КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2014, том 52, № 4, с. 313–321

УДК 521.13

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, ИНТЕРПРЕТИРУЮЩИЕ ЭВОЛЮЦИЮ ДВУХЧАСТОТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ОРБИТАЛЬНОГО ЛИНДБЛАДОВСКОГО РЕЗОНАНСА ПРИ УЧЕТЕ РЭЛЕЕВСКОЙ ДИССИПАЦИИ. I

© 2014 г. Б. Р. Мушаилов, В. С. Теплицкая

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ

brm@sai.msu.ru, verateplic@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.07.2012 г.

В рамках планетного варианта задачи трех тел при орбитальном двухчастотном резонансе первого порядка с учетом рэлеевской диссипации получены аналитические решения, интерпретирующие динамическую эволюцию орбитальных элементов компонент рассматриваемой системы.

DOI: 10.7868/S0023420614040086

ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах планетной и звездной динамики основные закономерности эволюции динамических систем могут быть интерпретированы на базе фундаментальной задачи трех тел. Однако классическая задача трех тел, в которой учитываются лишь гравитационные эффекты взаимодействий, в известной степени, представляет собой идеализированный – вырожденный случай. Тем не менее, в связи с чрезвычайной сложностью задачи трех тел не удается построить в конечном виде ее общий интеграл [7, 16, 33, 34]. Неинтегрируемость, в частности, связана с наличием большого числа невырожденных периодических решений и трансверсальными пересечениями асимптотических поверхностей, несовместимыми с существованием независимых аналитических интегралов задачи трех тел. Ветвление (неоднозначность) решений на комплексной плоскости времени консервативных систем, описывающих задачу трех тел, также препятствует появлению новых однозначных первых интегралов, а расщепление сепаратрис косвенно свидетельствует о неинтегрируемости [23].

Непосредственно с неинтегрируемостью связана особенность задачи трех тел, выражающаяся в явлении динамического хаоса, обусловленного существованием специфической локальной неустойчивости относительно малых возмущений орбит системы, когда траектории системы могут представлять собой реализацию случайных временных процессов, несмотря на то, что в системе непосредственно отсутствуют какие-либо внешние случайные силы (воздействия). Локальная неустойчивость связана с тем обстоятельством, что вблизи сепаратрисы, где период либрации (циркуляции) стремится к бесконечности, даже незначительные изменения резонансной частоты системы могут приводить к существенным изменениям фазы возмущения [32].

Главная специфика хаотических систем состоит в том, что малое возмущение начальных условий для динамической переменной приводит за конечное время к непредсказуемости результирующего движения. Более того, по истечении так называемого времени детерминированного поведения t_{cr}, когда корреляционная функция реального процесса и наиболее адекватной в начальный момент времени t_0 модели близка к нулю, динамический хаос (хотя бы частично предсказуемый при $t < t_{cr}$) становится шумом, т.е. процессом для которого не имеется предсказательной модели. Поэтому на результаты численных интегрирований, проводимых в работах [2, 6, 12], на интервалах $t \gg t_{cr}$ существенное влияние должны оказывать и негравитационные эффекты взаимодействий, не учитываемые в указанных работах.

С другой стороны, наличие в реальных динамических системах диссипативных факторов и связанных с ними асимптотических предельных траекторий приводит к меньшей чувствительности системы к различного рода слабым возмущениям [3]. Так, в частности, в консервативных системах движение около сепаратрисы всегда хаотическое, в то время как для диссипативных систем это утверждение оказывается неверным [26]. Несмотря на даже малые априори величины рассеяния энергии в гравитирующих динамических системах (например, в экзопланетных системах или кратных звездных системах при перетекании вещества при аккреции) учет диссипатив-

