

---

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

---

### О ПРОБЛЕМЕ ПРЕЖДЕВРЕМЕННОГО ПРЕКРАЩЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

© 2016 г. С.А. Смоляк

(Москва)

Рассматриваются инвестиционные проекты в реальном секторе экономики с несколькими участниками. Здесь возможны ситуации, когда участник обнаруживает, что ему выгодно досрочно прекратить свое участие в проекте. Это приводит к организационным сложностям и нередко – к прекращению всего проекта. Для заблаговременного исключения таких ситуаций необходимо надлежащим образом сформировать организационно-экономический механизм реализации проекта. Выявить возможность таких ситуаций помогает предлагаемый критерий, который можно трактовать и в качестве одной из модификаций внутренней ставки доходности проекта.

**Ключевые слова:** проект, инвестор, эффект, ставка доходности, продолжение проекта, прекращение проекта, оптимизация.

**Классификация JEL:** C52, D21, D46, G31, O22.

#### 1. ПРОЕКТЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В этой статье под *проектом* мы понимаем некоторую совокупность действий, выполняемых одним или несколькими *участниками* проекта; эта совокупность порождает определенные *денежные потоки* для каждого из участников.

Будем рассматривать проект с позиции одного из его участников, для определенности назовем его *инвестором*. Денежные потоки инвестора, по определению, включают денежные притоки (средства, поступающие инвестору от других участников проекта или со стороны, например от покупателей производимой продукции) и денежные оттоки (средства, уплачиваемые инвестором другим участникам проекта или на сторону, например государству или поставщикам потребляемых товаров и услуг). При этом важно учитывать следующие существенные обстоятельства:

- денежные притоки и оттоки могут осуществляться в различные моменты времени, не обязательно равноотстоящие;
- денежные потоки инвестора определяются с учетом схемы финансирования проекта. Проект, реализуемый при какой-то другой схеме финансирования, рассматривается как другой проект;
- денежные притоки нельзя трактовать как доходы. Например, в их состав могут входить средства, получаемые в виде займов;
- денежные оттоки нельзя трактовать как расходы. Приведем ряд примеров. В финансовой отчетности к расходам относится амортизация основных средств, которая никому не уплачивается и ни от кого не получается. Вложение средств инвестора на банковский депозит является для него оттоком денежных средств, но никак не расходом. Наконец, если проект требует использования некоторого имущества (скажем, оборудования) и такое имущество у инвестора имеется, то альтернативная стоимость этого имущества включается в состав (инвестиционных) денежных оттоков<sup>1</sup>, хотя ни доходов, ни расходов в момент передачи имущества в проект у инвестора не возникает;

---

<sup>1</sup> Смысл этой операции очевиден: если бы у инвестора не было подходящего имущества, его пришлось бы приобретать, и затраты на приобретение отражаются в альтернативной стоимости имущества.

• рубль, потраченный в составе денежных оттоков, имеет для инвестора ту же ценность, что и рубль, полученный *в тот же момент времени* в составе денежных притоков. Это означает, что если в один и тот же момент времени проект приводит к поступлению какого-то денежного притока и одновременно – к выплате какого-то денежного оттока, то для инвестора эти операции равноценны получению *чистого денежного притока*, равного разности между указанными денежными притоками и оттоками. Разумеется, в любой момент времени чистый денежный приток проекта может быть как положительным, так и отрицательным. Однако по отношению к чистым денежным притокам мы используем общий термин “получение”, чтобы каждый раз не говорить о получении денежных притоков и выплате (передаче на сторону) денежных оттоков.

В то же время рубли чистого денежного притока, получаемые в *разные* моменты времени, для инвестора неравноценны: получение одного рубля в более поздний момент времени является для инвестора менее ценным. Уменьшение ценности денег во времени можно описать с помощью коэффициентов дисконтирования  $\alpha(t)$ , отражающих ценность 1 руб., полученного в момент времени  $t$ , по сравнению с ценностью 1 руб., полученного в некоторый базисный момент времени 0. Темп снижения ценности денег во времени, т.е. величина  $r(t) = -\alpha'(t)/\alpha(t)$ , имеющая размерность 1/единицу времени, называется *ставкой дисконтирования*. Обычно такая ставка считается неизменной во времени:  $r(t) \equiv r = \text{const}$ . В данной статье мы также придерживаемся этого предположения. В таком случае  $\alpha(t) = e^{-rt}$ .

Предположение о стабильности (неизменности во времени) ставки дисконтирования является спорным. В ситуации, когда денежные потоки проектов выражаются в переменных (прогнозных) ценах на соответствующую дату, ставка дисконтирования должна учитывать темп инфляции, и потому будет со временем меняться. Однако если дефлировать денежные потоки, для дисконтирования должна использоваться реальная ставка, которая считается гораздо более стабильной (Виленский и др., 2008).

Далее будет предполагаться, что инвестор сам выбирает ставку дисконтирования для оценки эффективности любых проектов, в которых он участвует или намеревается участвовать. При этом он исходит из своих целей и интересов, но учитывает и рыночную конъюнктуру. Проблемам, связанным с установлением ставок дисконтирования, посвящена большая литература, в том числе (Виленский и др., 2008), но мы не будем на них останавливаться. Отметим лишь, что в задачах стоимостной оценки имущества эти ставки трактуются несколько иначе (Микерин, Гребенников, Нейман, 2003; Международный совет по стандартам оценки, 2013).

Далее мы будем рассматривать только *дискретные* проекты в *детерминированной* ситуации. Каждый такой проект предусматривает получение конечного числа точно определенных чистых денежных притоков в различные моменты времени. Проект, дающий чистые денежные притоки  $f_i$  в моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ;  $t_1 < \dots < t_N$ ) будем обозначать  $(f_1; t_1 | \dots | f_N; t_N)$ . Наиболее поздний момент получения чистых денежных притоков  $t_N$  мы будем рассматривать как *момент прекращения проекта* (разумеется, только для инвестора, поскольку другие участники проекта могут продолжать осуществлять предусмотренные проектом действия).

