\theta_a}(\bar{\theta}\theta)\partial_\mu\varphi(x)$$

$$-4i\theta_a\cdot\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x) = -4(1+\gamma_5)\theta_a\varphi(x) -$$

$$-2i(1+\gamma_5)\theta_a\,\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta\,\partial_\mu\varphi(x) = \underline{-4(1+\gamma_5)\theta_a\,\varphi(y)}$$

*) $\underline{\bar{D}(1-\gamma_5)D\left((\bar{\theta}\theta)^2\varphi(x)\right)} = -\frac{\partial}{\partial\theta_a}(1-\gamma_5)\cdot 4\theta_a(\bar{\theta}\theta)\varphi(x)$

$$=\left[-16\,\bar{\theta}\theta - 4\theta_a\cdot 2\bar{\theta}(1-\gamma_5)^a\right]\varphi(x) = \left[-16\bar{\theta}\theta + 8\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta\right]\varphi$$

$$\underline{= -8\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\varphi(y)}$$

— видно, что во всех случаях действительно получаются киральные суперполя.

Применим теперь полученные результаты для вычисления

$$W_a = \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D\left[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\bar{D}(1-\gamma_5)D\cdot\frac{1}{2}\left(e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{+2V}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\bar{D}(1-\gamma_5)D\Big[(1+\gamma_5)\Big\{\gamma^\mu\theta_a A_\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}\lambda_a\bar{\theta}(1-\gamma_5)\theta +$$

$$+\gamma^\mu\lambda_a\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma_5\theta + \theta_a(\bar{\theta}\theta)\left(D - \frac{i}{2}\partial_\mu A_\mu\right) - \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a\cdot\bar{\theta}\theta\cdot$$

$$\cdot\left(\partial_\mu A_\nu + i[A_\mu, A_\nu]\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\bar{\theta}\theta)^2\gamma^\mu\left(\partial_\mu\lambda_a + 2i[A_\mu,\lambda_a]\right)\Big\}\Big]$$

$$= \frac{1}{16}(1+\gamma_5)\Big\{-2i\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma_5)\theta_a\partial_\nu A_\mu(y) + \frac{i}{\sqrt{2}}(-16)\lambda_a(y)$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot 4i\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\,\gamma^\mu\partial_\mu\lambda_a(y) - 4(1+\gamma_5)\theta_a\left(D(y) - \frac{i}{2}\partial_\mu A_\mu(y)\right)$$

$$- \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}(-4)(1+\gamma_5)\theta_a \cdot \left(\partial_\mu A_\nu(y) + i\,[A_\mu(y), A_\nu(y)]\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (-8)\,\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \cdot \gamma^\mu \left(\partial_\mu \lambda_a(y) + 2i\,[A_\mu(y), \lambda_a(y)]\right)\Big\} =$$

$$= (1+\gamma_5)\Big\{ -\frac{i}{4}\left(\gamma^{\mu\nu} + \cancel{\gamma^{\nu\mu}}\right)\theta_a \cdot \underline{\partial_\nu A_\mu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\lambda_a - \frac{1}{4\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \cdot$$

$$\cdot\, \underline{\underline{\gamma^\mu \partial_\mu \lambda_a}} - \frac{1}{2}\theta_a\left(D - \cancel{\frac{i}{2}\partial_\mu A_\mu}\right) + \frac{i}{4}\gamma^{\mu\nu}\theta_a\left(\underline{\partial_\mu A_\nu + i[A_\mu, A_\nu]}\right)$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \cdot \gamma^\mu\left(\underline{\underline{\partial_\mu \lambda_a}} + 2i\,[A_\mu, \lambda_a]\right)\Big\} =$$

$$\boxed{\overset{\mathcal{D}/3}{=} (1+\gamma_5)\Big\{ -\frac{i}{\sqrt{2}}\lambda_a(y) - \frac{1}{2}\theta_a D(y) + \frac{i}{4}\gamma^{\mu\nu}\theta_a F_{\mu\nu}(y) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \cdot \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda_a(y)\Big\}}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$

$\mathcal{D}_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]$

т.о. окончательно мы получаем, что в калибровке Весса-Зумино

$$\boxed{W_a = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Big\{ -i\sqrt{2}\,\lambda_a(y) - \theta_a D(y) + \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a F_{\mu\nu}(y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\,\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda_a(y)\Big\}}$$

т.о. киральное суперполе $W_a(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta)$ в качестве одной из компонент содержит $F_{\mu\nu}$ и $\Rightarrow$ является его суперсимметричным аналогом.

При остаточных калибровочных преобразованиях с

$$\Lambda = a(y^\mu) \quad , \; a \in Re \quad и \quad \omega \equiv e^{ia}$$

мы получаем, что из з-на преобразования

$$W_a \to e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}$$

получаются преобразования

$$\lambda \to \omega \lambda \omega^{-1}; \quad D \to \omega D \omega^{-1};$$

$$F_{\mu\nu} \to \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}; \quad \mathcal{D}_\mu \lambda \to \omega \mathcal{D}_\mu \lambda \omega^{-1}$$

– всё получается правильно.

§4. N=1 суперсимметричная теория Янга-Миллса

Построим теперь суперсимметричной аналог величины

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^A\right)^2\right) = -\frac{1}{2e^2} \, tr \int d^4x \, F_{\mu\nu}^2 .$$

– предположительно некоторая величина, квадратичная по W_a и инвариантная относительно группы Лоренца.

Вариант $\overline{W}W$ где $\overline{W} \equiv W^{+}\gamma^{0}$ не подходит, т.к. W – правый спинор, а

$$\overline{\psi_R} = \left[\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi\right]^{+}\gamma^{0} = \psi^{+}\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^{0} = \psi^{+}\gamma^{0}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)$$

$$= (\overline{\psi})_L \quad \text{и} \Rightarrow \quad \overline{\psi}_R\psi_R = 0.$$

Но есть ещё одно лоренц-инвариантное выражение

$$\overline{W^{c}}W = W^{T}CW = W_a C^{ab} W_b$$

где C – матрица зарядового сопряжения.

Очевидно, что это выражение $\neq 0$ из-за киральности, т.к. C есть произведение 2-х γ-матриц.

Величина $W_a C^{ab} W_b$ очевидно является киральной и $\Rightarrow$ для получения инварианта относительно преобразований суперсимметрии её нужно проинтегрировать по киральному суперпространству:

$$\boxed{S_{N=1\ SYM} = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b}$$

– действие $N=1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса, записанное в терминах суперполей.

Суперсимметрия и лоренц-симметрия очевидны

Калибровочная инвариантность:

$$W_a \to e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}$$

$$\Rightarrow tr\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b \to tr\int d^4x\, d^2\theta\, \cancel{e^{i\Lambda}} W_a \cancel{e^{-i\Lambda}}$$

$$\cdot C^{ab} \cancel{e^{i\Lambda}} W_b \cancel{e^{-i\Lambda}} = tr\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b = inv$$

Найдём теперь выражение для действие в терминах компонентных полей в калибровке Весса-Зумино.

Ранее было показано, что в калибровке ВЗ

$$W_a = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Big\{-i\sqrt{2}\,\lambda_a(y) - \theta_a D(y) + \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\theta_a F_{\mu\nu}(y)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda_a(y)\Big\}$$

Имеем:

$$\Big[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\lambda\Big]^T C = \lambda^T \frac{1}{2}(1+\gamma_5) C = \lambda^T C\, \frac{1}{2}(1+\gamma_5) =$$

$$= \bar\lambda \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

$$\Big[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^{\mu\nu}\theta\Big]^T C = \theta^T(\gamma^{\mu\nu})^T C \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5) =$$

$$= \bar\theta\, C^{-1}\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^T C \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = -\bar\theta\gamma^{\mu\nu}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

$$\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda\right]^T C = \mathcal{D}_\mu \lambda^T \gamma^{\mu T} C \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5) =$$

$$= -\mathcal{D}_\mu \bar\lambda \gamma^\mu \cdot \frac{1}{2}(1+\gamma_5).$$

Поэтому

$$W^T C = \Big\{ -i\sqrt{2}\,\bar\lambda(y) - \bar\theta\, D(y) - \frac{i}{2}\bar\theta \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(y) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta \cdot \mathcal{D}_\mu \bar\lambda(y)\gamma^\mu \Big\} \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

Ранее было доказано, что

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi(y, (1+\gamma_5)\theta) = \int d^4x\, d^2\theta\, \Phi(x, (1+\gamma_5)\theta) +$$

+ поверхностные члены.

Поэтому с точностью до поверхностных слагаемых

$$S_{N=1\, SYM} = \frac{1}{2e^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta \Big\{ -i\sqrt{2}\,\bar\lambda(x) - \bar\theta D(x) -$$

$$- \frac{i}{2}\bar\theta\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, \mathcal{D}_\mu\bar\lambda(x)\gamma^\mu \Big\} \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \cdot$$

$$\cdot \Big\{ -i\sqrt{2}\,\lambda(x) - \theta D(x) + \frac{i}{2}\gamma^{\alpha\beta}\theta\, F_{\alpha\beta}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\gamma^\alpha \mathcal{D}_\alpha \lambda(x) \Big\}$$

– нужно сохранить только слагаемые, квадратичные по $(1+\gamma_5)\theta$ и воспользоваться равенством

$$\int d^2\theta \cdot \bar\theta(1+\gamma_5)\theta = 4.$$

$$\Rightarrow S_{N=1\,SYM} = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta \Big\{ + i\cancel{\sqrt{2}}\,\bar\lambda\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\alpha \mathcal{D}_\alpha \lambda \cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta + \bar\theta\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\theta\cdot D^2 + \frac{1}{4}\bar\theta\gamma^{\mu\nu}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^{\alpha\beta}\theta\cdot$$

$$\cdot F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot \mathcal{D}_\mu\bar\lambda\gamma^\mu\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma_5)(-i)\cancel{\sqrt{2}}\lambda\Big\}$$

При этом

$$\bar\theta\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)\theta = \frac{1}{4}\bar\theta\theta\cdot \mathrm{tr}\big(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)\big) +$$

$$+\frac{1}{4}\bar\theta\gamma_5\theta\cdot \mathrm{tr}\big(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}(1+\gamma_5)\gamma_5\big) - \frac{1}{8}\,\underbrace{\bar\theta\gamma^{\gamma\delta}\theta}_{0}\,\mathrm{tr}\big(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\cdot$$

$$\cdot(1+\gamma_5)\gamma^{\gamma\delta}\big) =$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{4}}\,\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\cancel{4}\,\big[\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\big]$$

Поэтому

$$S_{N=1\,SYM} = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,d^2\theta\cdot\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\cdot\Big\{\frac{i}{2}\bar\lambda(1+\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda$$

$$+\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{8}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\big(-\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\big) -$$

по частям

$$-\frac{i}{2}\mathcal{D}_\mu\bar\lambda\gamma^\mu(1+\gamma_5)\lambda\Big\} =$$

$$= \frac{2}{e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\Big\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{i}{4}F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^2$$

$$+ i\bar\lambda\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda - \frac{i}{2}\partial_\mu\big(\bar\lambda\gamma^\mu\gamma_5\lambda\big)\Big\}$$

т.к. $tr\, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ – полная производная, то мнимая часть подынтегрального выражения является полной производной.