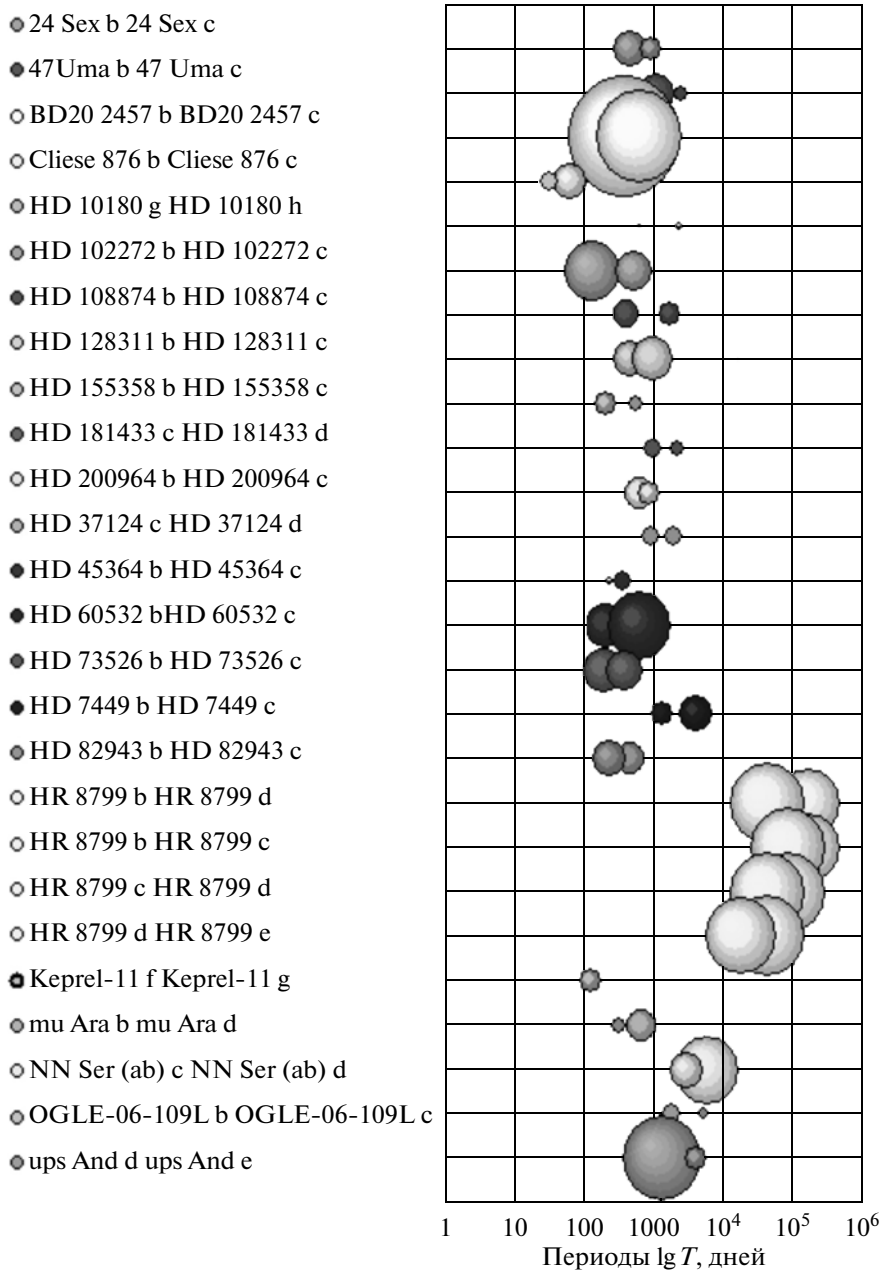

Рис. 1. Орбитальные периоды экзопланетных систем, движущихся в орбитальных двухчастотных резонансах первого порядка. Размеры представленных экзопланетных систем пропорциональны их массам.

ных факторов может существенно отразиться на динамической эволюции “гравитационно активных” компонент системы [1].

Теоретический и практический интерес в ряде случаев представляют решения задачи трех тел при наличии в системе малого параметра μ (так называемый планетный вариант задачи) и существовании между интегралами движения некоторого соотношения, обусловленного рациональной соизмеримостью двух основных частот задачи. В частности, в Солнечной системе наблюдается значительное число соизмеримостей (орбитальных резонансов) между средними движениями больших планет, спутников, астероидов, короткопериодических комет, объектов пояса (поясов) Койпера. Обнаруженные в последнее время кратные экзопланетные системы также характеризуются орбитальными резонансами [5, 9] (см. рис. 1).

Так как максимальный резонансный эффект (максимальная амплитуда резонансных возмущений) проявляется для орбитальных двухчастотных резонансов первого порядка (линдбладовских резонансов 2 : 1, 3 : 2, 4 : 3, ...), то получение и исследование аналитических решений планет-

ного ограниченного и неограниченного вариантов задачи трех тел в случае линдбладовских резонансов при наличии возмущающих диссипативных факторов является весьма актуальной и практически значимой задачей [17, 27, 35], в том числе и при исследовании экзопланетных систем.

Учитывая, что для планетного варианта задачи трех тел заметная неустойчивость в консервативной динамической системе может развиваться лишь на временах $t \gg \mu^{-1}$ [30], то в рамках резонансной задачи трех тел корректным является исследование эволюции динамической системы лишь на временах порядка $1/\mu$, когда применение строго обоснованных асимптотических методов позволяет построить аналитическое решение, интерпретирующее орбитальную эволюцию гравитирующих тел. Указанный подход (концепция частичной детерминированности) был реализован ранее в работах [20, 21, 28, 29].

При небольших скоростях течений (рассеяния энергии) неконсервативные силы (вязкого трения) корректно моделируются диссипативной функцией Рэлея Φ – положительно определенной квадратичной формой относительно обобщенной скорости $\dot{\mathbf{q}}$. Подобные возмущения в динамике систем с конечным числом степеней свободы уже длительное время (более 100 лет) моделируются данной диссипативной функцией, введенной Лордом Рэлеем (Стретт Джоном Уильямом).

В связи с этим с целью исследования динамической эволюции всех орбитальных элементов компонент рассматриваемой системы в настоящей работе проводятся аналитические исследования ныне классического планетного (неограниченного) варианта задачи трех тел, но при учете дополнительных факторов, как-то орбитальный двухчастотный резонанс первого порядка, наличие в моделируемой системе небольших скоростей течений (рассеяния энергии).

Поскольку имеется существенная разница между допущениями, реализуемыми в тех или иных модельных динамических системах, и в конкретно реализованных физических системах, то данная статья посвящена исключительно разработке аналитических моделей, а приложение полученных результатов с обоснованием правомерности применяемых моделей к конкретным небесно-механическим системам предполагается в последующих статьях (см. [31]).

УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Уравнения движения в динамической неконсервативной системе имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \tag{1}$$

где $L = T - U$ – лагранжиан, T – кинетическая, а U – потенциальная энергии системы, характеризуемой векторами обобщенных координат $\mathbf{q}$ и скоростей $\dot{\mathbf{q}}$.

Функцию Рэлея определим далее в виде

$$\Phi = \nu T(\dot{\mathbf{q}}), \tag{2}$$

и при этом будем считать, что $\nu = \text{const} > 0$ (случай рассеяния энергии; ниже также будут получены уравнения задачи и при $\nu = \nu(t)$).

Применение преобразования Лежандра [24] и введение обозначения для канонического вектора-импульса в виде $\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}$, позволяют векторное уравнение Лагранжа (1), с учетом соотношения (2), представить в форме обобщенных уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - \nu \mathbf{p}. \tag{3}$$

Здесь гамильтониан (полная энергия системы) $H = T + U$ в общем случае, когда T и U зависят явно от времени t, представляет собой функцию от $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ и t. Диссипативную систему (3) за счет соответствующего выбора переменных:

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q}, \mathbf{p}^* = \mathbf{p}\lambda(t), \lambda(t) = \lambda_0 \exp(\nu t), \tag{4}$$

удается свести к неавтономной канонической системе

$$\frac{d\mathbf{q}^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}^*}, \quad \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{q}^*} \tag{5}$$

с гамильтонианом

$$H^*(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, t) = \lambda(t) H(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*/\lambda(t)). \tag{6}$$