Проекты считаются независимыми, если осуществление одного не влияет на денежные потоки другого. При совместной реализации независимых проектов их денежные потоки складываются. Это позволяет ввести операцию суммирования проектов<sup>2</sup>:

$$(f_1; t_1 | \dots | f_N; t_N) + (g_1; t_1 | \dots | g_N; t_N) = (f_1 + g_1; t_1 | \dots | f_N + g_N; t_N).$$

Любой проект  $D(A, p, t, s) = (-A; t | A e^{p(s-t)}; s)$ , предусматривающий вложение некоторой суммы  $A$  в какой-то момент  $t$  и получение суммы  $A e^{p(s-t)}$  в более поздний момент  $s$ , будем называть *депозитом*. Величину  $A$  будем называть суммой депозита,  $p$  – его ставкой (отвечающей непрерывному начислению процентов),  $t$  и  $s$  – моментами его открытия и закрытия. К депозитам отнесем и *вырожденные* депозиты, предусматривающие получение какой-то положитель-

<sup>2</sup> Предполагается, что для обоих проектов чистые денежные притоки получаются в одни и те же моменты времени (если в какой-то момент по одному из проектов чистые денежные притоки отсутствуют, они принимаются нулевыми).

ной суммы в некоторый момент времени, рассматривая эту операцию как результат вложения нулевой суммы в предшествующий момент времени. Ставку вырожденного депозита будем считать равной  $+\infty$ .

Рассмотрим теперь дискретный проект, предусматривающий получение чистых денежных притоков  $f_i$  в моменты времени  $t_i$ . Учитывая неравноценность разновременных чистых денежных притоков, их целесообразно привести (дисконтировать) к моменту начала проекта (моменту 0), используя соответствующие коэффициенты дисконтирования. Их сумма отразит суммарный (интегральный) эффект, получаемый инвестором от реализации проекта, т.е. такое количество денег (рублей), получение которого в начале проекта эквивалентно для инвестора получению всех чистых денежных притоков от проекта<sup>3</sup>.

В таком случае эффект проекта для инвестора может быть оценен суммой его дисконтированных чистых денежных притоков от проекта, т.е. величиной

$$V = \sum_i f_i \alpha(t_i) = \sum_i f_i e^{-rt_i}.$$

Данный показатель считается основным показателем эффективности проекта. Это значит, что проекты с отрицательным эффектом инвестор должен рассматривать как неэффективные, а в противном случае – как эффективные. Заметим также, что для обозначения указанного показателя используют также термины “интегральный эффект” или “чистый дисконтированный доход” (ЧДД, Net Present Value, *NPV*) (Виленский и др., 2008).

Отметим три важных свойства показателя эффекта:

1) *аддитивность*: при совместной реализации независимых проектов их эффекты складываются;

2) *монотонность*: при улучшении проекта (увеличении всех или некоторых  $f_i$ ) эффект увеличивается;

3) *однородность*: при пропорциональном увеличении всех чистых денежных притоков (изменении масштаба проекта) эффект проекта увеличивается в той же пропорции.

Отсюда, в частности, следует, что при переносе затрат на более ранний срок, т.е. при совместной реализации с проектом  $(-a; t_i | a; t_{i+1})$ , эффект проекта уменьшается. Аналогично при переносе затрат на более поздний срок эффект от проекта увеличивается.

Разумеется, эффект проекта зависит от ставки дисконтирования, поэтому далее он будет обозначаться через  $V(r)$ . Характер такой зависимости проиллюстрируем двумя примерами.

**Пример 1.** Эффект депозита  $D(A, p, t, s)$  составляет  $V(r) = -A + A e^{pT} e^{-rT} = A[e^{(p-r)T} - 1]$ . Нетрудно убедиться, что эта величина – монотонно убывающая функция от ставки дисконтирования, обращаясь в нуль при  $r = p$ . ■

Назовем проект *правильным*, если зависимость  $V(r)$  его эффекта от ставки дисконтирования обладает следующим свойством: существует такое число  $\rho$ , что  $V(\rho) = 0$ , причем  $V(r) > 0$  при  $r < \rho$  и  $V(r) < 0$  при  $r > \rho$ . Такую величину  $\rho$  называют *внутренней ставкой* (или *нормой доходности*) проекта (ВСД, ВНД, *Internal Rate of Return, IRR*). Очевидно, что правильный проект будет эффективен для инвестора, если его ВСД не меньше ставки дисконтирования, и неэффективен – в противном случае.

Отметим важные свойства показателя ВСД.

1. При изменении масштаба проекта (пропорциональном увеличении всех  $f_m$ ) ВСД не меняется.

2. При сдвиге проекта во времени, т.е. при изменении всех  $t_i$  на одну и ту же величину, ВСД не меняется.

<sup>3</sup> Указанная величина может оказаться и отрицательной, тогда она отразит такое количество денег, выплата которого в начале проекта эквивалентна получению всех чистых денежных притоков от проекта. Однако, как отмечалось выше, вместо выплат в составе денежных оттоков мы говорим о получении соответствующего отрицательного чистого денежного притока.

3. При изменении масштаба измерения времени, т.е. при пропорциональном изменении всех  $t_i$ , ВСД изменяется в обратной пропорции (например, при измерении времени не в годах, а в месяцах, ВСД увеличится в 12 раз).

4. Любой депозит – правильный, и его ВСД совпадает с его ставкой (см. пример 1).

5. Если при улучшении проекта (увеличении некоторых  $f_m$ ) проект остается правильным, то его ВСД увеличивается.

6. Если у проекта  $(f_1; t_1 | \dots | f_N; t_N)$   $\text{ВСД} = a$ , то у проекта  $(e^{-bt_1} f_1; t_1 | \dots | e^{-bt_N} f_N; t_N)$   $\text{ВСД} = a + b$ .