После взятия вещественной части получим

$$\boxed{S_{N=1\,SYM} = \frac{2}{e^2}\, tr\int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}D^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\lambda \right\}}$$

– видно, что D – вспомогательное поле, а суперпартнёром A_μ является майорановский спинор λ в присоединённом представлении калибровочной группы.

Д/З Доказать тождество

$$0 = (C\gamma^\mu)^{ab}(C\gamma_\mu)^{cd} + (C\gamma^\mu)^{ac}(C\gamma_\mu)^{db} + (C\gamma^\mu)^{ad}(C\gamma_\mu)^{bc}$$

Указание: провести разложение по матрицам

$$C_{ba} \quad (\gamma_5 C)_{ba} \quad (\gamma^\nu C)_{ba} \quad (\gamma^\nu\gamma_5 C)_{ba} \quad (\gamma^{\alpha\beta}C)_{ba},$$

которые образуют базис в пр-ве 4×4 матриц

Д/З С помощью этого тождества доказать инвариантность теории относительно SUSY преобразований

$$\delta A_\mu = -i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda \qquad \delta\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D$$

$$\delta D = \sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{D}_\mu\lambda$$

§ 5. N = 1 суперсимметричная КХД

Построим $N=1$ суперсимметричное обобщение КХД – т.е. теории, в которой есть дираковские фермионы, а левые и правые частицы одинаково взаимодействуют с калибровочными полями. При этом G - калибровочная группа, а R - представление, в котором лежат дираковские фермионы.

1 дираковский фермион имеет on shell 4 ст. св.
1 майорановский фермион - 2 ст. св.

Поэтому разумно строить дираковский фермион из 2-х майорановских.

$$(1-\gamma_5)D\Phi = 0$$

$$\Phi(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) = \varphi(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(y)$$

- внутри кирального суперполя содержится 1 майорановский спинор.

Пусть Φ лежит в представлении R калибровочной группы. Возьмём ещё суперполе $\tilde{\Phi} \in \bar{R}$, т.ч. $(1-\gamma_5)D\tilde{\Phi} = 0$

$$\tilde{\Phi}(y^\mu, (1+\gamma_5)\theta) \equiv \tilde{\varphi}(y) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\tilde{\psi}(y) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \tilde{f}(y)$$

– здесь появляется ещё один майорановский спинор $\tilde{\psi}$.

Почему нужно представление $\bar{R}$ будет понятно далее.

Действие $N=1$ SQCD можно записать в терминах суперполей в виде

$$S = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x\, d^4\theta \cdot$$

$$\cdot \left(\Phi^+ e^{2V} \Phi + \tilde{\Phi}^+ e^{-2V^T} \tilde{\Phi} \right) + \left(\frac{m}{2} \int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{\Phi}^T \Phi + \text{к.с.} \right)$$

Эта теория очевидно является инвариантной относительно преобразований SUSY и группы Лоренца. Кроме того, есть калибровочная инвариантность:

$$\begin{cases} \Phi \to e^{i\Lambda}\Phi & \text{где} \quad (1-\gamma_5)D\Lambda = 0 \\ \tilde{\Phi} \to e^{-i\Lambda^T}\tilde{\Phi} & \Lambda = e\Lambda^A T^A \\ e^{2V} \to e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} & (\text{или} \quad \Lambda = e\Lambda^A t^A) \end{cases}$$

Действительно, для компактных групп если

$$\varphi \to \omega\varphi\,, \text{ то } \varphi^* \to \omega^*\varphi^* = (\omega^+)^T\varphi^* = (\omega^{-1})^T\varphi^*$$

Поэтому у $\tilde{\Phi} \in \bar{R}$ такой закон преобразования.

$$\Phi^+ e^{2V} \Phi \longrightarrow \Phi^+ \cancel{e^{-i\Lambda^+}} \cdot \cancel{e^{i\Lambda^+}} e^{2V} \cancel{e^{-i\Lambda}} \cdot \cancel{e^{i\Lambda}} \Phi = \Phi^+ e^{2V} \Phi = \text{inv}$$

$$\mathrm{tr}\, W_a C^{ab} W_b \longrightarrow \mathrm{tr}\left(\cancel{e^{i\Lambda}} W_a \cancel{e^{-i\Lambda}} C^{ab} \cancel{e^{i\Lambda}} W_b \cancel{e^{-i\Lambda}}\right) =$$

$$= \mathrm{tr}\left(W_a C^{ab} W_b\right) = \text{inv}$$

$$e^{-2V} \longrightarrow e^{i\Lambda} e^{-2V} e^{-i\Lambda^+}$$

$$e^{-2V^T} \longrightarrow e^{-i\Lambda^*} e^{-2V^T} e^{i\Lambda^T}$$

$$\tilde{\Phi}^+ e^{-2V^T} \tilde{\Phi} \longrightarrow \tilde{\Phi}^+ \cancel{e^{i\Lambda^*}} \cdot \cancel{e^{-i\Lambda^*}} e^{-2V^T} \cancel{e^{i\Lambda^T}} \cdot \cancel{e^{-i\Lambda^T}} \tilde{\Phi} =$$

$$= \tilde{\Phi}^+ e^{-2V^T} \tilde{\Phi} = \text{inv}.$$

$$\tilde{\Phi}^T \Phi \longrightarrow \tilde{\Phi}^T \cancel{e^{-i\Lambda}} \cdot \cancel{e^{i\Lambda}} \Phi = \tilde{\Phi}^T \Phi = \text{inv}.$$

Т.о. мы убедились, что рассматриваемая теория действительно является калибровочно инвариантной.

Запишем теперь действие в терминах компонентных полей в калибровке ВЗ и убедимся, что оно действительно описывает суперсимметричное обобщение КХД.

Почти всё уже было вычислено ранее:

$$\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}D^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda \right\}$$

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^+ e^{2V}\phi = \int d^4x \left\{ \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi + i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + f^+ f + \varphi^+ D\varphi + i\sqrt{2}\,\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi \right\}$$

Аналогичным образом вычисляется слагаемое с суперполем $\tilde{\phi}$, в котором A_μ, λ и D нужно заменить на $-A_\mu^T$; $-\lambda^T$ и $-D^T$ соответственно. В результате

$$\frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \tilde{\phi}^+ e^{-2V^T}\tilde{\phi} = \int d^4x \left\{ \mathcal{D}_\mu \tilde{\varphi}^+ \mathcal{D}^\mu \tilde{\varphi} + i\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{\psi} + \tilde{f}^+\tilde{f} - \tilde{\varphi}^+ D^T\tilde{\varphi} - i\sqrt{2}\,\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi} + i\sqrt{2}\,\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\psi} \right\}$$

где транспонирование действует на генераторы калибровочной группы. При этом

$$\mathcal{D}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + iA_\mu\varphi \qquad \mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi + iA_\mu\psi$$

$$\mathcal{D}_\mu\tilde{\varphi} = \partial_\mu\tilde{\varphi} - iA_\mu^T\tilde{\varphi} \qquad \mathcal{D}_\mu\tilde{\psi} = \partial_\mu\tilde{\psi} - iA_\mu^T\tilde{\psi}$$

$$\mathcal{D}_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda + i[A_\mu, \lambda]$$

$$\frac{m}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{\Phi}^T\Phi + \text{к.с.} \;\overset{=}{\longrightarrow}$$ (отбрасываем п. произв.)

$$\overset{=}{\longrightarrow} \frac{m}{2}\int d^4x\, d^2\theta \left(\tilde{\varphi}^T(x) + \bar{\tilde{\psi}}(x)(1+\gamma_5)\theta + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta \tilde{f}^T(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\varphi(x) + \bar{\theta}(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta f(x)\right) + \text{к.с.} =$$

$$= \frac{m}{2}\int d^4x\, d^2\theta \cdot \bar{\theta}(1+\gamma_5)\theta\left\{\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^T f + \frac{1}{2}\tilde{f}^T\varphi - \frac{1}{2}\bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\psi\right\}$$

$$+ \text{к.с.} =$$

$$= m\int d^4x \left\{\tilde{\varphi}^T f + \tilde{f}^T\varphi - \bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\psi + \tilde{\varphi}^+ f^* + \tilde{f}^+\varphi^*\right.$$

$$\left. - \bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\psi\right\} =$$

$$= m\int d^4x\left\{\tilde{\varphi}^T f + \tilde{f}^T\varphi + \tilde{\varphi}^+ f^* + \tilde{f}^+\varphi^* - 2\bar{\tilde{\psi}}\psi\right\}$$

т.о., собирая всё вместе, получаем, что

$$S = \int d^4x\left\{\frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}D^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda\right)\right.$$

$$+ \mathcal{D}_\mu\varphi^+\mathcal{D}^\mu\varphi + i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi + f^+f + \varphi^+D\varphi$$

$$+ i\sqrt{2}\,\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi + \mathcal{D}_\mu\tilde{\varphi}^+\mathcal{D}^\mu\tilde{\varphi}$$

$$+ i\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\tilde{\psi} + \tilde{f}^+\tilde{f} - \tilde{\varphi}^+D^T\tilde{\varphi} - i\sqrt{2}\,\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi}$$

$$\left. + i\sqrt{2}\,\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\psi} + m\left(\tilde{\varphi}^T f + \tilde{f}^T\varphi + \tilde{\varphi}^+ f^* + \tilde{f}^+\varphi^* - 2\bar{\tilde{\psi}}\psi\right)\right\}$$

При этом спиноры ψ и $\tilde{\psi}$ – майорановские. Было бы желательно записать результат в терминах дираковского спинора, который можно определить формулой

$$\Psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\tilde{\psi}\right]$$

Тогда

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^{+}\gamma^{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi^{+}(1+\gamma_5) + \tilde{\psi}^{+}(1-\gamma_5)\right]\gamma^{0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi^{+}\gamma^{0}(1-\gamma_5) + \tilde{\psi}^{+}\gamma^{0}(1+\gamma_5)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}(1-\gamma_5) + \bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\right]$$