Для рассматриваемого в настоящей работе планетного варианта задачи трех тел (материальных точек) P_0, P_1, P_2 с массами $m_0 = 1$, $m_1 = \mu\alpha_1$, $m_2 = \mu\alpha_2$ ($\mu \ll 1$, α_1 и α_2 – некоторые, отличные от нуля, положительные постоянные) при наличии орбитального резонанса кратности $k \in N$, так что в начальный момент времени t_0 средние движения n_j тел P_j ($j = 1, 2$) удовлетворяют неравенству

$$|kn_1 - (k+1)n_2| \le (\sqrt{\mu})\, O[1], \tag{7}$$

гамильтониан (6) в якобиевой системе координат в переменных Делоне имеет вид [18, 28]

$$H^* = H_0 + R, \tag{8}$$

где $H_0 = \dfrac{\lambda^3(t)}{2}\left(\dfrac{\gamma_1}{p_1^{*2}} + \dfrac{\gamma_2}{p_2^{*2}}\right)$, $\gamma_1 = \dfrac{\alpha_1^3}{1 + \mu\alpha_1}$, $\gamma_2 = \dfrac{\alpha_2^3(1 + \mu\alpha_1)}{1 + \mu(\alpha_1 + \alpha_2)}$, $R = \lambda(t)\mu\alpha_1\alpha_2\left(\Delta^{-1} - \dfrac{r_{01}}{r_{02}^2}\cos\bar{H}\right)$,

Δ – расстояние между P_1 и P_2, $r_{0j}=|P_0P_j|$ ($j = 1, 2$), $\bar{H} = \angle(\mathbf{r}_{01}\mathbf{r}_{02})$. При этом в случае ограниченного варианта задачи

$$H_0 = \frac{\lambda^3(t)}{2p_1^{*2}} + n'p_4^*, \quad n' = n_1 = \frac{\sqrt{1+\mu\alpha_1}}{a'^{3/2}},$$

a' – оскулирующая большая полуось орбиты P_1. Единица времени здесь выбрана так, чтобы гравитационная постоянная обращалась в единицу. Вводя, для устранения явной зависимости гамильтониана H^* от времени t, канонически сопряженные переменные

$$q_i^* = \lambda(t), \; p_i^* \tag{9}$$

($i = 7$ в случае неограниченного и $i = 5$ – ограниченного вариантов задачи), вместо гамильтониана в виде (8) получим

$$F = H^*(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, q_i^*) + \nu q_i^* p_i^*. \tag{10}$$

Число степеней свободы канонической системы (5) при этом увеличивается на единицу, т.е. в случае неограниченного варианта задачи трех тел будем иметь каноническую систему с семью степенями свободы, а для ограниченного варианта – систему с пятью степенями свободы.

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Аналогично [18, 28], исключая на основании асимптотического метода Цейпеля из (10) короткопериодические слагаемые, с учетом (7) для гамильтониана неограниченного варианта задачи получим выражение

$$\begin{gathered} F = q_5\nu p_5 + q_5^3\Big[\mu B + A_1 + A_2p_4^2 + \mu\beta_0 \times \\ \times \left(e_1\Phi_{1k}\cos(kq_4 + q_2) + e_2\Phi_{2k}\cos(kq_4 + q_3)\right)\Big], \end{gathered} \tag{11}$$

в котором e_1 и e_2 –оскулирующие эксцентриситеты орбит тел P_1 и P_2, $q_5 = \lambda(t)$, коэффициент B, определяемый через $p_6 + p_7 = \text{const}$, а также коэффициенты A_1, A_2 и Φ_{1k}, Φ_{2k}, зависящие от параметра кратности (k) резонанса, определены в [18, 28],

$$\beta_0 = \frac{\alpha_1k^2\gamma_2}{(k+1)^2p_{40}^2}, \quad p_{40} = \sqrt{\gamma}\Big/\left[1 + \left(\frac{\gamma_1(k+1)^2}{k^2\gamma_2}\right)^{\frac{1}{3}}\right],$$

$\gamma > 0$ – интегральная постоянная. При этом переменная Делоне $q_1 = n_1(t - t_{\pi 1}) + \omega_1$ определяется интегрированием $q_1 = \int\frac{\partial F}{\partial p_1}dt$, $p_1 = -\sqrt{\gamma}$, движение линии узлов $q_l = \Omega_{l-5}$ ($l = 6, 7$) находится из квадратуры [28]

$$\Omega_1 = \int\frac{\partial F}{\partial p_6}dt, \quad \Omega_2 = \Omega_1 - \pi, \tag{12}$$

а переменные Делоне

$$\begin{gathered} p_l/q_5 = -\mu_j\sqrt{a_j(1-e_j^2)}\cos i_j \; (j = l-5, \\ l = 6,7; \;\; \mu_j = \sqrt{\gamma_j/\alpha_j}) \end{gathered}$$

определяются выражениями

$$\begin{gathered} p_l = \frac{C}{2} \pm \frac{1}{2C}\left(G_1^2 - G_2^2\right), \\ G_1 = p_2 - \sqrt{\gamma} + p_4 + p_{40}, \;\; G_2 = p_3 - \frac{1}{f}(p_{40} + p_4), \end{gathered} \tag{13}$$

в которых $f = k/(k+1)$, а C – интегральная постоянная. Для угла взаимного наклона $\sigma = \sin(I/2)$ оскулирующих орбит тел P_1 и P_2 аналогично работе [28] получим

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\frac{C^2}{G_1G_2} - \frac{G_1}{G_2} - \frac{G_2}{G_1}\right]. \tag{14}$$

Так как с точностью до $o(\mu)$, согласно [28],

$$\begin{gathered} e_j^2 = 1 - \left(1 - \frac{p_{j+1}}{q_5\mu_j\sqrt{a_j}}\right)^2, \\ \mu_j\sqrt{a_j} = \frac{1/q_5}{1 + (1-j)(1-f)} \times \\ \times \left[(-1)^j(p_4 + p_{40}) + (j-2)p_1\right], \quad j = 1,2, \end{gathered} \tag{15}$$

то $e_j = E_j\sqrt{2p_{j+1}}$, $j = 1,2$; $E_1 = \left(\sqrt{\gamma} - p_{40}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

$$E_2 = \sqrt{f/p_{40}}. \tag{16}$$

Тогда из (14) с учетом (13) нетрудно установить справедливость следующего выражения

$$\sigma^2 = B_0 + B_1p_4 + O[e_j^2] \; (j = 1, 2), \tag{17}$$

в котором коэффициенты B_0 и B_1 имеют вид аналогичный приведенному в работе [28]. Подставляя (16) в (11) и вводя обозначения

$$\bar{x}_i = q_{i+1}, \;\; \bar{y}_i = p_{i+1} \; (i = \overline{1,4}), \tag{18}$$

