

Международная конференция

МАТЕМАТИКА В СОЗВЕЗДИИ НАУК

К юбилею ректора МГУ
академика
ВИКТОРА АНТОНОВИЧА САДОВНИЧЕГО

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва, 1–2 апреля 2024 года





МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Международная конференция

**МАТЕМАТИКА
В СОЗВЕЗДИИ
НАУК**

К юбилею ректора МГУ
академика
Виктора Антоновича Садовниченко

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва, 1–2 апреля 2024 года

Издательство Московского университета

2024

УДК 51(082)
ББК 22.1я43
М43

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:

Садовничий В. А. (председатель)
Шафаревич А. И. (заместитель председателя)
Соколов И. А. (заместитель председателя)
Попеленский М. Ю. (ответственный секретарь)
Асташова И. В., Георгиевский Д. В., Демидов А. В., Ендовицкий Д. А., Зернов В. А.,
Зинченко Ю. П., Иванов А. О., Ильин А. В., Ильин И. В., Козырев А. П.,
Липгарт А. А., Мамий Д. К., Осипов Г. В., Подольский В. Е., Сазонов В. В.,
Саралидзе А. М., Султанаев Я. Т., Фомичев В. В., Шкаликов А. А.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:

Садовничий В. А. (председатель)
Аветисян А. И., Акаев А. А., Александров В. В., Булинский А. В., Воеводин В. В.,
Воронцов К. В., Козлов В. В., Королёв В. Ю., Орлов Д. О., Подольский В. Е.,
Разгулин А. В., Смелянский Р. Л., Соловьёв В. А., Татевосов С. Г., Тыртышников Е. Е.,
Фоменко А. Т., Четвертушкин Б. Н., Шананин А. А., Ширяев А. Н.

Представленные в сборнике результаты исследований излагаются в авторской редакции

Международная конференция «Математика в созвездии наук».
М43 К юбилею ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовничего : Тезисы докладов докладов / Орг. комитет: В. А. Садовничий, А. И. Шафаревич, И. А. Соколов [и др.]. — Москва : Издательство Московского университета, 2024. — 815, [1] с. : ил. — Электронное издание сетевого распространения

ISBN 978-5-19-012029-5 (e-book)

УДК 51(082)
ББК 22.1я43

ISBN 978-5-19-012029-5
(e-book)

© Коллектив авторов, 2024
© Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова, 2024
© Издательство Московского университета, 2024