Поэтому

$$i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\Psi \equiv i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iA_{\mu})\Psi = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}(1-\gamma_5) + \bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\right]\cdot$$

$$\cdot\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iA_{\mu})\left[(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\tilde{\psi}\right] = i\bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^{\mu}\cdot$$

$$\cdot(\partial_{\mu} + iA_{\mu})\psi + i\bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + iA_{\mu})\tilde{\psi}$$

Имеем:

$$i\bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\psi} = i\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\psi} + 2i\bar{\tilde{\psi}}\gamma_5\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\psi} =$$

$$= i\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\psi} + \partial_{\mu}\left[i\bar{\tilde{\psi}}\gamma_5\gamma^{\mu}\tilde{\psi}\right]$$

$$i\bar{\tilde\psi}(1+\gamma_5)\gamma^\mu \cdot iA_\mu \tilde\psi = i\tilde\psi^T C(1+\gamma_5)\gamma^\mu\cdot iA_\mu\tilde\psi =$$

$$=\left(i\tilde\psi^T C(1+\gamma_5)\gamma^\mu\cdot iA_\mu\tilde\psi\right)^T = i\tilde\psi^T\cdot iA_\mu^T C C^{-1}\gamma^{\mu T}(1+\gamma_5)C\tilde\psi$$

$$= i\tilde\psi^T C\cdot iA_\mu^T(-\gamma^\mu)(1+\gamma_5)\tilde\psi = i\bar{\tilde\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(-iA_\mu^T)\tilde\psi$$

Поэтому

$$i\bar\Psi\gamma^\mu D_\mu\Psi = i\bar\psi(1-\gamma_5)\gamma^\mu(\partial_\mu+iA_\mu)\psi + i\bar{\tilde\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\cdot$$

$$\cdot(\partial_\mu - iA_\mu^T)\tilde\psi + \partial_\mu\left[i\bar{\tilde\psi}\gamma_5\gamma^\mu\tilde\psi\right]$$

можно исключить из действия.

Массовое слагаемое:

$$\bar\Psi\Psi = \frac{1}{2}\left[\bar\psi(1-\gamma_5)+\bar{\tilde\psi}(1+\gamma_5)\right]\cdot\left[(1+\gamma_5)\psi+(1-\gamma_5)\tilde\psi\right]$$

$$= \bar\psi(1-\gamma_5)\tilde\psi + \bar{\tilde\psi}(1+\gamma_5)\psi = 2\bar\psi\tilde\psi.$$

т.о. в действии действительно будет присутствовать дираковский лагранжиан

$$i\bar\Psi\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\bar\Psi\Psi \quad \text{где} \quad D_\mu\Psi \equiv \partial_\mu\Psi + iA_\mu\Psi.$$

Но ещё есть юкавские слагаемые, которые также необходимо записать через спинор Ψ. Имеем:

$i\sqrt{2}\,\bar{\psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi = i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi$ – очевидно

$-i\sqrt{2}\,\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi = -i\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi$ – очевидно.

$-i\sqrt{2}\,\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi}$ = [нужно преобразовать, чтобы записать в терминах Ψ]

$$= -i\sqrt{2}\left(\bar{\tilde{\psi}}(1-\gamma_5)\lambda^T\tilde{\varphi}\right)^T = -i\sqrt{2}\,\tilde{\varphi}^T\cdot\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\tilde{\psi} =$$

$$= -i\tilde{\varphi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi$$

$$i\sqrt{2}\,\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\psi} = i\sqrt{2}\left(\tilde{\varphi}^+\bar{\lambda}^T(1+\gamma_5)\tilde{\psi}\right)^T =$$

$$= i\sqrt{2}\,\bar{\tilde{\psi}}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^* = i\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^*.$$

Т.о. в терминах дираковского спинора Ψ действие рассматриваемой модели запишется в виде

$$S = \int d^4x\Big\{\frac{2}{e^2}\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}D^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda\right)$$

$$+ \mathcal{D}_\mu\varphi^+\mathcal{D}^\mu\varphi + \mathcal{D}_\mu\tilde{\varphi}^+\mathcal{D}^\mu\tilde{\varphi} + f^+f + \tilde{f}^+\tilde{f} + \varphi^+D\varphi$$

$$- \tilde{\varphi}^+D\tilde{\varphi} + m\left(\tilde{\varphi}^Tf + \tilde{f}^T\varphi + \tilde{\varphi}^+f^* + \tilde{f}^+\varphi^*\right) +$$

$$+ i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi$$

$$- i\tilde{\varphi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi + i\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^*\Big\}$$

Исключим в этом выражении вспомогательные поля D, f и $\tilde{f}$.

Исключаем поле D^A ($D = eD^A t^A$ в части действия, соответствующей $N=1$ SYM, и $D = eD^A T^A$ в части, содержащей суперполя материи).

$$\frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}D^2\right) = \frac{1}{2}(D^A)^2$$

и $\Rightarrow$ все слагаемые, содержащие D^A, имеют вид

$$\frac{1}{2}(D^A)^2 + e\varphi^+ T^A D^A \varphi - e\tilde{\varphi}^+ T^{A^T} D^A \tilde{\varphi}$$

$\Rightarrow$ ур-е движения для D^A примет вид

$$0 = D^A + e\varphi^+ T^A \varphi - e\tilde{\varphi}^+ T^{A^T}\tilde{\varphi} =$$

$$= D^A + e\left(\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^T T^A \tilde{\varphi}^*\right)$$

поскольку $\tilde{\varphi}^+ T^{A^T}\tilde{\varphi} = \left(\tilde{\varphi}^+ T^{A^T}\tilde{\varphi}\right)^T = \tilde{\varphi}^T T^A \tilde{\varphi}^*$.

Для исключения поля D^A подставляем решение ур-й движения в квадратичный член с обратным знаком,

$$-\frac{1}{2}(D^A)^2 \Rightarrow -\frac{e^2}{2}\left(\varphi^+ T^A \varphi - \tilde{\varphi}^T T^A \tilde{\varphi}^*\right)^2$$

При этом $(\varphi^+ T^A \varphi)^* = (\varphi^+ T^A \varphi)^+ = \varphi^+ T^A \varphi \in Re$

и аналогично $\tilde{\varphi}^T T^A \tilde{\varphi}^* \in Re$

Затем исключаем f и $\tilde{f}$. Слагаемые с этими полями имеют вид

$$f^+f + \tilde{f}^+\tilde{f} + m(\tilde{\varphi}^T f + \tilde{f}^T\varphi + \tilde{\varphi}^+ f^* + \tilde{f}^+\varphi^*)$$

так что ур-я движения запишутся в виде

$$0 = f^+ + m\tilde{\varphi}^T \iff f^* = -m\tilde{\varphi}$$

$$0 = f + m\tilde{\varphi}^* \iff f = -m\tilde{\varphi}^*$$

$$0 = \tilde{f}^+ + m\varphi^T \iff \tilde{f}^* = -m\varphi$$

$$0 = \tilde{f} + m\varphi^* \iff \tilde{f} = -m\varphi^*$$

Подставляем решение уравнений движения в

$$-f^+f - \tilde{f}^+\tilde{f} \Longrightarrow -m^2\tilde{\varphi}^+\tilde{\varphi} - m^2\varphi^+\varphi$$

Поэтому после исключения вспомогательных полей получим, что

$$S = \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}(F^A_{\mu\nu})^2 + i\bar{\lambda}^A\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda^A + \mathcal{D}_\mu\varphi^+\mathcal{D}^\mu\varphi$$

$$+ \mathcal{D}_\mu\tilde{\varphi}^+\mathcal{D}^\mu\tilde{\varphi} - m^2\varphi^+\varphi - m^2\tilde{\varphi}^+\tilde{\varphi} - \frac{e^2}{2}(\varphi^+T^A\varphi - \tilde{\varphi}^T T^A\tilde{\varphi}^*)^2$$

$$+ i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\lambda\varphi - i\varphi^+\bar{\lambda}(1+\gamma_5)\Psi$$

$$- i\tilde{\varphi}^T\bar{\lambda}(1-\gamma_5)\Psi + i\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\lambda\tilde{\varphi}^* \Big\}$$

Видно, что рассматриваемая теория действительно является суперсимметричным обобщением КХД. Также есть потенциал для скалярных полей:

$$V = m^2\varphi^+\varphi + m^2\tilde{\varphi}^+\tilde{\varphi} + \frac{e^2}{2}\left(\varphi^+T^A\varphi - \tilde{\varphi}^T T^A\tilde{\varphi}^*\right)^2 \geqslant 0$$

– автоматически получается положительно определённое выражение. (Это следствие алгебры суперсимметрии)

Массы бозонных полей φ и $\tilde{\varphi}$ равны массе фермиона ψ.

(Дираковский спинор ψ имеет 2 скалярных суперпартнёра φ и $\tilde{\varphi}$, а калибровочный бозон A_μ – майорановский спинор λ – калибрино)

Глава VI. Калибровочные теории с расширенной суперсимметрией

§1. $N=2$ суперсимметричная теория Янга-Миллса

– суперсимметричное обобщение теории Янга-Миллса, инвариантное относительно 2-х преобразований суперсимметрии.

$N=2$ SYM соответствует следующей таблице:

$N=2 \quad \lambda_0 = 1$ $\qquad\qquad$ $N=2 \quad \lambda_0 = 0$

$$\begin{array}{c||c|c|c} \lambda & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n_{сост.} & 1 & 2 & 1 \end{array} \; + \; \begin{array}{c||c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 \\ \hline n_{сост.} & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

(+ CPT сопряжённая таблица)

$$= \begin{array}{c||c|c|c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n_{сост.} & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} =$$

$\Rightarrow$ в этой теории есть векторное поле A_μ, 2 майорановских спинора и 2 Re скаляра (или эквивалентно 1 комплексный скаляр)

$$= \begin{array}{c||c|c|c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n_{сост.} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \; +$$

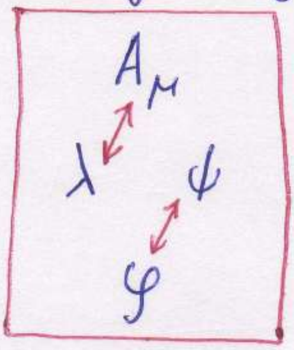
$N=1$ SYM

$$+ \; \begin{array}{c||c|c|c} \lambda & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline n_{сост.} & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

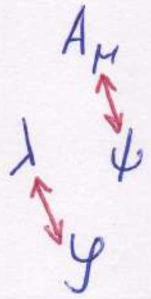
модель ВЗ

$\Rightarrow$ $N=2$ SYM можно строить из $N=1$ SYM с полями A_μ и λ и модели ВЗ с полями ψ и φ.

Как действуют 2 суперсимметрии?