исходную каноническую систему (5), таким образом, удается свести к системе с четырьмя степенями свободы

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}_i}, \;\; \frac{d\bar{y}_i}{dt} = -\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}_i} \; (i = \overline{1,4}), \tag{19}$$

с гамильтонианом вида

$$\begin{gathered} \bar{F} = \bar{x}_4^3\Big(A_1 + A_2\bar{y}_3^2 + \mu B + N_1\sqrt{2\bar{y}_1}\cos(\bar{x}_1 + k\bar{x}_3) + \\ + N_2\sqrt{2\bar{y}_2}\cos(\bar{x}_2 + k\bar{x}_3)\Big) + \bar{x}_4\nu\bar{y}_4. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь $N_j = \mu\beta_0 E_j \Phi_{jk}$ ($j = 1, 2$). Если осуществить далее последовательность канонических преобразований

$$x_j^* = \bar{x}_j + k\bar{x}_3, \quad y_j^* = \bar{y}_j \ (j = 1,2),$$
$$x_3^* = k\bar{x}_3, \quad y_3^* = (1/k)\bar{y}_3 - \bar{y}_1 - \bar{y}_2,$$
$$\xi_1 = \bar{x}_4, \quad \eta_1 = \bar{y}_4,$$
$$u_j = \sqrt{2y_j^*}\cos x_j^*, \quad v_j = \sqrt{2y_j^*}\sin x_j^* \ (j = 1,2),$$
$$\xi_2 = (1/N)(N_1u_1 + N_2u_2), \quad \eta_2 = (1/N)(N_1v_1 + N_2v_2),$$
$$\xi_3 = (1/N)(N_2u_1 - N_1u_2), \quad \eta_3 = (1/N)(N_2v_1 - N_1v_2),$$
$$\Theta = (1/2)(\xi_3^2 + \eta_3^2), \quad \theta = \operatorname{arctg}(\eta_3/\xi_3), \tag{21}$$
$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2},$$

то (19) преобразуется к канонической системе с двумя степенями свободы вида

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\xi_j} \ (j = 1, 2), \tag{22}$$
$$\tilde{F} = \xi_1^3\Big[\mu B + A_1 + (1/4)k^2A_2 \times$$
$$\times (\Theta_0 + y_{03}^* + \xi_2^2 + \eta_2^2)^2 + N\xi_2\Big] + \xi_1\nu\eta_1.$$

При этом величины $(1/2)y_{03}^* = (1/k)\bar{y}_3 - \bar{y}_1 - \bar{y}_2$, $\Theta_0 = \xi_3^2 + \eta_3^2$ являются первыми интегралами системы (19), так что

$$\bar{x}_3 = \lambda_0^3\frac{kA_2}{3\nu}\left(y_{03}^* + \Theta_0\right)\exp(3\nu t) +$$
$$+ kA_2\int\xi_1^3(\xi_2^2 + \eta_2^2)dt \ (\nu > 0);$$
$$\theta = -k\bar{x}_3, \quad \bar{x}_3 = q_1 - \frac{k+1}{k}[\omega_2 + n_2(t - t_{\pi 2})], \quad \xi_1 = \lambda(t). \tag{23}$$

Заметим, что в случае ограниченного кругового варианта задачи гамильтониан системы (22) будет иметь вид [18]

$$\tilde{F} = \frac{A_1^*}{\xi_1}\left[\xi_2^2 + \eta_2^2 + A_2^*\xi_1 + A_3^*\right]^2 + \tag{24}$$
$$+ \xi_1(\mu B + \nu\eta_1 + A_4^*\xi_1^2 + A_5^*\xi_1^{3/2}\xi_2),$$

а в ограниченном эллиптическом варианте

$$\tilde{F} = \frac{B_1^*}{\xi_1}\left[\xi_3 + B_2^*\xi_1\right]^2 + \xi_1^3\Big[B_3^* + B_4^*\cos\eta_3 +$$
$$+ \frac{B_5^*}{\sqrt{\xi_1}}(\xi_2\cos\eta_3 - \eta_2\sin\eta_3)\Big] + \xi_1(\nu\eta_1 + B_6^*), \tag{25}$$

где $\xi_3 = \xi_1\sqrt{a}/(k+1)$, $\eta_3 = k\left[l' - \frac{k+1}{k}(l + \omega + \Omega)\right]$, $l' = \sqrt{1 + m_1}(a')^{-\frac{3}{2}}(t - t_0)$, $l = n(t - t_\pi)$, a, l, ω, Ω – оскулирующие кеплеровские элементы орбиты пассивно гравитирующего тела P, а l', a' – возмущающего тела P'.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В общем случае – неограниченного варианта задачи, так как

$$\xi_1 = \lambda(t) = \lambda_0\exp(\nu t), \quad \lambda_0 = \text{const}, \tag{26}$$

а переменная $\eta_1(t)$, как следует из (22), при известных функциях $\xi_2(t)$ и $\eta_2(t)$ является решением легко интегрируемого линейного дифференциального уравнения первого порядка (или может быть определена непосредственно из интеграла (22) вида $\tilde{F} = F_0 = \text{const}$), то интегрирование исходных уравнений задачи формально сводится к интегрированию неавтономной канонической системы с одной степенью свободы:

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial\eta_2}, \quad \frac{d\eta_2}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial F^*}{\partial\xi_2} \tag{27}$$

с гамильтонианом $F^* = C_3\xi_1^3\left[\left(\frac{C_1}{2} + \xi_2^2 + \eta_2^2\right)^2 + C_2\xi_2\right]$, в котором $C_3 = k^2A_2/4$, $C_2 = N/C_3$, а $C_1 = 2(\Theta_0 + y_{03}^*)$ – интегральная постоянная. Если в (27) от переменной t перейти к новой переменной

$$\tau = \frac{C_3\lambda_0^3}{3\nu}\exp[3\nu(t - t_0)], \tag{28}$$

то становится очевидным, что интегрирование системы (27) относительно переменной τ осуществляется аналогично случаю $\nu = 0$, приведенному в работе [28], так как согласно (27) будем иметь

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial\eta_2}, \quad \frac{d\eta_2}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial\xi_2}. \tag{29}$$

Здесь

$$F = (\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 + C_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) + C_2\xi_2. \tag{30}$$

Следует заметить, что ввиду искусственного построения так называемых ограниченных вариантов задачи, моделируемых гамильтонианами (24) и (25), их интегрирование представляет более сложную проблему по сравнению с непосредственно рассматриваемым в настоящем разделе более общим случаем – неограниченным вариантом задачи.