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Пленарные доклады | 19 |
| <i>В.А. Садовничий.</i> Математика в созвездии наук | 19 |
| <i>В.В. Козлов.</i> О механизме диффузии в гамильтоновых системах | 36 |
| <i>В.А. Садовничий, А.А. Акаев.</i> Математические модели для долгосрочного прогнозирования глобальных процессов | 36 |
| <i>А.А. Шкалик.</i> Избранные задачи спектральной теории | 36 |
| <i>А.Т. Фоменко, Г.В. Белозеров.</i> Траектории систем, распознавание эквивалентности, бильярды | 37 |
| <i>В.В. Александров, С.С. Лемак, М.Х. Магомедов, К.В. Тихонова, Н.Э. Шуленкина.</i> О математическом обеспечении гибридной системы сближения в открытом Космосе | 39 |
| <i>В.А. Соловьев.</i> Пилотируемые полеты в космос: от Ю.А. Гагарина до наших дней | 40 |
| <i>И.А. Тайманов.</i> Операторы Шредингера с РТ-потенциалами | 40 |
| <i>А.И. Аптекарев.</i> Спектры разностных операторов на графах | 41 |
| <i>Е.Е. Тыртышников.</i> Тензорные разложения и вычисления за гранью возможностей суперкомпьютеров | 41 |
| <i>Б.Н. Четверушкин, А.Е. Луцкий, Е.В. Шильников.</i> Об одной кинетической модели описания турбулентных течений | 42 |
| <i>М.Э. Соколов, В.Е. Подольский, В.В. Галатенко, В.М. Староверов, Р.Ф. Солодова, В.М. Буданов, Д.Ю. Трибис.</i> Роботизированная медицина | 42 |
| <i>А.И. Шафаревич.</i> Геометрические асимптотики для уравнений с сингулярностями | 46 |
| Секция 1. Алгебра и теория чисел | 47 |
| <i>Х. Аль-Ассад.</i> Применения формулы А.Г. Постникова в полях алгебраических чисел | 47 |
| <i>А.И. Галочкин.</i> Арифметические свойства значений гипергеометрических функций | 47 |
| <i>О.Н. Герман.</i> О равномерных диофантовых экспонентах решёток | 48 |
| <i>А.Х. Гяси, И.П. Михайлов, О.В. Попов, В.Н. Чубариков.</i> Аналитические свойства арифметических объектов | 48 |
| <i>М.В. Зайцев.</i> Коразмерности тождеств конечномерных алгебр | 51 |
| <i>В.К. Захаров, Т.В. Родионов.</i> Характеризация счетно-дедекиндова расширения решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ | 51 |
| <i>И.Б. Кожухов.</i> Изоморфизмы полугрупп обобщенных бинарных отношений | 53 |
| <i>М.А. Королёв.</i> Конструкции на окружности, образованные вычетами | 54 |
| <i>О.В. Маркова.</i> Циклические матрицы как образующие матричных алгебр | 55 |
| <i>А.А. Михалев.</i> Стандартные базисы идеалов свободных алгебр Ли и свободных $(p-)$ супералгебр Ли | 57 |
| <i>Ю.В. Нестеренко.</i> Арифметические свойства значений аналитических функций | 58 |
| <i>В.В. Тензина.</i> Топологически первичный радикал колец | 61 |
| <i>В.Г. Чирский.</i> Арифметические свойства значений расходящихся в \mathbb{C} рядов | 63 |
| <i>И.А. Чубаров.</i> О просто приводимых конечных группах | 64 |
| <i>А.В. Шутов.</i> Об аналоге задачи Гельфонда для разложений Островского | 65 |
| Секция 2. Геометрия и топология | 68 |

| | |
|---|----|
| <i>Е.С. Агуреева, В.А. Кибкало.</i> Топологический анализ осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского | 68 |
| <i>Л.А. Антипова, А.В. Горинчук.</i> Звезды в геометрии | 71 |
| <i>А.Л. Вернер, Л.А. Антипова, Ю.В. Маслова.</i> Многогранники — вечная тема науки и образования. Звёздчатые многогранники — тема современной геометрии и образования | 73 |
| <i>П.С. Геворкян.</i> Группы бинарных операций топологического пространства | 77 |
| <i>Н.Ю. Ероховец.</i> Многообразия, определяемые векторными раскрасками простых многогранников | 79 |
| <i>С. Иллиадис.</i> О некоторых проблемах в теории универсальных пространств и отображений | 82 |
| <i>А.В. Костин.</i> О теоремах типа Кейси и преобразованиях Лагерра | 84 |
| <i>В.М. Мануйлов.</i> Дискретизации пространств и алгебры Pou | 84 |
| <i>Ю.В. Маслова, Г.Р. Загорская.</i> Построение карт, соответствующих заданному графу | 86 |
| <i>Д.В. Миллионщиков.</i> Минимальная модель нильмногообразия и пространство модулей комплексных структур | 87 |
| <i>В.М. Нежинский.</i> Трансформеры в теории тенглов | 88 |
| <i>И.М. Никонов.</i> Топологическая интерпретация универсальных меток элементов диаграмм узлов | 89 |
| <i>И.Х. Сабитов.</i> Об одной задаче Берже | 91 |
| <i>В.И. Субботин.</i> О многограннике, близком к правильному | 93 |
| <i>Е.В. Троицкий.</i> Классы Райдемайстера в конечно аппроксимируемых группах конечного ранга Прюфера | 94 |
| <i>Т.Н. Фоменко.</i> Нули семейства функционалов и некоторые приложения | 96 |
| <i>А.И. Штерн.</i> Автоматическая непрерывность локально ограниченного гомоморфизма групп Ли на коммутанте | 98 |
| <i>M. Dussaule, L. Wang, W. Yang.</i> Limit sets for branching random walks on relatively hyperbolic groups | 98 |
| <i>Y. Liu.</i> On profinite properties of hyperbolic 3-manifolds | 99 |
| <i>A.Y. Narmanov, G.M. Abdishukurova.</i> Diffeomorphisms of foliated manifolds | 99 |