$N=1$ SUSY



дополнительная SUSY.

$$\begin{cases} \delta A_\mu = -i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda \\ \delta\lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon F_{\mu\nu} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon D \\ \delta D = \sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{D}_\mu\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi = \bar{\varepsilon}(1+\gamma_5)\psi \\ \delta\psi = (\mathrm{Re} f + i\gamma_5 \,\mathrm{Im} f)\varepsilon - i(\mathrm{Re}\,\mathcal{D}_\mu\varphi + i\gamma_5\,\mathrm{Im}\,\mathcal{D}_\mu\varphi)\gamma^\mu\varepsilon \\ \delta f = -i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu(1+\gamma_5)\mathcal{D}_\mu\psi - i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}(1-\gamma_5)\lambda\varphi \end{cases}$$

– видно, что A_μ и λ (при глобальных калибровочных преобразованиях) меняются по присоединённому представлению, а φ и ψ должны лежать в одном и том же представлении калибровочной группы.

$\Longrightarrow$ для $\exists$ второй суперсимметрии нужно, чтобы φ и ψ лежали в присоединённом представлении.

Действие теории будет содержать $N=1$ SYM, для которой

$$S_1 = \frac{1}{2e^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b$$

и калибровочно инвариантное обобщение модели Весса-Зумино, для которого $\phi \in Adj$.

Ранее мы представляли ϕ в виде столбца,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}. \text{ Тогда } S_{ВЗ} = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^+ e^{2V} \phi.$$

Но теперь такие обозначения уже не удобны, т.к. $V = eV^A t^A$ содержит $A_\mu = eA_\mu^A t^A$ и $\lambda = e\lambda^A t^A$

а очень желательно, чтобы λ и ψ входили бы в действие симметричным образом. Поэтому нужно, чтобы $\psi = e\psi^A t^A$ и $\Rightarrow$

более удобно ϕ записывать в виде

$$\phi = e\phi^A t^A$$

(Это, конечно, возможно только в случае, когда ϕ лежит в присоединённом представлении калибровочной группы)

Сравним эти 2 варианта обозначений:

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad n = \dim G .$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi_A = \partial_\mu \varphi_A + i\,(A_\mu)_A{}^B \varphi_B$$

$$= \partial_\mu \varphi_A + i A_\mu^C (T^C_{Adj})_A{}^B \varphi_B$$

$$= \partial_\mu \varphi_A + e A_\mu^C f^{CAB} \varphi_B$$

$$= \partial_\mu \varphi_A - e f^{ABC} A_\mu^B \varphi_C$$

всё получилось одинаково

$$\varphi^{*A} \varphi^A = \varphi^+ \varphi$$

$\Longrightarrow \varphi^+\varphi$ в таких обозначениях соответствует $\frac{2}{e^2}\mathrm{tr}(\varphi^+\varphi)$ справа

$$e^{2V}\Phi = \Phi + 2V\Phi + \frac{1}{2!}(2V)^2\Phi$$

$$+ \frac{1}{3!}(2V)^3\Phi + \ldots$$

$$\Phi^+ e^{2V} \Phi$$

$$\Phi \longrightarrow e^{i\Lambda}\Phi$$

$$\varphi \equiv e \varphi^A t^A$$

$$A = \overline{1, \dim G}$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + i[A_\mu, \varphi] =$$

$$= e t^A \partial_\mu \varphi^A + i\,[e A_\mu^B t^B,$$

$$e\varphi^C t^C] = e t^A \big(\partial_\mu \varphi^A$$

$$- e f^{ABC} A_\mu^B \varphi^C\big) \equiv e t^A \mathcal{D}_\mu \varphi^A$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi^A = \partial_\mu \varphi^A - e f^{ABC} A_\mu^B \varphi^C$$

$$\varphi^{*A}\varphi^A = 2\cdot \mathrm{tr}(t^A t^B)\varphi^{*A}\varphi^B$$

$$= \frac{2}{e^2}\mathrm{tr}\left(e t^A \varphi^{*A} \cdot e t^B \varphi^B\right)$$

$$= \frac{2}{e^2}\mathrm{tr}(\varphi^+\varphi)$$

$$\Phi + [2V, \Phi] + \frac{1}{2!}[2V,[2V,\Phi]]$$

$$+ \frac{1}{3!}[2V,[2V,[2V,\Phi]]] + \ldots =$$

$$= e^{2V}\Phi e^{-2V}$$

$$\frac{2}{e^2}\mathrm{tr}\left(\Phi^+ e^{2V}\Phi e^{-2V}\right)$$

$$\Phi \longrightarrow e^{i\Lambda}\Phi e^{-i\Lambda}$$

Поэтому если $\Phi = e\Phi^A t^A$, то

$$S_2 = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi\, e^{-2V}$$

Это выражение калибровочно инвариантно, т.к. если

$$\Phi \to e^{i\Lambda} \Phi\, e^{-i\Lambda} \qquad \Phi^+ \to e^{i\Lambda^+} \Phi^+ e^{-i\Lambda^+}$$

$$e^{2V} \to e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \qquad e^{-2V} \to e^{i\Lambda} e^{-2V} e^{-i\Lambda^+}$$

то

$$\operatorname{tr}(\Phi^+ e^{2V} \Phi\, e^{-2V}) \to \operatorname{tr}(\cancel{e^{i\Lambda^+}} \Phi^+ \cancel{e^{-i\Lambda^+}} \cdot \cancel{e^{i\Lambda^+}} e^{2V} \cancel{e^{-i\Lambda}}$$

$$\cdot \cancel{e^{i\Lambda}} \Phi\, \cancel{e^{-i\Lambda}} \cdot \cancel{e^{i\Lambda}} e^{-2V} \cancel{e^{-i\Lambda^+}}) = \operatorname{tr}(\Phi^+ e^{2V} \Phi\, e^{-2V}) = \text{inv.}$$

Разумно предположить, что

$$S_{N=2\ SYM} = S_1 + S_2 = \frac{1}{2e^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b$$

$$+ \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi\, e^{-2V}$$

В терминах компонентных полей

$$S = \frac{2}{e^2} \operatorname{tr} \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar\lambda \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2$$

$$+ \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi + f^+ f + i\bar\psi (1-\gamma_5) \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + \varphi^+ [D, \varphi]$$

$$+ i\sqrt{2}\, \bar\psi (1-\gamma_5) [\lambda, \varphi] - i\sqrt{2}\, \varphi^+ \{\bar\lambda, (1+\gamma_5)\psi\} \Big\}$$

где $\{\bar\lambda, (1+\gamma_5)\psi\} \equiv \bar\lambda^a (1+\gamma_5) \psi_a + (1+\gamma_5)\psi_a \bar\lambda^a =$

$$= e\bar\lambda^{aA} t^A (1+\gamma_5)\, e\psi_a^B t^B + e(1+\gamma_5)\psi_a^B t^B e\bar\lambda^{aA} t^A =$$

$$= e^2 \bar\lambda^A (1+\gamma_5)\psi^B (t^A t^B - t^B t^A) = e^2 \bar\lambda^A (1+\gamma_5)\psi^B [t^A, t^B]$$

$$= i e^2 f^{ABC} \bar\lambda^A (1+\gamma_5)\psi^B t^C.$$

Заметим, что

$$\{\bar\psi, (1+\gamma_5)\lambda\} = i e^2 f^{ABC} \bar\psi^A (1+\gamma_5)\lambda^B t^C = -\{\bar\lambda, (1+\gamma_5)\psi\}$$

Ковариантные производные имеют вид

$$\mathcal{D}_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]$$

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i[A_\mu, \psi]$$

Рассмотрим выражение

$$\mathrm{tr}\int d^4x \cdot i\bar\psi \gamma_5 \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi = \mathrm{tr}\int d^4x \big(i\bar\psi \gamma_5\gamma^\mu \partial_\mu \psi -$$

$$- \bar\psi\gamma_5\gamma^\mu [A_\mu, \psi]\big) = \mathrm{tr}\int d^4x \Big(\underbrace{\cancel{\tfrac{i}{2}\partial_\mu (\bar\psi\gamma_5\gamma^\mu\psi)}}_{0}$$

$$- \bar\psi\gamma_5\gamma^\mu [A_\mu, \psi]\Big) \Rightarrow \mathrm{tr}\int d^4x \cdot (-1) e \bar\psi^A t^A \gamma_5\gamma^\mu [e A^B_\mu t^B,$$

$$e\psi^C t^C] = -\frac{ie^3}{2}\int d^4x\, f^{ABC} \bar\psi^A \gamma_5\gamma^\mu A^B_\mu \psi^C = 0$$

поскольку симметричный тензор $\bar\psi^A \gamma_5\gamma^\mu \psi^C$ $(= \bar\psi^C \gamma_5 \gamma^\mu \psi^A)$ сворачивается с антисимметричным тензором f^{ABC}.

Поэтому действие теории можно переписать в виде

$$S = \frac{2}{e^2}\, tr \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + \frac{1}{2} D^2$$

$$+ \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi + f^+ f + \varphi^+ [D, \varphi] + i\sqrt{2}\, \varphi \{\bar{\psi}, (1-\gamma_5)\lambda\}$$

$$- i\sqrt{2}\, \varphi^+ \{\bar{\lambda}, (1+\gamma_5)\psi\} \Big\}$$

где было принято во внимание, что

$$tr\left(\bar{\psi}(1-\gamma_5)[\lambda, \varphi]\right) = \frac{ie^3}{2} f^{ABC} \bar{\psi}^A (1-\gamma_5) \lambda^B \varphi^C =$$

$$= \frac{ie^3}{2} f^{CAB} \varphi^C \bar{\psi}^A (1-\gamma_5)\lambda^B = tr\left(\varphi \{\bar{\psi}, (1-\gamma_5)\lambda\}\right)$$

Из выражения для действия видно, что спиноры λ и ψ входят в него симметричным образом. Действительно, пусть

$$\lambda \equiv \psi_1 ; \quad \psi \equiv \psi_2 .$$ Тогда

$$tr\left(i\sqrt{2}\, \varphi \{\bar{\psi}, (1-\gamma_5)\lambda\}\right) = tr\Big(\frac{i}{\sqrt{2}} \varphi \{\bar{\psi}, (1-\gamma_5)\lambda\}$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \varphi \{\bar{\lambda}, (1-\gamma_5)\psi\}\Big) = tr\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ij} \varphi \{\bar{\psi}_i, (1-\gamma_5)\psi_j\}\right)$$

Аналогично

$$tr\left(-i\sqrt{2}\, \varphi^+ \{\bar{\lambda}, (1+\gamma_5)\psi\}\right) = tr\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ij} \varphi^+ \{\bar{\psi}_i, (1+\gamma_5)\psi_j\}\right)$$

т.о. в явно SO(2) суперсимметричной форме действие теории можно записать в виде

$$S = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}_i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\psi_i + \frac{1}{2}D^2 +$$

$$+ \mathcal{D}_\mu\varphi^+\mathcal{D}^\mu\varphi + f^+f - D[\varphi^+,\varphi] - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi\{\bar{\psi}_i,(1-\gamma_5)\psi_j\}$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\varphi^+\{\bar{\psi}_i,(1+\gamma_5)\psi_j\}\Big\}$$

$\Longrightarrow$ благодаря дополнительной SO(2) симметрии есть и 2-я суперсимметрия:

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \psi\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_2\\ -\psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi\\ -\lambda\end{pmatrix}$$

– преобразование меняет местами ψ и λ.