В то же время, при асимптотике $\nu t \to \infty$ для ограниченного кругового варианта задачи га-

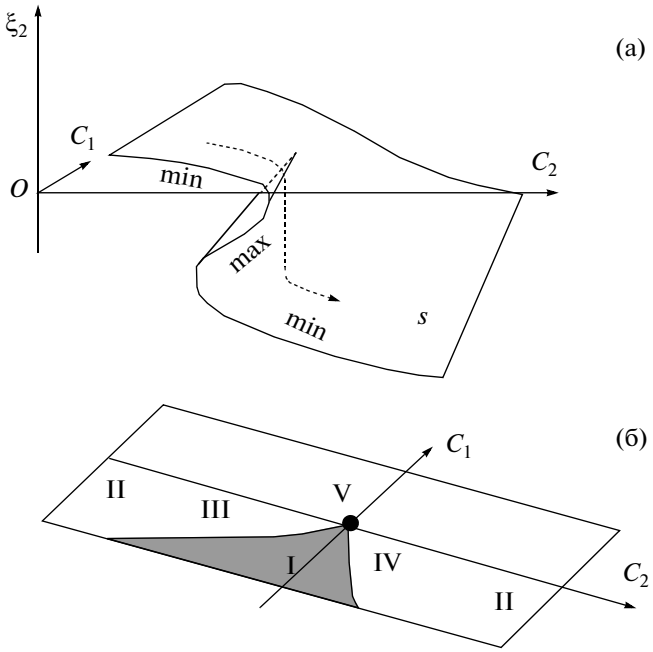

Рис. 2. Поверхность S стационарных решений, определяемая (31), в пространстве ξ_2, C_1, C_2 (а). Полужирной линией выделена сепаратриса, задаваемая уравнением $D = 0$ и разграничивающая пять типов движений (б).

мильтониан сводится к простейшему виду $F \to \to A_5^* \xi_1^{5/2} \xi_2$, в то время как в неограниченном варианте задачи гамильтониан имеет более сложный вид (27), (30). Стационарные решения канонической системы (30), поскольку $C_2 \neq 0$, определяются системой алгебраических уравнений:

$$4\xi_2^3 + 2C_1\xi_2 + C_2 = 0, \quad \eta_2 = 0. \tag{31}$$

Число действительных корней первого уравнения (31) обуславливается знаком величины дискриминанта $D = 8C_1^3 + 27C_2^2$. Если $D > 0$ (то есть при $C_1 > -(3/2)C_2^{2/3}$), то существует единственный действительный корень $\xi_2^{(3)}$, а в случае $C_1 \leq -(3/2)C_2^{2/3}$ будет три корня $\xi_2^{(1)} > \xi_2^{(2)} > 0 > \xi_2^{(3)}$ (при $D = 0$ два из них $\xi_2^{(1)}$ и $\xi_2^{(2)}$ будут равны между собой).

Как показано в [19, 21], стационарные точки $(\xi_2^{(2)}, 0)$ и $(\xi_2^{(3)}, 0)$ являются устойчивыми по Ляпунову (эллиптические точки типа центра), а $(\xi_2^{(1)}, 0)$ – неустойчивая стационарная точка (гиперболическая точка). В случае $D = 0$ решение $(\xi_2^{(3)}, 0)$ будет соответствовать устойчивой стационарной точке, а $(\xi_2^{(1,2)}, 0)$ – неустойчивой (гиперболического типа). При $C_1 > -(3/2)C_2^{2/3}$ стационарная точка $(\xi_2^{(3)}, 0)$ будет являться устойчивым центром.

Гамильтониан (30) является гладкой функцией от двух переменных $\xi_2(\tau)$ и $\eta_2(\tau)$. Следуя [8, 10, 13–15], определим множество бифуркационных катастроф K как множество точек параметров $C = (C_1, C_2)$ в пространстве управления, при которых все частные производные F первого и второго порядков одновременно обращаются в ноль при некоторых значениях ξ_2, η_2.

Критические точки (особые решения), как уже было установлено, определяются (31), так как $C_2 \neq 0$ (при $C_2 = 0$, как нетрудно видеть, в динамической системе описываемой гамильтонианом $F^* = u^2 + C_1 u$, где $u = \xi_2^2 + \eta_2^2$, бифуркаций не наблюдается).

Совпадение (кратное появления) решений системы (31) возникает в случае $\det\left|\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^n \partial \eta_2^m}\right| = 0$ (n, $m = 1, 2$), а именно, когда $\xi_2^2 = -C_1/6$. Исключая ξ_2 из первого уравнения (31), получим уравнение, определяющее множество катастроф K и соответствующее условию $D = 0$, $8C_1^3 + 27C_2^2 = 0$. Последнее уравнение в переменных C_1 и C_2 характеризуется локальной геометрической структурой типа сборки Уитни (см. рис. 2), обладающей структурной устойчивостью.

Плоскость (C_1, C_2) подразделяется на пять подмножеств: заштрихованная область I, соответствующая трем различным корням первого уравнения (31) – двум устойчивым и одному неустойчивому решению; область II вне сепаратрисы, когда имеется один вещественный корень—единственная устойчивая критическая точка; две ветви III и IV бифуркационной кривой (сепаратрисы) и точка V, отвечающая $C_1 = C_2 = 0$, когда все три вещественных корня уравнения (31) совпадают и равны $\xi_2 = 0$ (рис. 2б).