**Пример 2.** Назовем проект *типичным* (Виленский и др., 2008), если его денежные потоки начинаются с отрицательных чистых притоков, которые затем сменяются положительными. В (Виленский и др., 2008) показано, что любой типичный проект является правильным, поэтому инвестор оценит типичный проект как эффективный, если (что необходимо и достаточно) его ВСД будет не ниже ставки дисконтирования.

Показатель ВСД обладает любопытным свойством *усредняемости* (Виленский и др., 2008): если один проект имеет  $\text{ВСД} = a$ , а у второго –  $\text{ВСД} = b \geq a$ , то ВСД совместной реализации обоих проектов, если она существует, находится в интервале между  $a$  и  $b$ .

Это вытекает из того, что при совместной реализации проектов складываются и соответствующие функции  $V(r)$ , так что в результате получается положительная при  $r < a$  и отрицательная при  $r > b$  функция.

Отсюда, в частности, следует, что совместная реализация правильных проектов с одинаковыми ВСД является правильным проектом с той же ВСД. Отметим и другое следствие. Поскольку депозит  $(-a; t_i | a; t_{i+1})$  имеет  $\text{ВСД} = 0$ , то при совместной реализации с ним, т.е. при переносе затрат на более ранний срок, положительный ВСД проекта уменьшается, а отрицательный – увеличивается (если только проект остается правильным).

Правильные проекты были определены выше как такие проекты, у которых график зависимости  $V(r)$  пересекает ось абсцисс в единственной точке в направлении сверху вниз. Поэтому любой неправильный проект можно отнести к одному из двух типов. У проектов первого типа функция  $V(r)$  вообще не имеет корней, поэтому указанный график вообще не пересекает оси абсцисс; у проектов второго типа график этой функции пересекает ось абсцисс в направлении снизу вверх хотя бы в одной точке.

Для проектов первого типа определить ВСД можно, хотя и достаточно условно. Если у такого проекта  $V(r) > 0$  при всех  $r$ , то ВСД проекта можно принять равным  $+\infty$ , если же  $V(r) < 0$  при всех  $r$ , то ВСД проекта можно принять равным  $-\infty$ . Это позволяет, в частности, считать, что проект, денежный поток которого состоит только из одних доходов, имеет бесконечно высокую доходность.

А вот для проектов второго типа корректно определить ВСД уже нельзя, поскольку здесь не существует такого  $\rho$  (ни конечного, ни бесконечного), чтобы  $V(\rho) = 0$ , причем  $V(r) > 0$  при  $r < \rho$  и  $V(r) < 0$  при  $r > \rho$ . Это явилось основанием для конструирования многочисленных модификаций показателя ВСД, пригодных для оценки эффективности произвольных, в том числе и неправильных, проектов. Недостатки ряда таких показателей обсуждаются в (Виленский и др., 2008). Для наших целей отметим лишь наиболее важный из них: подобные показатели не являются внутренними, поскольку они рассчитываются с использованием не только денежных потоков проекта, но и некоторых экзогенно задаваемых параметров (например, внешних ставок дисконтирования, отражающих рыночные процентные ставки).

Проекты обычно разрабатываются в нескольких вариантах. Естественно, что при этом инвестору следует выбирать тот из возможных вариантов, который дает наибольший эффект. В то же время важно подчеркнуть, что в своем выборе инвестор ограничен требованиями, налагаемыми другими участниками проекта, а также государством (которое может входить, но может и не входить в число участников проекта). Поэтому инвестор может выбрать в качестве лучшего отнюдь не всякий теоретически возможный вариант проекта. В частности, это относится и к выбору наиболее подходящего момента прекращения проекта. Связанные с этим проблемы мы рассмотрим в следующем разделе.

## О ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕЖДЕВРЕМЕННОГО ПРЕКРАЩЕНИЯ ПРОЕКТА

Рассмотрим два примера.

**Пример 3.** Рассмотрим проект  $(-20; 0|32; 1|-6; 2|4; 3)$ . Нетрудно проверить, что для этого проекта функция  $V(r)$  монотонно убывающая и обращается в нуль при  $r$ , равном примерно 0,4. Такой проект является правильным и его ВСД  $\approx 0,4$ . Казалось бы, инвестору, принявшему ставку дисконтирования 0,1, целесообразно принять участие в таком проекте, тем более что эффект проекта  $V(0,1) \approx 7$  – положительный и относительно значимый. Допустим на минуту, что он согласился на это. Но вот прошел год, и инвестор, совершивший платеж 10 в момент 0 и получивший платеж 16 в момент 1, видит, что на следующий год (в момент 2) ему необходимо осуществить платеж в сумме 6, чтобы еще через год (в момент 3) получить только 4. Естественно, что у него возникает желание прекратить участие в данном проекте.

**Пример 4.** Рассмотрим проект  $(-20; 0|17; 1|15; 2|-2; 3)$ . При  $r = 0,1$  эффект этого проекта также достаточно большой:  $V(0,1) \approx 6,2$ . К тому же при  $r$ , превышающем примерно  $-1,6$ , функция  $V(r)$  монотонно убывает и обращается в нуль при  $r \approx 0,3$ . В то же время, получив платежи 17 и 15 в моменты соответственно 1 и 2, инвестор увидит, что продолжение (в данном случае – завершение) проекта ему невыгодно, так как потребует от него только новых затрат. Другими словами, у инвестора и здесь возникнет желание прекратить проект *преждевременно* (т.е. до предусмотренного проектом момента его окончания). В то же время (в отличие от примера 3) уравнение  $V(r) = 0$  имеет два корня, так что, строго говоря, ВСД у такого проекта не существует.

Если рассмотреть приведенные примеры более внимательно, мы увидим, что они могут относиться либо к ситуации, когда инвестор может прекратить проект преждевременно, либо к ситуации, когда преждевременное прекращение проекта не допускается.