Секция 3. Дифференциальные уравнения и математическая физика 101

| | |
|--|-----|
| <i>А.В. Аксенов.</i> Высшие инварианты характеристик уравнения одномерной газовой динамики в лагранжевых переменных | 101 |
| <i>Ш.А. Алимов, Р.Р. Ашуров.</i> Обратные задачи для уравнения субдиффузии | 104 |
| <i>Х.Ф. Алзамми, Э.Л. Шликина.</i> О параболическом потенциале Бесселя | 106 |
| <i>А.И. Аллылуева.</i> Коротковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений мелкой воды над резко меняющимся дном | 108 |
| <i>И.В. Асташова, Ю.Н. Морозов, А.В. Филиновский, Г.А. Чечкин, Т.И. Шабатина.</i> О краевых задачах, возникающих в математическом моделировании криохимического процесса создания лекарственных наночастиц | 109 |
| <i>С.Н. Асхабов.</i> Решение нелинейных уравнений с суммарным ядром методом наискорейшего спуска | 111 |
| <i>Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров.</i> Тепло- и массоперенос в композиционных материалах. Параболические системы | 113 |
| <i>М.И. Бесова, Д.А. Маслов.</i> Голоморфная регуляризация тихоновских систем | 114 |
| <i>А.В. Боровских.</i> Геометрия группы Ли в групповом анализе одномерного кинетического уравнения | 116 |
| <i>А.Д. Брюно, А.Б. Батхилин.</i> Новые случаи интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона | 118 |
| <i>Ю.Н. Булатов, С.А. Рошупкин.</i> О фундаментальных решениях оператора Киприянова | 119 |
| <i>В.Б. Васильев.</i> Об основных задачах теории псевдодифференциальных уравнений | 122 |
| <i>М.М. Вотякова, С.Ю. Доброхотов, Д.С. Миненков.</i> Вырожденные бильярды с полужесткими стенками и длинные нелинейные волны, захваченные берегами | 124 |
| <i>А.А. Гималтдинова.</i> О задаче Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа в параллелепипеде | 125 |