Вариация параметров C_1 и $C_2 > 0$ может приводить к потере устойчивости рассматриваемых решений. Устойчивое решение может трансформироваться через неустойчивое в новое устойчивое решение. При C_1 и $C_2 \to 0$ критические решения на фазовой плоскости (C_1, C_2) стремятся к точке бифуркации V, разделяющей область с двумя и с одним устойчивым решением. Если $C_2 \to 0$, а параметр $C_1 < 0$ растет по абсолютной величине, то устойчивое критическое решение разделяется на два устойчивых решения и одно неустойчивое, определяемых (31). Полагая в (29), (30)

$$h_1 = \xi_2 - i\eta_2, \quad h_2 = \xi_2 + i\eta_2, \quad i^2 = -1 \tag{32}$$

и учитывая, ввиду автономности (29) и (30), интеграл вида $\left(\xi_2^2 + \eta_2^2\right)^2 + C_1\left(\xi_2^2 + \eta_2^2\right) + C_2\xi_2 = \alpha$, где α – интегральная постоянная, получим

$$\frac{dh_1}{d\hat{\tau}} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial h_2}, \quad \frac{dh_2}{d\hat{\tau}} = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial h_1}, \quad \hat{\tau} = 2i(\tau - \tau_0), \tag{33}$$

$$\hat{F} = h_1^2 h_2^2 + C_1 h_1 h_2 + \frac{C_2}{2}(h_1 + h_2), \quad b_1 h_2^2 + b_2 h_2 + b_3 = 0. \tag{34}$$

Здесь $b_1 = h_1^2$, $b_2 = C_1 h_1 + C_2/2$, $b_3 = (1/2)C_2 h_1 - \alpha$. Следовательно,

$$h_2 = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4b_1 b_3}}{2b_1}. \tag{35}$$

Так как согласно (33) $dh_1/d\hat{\tau} = 2b_1 h_2 + b_2$, то с учетом (35) будем иметь уравнение

$$\left(\frac{dh_1}{d\tau}\right)^2 = 4a_1 h_1^3 + 6a_2 h_1^2 + 4a_3 h_1 + a_4, \tag{36}$$

в котором

$$a_1 = 2C_2, a_2 = -(2/3)(C_1^2 + 4\alpha), a_3 = -C_1 C_2, a_4 = -C_2^2. \tag{37}$$

Ввиду того, что переменные h_1 и h_2 представлены в гамильтониане (34) и интеграле $\hat{F} = \alpha$ симметрично, то уравнение, определяющее $h_2(\tau)$, будет иметь вид аналогичный (36), но с заменой h_1 на h_2.

Все коэффициенты $a_1, \ldots, a_4$ в (36) и (37) являются постоянными, не зависящими от переменной τ, величинами (при этом $a_2 = a_2(\alpha)$, где α – интегральная постоянная), так что как показано в [28] переменные h_1 и h_2 будут представимы в виде мероморфной двоякопериодической функции Вейерштрасса $\wp$:

$$h_j = \frac{\left(\wp(\tau - w_j) - \frac{a_2}{2}\right)}{a_1} \quad (j = 1,2) \tag{38}$$

с постоянными действительными инвариантами

$$g_2 = 3a_2^2 - 4a_1 a_3, \quad g_3 = 2a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_2^3. \tag{39}$$

В (39) $w_1 = -w_2$ являются чисто мнимыми величинами ввиду комплексно–сопряженности, согласно (32), h_1 и h_2. Так как основные периоды $\bar{\Omega}_j$ ($j = 1, 2$) $\wp$ – функции Вейерштрасса однозначно определяются через инварианты g_2 и g_3, то периоды $\bar{\Omega}_1 = 2\omega_1$ и $\bar{\Omega}_2 = 2\omega_2$ не зависят от времени.

В зависимости от знака дискриминанта $\Delta = (g_2^3 - 27g_3^2)/16$ алгебраического уравнения третьей степени $4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$, определяющего нули функции $\wp' = (d\wp(z))/dz$, для основных периодов $\wp$-функции будем иметь

$$\bar{\Omega}_1 = 2\bar{\omega}, \quad \bar{\Omega}_2 = i2\tilde{\omega} \text{ при } \Delta > 0;$$

$$\bar{\Omega}_1 = \bar{\omega} - i\tilde{\omega}, \quad \bar{\Omega}_2 = \bar{\omega} + i\tilde{\omega} \ (i^2 = -1), \text{ при } \Delta < 0. \tag{40}$$

В (40) полупериоды $\bar{\omega}$ и $\tilde{\omega}$ являются действительными величинами. Из физического смысла величин h_1 и h_2 интегральная постоянная $w = w_1 = -w_2$ однозначно определяется из соотношений: $\wp(2w) = a_2/2$, $\wp'(2w) = -ia_1^2/2$ ($i^2 = -1$). На основании (38) из (32) для искомых переменных канонической системы (29) будем иметь выражения

$$\xi_2 = \frac{1}{2a_1}[\wp(\tau + w) + \wp(\tau - w) - a_2], \quad \eta_2 = \frac{i}{2a_1}[\wp(\tau + w) - \wp(\tau - w)], \quad i^2 = -1. \tag{41}$$

После определения $\xi_2(\tau)$ и $\eta_2(\tau)$ для получения полного аналитического решения задачи остается проинтегрировать три квадратуры (11)–(12) и (23) вида

$$q_1 = \int \frac{\partial F}{\partial p_1} dt, \quad \Omega_1 = \int \frac{\partial F}{\partial p_6} dt, \quad Q_1 = \int \xi_1^3(\xi_2^2 + \eta_2^2) dt = \frac{1}{C_3}\int (\xi_2^2 + \eta_2^2) d\tau. \tag{42}$$

Применяя теорему Лиувилля для эллиптических функций [25] и учитывая (41), получим

$C_3 Q_1 = Q_{10}\tau - \frac{i}{2}\ln\frac{\sigma(\tau - w)}{\sigma(\tau + w)}$, $i^2 = -1$. Здесь $Q_{10} = \{[\wp(w) - \wp(2w)]^2 + 2\wp'(2w)\zeta(w)\}/a_1^2$, σ и ζ – соответствующие функции Вейерштрасса.