Начнем с первой из указанных ситуаций, отложив рассмотрение второй до следующего раздела. На практике инвестор, действительно, иногда имеет возможность, приступив к реализации какого-либо проекта, прекратить его преждевременно. Это относится, например, к проектам, в которых инвестор вначале приобретает некоторое оборудование, затем использует его, получая определенные доходы, затем проводит дорогостоящий ремонт оборудования, после чего вновь использует его до момента списания (утилизации). Если считать, что пример 3 относится к подобному проекту, мы увидим, что, несмотря на достаточно высокую эффективность проекта, ремонта оборудования оказывается нецелесообразным, и инвестору эффективнее не проводить ремонт, списав оборудование раньше. Для нас же важен отнюдь не этот конкретный результат, а тот факт, что возможность прекратить проект до его окончания означает, что у данного проекта есть и другие, альтернативные варианты выполнения. Но чтобы это выяснить, инвестору не нужно начинать проект и останавливаться на полдороги. Решая вопрос о приобретении и использовании оборудования, он с самого начала может рассмотреть различные варианты реализации соответствующего проекта. В частности, он может установить и оптимальный момент прекращения проекта следующим образом.

Рассмотрим, например, проект  $(f_1; t_1 | \dots | f_N; t_N)$ . Если инвестор, использующий ставку дисконтирования  $r$ , прекратит проект после момента  $t_m$  (т.е., получив чистый денежный приток  $f_m$ ), то он получит эффект  $V_m(r) = \sum_{i=1}^m f_i e^{-rt_i}$ . В таком случае оптимальный момент прекращения проекта<sup>4</sup> можно найти путем решения задачи:  $V^*(r) = \max_m V_m(r)$ . Нетрудно убедиться: когда все  $f_i$  – ненулевые, прекращение проекта после достижения момента  $t_m$  будет оптимальным, только если  $f_m > 0 > f_{m+1}$ . Однако одного этого условия недостаточно, так как таких моментов  $t_m$  может быть несколько.

В статье (Arrow, Levhari, 1979) показано, что для проектов, завершающихся получением доходов ( $f_N > 0$ ), соответствующая функция  $V^*(r)$  убывает по  $r$  и имеет единственный корень – для дискретных проектов доказательство приведено также в (Бронштейн, 2008). Экономический смысл достаточно прост:  $\rho$  – такая ставка дисконтирования, что при любой более высокой ставке

<sup>4</sup> Подчеркнем еще раз, что мы рассматриваем только детерминированную ситуацию. Проблемы оптимального прекращения проектов со случайными результатами (так называемые задачи оптимальной остановки случайных процессов) требуют отдельного рассмотрения.

реализация проекта в любой момент его прекращения оказывается неэффективной, тогда как при любой более низкой ставке проект будет эффективным при подходящем выборе момента его прекращения. Какого-то специального названия для этой ставки в (Arrow, Levhari, 1979; Бронштейн, 2008) не предлагалось, однако ее можно было бы назвать *эффективной внутренней ставкой доходности* проекта (ЭВСД, Effective Internal Rate of Return, EIRR). Естественно, ее можно рассматривать как одну из возможных модификаций показателя ВСД.

Как доказано в (Бронштейн, 2008), показатель ЭВСД обладает свойством *квазивыпуклости*: если один проект имеет ЭВСД  $= a$ , а у второго ЭВСД  $= b \geq a$ , то у совместной реализации обоих проектов ВСД не больше  $b$ . Это объясняется достаточно просто: в какой бы момент  $t_m$  ни прекратить совместную реализацию обоих проектов,  $V_m(r)$  для каждого из них окажутся отрицательными при  $r > b$  величины, а следовательно, станет отрицательной и их сумма. Другие свойства ЭВСД исследованы в работах (Cantor, Lippman, 1983, 1995; Presman, Sonin, 2000; Беленький, 2005; Ващенко, Шананин, 2012).

Между тем по ряду причин изложенная выше модель оптимизации момента прекращения проекта представляется чрезмерно упрощенной. Укажем некоторые из них.

1. Предполагается, что начиная с выбранного (инвестором) момента прекращения проекта чистые денежные притоки инвестора становятся нулевыми. На самом деле это не всегда так. Например, при прекращении использования оборудования инвестор должен его демонтировать и реализовать на сторону – с этим также связаны определенные денежные потоки (см. разд. 3).

2. При сравнении варианта прекращения проекта в момент  $t$  и в более поздний момент  $s$  предполагается, что в обоих вариантах получаемые инвестором до момента  $t$  чистые денежные притоки будут одинаковыми. Другими словами, денежные потоки проекта будут как бы независимыми от момента прекращения проекта<sup>5</sup>. Между тем на практике денежные потоки, связанные с использованием объекта, нередко зависят от срока его службы. На это, по-видимому, впервые обратил внимание Буато (Boiteux, 1950). Вот что он пишет (цитируется по (Массе, 1971)): “Если заранее не установлена дата ликвидации железнодорожной ветки, то регулярно будут расходоваться средства на технический уход за ней, и, таким образом, окажется, что ликвидация этой линии в ближайшем будущем всегда будет представляться невыгодной, так как линию, находящуюся в хорошем состоянии, можно и после прекращения регулярного технического ухода продолжать эксплуатировать еще несколько лет с минимальными расходами (и очень часто гораздо более низкими, чем общая сумма расходов на обслуживание железнодорожного полотна)”. Иными словами, если задать какой-то срок службы объекта (неважно, машины или железнодорожной ветки), то в соответствии с ним и следует выбирать режим или технологию эксплуатации объекта, от которых зависят и денежные потоки на протяжении всего срока службы. И, действительно, установив срок службы 7 лет для небольших автокранов, было бы глупо предусматривать их капитальные ремонты через 3 года, тогда как при сроке полезного использования 9 лет это было бы вполне разумно. Отметим в связи с этим, что задачам оптимизации срока службы имущества (в том числе – с учетом эффекта Буато) посвящена большая литература, но мы здесь упомянем лишь несколько источников (Виленский и др., 2008; Массе, 1971; Канторер, 1975; Смоляк, 2008, 2009; Smolyak, 2012).