Как записать преобразования $N=2$ SUSY?

$$\begin{cases} \delta A_\mu = -i\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}_i\gamma^\mu\psi_i \qquad (N=1 \text{ SUSY} \sim \varepsilon_1) \\ \delta\psi_i = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon_i F_{\mu\nu} - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\varepsilon_i D - \varepsilon_{ij}(\mathrm{Re}f + \\ \quad + i\gamma_5 \mathrm{Im} f)\varepsilon_j + i\varepsilon_{ij}(\mathrm{Re}\,\mathcal{D}_\mu\varphi + i\gamma_5\mathrm{Im}\,\mathcal{D}_\mu\varphi)\gamma^\mu\varepsilon_j \\ \delta D = \sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}_i\gamma^\mu\gamma_5\mathcal{D}_\mu\psi_i \\ \delta\varphi = \varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_i(1+\gamma_5)\psi_j \end{cases}$$

где $\mathrm{Re}f \equiv e t^A \mathrm{Re} f^A$ и т.д.

Исключаем теперь вспомогательные поля f, f^+ и D:

$$f = 0; \quad f^+ = 0$$

$$0 = D - [\varphi^+, \varphi] \quad \Rightarrow \quad D = [\varphi^+, \varphi]$$

Поэтому

$$S = \frac{2}{e^2} \operatorname{tr} \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\Psi}_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi_i + \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi$$

$$- \frac{1}{2} [\varphi, \varphi^+]^2 - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ij} \varphi \{\bar{\Psi}_i, (1-\gamma_5)\Psi_j\} - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ij} \varphi^+ \cdot$$

$$\cdot \{\bar{\Psi}_i, (1+\gamma_5)\Psi_j\} \Big\}$$

Можно также представить φ в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (P + iS); \qquad P^+ = P; \quad S^+ = S$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi^A = \frac{1}{\sqrt{2}} (P^A + iS^A); \quad P^A, S^A \in \mathrm{Re}.$$

Тогда

$$[\varphi, \varphi^+] = \frac{1}{2} [P + iS, P - iS] = \frac{1}{2} [P, -iS] + \frac{1}{2} [iS, P]$$

$$= -i [P, S]$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu P)^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu S)^2$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ij} \varphi \{\bar{\Psi}_i, (1-\gamma_5)\Psi_j\} - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ij} \varphi^+ \{\bar{\Psi}_i, (1+\gamma_5)\Psi_j\} =$$

$$= -\frac{i}{2}\varepsilon_{ij}(P+iS)\{\bar{\psi}_i, (1-\gamma_5)\psi_j\} - \frac{i}{2}\varepsilon_{ij}(P-iS)\{\bar{\psi}_i, (1+\gamma_5)\psi_j\}$$

$$= -i\varepsilon_{ij}P\{\bar{\psi}_i, \psi_j\} - \varepsilon_{ij}S\{\bar{\psi}_i, \gamma_5\psi_j\}$$

Поэтому с использованием этих обозначений действие перепишется в виде

$$S = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,\Big\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}_i\gamma^\mu D_\mu\psi_i + \frac{1}{2}(D_\mu P)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu S)^2$$

$$+ \frac{1}{2}[P,S]^2 - i\varepsilon_{ij}P\{\bar{\psi}_i, \psi_j\} - \varepsilon_{ij}S\{\bar{\psi}_i, \gamma_5\psi_j\}\Big\}$$

При этом потенциал скалярных полей имеет вид

$$V(P,S) = -\frac{1}{e^2}\,\mathrm{tr}\,[P,S]^2 = -\frac{1}{e^2}\,\mathrm{tr}\left(ie^2 f^{ABC}P^B S^C t^A\right)^2$$

$$= \frac{e^2}{2}\left(f^{ABC}P^B S^C\right)^2 \geq 0$$

— как обычно, потенциал скалярных полей оказывается положительно определённым.

$V(P,S) = 0$ если $P^A = S^A$ — т.н. плоское направление, вдоль которого потенциал не растёт.

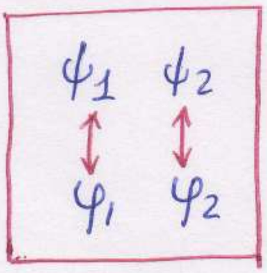
§2. N=2 супермультиплет

Может ли $N=2$ суперсимметричная теория Янга-Миллса взаимодействовать с полями материи $N=2$ суперсимметричным образом? Да!

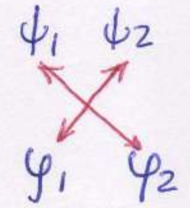
Как строить $N=2$ модели с материей? Рассмотрим вначале теорию без калибровочных полей.

λ	$-1/2$	0	$1/2$
$n_{\text{сост.}}$	2	4	2

– есть 2 майорановских спинора ψ_1, ψ_2 и 2 комплексных скаляра – это 2 модели ВЗ.



$N=1$ SUSY



дополнительная SUSY

На самом деле, если $\Phi_1 \in R$, то Φ_2 нужно взять в сопряжённом представлении $\bar{R}$, поскольку тогда можно написать калибровочно инвариантное массовое слагаемое:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\Phi_1^+\Phi_1 + \Phi_2^+\Phi_2\right) + \left(\frac{m}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi_2^T\Phi_1 + \right.$$
$$\left. + \text{к.с.}\right)$$

Это выражение инвариантно относительно преобразований

$$\Phi_1 \to e^{i\Lambda}\Phi_1 ; \quad \Phi_2 \to e^{-i\Lambda^T}\Phi_2$$

где $(1-\gamma_5)D\Lambda = 0$, т.к.

$$\Phi_2^T\Phi_1 \to \Phi_2^T \cancel{e^{-i\Lambda}}\,\cancel{e^{i\Lambda}}\Phi_1 = \Phi_2^T\Phi_1 = inv$$

Как будут теперь выглядеть преобразования суперсимметрии?

Явная суперсимметрия имеет вид

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\psi_1 \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi_1\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon_1 f_1 - i\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\varphi_1\right] \\ \delta f_1 = -i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_1 \\ \delta\varphi_2 = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\psi_2 \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi_2\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon_1 f_2 - i\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\varphi_2\right] \\ \delta f_2 = -i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_2 \end{cases}$$

$N=2$ суперсимметрия получается из Z_2-инвариантности, меняющей местами спиноры.

Но при этом нужно учитывать, что φ_1 и $(1+\gamma_5)\psi_2$ лежат в разных представлениях калибровочной группы. Поэтому $\delta\varphi_1$ должно выражаться через $(1-\gamma_5)\psi_2$:

$$\delta\varphi_1 = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\psi_1 + \bar{\varepsilon}_2(1-\gamma_5)\psi_2$$

Поэтому преобразования второй SUSY получаются с помощью Z_2 преобразования

$$\psi_1 \leftrightarrow \psi_2\,;\quad \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1^*\,;\quad \varphi_2 \leftrightarrow \varphi_2^*$$

$$f_1 \leftrightarrow f_1^*\,;\quad f_2 \leftrightarrow f_2^*$$

которое очевидно оставляет инвариантным компонентное действие

$$S = \int d^4x \Big\{ \partial_\mu \varphi_1^+ \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2^+ \partial^\mu \varphi_2 + i\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1$$

$$+ i\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + f_1^+ f_1 + f_2^+ f_2 + m\varphi_1^T f_2 + m\varphi_2^T f_1$$

$$+ m\varphi_1^+ f_2^* + m\varphi_2^+ f_1^* - m\bar{\psi}_1 \psi_2 \Big\}$$

(Комплексное сопряжение для скаляров меняет представление по калибровочной группе на сопряжённое)

Тогда преобразования второй SUSY примут вид

$$\begin{cases} \delta\varphi_1^* = \bar{\varepsilon}_2(1+\gamma_5)\psi_2 \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi_2\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon_2 f_1^* - i\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\varphi_1^*\right] \\ \delta f_1^* = -i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_2 \\ \delta\varphi_2^* = \bar{\varepsilon}_2(1+\gamma_5)\psi_1 \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi_1\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon_2 f_2^* - i\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\varphi_2^*\right] \\ \delta f_2^* = -i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_1 \end{cases}$$

Проводя комплексное сопряжение для скаляров и соединяя результат с первой SUSY, получим преобразования с двумя параметрами ε_1 и ε_2, относительно которых будет инвариантна рассматриваемая теория:

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\psi_1 + \bar{\varepsilon}_2(1-\gamma_5)\psi_2 \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi_1\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon_1 f_1 - i\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\varphi_1 + \varepsilon_2 f_2^* \right. \\ \left. - i\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\varphi_2^*\right] \\ \delta f_1 = -i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_1 - i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi_2 = \bar{\varepsilon}_1(1+\gamma_5)\psi_2 + \bar{\varepsilon}_2(1-\gamma_5)\psi_1 \\ \delta\left[(1+\gamma_5)\psi_2\right] = (1+\gamma_5)\left[\varepsilon_1 f_2 - i\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\varphi_2 + \varepsilon_2 f_1^* \right. \\ \left. - i\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\varphi_1^*\right] \\ \delta f_2 = -i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu(1+\gamma_5)\partial_\mu\psi_2 - i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu(1-\gamma_5)\partial_\mu\psi_1 \end{cases}$$

где в каждой формуле все слагаемые одинаково меняются при калибровочных преобразованиях.

§3. $N=2$ суперсимметричные калибровочные теории с полями материи

Построим $N=2$ суперсимметричную теорию, содержащую $N=2$ SYM и гипермультиплеты, локально калибровочно инвариантную.