С учетом (10)–(14), (18)–(22) и (28), после несложных преобразований для долгот Ω_j линии узлов орбит P_j ($j = 1, 2$), с рассматриваемой точностью получим явные выражения

$$\Omega_1 = \Omega_{10} + \Omega_{11}\tau + \Omega_{12} Q_1, \quad \Omega_2 = \Omega_1 - \pi, \tag{43}$$

в которых Ω_{10} – интегральная постоянная, $\Omega_{11} = \Omega_{00}\Omega_{02}$, $\Omega_{12} = \Omega_{00}\Omega_{03}$,

$$\Omega_{00} = \mu\frac{\alpha_0\beta_0}{4C_3}\frac{k}{k+1}L_{3/2}^{(1)}(\alpha_0)\frac{C(1+E_0)^2}{\gamma E_0},$$

$$\Omega_{02} = 1 + \frac{C_1}{4}\frac{k}{\sqrt{\gamma}}\frac{1 - E_0^2}{E_0}, \quad \Omega_{03} = \frac{kC_3}{2\sqrt{\gamma}}(1 - E_0^2)/E_0,$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 E_0}, \quad E_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \frac{1 + \mu(\alpha_1 + \alpha_2)}{(1 + \mu\alpha_1)^2}\right]^{1/3},$$

величина β_0 определена в (11), $L_{3/2}^{(1)}$ – коэффициент Лапласа, C – интегральная постоянная, входящая в (13).

Для вычисления первой квадратуры (42) представим гамильтониан (11), с учетом (16)–(23), (28), в виде

$$F/\xi_1^3 = \Gamma_0\left(\xi_2^2 + \eta_2^2\right)^2 + \Gamma_1\left(\xi_2^2 + \eta_2^2\right) + \Gamma_2\xi_2 + \Gamma_3, \tag{44}$$

где $\Gamma_0 = C_3(\gamma)$, $\Gamma_1 = C_1C_3(\gamma) + \Gamma_{01}\Gamma_{02}$, $\Gamma_2 = C_2(\gamma)C_3(\gamma)$, $\Gamma_3 = \nu\eta_1/\xi_1^2 + A_1(\gamma) + \Gamma_{02}\Gamma_{03} + (C_1^2/4)C_3(\gamma)$.

В свою очередь, $\Gamma_{01} = -\dfrac{\alpha_0 k}{2} B_1 L_{3/2}^{(1)}(\alpha_0)$, $\Gamma_{02} = \dfrac{1}{2}\mu\beta_0$,

$$\Gamma_{03} = L_{1/2}^{(0)}(\alpha_0) - \alpha_0 L_{3/2}^{(1)}(\alpha_0)\left(B_0 + \frac{kC_1}{4}B_1\right),$$

$$B_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{k}{k+1}\frac{1}{E_0}\left[\frac{C^2}{\gamma}(1+E_0)^2 - E_0^2 - \left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right],$$

$$B_1 = \frac{1}{4}\frac{k}{k+1}\frac{(1+E_0)^2}{\sqrt{\gamma}E_0^2}\left[E_0^2 + \frac{C^2}{\gamma}(1-E_0^2) - (1+1/k)^2\right],$$

$$A_1(\gamma) = \frac{\gamma_2}{2\gamma}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2(1+E_0)^3,\ A_2(\gamma) = 3A_1(\gamma)/E_0.$$

Исключая на основании интеграла (32)–(34) из правой части (44) первое слагаемое, для искомой квадратуры (переменной Делоне) будем иметь

$$q_1 = q_{10} + \Phi_1\tau + \Phi_2 Q_1 + \Phi_3 Q_2. \tag{45}$$

Здесь q_{10} – интегральная постоянная,

$$\Phi_1 = -\frac{2\sqrt{\gamma}}{C_3}(\alpha\Gamma_0' + \Gamma_3'),\quad \Phi_2 = -2\sqrt{\gamma}(\Gamma_{01}'\Gamma_{02} + \Gamma_{01}\Gamma_{02}'),$$
$$\Phi_3 = -2\sqrt{\gamma}C_2'(\gamma). \tag{46}$$

В (46) операция дифференцирования по $\gamma = p_1^2$ отмечена штрихом. Для квадратуры $Q_2 = \int\xi_2 d\tau$ после подстановки (41) получим $Q_2 = -(1/2a_1)\times$ $\times\left[a_2\tau + \zeta(\tau + w) + \zeta(\tau - w)\right]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ

Проинтегрировав для неограниченного варианта задачи систему (30) и вычислив квадратуры (42) исходной канонической системы (5), удается получить явные аналитические выражения, интерпретирующие эволюцию всех орбитальных элементов гравитирующих тел.

Как следует из (13)–(23) для больших полуосей, эксцентриситетов и угла взаимного наклона оскулирующих орбит P_j ($j = 1, 2$) справедливы следующие представления

$$a_j(\tau) = \frac{a_{j0}}{\tau^{2/3}}\left[1 + b_{j0}(\xi_2^2 + \eta_2^2)\right]^2,$$

$$\left[\frac{e_j(\tau)}{E_j}\right]^2 = \left(E_j^*\xi_2 + p_{0j}\cos S^*\right)^2 +$$
$$+ (E_j^*\eta_2 + p_{0j}\sin S^*)^2,$$

$$\sigma^2 = \sigma_0 + \sigma_{01}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \sigma_{02}e_1^2 + \sigma_{03}e_2^2,\quad j = 1, 2,$$

$$a_{10} = a_0/b_{10}^2,\quad a_{20} = a_0\frac{\alpha_2 E_0^3}{\alpha_1}\Big/b_{20}^2,$$

$$a_0 = \frac{(1+\mu\alpha_1)k^2}{4\alpha_1^2}\left(\frac{C_3}{3\nu}\right)^{2/3},$$

$$b_{j0} = \frac{k}{2}\Big/\left[\frac{kC_1}{4} + \frac{\sqrt{\gamma}}{1+E_0}(E_0(j-2) + j - 1)\right],$$