| | |
|---|-----|
| <i>А.М. Денисов.</i> Обратные задачи для сингулярно возмущенных уравнений математической физики | 126 |
| <i>А.Л. Джабраилов.</i> Исследование обобщенной многоточечно-функциональной краевой задачи для дифференциального уравнения бесконечного порядка | 126 |
| <i>Э.Х. Джумаев, Б. Шарипов.</i> Об одном классе систем нелинейных уравнений в полных дифференциалах, имеющих периодические решения | 128 |
| <i>С.С. Ежак, Е.С. Карулина, М.Ю. Тельнова.</i> Об оценках первого собственного значения некоторых задач Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал | 130 |
| <i>Д.П. Емельянов.</i> Построение решения задачи для эллиптического дифференциального уравнения с вырождением нецелого порядка меньше единицы | 133 |
| <i>Ю.А. Еремин, В.В. Лопушенко.</i> Анализ квантовых эффектов в наноплазмонике на основе мезоскопической теории | 134 |
| <i>Л.С. Ефремова.</i> О пространстве C^1 -гладких косых произведений отображений окружности | 137 |
| <i>Н.В. Зайцева.</i> Гиперболические уравнения в полупространстве с оператором сдвига общего вида | 138 |
| <i>С.Б. Зарипов.</i> К теории двухмерного интегрального уравнения с сверхсингулярной линией симметричное относительно переменного x | 139 |
| <i>А.В. Звягин.</i> Начально-краевая задача, описывающая движение растворов полимеров с дробной производной в реологическом соотношении | 141 |
| <i>З.А. Каденова, Д.А. Бекешова, Ш.Э. Юнусов.</i> О единственности решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси | 142 |
| <i>Ш.Г. Касимов, А.П. Коцанов.</i> Об однозначной разрешимости многомерной начально-граничной задачи, связанной с уравнениями колебаний балки с учетом ее вращательного движения при изгибе, с нелокальными граничными условиями в классах Соболева | 145 |
| <i>А.С. Кирсанова.</i> Траектории утки в динамической модели ветрогенератора | 147 |
| <i>М.А. Кисатов, В.Н. Самохин, Г.А. Чечкин.</i> О существовании и единственности решения задачи пограничного слоя с проскальзыванием | 149 |
| <i>О.Ю. Кожухарь, А.С. Скичко.</i> Использование классических оптимизационных алгоритмов поиска констант модели процесса биоразложения никотина | 150 |
| <i>А.Н. Куликов, Д.А. Куликов.</i> Существование, число, устойчивость инвариантных многообразий конвективного уравнения Кана-Хиллиарда | 152 |
| <i>И.К. Курбонов, Х.П. Сайдалиев.</i> Точное решение системы уравнений Максвелла в однородной среде с нелинейными материальными уравнениями | 153 |
| <i>Г.А. Курина.</i> Асимптотическое поведение одной электромеханической модели с малой индуктивностью | 155 |
| <i>А.Г. Кушнер.</i> Контактная геометрия и интегрируемость дифференциальных уравнений | 157 |
| <i>Д.В. Лиманский.</i> Об априорных оценках для системы минимальных дифференциальных операторов в шкале анизотропных пространств Соболева | 158 |
| <i>И.С. Ломов.</i> Решение обобщенной смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения | 160 |
| <i>В.И. Маковецкий, С.М. Ситник.</i> Применение операторов преобразования для построения частного решения неоднородного самосопряженного дифференциального уравнения | 161 |
| <i>Е.Н. Махрова.</i> Критерии простоты/сложности непрерывных отображений на дендритах | 163 |
| <i>А.Б. Муравник, Г.Л. Россовский.</i> Задача Коши с суммируемыми начальными функциями для дифференциально-разностных параболических уравнений | 165 |
| <i>Н.Н. Нефедов.</i> Решения с пограничными и внутренними слоями систем уравнений реакция-диффузия-адвекция с быстрыми и медленными уравнениями | 166 |
| <i>Р.О. Оморов.</i> Топологическая грубость и бифуркации: синергетические системы и хаос | 167 |
| <i>А.Л. Павлов.</i> О разрешимости задачи Коши для класса уравнений соболевского типа в пространстве обобщенных функций медленного роста | 170 |
| <i>С.С. Постнов.</i> Задачи оптимального управления для систем, описываемых диффузионно-волновым уравнением | 172 |