Очевидно, такую теорию нужно искать среди теорий с $N=1$ суперсимметрией:

$S = S_{N=2\,SYM} + S_{matter}$, где

$$S_{N=2\;SYM} = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,d^2\theta\,W_a C^{ab} W_b$$

$$+ \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,d^4\theta\,\Phi^+ e^{2V}\Phi e^{-2V}$$

$$S_{matter} = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\Phi_1^+ e^{2V} \Phi_1 + \Phi_2^+ e^{-2V^T} \Phi_2 \right)$$

$$+ \left\{ \int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{2} m \Phi_2^T \Phi_1 + c \cdot \Phi_2^T \Phi \Phi_1 \right) + \text{к.с.} \right\}$$

где c – безразмерная постоянная необходимость введения которой будет понятна далее. Также далее будет найдено её численное значение.

$N=1$ SUSY очевидна. Также легко проверяется калибровочная симметрия относительно преобразований

$$e^{2V} \to e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda} \qquad \Longrightarrow W_a \to e^{i\Lambda} W_a e^{-i\Lambda}$$

$$\Phi \to e^{i\Lambda} \Phi e^{-i\Lambda} \qquad (\Phi \in Adj)$$

$$\Phi_1 \to e^{i\Lambda} \Phi_1 \qquad (\Phi_1 \in R)$$

$$\Phi_2 \to e^{-i\Lambda^T} \Phi_2 \qquad (\Phi_2 \in \bar{R})$$

Действительно, например,

$$\Phi_2^+ e^{-2V^T} \Phi_2 \longrightarrow \Phi_2^+ e^{i\Lambda^*} \left(e^{i\Lambda} e^{-2V} e^{-i\Lambda^+} \right)^T e^{-i\Lambda^T} \Phi_2$$

$$= \Phi_2^+ \cancel{e^{i\Lambda^*}} \cancel{e^{-i\Lambda^*}} e^{-2V^T} \cancel{e^{i\Lambda^T}} \cancel{e^{-i\Lambda^T}} \Phi_2 = \Phi_2^+ e^{-2V^T} \Phi_2 = \text{inv}$$

$$\Phi_2^T \Phi \Phi_1 \longrightarrow \Phi_2^T \cancel{e^{-i\Lambda}} \cancel{e^{i\Lambda}} \Phi \cancel{e^{-i\Lambda}} \cancel{e^{i\Lambda}} \Phi_1 = \Phi_2^T \Phi \Phi_1 = \text{inv}$$

$\Longrightarrow$ действие, приведённое выше, действительно является калибровочно инвариантным.

Запишем теперь его в компонентах.

Фактически, всё уже вычислено ранее

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \Phi_2^T \Phi \Phi_1 = \int d^4x\, d^2\theta\, \Phi_2^T \Phi \Phi_1 \Big|_{y^\mu \to x^\mu} + \cancel{\text{поверхностные члены}}$$

$$\Longrightarrow \int d^4x\, d^2\theta \left(\varphi_2^T(x) + \bar\psi_2(x)(1+\gamma_5)\theta + \frac{1}{2} f_2^T(x)\, \bar\theta(1+\gamma_5)\theta \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\varphi(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi(x) + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, f(x) \right) \left(\varphi_1(x) + \bar\theta(1+\gamma_5)\psi_1(x) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\bar\theta(1+\gamma_5)\theta\, f_1(x) \right) = \left[\int d^2\theta\, \bar\theta(1+\gamma_5)\theta = 4; \right.$$

$$\left. (1+\gamma_5)\theta \cdot \bar\theta(1+\gamma_5) = -\frac{1}{2}(1+\gamma_5) \cdot \bar\theta(1+\gamma_5)\theta \right] =$$

$$= 2\int d^4x \left\{ \varphi_2^T \varphi f_1 + \varphi_2^T f \varphi_1 + f_2^T \varphi \varphi_1 - \bar\psi_2 \varphi (1+\gamma_5)\psi_1 \right.$$

$$\left. - \bar\psi_2 (1+\gamma_5)\psi \cdot \varphi_1 - \varphi_2^T \bar\psi (1+\gamma_5)\psi_1 \right\}$$

(Для столбцов $\bar\psi_1$, $\bar\psi_2$ содержит транспонирование, а $\bar\psi \equiv e\bar\psi^A T^A$ не содержит транспонирование по индексам калибровочной группы)

Т.о. можно записать действие рассматриваемой теории в терминах компонентных полей:

$$S = \frac{\mathrm{Re}}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi e^{-2V}$$

$$+ \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\Phi_1^+ e^{2V} \Phi_1 + \Phi_2^+ e^{-2V^T} \Phi_2 \right) + \left\{ \int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{2} m \cdot \right. \right.$$

$$\cdot \Phi_2^T \Phi_1 + c\,\Phi_2^T \Phi \Phi_1\big) + \text{к.с.}\Big\} =$$

$$= \frac{2}{e^2} \operatorname{tr} \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\omega}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi + \frac{1}{2} D^2$$

$$+ \mathcal{D}_\mu \varphi^+ \mathcal{D}^\mu \varphi + f^+ f + \varphi^+ [D, \varphi] + i\sqrt{2}\,\varphi \{\bar{\psi}, (1-\gamma_5)\lambda\}$$

$$- i\sqrt{2}\,\varphi^+ \{\bar{\lambda}, (1+\gamma_5)\psi\}\Big\}$$

$$+ \int d^4x \Big\{ \mathcal{D}_\mu \varphi_1^+ \mathcal{D}^\mu \varphi_1 + i\bar{\psi}_1 (1-\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_1 + f_1^+ f_1 + \varphi_1^+ D \varphi_1$$

$$\boxed{+ i\sqrt{2}\,\bar{\psi}_1 (1-\gamma_5)\lambda \varphi_1 - i\sqrt{2}\,\varphi_1^+ \bar{\lambda}(1+\gamma_5)\psi_1} + \mathcal{D}_\mu \varphi_2^+ \mathcal{D}^\mu \varphi_2$$

$$+ i\bar{\psi}_2 (1-\gamma_5)\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_2 + f_2^+ f_2 - \varphi_2^+ D^T \varphi_2 \boxed{- i\sqrt{2}\,\bar{\psi}_2 (1-\gamma_5)\lambda^T \varphi_2}$$

$$\boxed{+ i\sqrt{2}\,\varphi_2^+ \bar{\lambda}^T (1+\gamma_5)\psi_2} + m\big(\varphi_2^T f_1 + f_2^T \varphi_1 + \varphi_2^+ f_1^* + f_2^+ \varphi_1^*$$

$$- 2\bar{\psi}_2 \psi_1\big) + 2c\big(\varphi_2^T \varphi f_1 + \varphi_2^T f \varphi_1 + f_2^T \varphi \varphi_1 - \bar{\psi}_2 \varphi (1+\gamma_5)\psi_1$$

$$\boxed{- \bar{\psi}_2 (1+\gamma_5)\psi \varphi_1 - \varphi_2^T \bar{\psi} (1+\gamma_5)\psi_1}\big) + 2c^* \big(f_1^+ \varphi^+ \varphi_2^* + \varphi_1^+ f \varphi_2^*$$

$$+ \varphi_1^+ \varphi^+ f_2^* - \bar{\psi}_1 (1-\gamma_5)\varphi^+ \psi_2 \boxed{- \varphi_1^+ \bar{\psi} (1-\gamma_5)\psi_2 - \bar{\psi}_1 (1-\gamma_5)\psi \varphi_2^*}\big)\Big\}$$

Коэффициенты при выделенных слагаемых должны быть одинаковы по модулю для наличия второй суперсимметрии.

(Вычисление достаточно сложное и не приводится)

Фаза c может быть включена в переопределение полей.

$c = \frac{i}{\sqrt{2}}$ будет использовано в наших обозначениях.

Тогда суперполевое действие рассматриваемой модели примет вид

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2e^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi e^{-2V} \\ &+ \frac{1}{4} \int d^4x\, d^4\theta \left(\Phi_1^+ e^{2V} \Phi_1 + \Phi_2^+ e^{-2V^T} \Phi_2 \right) + \left\{ \int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{2} m \Phi_2^T \Phi_1 \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{i}{\sqrt{2}} \Phi_2^T \Phi \Phi_1 \right) + \text{к.с.} \right\} \end{aligned}}$$

Для того, чтобы записать окончательное выражение для компонентного действия необходимо исключить вспомогательные поля из уравнений движения.

(Результат приводится не будет)

§4. N=4 суперсимметричная теория Янга-Миллса

Построим теперь теорию, инвариантную относительно 4-х преобразований суперсимметрии.

В соответствии с теорией представлений алгебры суперсимметрии для этой теории

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n_{\text{сост.}} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n_{\text{сост.}} & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} + \begin{array}{c|c|c|c} \lambda & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline n_{\text{сост.}} & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

N = 2 SYM   N = 2 супермультиплет

$$= \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \lambda & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline n_{\text{сост.}} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} + 3 \times \begin{array}{c|c|c|c} \lambda & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline n_{\text{сост.}} & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

N = 1 SYM   3 модели ВЗ.

$$\begin{array}{c} A_\mu \\ \underbrace{\lambda\quad \psi_1\quad \psi_2\quad \psi_3}_{\text{скаляры}} \end{array}$$

– каждая из 4-х суперсимметрий перемешивает A_μ со своим спинором.

Очевидно, что это возможно только если все поля материи лежат в присоединённом представлении.

Теорию с 4-мя суперсимметриями ищем среди теорий с 2-мя суперсимметриями:

$N=2$ SYM + гипермультиплет:

$$S = \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ e^{2V} \Phi e^{-2V}$$

$$+ \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta \left(\Phi_1^+ e^{2V}\Phi_1 + \Phi_2^+ e^{-2V^T}\Phi_2\right) + \left\{\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{2} m \Phi_2^T \Phi_1\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{i}{\sqrt{2}}\Phi_2^T \Phi \Phi_1\right) + \text{к.с.}\right\}$$

При этом $m=0$, т.к. Φ, Φ_1 и Φ_2 теперь должны входить в действие симметрично, а $\Phi_1, \Phi_2 \in Adj$.

Заметим, что $\overline{Adj} = Adj$, т.к.

$$\left(T^A_{Adj}\right)_{BC} = -if^{ABC} \quad \text{и} \quad \Rightarrow$$

$$-\left(T^A_{Adj}\right)^T_{BC} = -\left(-if^{ACB}\right) = -if^{ABC} = \left(T^A_{Adj}\right)_{BC}.$$

При этом от обозначений для Φ_1 и Φ_2 в виде столбцов удобно перейти к $e\Phi^A_{1,2} t^A$.

$$\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix} \longrightarrow e\phi^A t^A = e\phi^1 t^1 + e\phi^2 t^2 + \ldots + e\phi^n t^n$$

где $n = \dim G$ для Adj.

Тогда, как обсуждалось ранее,

$$\phi_1^+ e^{2V} \phi_1 \longrightarrow \frac{2}{e^2} \mathrm{tr}\, \phi_1^+ e^{2V} \phi_1 e^{-2V}$$

$$\phi \cdot \phi_1 \longrightarrow [\phi, \phi_1]$$

Кроме того, переобозначим $\phi \longrightarrow \phi_3$.