в которых $E_j^* = E_j\Phi_{jk}/\Phi_k$, $\Phi_k = \sqrt{E_1^2\Phi_{1k}^2 + E_2^2\Phi_{2k}^2}$, $E_1 = \gamma^{-1/4}\sqrt{1 + 1/E_0}$, $E_2 = \gamma^{-1/4}\sqrt{\dfrac{k}{k+1}(1+E_0)}$, $\Phi_{1k} =$ $= (-1)^k(1 + k + D/2)L_{1/2}^{(1+k)}(\alpha_0)$, $\Phi_{2k} = (-1)^k\times$ $\times(k + 1/2 + D/2)L_{1/2}^{(k)}(\alpha_0) + 2\alpha_0\delta_{1,k}$, $D = \alpha_0\dfrac{d}{d\alpha_0}$, $p_{0j} = (-1)^{j+1}E_{3-j}^*\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$, $S^* = S_0 + \theta$, $S_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{u_0}{v_0}$, $\theta = (k + 1)q_2(t) - kq_1(t)$ – аномалия Делоне, $\theta =$ $= -2C_1\tau - 4C_3Q_1$, $\sigma_0 = B_0 + (kC_1/4)B_1$, $\sigma_{01} = (k/2)B_1$, $\sigma_{02} = \sigma_{03}' - \sigma_{02}'$, $\sigma_{03} = \sigma_{02}' + \sigma_{03}'$, $\sigma_{02}' = \dfrac{1}{8E_0}\dfrac{k}{k+1}\times$ $\times\left[\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2 - E_0^2\right]$, $\sigma_{03}' = \dfrac{1}{8}\dfrac{k}{E_0(1+k)}\dfrac{(1+E_0)^2}{\gamma}C^2$,

$\delta_{1,k}$ – символ Кронекера, $L_{1/2}^{(m)}$ – коэффициент Лапласа ($m = k, 1 + k$), $k \in N$ – кратность резонанса.

Выражения для долгот Ω_j линии узлов орбит P_j ($j = 1, 2$) были уже получены ранее в (43), а аргументы перицентров ω_j ($j = 1, 2$) с учетом (45) определяются в виде

$$\omega_1 = q_1 - n_1(t - t_{\pi 1}),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{k+1}(S^* - S_0 + kq_1) - n_2(t - t_{\pi 2}),$$

где

$$n_j = n_{j0}a_{j0}^{-3/2}\tau\left[1 + b_{0j}(\xi_2^2 + \eta_2^2)\right]^{-3},\quad j = 1, 2,$$

$$n_{10} = \sqrt{1 + \mu\alpha_1},\quad n_{20} = \sqrt{1 + \frac{\mu\alpha_2}{1 + \mu\alpha_1}},$$

$$\tau = \frac{C_3\lambda_0^3}{3\nu}\exp[3\nu(t - t_0)].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batygin K., Morbidelli A.* Dissipative Divergence of Resonant Orbits // http://arxiv.org/abs/1204.2791, 12 Apr 2012.
2. *Booth M., Wyatt M.C., Morbidelli A., Moro-Martín A., Levison H.F.* The history of the Solar System's debris disc: observable properties of the Kuiper belt // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 2009. V. 399. P. 385–401.

3. *Celletti A., Lhotka C.* Stability of nearly-integrable systems with dissipation // J. Bifurcation and Chaos. 2013. V. 23. № 2. arXiv:1202.2443v1. doi: 10.1142/S0218127413500363.

4. *Hadjidemetriou J.D., Voyatzis G.* On the dynamics of Extrasolar Planetary Systems under dissipation. Migration of planets // http://arxiv.org/abs/1005.3745, 18 Mar 2010.

5. *Michtchenko T.A., Ferraz-Mello S., Beauge C.* The periodic and chaotic regimes of motion in the exoplanet 2/1 mean-motion resonance// http://arxiv.org/pdf/1112.1208v1.pdf, 6 Dec. 2011.

6. *Morbidelli A., Giorgilli A.* On the dynamics in the asteroids belt. Part1.2 // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1990. V. 47. P. 145–204.

7. *Painlevé P.* Mémoire sur les intégrales premières du probléme des N corps // Bull. Astron. 1898. V. XV. P. 82.

8. *Sanns W.* Catastrophe Theory with Mathematica: A Geometric Approach. Germany: DAV. 2000.

9. *Schneider J.* Каталог экзопланет // http://exoplanet.eu/catalog.php.

10. *Whitney H.* On singularities of Mappings of Euclidean Spaces // Ann. Math. V. 62. 1955. P. 374.

11. *Whittaker E.A.* Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid bodies / Cambridge University Press. Cambrige, 1959.

12. *Yoshikawa M.* Numerical investigation of motions of resonant asteroids. In the three-dimensional space // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1992. V. 54. P. 287–290.

13. *Zeeman E.* Catastrophe Theory / Selected Papers 1972–1977. Reading MA: Addison-Wesley, 1977.

14. *Алексеев Ю.К., Сухоруков А.П.* Введение в теорию катастроф. М.: Изд-во МГУ, 2000.

15. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.

16. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. С. 5–304.

17. *Бардин Б.С., Чекин А.М.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 3 : 1 // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 353–36.

18. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р.* Аналитическое решение эллиптической ограниченной задачи трех тел // Астрон. вестн. 1994. Т. 28. № 3. С. 100–106.

19. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р.* Исследование динамических характеристик орбит в задаче трех тел при резонансах первого порядка // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 1. С. 58–66.

20. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р.* Аналитическое решение обобщенной задачи трех тел при соизмеримости первого порядка // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 1. С. 67–71.

21. *Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р., Ракитина Н.В.* Исследование стационарных решений ограниченной эллиптической задачи трех тел при резонансах первого порядка // Космич. исслед. 1995. Т. 33. № 5. С. 474–478. (Cosmic Research. P. 430).

22. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал. 1997.

23. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Труды матем. об-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.

24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Том I. Сер. Теоретическая физика. М.: Наука, 1973.

25. *Ленг С.* Эллиптические функции. М.: Наука, 1984.

26. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

27. *Маркеев А.П.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2 : 1 // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 757–769.

28. *Мушаилов Б.Р.* Аналитическое решение для двухчастотной резонансной системы первого порядка в задаче трех тел // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 1. С. 47–57.

29. *Мушаилов Б.Р.* Эволюция системы Уран–Нептун // Астрон. вест. 1995. Т. 29. № 4. С. 375–384.

30. *Мушаилов Б.Р., Герасимов И.А.* Эволюция орбит системы спутников Сатурна Энцелада и Дионы // Астрон. вест. 1996. Т. 30. № 4. С. 355–367.

31. *Мушаилов Б.Р., Теплицкая В.С.* Качественные исследования эволюции орбитальных элементов в планетном резонансном варианте задачи трех тел в случае рэлеевской диссипации // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 5. С. 402. (Cosmic Research. P. 362).

32. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. М.: Мир, 1990.

33. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.

34. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971–72. Т. 1, 2.

35. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

36. *Холостова О.В.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе третьего порядка // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 789–811.