| | |
|--|------------|
| <i>Н.А. Раутиан.</i> Исследование Вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений методами теории полугрупп | 174 |
| <i>Р.М. Рахимов.</i> Об одном подходе к решению задачи Коши для уравнения в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами | 175 |
| <i>И.О. Резниченко, П.А. Крутицкий, В.В. Колыбасова.</i> О квадратурных формулах для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя | 177 |
| <i>В.Г. Романов.</i> Оценка устойчивости решения в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения | 178 |
| <i>К.Б. Сабитов.</i> Задача Дирихле для уравнения смешанного типа Лаврентьева – Бицадзе, малые знаменатели | 180 |
| <i>А.Ю. Савин, Х.Х. Аббас.</i> Индекс эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов, и неподвижные точки | 183 |
| <i>В.М. Савчин.</i> О некоторых геометрических аспектах бесконечномерных динамических систем | 184 |
| <i>Э.М. Сайдаматов, Ш.Н. Шералиев.</i> Об одном решении задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка | 186 |
| <i>В.Ж. Сакбаев.</i> Инвариантные меры, порожденные банаховыми пределами, и свойства интегрируемых по таким мерам функций | 188 |
| <i>И.Н. Сергеев.</i> Меры устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы | 189 |
| <i>С.Н. Сидоров.</i> Трехмерная начально-граничная задача для вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа | 192 |
| <i>Х.Г. Умаров.</i> Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения умеренно длинных продольных волн в вязкоупругом стержне | 193 |
| <i>М.В. Фролова, Е.А. Михайлов, Ю.А. Тихонов.</i> Оценки собственных значений дифференциального оператора, возникающего в одной задаче магнитной гидродинамики | 195 |
| <i>А.Б. Хасанов, А. Абдвохидов.</i> Начально-граничная задача для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка – Лиувилля (омКдФ-Л) | 197 |
| <i>А.Б. Хасанов, Х.Н. Нормуродов.</i> Смешанная задача для нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических бесконечнозонных функций | 199 |
| <i>М.В. Шамолин.</i> Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с конечным числом степеней свободы | 201 |
| <i>М.В. Шубина.</i> Точные решения в $F(R)$ гравитации | 203 |
| <i>F.N. Dekhkonov.</i> The time-optimal problem for a fourth order parabolic equation in an one-dimensional domain | 205 |
| Секция 4. Анализ и спектральная теория операторов | 207 |
| <i>А.Р. Алимов, И.Г. Царьков.</i> Взаимосвязь классических понятий геометрической теории приближений в несимметричных пространствах | 207 |
| <i>Н.М. Асланова.</i> О расширениях с выходом из пространства, асимптотике спектра и регуляризованном следе дифференциального оператора четвертого порядка | 209 |
| <i>А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова.</i> Методы эквивалентных операторов в исследовании дифференциальных операторов в пространстве медленно меняющихся на бесконечности функций | 210 |
| <i>В.В. Белокуров, А.В. Васильев, А.С. Иванов, Д.В. Сальников, В.В. Чистяков, Е.Т. Шавгулидзе.</i> Применение нейронных сетей для вычисления функциональных интегралов в квантовой теории поля | 213 |
| <i>В.В. Белокуров, Е.Т. Шавгулидзе.</i> Фейнмановские интегралы в функциональном анализе и квантовой физике | 215 |
| <i>С.А. Бутерин.</i> О восстановлении сингулярных операторов Штурма – Лиувилля с запаздыванием | 216 |
| <i>М.И. Исмаилов.</i> О некоторых свойствах обобщенных гранд пространств Лебега и гранд классов Харди | 218 |
| <i>О.С. Кудрявцева, А.П. Солодов.</i> Области однолистности и однолистного покрытия на классах ограниченных голоморфных в круге функций | 219 |

| | |
|--|-----|
| <i>А.Ф. Куржаев.</i> Об оценке коэффициентов разложения функций в ряд экспоненциальных мономов | 221 |
| <i>О.Ю. Лукинова, А.М. Кудоси.</i> Операторы Бушмана – Эрдейи в форме степенных рядов | 223 |
| <i>Л.Н. Ляхов, В.А. Калитвин, М.Г. Лапшина.</i> О некоторых свойствах оператора, двойственного к преобразованию Радона – Киприянова | 224 |
| <i>К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова.</i> Рекуррентные соотношения с пропусками длины $2n$ для многочленов Бернулли и Эйлера | 227 |
| <i>Е.В. Мищенко.</i> Об устойчивости семейств, порожденных целочисленными сдвигами сплайнов | 229 |
| <i>Б.П. Осиленкер.</i> О полугруппах, порожденных дискретными ортонормированными полиномами Соболева | 230 |
| <i>А.С. Печенцов.</i> Распределение спектра сингулярного оператора Штурма – Лиувилля, возмущенного дельта-взаимодействием | 232 |
| <i>И.С. Пилипенко.</i> Усиление теоремы Дзядыка о равенстве трёх площадей | 233 |
| <i>С.С. Платонов.</i> О пределах некоторых интегралов, связанных с гармоническим анализом Фурье – Бесселя | 234 |
| <i>И.В. Поликанова.</i> Признаки плоскостности поверхности и прямолинейности линии в евклидовом пространстве | 237 |
| <i>Д.А. Полякова.</i> Об образе операторов свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций | 239 |
| <i>К.В. Руновский.</i> Универсальные оценки для операторов теории приближений и гладкости | 240 |
| <i>В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев.</i> Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма – Лиувилля | 241 |
| <i>В.А. Садовничий, З.Ю. Фазуллин.</i> Об одном способе суммирования второй поправки теории возмущений | 243 |
| <i>С.М. Ситник.</i> О дзета функциях по В.А. Садовничему, построенным по нулям функций Бесселя | 245 |
| <i>В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова.</i> О прямоугольном операторе Харди в весовых пространствах Лебега | 247 |
| <i>Н. Усмонов, М.Б. Холикова.</i> Задача сопряжения обобщенных аналитических функций в сингулярном случае | 249 |
| <i>А.Г. Чечкина.</i> Повышенная суммируемость решений p -эллиптического уравнения | 252 |
| <i>Н.Н. Шамаров.</i> Спектральный анализ унитарного гильбертова преобразования Фурье и каноническое бозонное квантование Вейля – Смолянова | 253 |
| <i>И.А. Шейтак.</i> Точные оценки функций и промежуточных производных в пространствах Соболева в негильбертовом случае | 255 |
| <i>A.R. Aliev.</i> About one issue of solvability of two classes of fourth-order operator-differential equations | 257 |