3. Оптимизация момента прекращения проекта является частным случаем более общей задачи оптимизации параметров проекта. Здесь уместно отметить, что подобные задачи возникают и при оценке стоимости имущества. Дело в том, что стоимость имущества оценивается применительно с учетом наиболее эффективного способа его использования (Виленский и др., 2008; Микерин, Гребенников, Нейман, 2003; Международный совет по стандартам оценки, 2013). Другими словами, она должна отвечать наиболее эффективному варианту проекта приобретения и последующего использования этого имущества. Это означает, что при оценке имущества должен быть оптимизирован не только срок его службы, но и другие характеристики способа использования имущества, например сменность работы или периодичность капитальных ремонтов – такие задачи решались, например, в (Смоляк, 2013). Разным наборам таких характеристик, естественно, отвечает и разная динамика денежных потоков.

<sup>5</sup> Оборот “как бы” использован здесь неслучайно. На самом деле в разных вариантах чистые денежные притоки инвестора становятся нулевыми в разные моменты времени.

## ПРОЕКТЫ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ПРЕЖДЕВРЕМЕННОГО ПРЕКРАЩЕНИЯ

На практике также вполне возможна ситуация, когда не допускается преждевременного прекращения проекта. Дело в том, что обычно в проектах, реализуемых в реальном секторе, много участников. Тогда выбор варианта проекта должен осуществляться ими совместно, а участие в проекте подразумевает выполнение каждым участником всех предусмотренных для него проектом действий, а не только наиболее выгодной части этих действий. Характерным здесь является пример 4. Такого типа денежные потоки возникают, например, у инвестора, осуществляющего разработку месторождений полезных ископаемых. Участником подобных проектов является, в частности, государство, устанавливающее те или иные ограничения на технологические способы разработки и предусматривающее в отдельных случаях (скажем, в соглашениях о разделе продукции) индивидуальный режим налогообложения инвестора. Здесь, соглашаясь на разработку месторождения, инвестор вынужден соблюдать определенную технологию разработки, извлечь некий объем полезного ископаемого, после чего обеспечить выполнение дорогостоящих ликвидационных работ (включая рекультивацию территории, ликвидацию наземных и надводных сооружений, бетонирование скважин и т.п.).

Еще одним примером подобного рода являются проекты строительства АЭС. Они обеспечивают получение относительно дешевой электроэнергии, однако после завершения их эксплуатации необходимы значительные затраты на обеспечение в течение длительного периода времени радиационной безопасности сооружений, поскольку их нельзя просто так уничтожить.

Нетрудно убедиться, что любые проекты, завершающиеся получением отрицательных чистых денежных притоков, являются *неправильными*, поэтому и ВСД у них не существует. В то же время именно при реализации подобных проектов у инвестора возникает желание преждевременно прекратить в них участвовать.

А чтобы предотвратить выход из проекта любого участника, в его договорах с другими участниками могут предусматриваться конкретные меры административного или экономического характера.

Административные меры обычно предусматривает государство–участник проекта. Что из этого получается, – хорошо видно на опыте реализации некоторых проектов в плановой экономике СССР. В тех случаях, когда участие в проекте не отвечало интересам какого-либо предприятия, оно предпринимало всевозможные усилия, чтобы не допустить реализации проекта в полном объеме. И это становилось одной из причин неудачной реализации многих проектов. Аналогичная ситуация сложилась и при реализации некоторых соглашений о разделе продукции (СРП), заключенных с иностранными государствами (Смоляк, 2002). Дело в том, что обычно консорциум крупных корпораций, заключивший СРП, создает для освоения месторождения самостоятельную компанию-оператора, регистрируя ее в оффшорной зоне. Учредительные документы при этом оформляются так, что учредители не несут ответственности по обязательствам оператора, рискуя лишь первоначальными взносами в уставный фонд. Оператор, по сути, не является инвестором, но выполняет его функции, он финансирует разработку месторождения и получает доходы в соответствии с СРП, но вся получаемая прибыль уходит учредителям. Поэтому, когда в последние годы добыча полезных ископаемых становится убыточной, но (по условиям СРП) должна продолжаться, компания-оператор становится убыточной. В этот момент она просто информирует государство о прекращении своей деятельности в связи с невозможностью продолжать разработку, и тем более – нести ликвидационные затраты. Все проблемы ликвидации сооруженных объектов ложатся при этом на государство. СРП такого типа было заключено и в России, причем чиновники скорее всего потирали руки от радости, увидев в тексте соглашения пункт, в соответствии с которым после завершения добычи все сооруженные объекты переходят в собственность Российской Федерации, забыв, что речь идет об объектах, подлежащих ликвидации<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Речь идет о нефтяном месторождении на шельфе, так что к переходящим в собственность РФ объектам относилась размещенная в море огромных размеров бетонная платформа с отходящими от нее десятками скважин. При этом неиспользуемые платформы в соответствии с международными соглашениями по морскому праву должны быть разрезаны на части и либо перемещены на сушу, либо затоплены на большой глубине, верхние части скважин до глубины порядка 150 м должны быть срезаны, а нижние части – забетонированы.

Экономические меры обычно предусматривают штрафные санкции за преждевременный выход из проекта. Однако если размеры штрафа невелики, это не спасает положения, а при больших штрафах никакая компания не согласится на такие условия участия в проекте. Более того, даже в случае, когда штраф будет выплачен, он не позволит выполнить проект в полном объеме, поскольку никакая компания не согласится продолжать добычу, если это оказывается убыточным, а тем более – на бесплатное выполнение ликвидационных работ. Поэтому именно применительно к проектам разработки месторождений полезных ископаемых был разработан и практически используется во многих странах (*кроме России*) *совершенно иной экономический механизм*, обеспечивающий успешное выполнение проекта в полном объеме. Этот механизм предусматривает создание специального ликвидационного фонда, средства которого пополняются за счет прибыли от добычи и расходуются на финансирование ликвидационных работ. Некоторые проблемы, связанные с определением рациональных параметров такого механизма, рассмотрены, например, в (Виленский и др., 2008; Смоляк, 2002). В частности, там предложен и такой вариант этого механизма, при котором государство задает срок разработки месторождения, исходя из общественных (национальных) интересов, а ликвидационный фонд используется не только на финансирование ликвидационных расходов, но и на покрытие убытков, возникающих в последние годы разработки месторождения. Обратим внимание: при использовании ликвидационного фонда инвестор в последние годы разработки получает неотрицательные чистые денежные притоки, так что необходимости в преждевременном выходе из проекта не возникает.