В результате получаем действие $N=4$ SYM, записанное в терминах $N=1$ суперполей:

$$S = \frac{1}{2e^2} \mathrm{tr}\, \mathrm{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \mathrm{tr} \int d^4x\, d^4\theta \cdot$$

$$\cdot \phi_i^+ e^{2V} \phi_i e^{-2V} + \left\{ \int d^4x\, d^2\theta\, \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{e^2} \mathrm{tr}\, \phi_2 [\phi_3, \phi_1] + \text{к.с.} \right\}$$

Можно записать это действие в явно $SO(3)$-инвариантном виде

$$S = \frac{1}{2e^2} \mathrm{tr}\, \mathrm{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e^2} \mathrm{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, \phi_i^+ e^{2V} \phi_i e^{-2V}$$

$$+ \left\{ \frac{i}{3\sqrt{2}\, e^2} \mathrm{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, \varepsilon_{ijk} \phi_i [\phi_j, \phi_k] + \text{к.с.} \right\}$$

Однако явные $SO(3)$ инвариантность и $N=1$ суперсимметрия этого действия — это далеко не все симметрии этой теории.

Для того, чтобы увидеть большее число симметрий, запишем это действие в терминах компонентных полей:

$$S = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar\lambda\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2$$

N=1 SYM

$$+ \mathcal{D}_\mu\varphi_i^+\mathcal{D}^\mu\varphi_i + i\bar\psi_i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_i + f_i^+ f_i + \varphi_i^+[D,\varphi_i]$$

(нет члена с γ_5)

$$+ i\sqrt{2}\,\varphi_i\{\bar\psi_i, (1-\gamma_5)\lambda\} - i\sqrt{2}\,\varphi_i^+\{\bar\lambda, (1+\gamma_5)\psi_i\}$$

3 модели ВЗ

$$- \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\,\varphi_i\{\bar\psi_j, (1+\gamma_5)\psi_k\} + \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk} f_i[\varphi_j,\varphi_k]$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\,\varphi_i^+\{\bar\psi_j, (1-\gamma_5)\psi_k\} + \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk} f_i^+[\varphi_j^+,\varphi_k^+]\Big\}$$

поскольку

$$i\,\mathrm{tr}\int d^4x d^2\theta\, \varepsilon_{ijk}\Phi_i[\Phi_j,\Phi_k] = -\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta\, \varepsilon_{ijk} f^{ABC} e^3 \cdot \Phi_i^A\Phi_j^B\Phi_k^C$$

и при комплексном сопряжении знак менять не нужно.

Исключим вспомогательные поля D и f_i:

$$D + [\varphi_i, \varphi_i^+] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}D^2 + \varphi_i^+[D,\varphi_i] \longrightarrow -\frac{1}{2}D^2 \longrightarrow -\frac{1}{2}[\varphi_i,\varphi_i^+]^2$$

Аналогично, ур-ея движения для f_i^+ и f_i имеют вид

$$f_i + \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}[\varphi_j, \varphi_k] = 0$$

$$f_i^+ + \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}[\varphi_j^+, \varphi_k^+] = 0$$

Поэтому слагаемое с полями f_i и f_i^+ примут вид

$$-f_i^+ f_i \longrightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[\varphi_j, \varphi_k]\,\varepsilon_{imn}[\varphi_m^+, \varphi_n^+] =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})[\varphi_j, \varphi_k][\varphi_m^+, \varphi_n^+] =$$

$$= [\varphi_i, \varphi_j][\varphi_i^+, \varphi_j^+]$$

Поэтому после исключения вспомогательных полей действие запишется в виде

$$S = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda + i\bar{\psi}_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_i$$

$$+ \mathcal{D}_\mu \varphi_i^+ \mathcal{D}^\mu \varphi_i + i\sqrt{2}\,\varphi_i \{\bar{\psi}_i, (1-\gamma_5)\lambda\} - i\sqrt{2}\,\varphi_i^+\{\bar{\lambda}, (1+\gamma_5)\psi_i\}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i\{\bar{\psi}_j, (1+\gamma_5)\psi_k\} - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ijk}\varphi_i^+\{\bar{\psi}_j, (1-\gamma_5)\psi_k\}$$

$$-\frac{1}{2}[\varphi_i, \varphi_i^+]^2 + [\varphi_i, \varphi_j][\varphi_i^+, \varphi_j^+]\Big\}$$

При этом скалярное поле удобно записать в виде $\varphi_i \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(P_i + iS_i)$, где

$$P_i^A \in Re; \quad S_i^A \in Re \qquad (P_i = eP_i^A t^A; \; S_i = eS_i^A t^A) \qquad (126)$$

тогда

$$\mathcal{D}_\mu \varphi_i^+ \mathcal{D}^\mu \varphi_i = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu P_i)^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu S_i)^2$$

$$\mathrm{tr}\Big[i\sqrt{2}\,\varphi_i \{\bar\Psi_i, (1-\gamma_5)\lambda\} - i\sqrt{2}\,\varphi_i^+ \{\bar\lambda, (1+\gamma_5)\psi_i\}$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i \{\bar\Psi_j, (1+\gamma_5)\psi_k\} - \frac{i}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk} \varphi_i^+ \{\bar\Psi_j, (1-\gamma_5)\psi_k\}\Big]$$

$$= \mathrm{tr}\Big[i(P_i + iS_i)\{\bar\Psi_i, (1-\gamma_5)\lambda\} + i(P_i - iS_i)\{\bar\Psi_i,$$

$$(1+\gamma_5)\lambda\} - \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}(P_i + iS_i)\{\bar\Psi_j, (1+\gamma_5)\psi_k\} -$$

$$- \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}(P_i - iS_i)\{\bar\Psi_j, (1-\gamma_5)\psi_k\}\Big] =$$

$$= \mathrm{tr}\Big[2iP_i\{\bar\Psi_i, \lambda\} + 2S_i\{\bar\Psi_i, \gamma_5\lambda\}$$

$$- i\varepsilon_{ijk} P_i \{\bar\Psi_j, \psi_k\} + \varepsilon_{ijk} S_i \{\bar\Psi_j, \gamma_5\psi_k\}\Big]$$

Наконец,

$$\mathrm{tr}\Big[-\frac{1}{2}[\varphi_i, \varphi_i^+]^2 + [\varphi_i, \varphi_j][\varphi_i^+, \varphi_j^+]\Big] =$$

$$= \mathrm{tr}\Big\{ -\frac{1}{8}[P_i + iS_i, P_i - iS_i]^2 + \frac{1}{4}[P_i + iS_i, P_j + iS_j] \cdot$$

$$\cdot [P_i - iS_i, P_j - iS_j]\Big\} =$$

$$= \mathrm{tr}\Big\{ +\frac{1}{2}[P_i,S_i]^2 + \frac{1}{4}\Big([P_i,P_j] - [S_i,S_j] +$$

$$+ i[P_i,S_j] - i[P_j,S_i]\Big)\Big([P_i,P_j] - [S_i,S_j]$$

$$- i[P_i,S_j] + i[P_j,S_i]\Big)\Big\} =$$

$$= \mathrm{tr}\Big\{ +\frac{1}{2}[P_i,S_i]^2 + \frac{1}{4}\Big([P_i,P_j] - [S_i,S_j]\Big)^2$$

$$+ \frac{1}{4}\Big([P_i,S_j] - [P_j,S_i]\Big)^2\Big\} =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\Big\{ + 2[P_i,S_i]^2 + [P_i,P_j]^2 + [S_i,S_j]^2 -$$

$$- 2[P_i,P_j][S_i,S_j] + 2[P_i,S_j]^2 - 2[P_i,S_j][P_j,S_i]\Big\} =$$

$$-2P_i[S_j[P_j,S_i]] =$$

$$= (\text{т. Якоби}) = +2P_i[P_j[S_i,S_j]] + 2P_i[S_i,[S_j,P_j]]$$

$$= +2[P_i,P_j][S_i,S_j] - 2[P_i,S_i][P_j,S_j]$$

Сокращая подчёркнутые слагаемые, получаем, что

$$= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\Big\{ [P_i,P_j]^2 + [S_i,S_j]^2 + 2[P_i,S_j]^2\Big\}$$

т.о. после исключения вспомогательных полей действие можно переписать в виде

$$S' = \frac{2}{e^2} \operatorname{tr} \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\lambda}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda + i\bar{\psi}_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_i$$

$$+ \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu P_i)^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{D}_\mu S_i)^2 + 2i P_i \{\bar{\psi}_i, \lambda\} - i\varepsilon_{ijk} P_i \{\bar{\psi}_j, \psi_k\}$$

$$+ 2S_i \{\bar{\psi}_i, \gamma_5 \lambda\} + \varepsilon_{ijk} S_i \{\bar{\psi}_j, \gamma_5 \psi_k\} + \frac{1}{4}[P_i, P_j]^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}[S_i, S_j]^2 + \frac{1}{2}[P_i, S_j]^2 \Big\}$$

– здесь есть явная $SO(3)$ симметрия, однако также присутствует и $SO(4)$ симметрия. Перепишем действие так, чтобы она стала явной:

Определим

$$\psi_I \equiv \begin{cases} \psi_i, & I = i = \overline{1,3} \\ \lambda, & I = 4. \end{cases}$$

$$P_{IJ} \equiv \begin{cases} \varepsilon_{ijk} P_k, & I, J = i, j = \overline{1,3} \\ -P_i, & J = 4;\ I = i = \overline{1,3} \end{cases}, \quad P_{IJ} = -P_{JI}$$

$$S_{IJ} \equiv \begin{cases} \varepsilon_{ijk} S_k & I, J = \overline{1,3} \\ +S_i, & J = 4,\ I = i = \overline{1,3} \end{cases} \quad S_{IJ} = -S_{JI}$$

Тогда несложно убедиться, что

$$\left.\begin{aligned} P_{IJ} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL} P_{KL} \\ S_{IJ} &= +\frac{1}{2}\varepsilon_{IJKL} S_{KL} \end{aligned}\right\}$$ SO(4)-инвариантные связи.

Действительно, например,

$$P_{ij} \overset{?}{=} -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij4k} P_{4k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk4} P_{k4} = \varepsilon_{ijk} P_k$$ – верно.