Тем не менее, даже когда проект завершается неотрицательными чистыми денежными притоками, имеет смысл выяснить, не возникнет ли у инвестора необходимость в преждевременном выходе из проекта. Мы рассмотрим эту проблему в следующем разделе.

## КРИТЕРИИ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ПРЕЖДЕВРЕМЕННОГО ПРЕКРАЩЕНИЯ ПРОЕКТА

Рассмотрим проект  $(f_1; t_1 | \dots | f_N; t_N)$ . Чтобы выяснить, не возникнет ли у инвестора при достижении некоторого момента  $t_m$  желания прекратить участие в проекте, необходимо оценить *эффект продолжения проекта*, начиная с этого момента (т.е. с получения чистого денежного притока  $f_m$ ). Такой эффект оценивается путем приведения (дисконтирования) *предстоящих* чистых денежных притоков к моменту  $t_m$ , т.е. по формуле (Виленский и др., 2008):

$$V_m = V_m(r) = \sum_{i=m}^N f_i e^{-r(t_i - t_m)}.$$

Нетрудно проверить, что эффекты  $V_m$  продолжения проекта могут быть рассчитаны по следующим рекуррентным формулам, начиная с конца:

$$V_n = f_N; \quad V_m = f_m + e^{-r(t_{m+1} - t_m)} V_{m+1}, \quad m = N-1, \dots, 1.$$

Легко убедиться, что преждевременный выход из проекта будет для инвестора нецелесообразен (неэффективен) тогда и только тогда, когда все величины  $V_m$  (а не только эффект проекта  $V = V_1$ ) будут неотрицательными. Иными словами, критерием неэффективности преждевременного выхода из проекта будет  $\min_m V_m \geq 0$ . Разумеется, такой критерий может быть использован и в том случае, когда ставка дисконтирования со временем меняется, а коэффициенты дисконтирования не описываются экспоненциальной функцией. Однако последующие рассуждения во многом опираются на предположение стабильности ставок дисконтирования.

Начнем с того, что инвестор *всегда будет заинтересован в преждевременном выходе* из любого проекта, завершающегося денежными оттоками ( $f_N < 0$ ). Поэтому далее мы будем рассматривать только *доходные* проекты, завершающиеся денежными притоками ( $f_N > 0$ ). Легко видеть, что прекращать доходный проект в последний момент нецелесообразно. Выясним теперь, как зависят эффекты продолжения проекта  $V_m(r)$  при  $m < N$  от ставки дисконтирования  $r$ . Нетрудно проверить, что  $V_m(r) \sim f_N e^{-r(t_N - t_m)}$  при  $r \rightarrow -\infty$ . Это значит, что при достаточно больших (по модулю) отрицательных  $r$  величины  $V_m$  будут положительными и убывающими функциями от  $r$ . Но в таком случае и  $V^*(r) = \min_m V_m(r)$  при достаточно больших по модулю отрицательных  $r$  будет неотрицательной и невозрастающей функцией от  $r$ . При этом возможны два случая.

1. Найдется такое  $\rho$ , что и при всех  $r < \rho$ . Указанное  $\rho$  имеет смысл такой ставки дисконтирования, при которой и при всех меньших ставках преждевременное прекращение проекта оказывается неэффективным. Непревышение этой ставки в некотором смысле гарантирует целесообразность продолжения проекта на любом его этапе, что позволяет назвать  $\rho$  *внутренней ставкой неснижаемой доходности* проекта (ВСНД, Internal Rate of Irreducible Return, IRIR).

2.  $V^*(r) > 0$  при всех  $r$ . Эта ситуация возможна, если все чистые денежные притоки проекта положительные. Подобные проекты нецелесообразно прекращать на любом этапе их реализации, независимо от ставки дисконтирования, что позволяет принять  $ВСНД = \infty$ .

Нетрудно доказать, что наше определение ВСНД корректно, т.е. уравнение  $V^*(\rho) = 0$  имеет не более одного корня. Действительно, предположим, что уравнение имеет два корня  $a$  и  $b > a$ . Тогда  $V_m(b) = \sum_{i=m}^N f_i e^{-b(t_i-t_m)} \geq 0$  при всех  $m$ . Положим  $S_m = \sum_{i=m}^N f_i e^{-bt_i}$ . Тогда

$$f_N = S_N e^{bt_N}, \quad f_i = (S_i - S_{i+1}) e^{bt_i} \quad \forall i < N.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} V_m(a) &= \sum_{i=m}^N f_i e^{-a(t_i-t_m)} = e^{at_m} \left\{ S_N e^{bt_N} e^{-at_N} + \sum_{i=m}^{N-1} (S_i - S_{i+1}) e^{bt_i} e^{-at_i} \right\} = \\ &= e^{at_m} \left\{ S_m e^{(b-a)t_m} + \sum_{i=m+1}^{N-1} S_i [e^{(b-a)t_i} - e^{(b-a)t_{i-1}}] + S_N [e^{(b-a)t_N} - e^{(b-a)t_{N-1}}] \right\}. \end{aligned}$$

Первые два члена в фигурной скобке неотрицательны, поскольку  $t > t_{i-1}$  при всех  $i$ , а  $S_m \geq 0$  при всех  $m$ . Однако последний член здесь – положительный, поскольку  $S_N = f_N e^{-bt_N} > 0$ . Это значит, что  $V_m(a) > 0$  при всех  $m$ , что невозможно, поскольку  $0 = V^*(a) = \min_m V_m(a)$ .

Таким образом, мы получили некий аналог ВСД для любых доходных проектов.