Тогда

$$P_{IJ}\{\bar\Psi_I, \psi_J\} = -2P_i\{\bar\Psi_i, \lambda\} + \varepsilon_{ijk} P_i \{\bar\Psi_j, \psi_k\}$$

$$S_{IJ}\{\bar\Psi_I, \gamma_5\psi_J\} = 2S_i\{\bar\Psi_i, \gamma_5\lambda\} + \varepsilon_{ijk} S_i \{\bar\Psi_j, \gamma_5\psi_k\}$$

Кроме того,

$$P_{IJ}^2 = \varepsilon_{ijk} P_k \cdot \varepsilon_{ijl} P_l + 2P_i^2 = 4P_i^2$$

Поэтому

$$S = \frac{2}{e^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar\Psi_I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_I + \frac{1}{8}(\mathcal{D}_\mu P_{IJ})^2$$

$$+ \frac{1}{8}(\mathcal{D}_\mu S_{IJ})^2 - i P_{IJ}\{\bar\Psi_I, \psi_J\} + S_{IJ}\{\bar\Psi_I, \gamma_5\psi_J\}$$

$$+ \frac{1}{64}[P_{IJ}, P_{KL}]^2 + \frac{1}{64}[S_{IJ}, S_{KL}]^2 + \frac{1}{32}[P_{IJ}, S_{KL}]^2 \Big\}$$

– видна явная SO(4)-симметрия, которая и гарантирует $\exists$ 4 суперсимметрии.

Глава VII. Суперсимметрия на квантовом уровне

Особый интерес к суперсимметричным теориям связан с улучшенным (по сравнению с несуперсимметричным случаем) ультрафиолетовым поведением.

Причину улучшения УФ поведения можно понять, если использовать суперполевое квантование. Его можно выполнить, сохраняя $N=1$ SUSY как явную симметрию теории, записать выражения для производящего функционала и эффективного действия. Также можно построить и суперполевые правила Фейнмана.

Основной результат этого анализа:
Любой вклад в эффективное действие может быть представлен как интеграл по полному суперпространству,

$$\int d^4x\, d^4\theta .$$

При этом расходимости являются локальными, благодаря чему все расходимости являются интегралами по полному суперпространству от локальных выражений.

Следствием является т.н. теорема о неперенормировке суперпотенциала:

В $N=1$ суперсимметричных теориях отсутствуют расходящиеся квантовые поправки к суперпотенциалу.

т.е. если, например,

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i}\phi_i + \Big(\int d^4x\, d^2\theta\, \Big(\frac{1}{4} m_0^{ij}\phi_i\phi_j$$

$$+ \frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\Big) + \text{к.с.}\Big)$$

то нет расходимостей со структурой

$$\int d^4x\, d^2\theta\, m^{ij}\phi_i\phi_j \quad \text{или} \quad \int d^4x\, d^2\theta\, \lambda^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k$$

Заметим, что (без доказательства)

$$\int d^4x\, d^2\theta\, \phi^2 = \int d^4x\, d^4\theta\, \phi\cdot\frac{1}{16\partial^2}\bar{D}(1+\gamma_5)D\phi$$

нелокальность

но подынтегральное выражение является нелокальным.

Однако неперенормировка потенциала не означает, что масса m^{ij} и юкавские константы λ^{ijk} не перенормируются. Действительно, в теории имеются расходимости со структурой

$$\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i}\phi_i$$

которые ликвидируются перенормировкой

$$\phi_i = (\sqrt{Z})_i{}^j \phi_{Rj}$$

Поэтому с учётом ненеренормировки супер-потенциала

$$m^{ij} = (\sqrt{Z})_k{}^i (\sqrt{Z})_l{}^j m_0^{kl}$$

$$\lambda^{ijk} = (\sqrt{Z})_m{}^i (\sqrt{Z})_n{}^j (\sqrt{Z})_p{}^k \lambda_0^{mnp}$$

$\Rightarrow$ перенормировка масс и юкавских констант в суперсимметричных теориях связана с перенормировкой киральных суперполей материи.

Заметим, что перенормируемые суперсимметричные теории получаются только если супер-потенциал не более чем кубичен по суперполям материи. (В этом случае обычный потенциал будет не более чем 4-й степени по скалярным полям и в теории не будет размерных констант связи)

Рассмотрим теперь суперсимметричные калибровочные теории. В случае, если калибровочная группа является простой, то

$$S = \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Re}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i}(e^{2V})_i{}^j \phi_j$$

$$+ \left(\int d^4x\, d^2\theta \left(\frac{1}{4} m_0^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\right) + \text{к.с.}\right)$$

где предполагается, что массовое слагаемое и слагаемое с юкавским взаимодействием являются калибровочно инвариантными, например,

$$m_0^{ij}(e^{i\Lambda}\phi)_i (e^{i\Lambda}\phi)_j = m_0^{ij}\phi_i\phi_j$$

Представляя Λ в виде $\Lambda_i{}^j = (T^A)_i{}^j \Lambda^A$ и раскладывая это равенство с точностью до величин первого порядка по Λ, получаем, что

$$m_0^{ik}(T^A)_k{}^j + m_0^{kj}(T^A)_k{}^i = 0$$

Аналогично, калибровочная инвариантность юкавского слагаемого дает

$$\lambda_0^{ijm}(T^A)_m{}^k + \lambda_0^{imk}(T^A)_m{}^j + \lambda_0^{mjk}(T^A)_m{}^i = 0$$

Как и в случае теорий без калибровочного суперполя, суперпотенциал не перенормируется,

и перенормировка масс и юкавских констант
связаны с перенормировкой ϕ_i теми же формулами, что и ранее.

Перенормируется ли

$$\frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b \quad ?$$

(Здесь интегрирование только по $d^2\theta$)

$$W_a = \frac{1}{32}\bar{D}(1-\gamma_5)D\left[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\right]$$

Поэтому

$$\frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b = \left[W_b - \text{киральное суперполе}\right]$$

$$= \frac{1}{64e_0^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, \bar{D}(1-\gamma_5)D\left[e^{-2V}(1+\gamma_5)D_a e^{2V}\cdot C^{ab}W_b\right]$$

можно выносить в силу киральности W_b.

При этом

$$\int d^2\bar\theta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\theta}(1-\gamma_5)\frac{\partial}{\partial\bar\theta} = -\frac{1}{4}\bar{D}(1-\gamma_5)D +$$

+ полные производные по x^μ.

Поэтому с точностью до поверхностных членов

$$\int d^4x\, d^4\theta = \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar\theta = \int d^4x\, d^2\theta\left(-\frac{1}{4}\right)\bar{D}(1-\gamma_5)D$$

Это означает, что рассматриваемое слагаемое представимо в виде интеграла по полному суперпространству от локального выражения:

$$\frac{1}{2e_0^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b =$$

$$= -\frac{1}{16 e_0^2} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, e^{-2V} (1+\gamma_5) D_a e^{2V} \cdot C^{ab} W_b$$

Как следствие, могут существовать расходящиеся квантовые поправки, имеющие такую структуру.

Поэтому перенормироваться могут заряд и калибровочное поле (при использовании метода фонового поля — квантовое калибровочное поле)

Однако известно, что в $N=1$ суперсимметричных калибровочных теориях перенормировка заряда связана с перенормировкой суперполей материи т.н. точной NSVZ β-функцией:

$$\frac{\beta(\alpha,\lambda)}{\alpha^2} = -\frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j (\gamma_\phi)_j{}^i(\alpha,\lambda)/r}{2\pi\,(1 - C_2\alpha/2\pi)}.$$

где $r = \dim G$

$$\operatorname{tr}(T^A T^B) = T(R)\,\delta^{AB} \qquad \left(\operatorname{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}\right)$$

генераторы фундаментального представления

$$(T^A T^A)_i{}^j = C(R)_i{}^j$$

$$f^{ACD} f^{BCD} = C_2\,\delta^{AB} \qquad \left([T^A, T^B] = i f^{ABC} T^C\right)$$

Напомним, что по определению

$$\beta(\alpha,\lambda) \equiv \left.\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\right|_{\substack{\alpha_0=const\\ \lambda_0=const}}$$

$$(\gamma_\phi)_j{}^i(\alpha,\lambda) \equiv \left.\frac{d\ln Z_j{}^i}{d\ln\mu}\right|_{\substack{\alpha_0=const\\ \lambda_0=const}}$$

где μ – точка нормировки, α_0, λ_0 – голые константы связи, а α, λ – перенормированные константы связи.

Изучим теперь квантовые свойства $N=2$ суперсимметричных калибровочных теорий. В случае простой калибровочной группы

$$S = \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \cdot$$

$$\cdot\, \phi^+ e^{2V}\phi\, e^{-2V} + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\,\left(\phi_1^+ e^{2V}\phi_1 + \phi_2^+ e^{-2V^T}\phi_2\right)$$

$$+\left\{\int d^4x\, d^2\theta\left(\frac{1}{2}m_0\phi_2^T\phi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\phi_2^T\phi\,\phi_1\right) + \text{к.с.}\right\}.$$

Если теория квантуется с сохранением $N=2$ суперсимметрии, то ϕ перенормируется также как и фоновое калибровочное поле и $\Rightarrow$ не перенормируется. Поэтому не перенормируются и ϕ_1, ϕ_2 (т.е. гипермультиплет) в силу $N=1$

теоремы о неперенормировки (см. выделенное
слагаемое)

При условии $N=2$ суперсимметричного квантования можно также показать, что из NSVZ β-функции следует конечность вне однопетлевого приближения:

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\pi}\left(C_2 - T(R_0)\right)$$

где R_0 – представление, в котором находится ϕ_1 (или ϕ_2)

Если $R_0 = Adj$, а $m_0 = 0$, то получается $N=4$ SYM. В этом случае

$$T(R_0) = T(Adj) = C_2 \quad \text{т.к.}$$

$$tr\left(T^A_{Adj} T^B_{Adj}\right) = -if^{ACD} \cdot (-i) f^{BDC} = C_2 \delta^{AB}$$

$\Rightarrow \beta(\alpha) = 0$ – $N=4$ SYM конечна во всех порядках теории возмущений.

Это также очевидно из вида действия

$$S = \frac{1}{2e_0^2} tr\, Re \int d^4x\, d^2\theta\, W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{2e_0^2} tr \int d^4x\, d^4\theta \cdot$$

$$\cdot \phi_i^+ e^{2V} \phi_i e^{-2V} + \left\{ \frac{i}{3\sqrt{2}\, e_0^2} tr \int d^4x\, d^2\theta\, \varepsilon_{ijk} \phi_i [\phi_j, \phi_k] \right.$$

$$\left. + \text{к.с.} \right\}$$

Действительно, здесь все коэффициенты жёстко заданы $N=4$ суперсимметрией, т.ч. перенормироваться может только константа связи. Но слагаемое с ϕ^3 не перенормируется в силу $N=1$ теоремы о неперенормировке (суперпотенциала). Поэтому не перенормируется и заряд.