Что же касается проектов, завершающихся денежными оттоками, то для них, очевидно, ВСНД не существует, поскольку их всегда целесообразно прекратить, например, на последнем шаге. Для таких проектов можно условиться считать  $ВСНД = -\infty$ .

Нетрудно проверить, что показатель ВСНД обладает некоторыми свойствами ВСД.

1. При улучшении проекта (увеличении некоторых  $f_m$ ) ВСНД не уменьшается.
2. При изменении масштаба проекта (пропорциональном увеличении всех  $f_m$ ) ВСНД не меняется.
3. При сдвиге проекта во времени, т.е. при изменении всех  $t_i$  на одну и ту же величину, ВСНД не меняется.
4. При изменении масштаба измерения времени, т.е. при пропорциональном изменении всех  $t_i$ , ВСНД изменяется в обратной пропорции.
5. ВСНД депозита совпадает с его ставкой.
6. Если у проекта  $(f_1; t_1 | \dots | f_N; t_N)$   $ВСНД = a$ , то у проекта  $(e^{-bt_1} f_1; t_1 | \dots | e^{-bt_N} f_N; t_N)$   $ВСНД = a + b$ .

Кроме того, показатель ВСНД обладает свойством *квазивогнутости*: если один из независимых проектов имеет  $ВСНД = a$ , а у второго  $ВСНД = b \geq a$ , то у совместной реализации обоих проектов  $ВСНД$  не меньше  $a$ .

Покажем это, но заметим вначале, что моменты получения чистых денежных притоков у обоих проектов можно считать одними и теми же (если в какой-то момент по одному проекту осуществляются платежи, а по другому – нет, всегда можно считать, что и по этому проекту осуществляется нулевой платеж). В таком случае при совместной реализации проектов складываются и соответствующие функции  $V_m(r)$  – положительные при  $r < a$ . Поэтому при  $r < a$  прекращение совместной реализации обоих проектов оказывается нецелесообразным, что и требо-

валось доказать. Отсюда вытекает интересное следствие. Поскольку депозит  $(-a; t_i | a; t_{i+1})$  имеет ВСНД = 0, то при совместной с ним реализации проекта, имеющего отрицательный ВСНД, т.е. при переносе затрат проекта на более ранний срок (или доходов – на более поздний срок) ВСНД не уменьшается.

Рассмотрим теперь проект, который является совместной реализацией нескольких депозитов, ставки которых не меньше некоторого  $a$ . Тогда ВСНД данного проекта (в силу квазивогнутости этого показателя) будет также не меньше  $a$ . Интересно, что справедливо и обратное утверждение.

**Утверждение.** Любой доходный проект  $(f_1; t_1 | \dots | f_N, t_N)$ , ВСНД которого не меньше  $a$ , имеет тот же денежный поток, что и совместная реализация нескольких депозитов, ставки которых также не меньше  $a$ .

**Доказательство.** Будем строить искомый набор депозитов, принимая пока, что каждый депозит  $D_i$  открывается в момент  $t_i$  и закрывается в момент  $t_{i+1}$ , причем ставки всех депозитов  $D_{N-1}, \dots, D_1$  равны  $a$ .

Поскольку последним денежным притоком является поступление от последнего депозита  $D_{N-1}$ , то, приняв его ставку равной  $a$ , найдем его сумму:  $A_{N-1} = e^{-a(t_N - t_{N-1})} f_N$ . Очевидно, что эта величина неотрицательная.

Заметим теперь, что чистый денежный приток в момент  $t_{N-1}$ , равный  $f_{N-1}$ , должен также быть равен поступлению по депозиту  $D_{N-2}$  за вычетом вложений  $A_{N-1}$  в депозит  $D_{N-1}$ . Следовательно, поступления по депозиту  $D_{N-2}$  должны составить  $f_{N-1} + A_{N-1} = f_{N-1} + e^{-a(t_N - t_{N-1})} f_N$ , так что его сумма будет равна  $A_{N-1} = e^{-a(t_{N-1} - t_{N-2})} [f_{N-1} + e^{-a(t_N - t_{N-1})} f_N]$ . Но выражение в квадратных скобках здесь отражает эффект продолжения проекта, начиная с момента  $t_{N-1}$ , который, используя принятые ранее обозначения, можно обозначить как  $V_{N-1}(a)$ . Таким образом,  $A_{N-2} = e^{-a(t_{N-1} - t_{N-2})} V_{N-1}(a)$ , и эта величина, по условию, также неотрицательна.

Аналогично можно построить и депозиты  $D_{N-3}, \dots, D_1$ . При этом сумма депозита  $D_i$  окажется неотрицательной и равной  $A_i = e^{-a(t_{i+1} - t_i)} V_{i+1}(a)$ .

Поток от совместной реализации депозитов  $D_{N-1}, \dots, D_1$  будет почти такой же, что и у проекта, с той лишь разницей, что чистый денежный приток в момент  $t_1$  здесь окажется равным  $-A_1$ , тогда как у проекта он должен составлять  $f_1$ . Но  $f_1 - (-A_1) = f_1 + e^{-a(t_2 - t_1)} V_2(a) = V_1(a)$ , и эта величина неотрицательная. Если она равна нулю, то искомый набор депозитов построен, в противном случае к нему надо добавить вырожденный депозит – получение суммы  $V_1(a)$  в момент  $t_1$ . ■

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Беленький В.З. (2005). О норме доходности инвестиционного проекта // *Экономика и математические методы*. Т. 41. № 1. С. 3–19.
- Бронштейн Е.М. (2008). О показателях эффективности инвестиционных проектов // *Экономика и математические методы*. Т. 44. № 3. С. 137–141.
- Вашенко М.П., Шананин А.А. (2012). Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // *Математическое моделирование*. № 24(3). С. 70–86.
- Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. (2008). Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. М.: Дело АНХ.
- Канторер С.Е. (1975). Амортизация и сроки службы машин и оборудования в строительстве. М.: Стройиздат.
- Массе П. (1971). Критерии и методы оптимального определения капиталовложений. М.: Статистика.
- Международный совет по стандартам оценки. (2013). Международные стандарты оценки 2011. / Пер. Г.И. Микерина, И.Л. Артеменкова. М.: Российское общество оценщиков.
- Микерин Г.И., Гребенников В.Г., Нейман Е.И. (2003). Методологические основы оценки стоимости имущества. Москва: ИНТЕРРЕКЛАМА.

- Смоляк С.А.** (2002). Проблемы финансирования работ по ликвидации нефтяных месторождений. В сб.: “Оценка эффективности инвестиций” / Под ред. В.Н. Лившица. Т. 2. С. 139–158.
- Смоляк С.А.** (2008). Проблемы и парадоксы оценки машин и оборудования. М.: РИО МАОК.
- Смоляк С.А.** (2009). Эргодические модели износа машин и оборудования // *Экономика и математические методы*. Т. 45. № 4. С. 42–60.
- Смоляк С.А.** (2013). Оценка рыночной стоимости машин с учетом устранимого и неустраанимого износа // *Экономика и математические методы*. Т. 49. № 1. С. 54–72.
- Arrow K.J., Levhari D.** (1979). Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment // *The Economic Journal*. Vol. 79. P. 560–566.
- Boiteux M.** (1950). Réflexions sur la concurrence du rail et de la route, le déclassement des lignes non rentables et le déficit du chemin de fer. Paris: Fédération Nationale des Transports Routiers.
- Cantor D.G., Lippman S.A.** (1983). Investment Selection with Imperfect Capital Markets // *Econometrica*. Vol. 51. No. 4. P. 1121–1144.
- Cantor D.G., Lippman S.A.** (1995). Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects. // *Econometrica*. Vol. 63. P. 1231–1241.
- Presman E.L., Sonin I.M.** (2000). Growth Rate, Internal Rate of Return, and Financial Bubbles. Working Papers #WP/2000/103. М.: CEMI Russian Academy of Sciences.
- Smolyak S.A.** (2012). Models for Estimating Depreciation in Plants, Machinery, and Equipment: Analysis and Proposals // *Journal of Property Tax Assessment & Administration*. Vol. 9. No. 3. P. 47–86.

#### REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Arrow K.J., Levhari D.** (1979). Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment. *The Economic Journal* 79, 560–566.
- Belen'kiy V.Z.** (2005). About the Rate of of Return on the Investment Project. *Economics and Mathimatical Methods* 41(1), 3–19 (in Russian).
- Boiteux M.** (1950). Réflexions sur la concurrence du rail et de la route, le déclassement des lignes non rentables et le déficit du chemin de fer. Paris: Fédération Nationale des Transports Routiers.
- Bronshteyn E.M.** (2008). About the Parameters of Investment Projects Efficiency. *Economics and Mathimatical Methods* 44(1), 137–141 (in Russian).
- Cantor D.G., Lippman S.A.** (1983). Investment Selection with Imperfect Capital Markets. *Econometrica* 51(4), 1121–1144.
- Cantor D.G., Lippman S.A.** (1995). Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects. *Econometrica* 63, 1231–1241.
- Cantor S. Ye.** (1975). Depreciation and Service Lives of Machines and Equipment in the Construction Industry. Moscow: Stroyizdat (in Russian).
- International Valuation Standards Council 2011 (2013). International Valuation Standards Committee. (G.I. Mikerin, I.L. Artemenkov (trans.)) Moscow: Rossiyskoe obshchestvo otsenshchikov (in Russian).
- Massé P.** (1971). Le choix des investissements. Critères et méthodes. Paris: Dunod.
- Mikerin G.I., Grebennikov V.G., Neyman E.I.** (2003). Methodological Bases of Property Valuation. Moscow: INTERREKLAMA (in Russian).
- Presman E.L., Sonin I.M.** (2000). Growth Rate, Internal Rate of Return, and Financial Bubbles. Working Papers #WP/2000/103. Moscow: CEMI Russian Academy of Sciences.
- Smolyak S.A.** (2002). Problems of Financing of Oil Fields Liquidation. In: “*Invvstment Efficiency Evaluation*” V.N. Livshits (ed.), 2, 139–158 (in Russian).
- Smolyak S.A.** (2008). Problems and Paradoxes in Machines and Equipmen Valuation. Moscow: RIO MAOK (in Russian).
- Smolyak S.A.** (2009). Ergo-dynamics Models of Deprecistion of Machinery and Equipment. *Ekonomika i matematicheskie metody* 45(4), 42–60 (in Russian).
- Smolyak S.A.** (2012). Models for Estimating Depreciation in Plants, Machinery, and Equipment: Analysis and Proposals. *Journal of Property Tax Assessment & Administration* 9(3), 47–86.

- Smolyak S.A.** (2013). Valuation of Machines and Equipment in Curable and Curable Depreciation. *Ekonomika i matematicheskie metody* 49(1), 54–72 (in Russian).
- Vashchenko M.P., Shanenin A.A.** (2012). The Estimation of the Rate of Return Generated by a Pool of Investment Projects in the Continuous-Time Model of Optimal Investment. *Mathematical Models and Computer Simulations* 24(3), 70–86 (in Russian).
- Vilenskiy P.L., Livshits V.N., Smolyak S.A.** (2008). Investment Projects Assessment: Theory and Practice. Moscow: Delo ANKh (in Russian).

Поступила в редакцию  
22.07.2015 г.

## About the Problem of Early Termination of the Investment Project

**S.A. Smolyak**

We consider investment projects in the real sector of economy with several participants. There may be situations where some participant may find its advantages to terminate their participation in the project. This leads to organizational difficulties and often – to the termination of the project. To guard against such situations, it is important to provide in advance with organizational and economic assurance tools of project realization. We propose an assessment criterion that would help reveal the possibility of occurrence of such situations. It may be interpreted as a modified IRR.

**Keywords:** project, investor, NPV, rate of return, project continuation, project termination, optimization.

**JEL Classification:** C52, D21, D46, G31, O22.