Секция 5. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика **259**

| | |
|--|-----|
| <i>Е.В. Булинская.</i> Приложения теории вероятностей: модели и методы исследования | 259 |
| <i>Е.Вл. Булинская.</i> О распространении ветвящегося случайного блуждания в критическом и докритическом случаях | 261 |
| <i>А.В. Булинский.</i> Субоптимальные процедуры выбора значимых факторов | 264 |
| <i>А.Ю. Веретенников.</i> О возвратностных свойствах диффузии с переключением | 266 |
| <i>О.П. Виноградов.</i> Об одном способе измерить случайность двоичной цепочки | 268 |
| <i>Т.В. Жмылова.</i> О вероятности неразорения страховой компании в модели с инвестициями и аппроксимацией классическими полиномами Лагерра | 270 |
| <i>А.В. Зорин.</i> О применении теории мартингалов для изучения периода занятости циклических систем обслуживания | 272 |
| <i>Н.С. Изупов.</i> Создание концептуальной модели поддержки принятия решений при проектировании, строительстве и реконструкции объектов, оптимизации процесса формирования перечня требований пожарной безопасности | 274 |

| | |
|---|-----|
| <i>Р.И. Касимова.</i> Математические методы при поиске алмазоносных пород | 279 |
| <i>А.Е. Кондратенко, Д.А. Чернышова.</i> О росте энтропии остатков от деления на m свер- ток одинаково распределенных биномиальных случайных величин | 281 |
| <i>В.Ю. Королев.</i> Статистическая реконструкция неизвестных коэффициентов стохастиче- ских дифференциальных уравнений с помощью разделения смесей вероятностных распределений | 282 |
| <i>А.А. Кудрявцев, О.В. Шестаков.</i> Предельные теоремы для методов пороговой обработ- ки, допускающих построение несмещенной оценки риска | 284 |
| <i>А.В. Лебедев, А.А. Голдаева.</i> Некоторые подходы к комплексификации максимум- устойчивых распределений | 287 |
| <i>Е.Н. Трофимец.</i> Прогнозирование паводковых ситуаций на основе регрессионного анализа | 289 |
| <i>В.В. Ульянов.</i> Об улучшении приближения для статистик путем их рандомизации . . . | 291 |
| <i>Ю.С. Хохлов.</i> Геометрические случайные суммы: предельные теоремы и caracteriza- ционные задачи | 292 |
| <i>К.Д. Царегородцев.</i> О соответствии между правильными семействами и кликами в обоб- щенных графах Келлера | 293 |
| <i>Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, Ю.Н. Харченко.</i> Оценка коэффициентов дифферен- циальных уравнений по неточным наблюдениям | 295 |
| <i>Д.В. Шатилович.</i> Теорема Хасьминского для уравнения Колмогорова с частично вы- рожденной матрицей диффузии | 296 |
| <i>И.Г. Шевцова, В.Ю. Королев, В.А. Макаренко.</i> Оценки скорости сходимости составных процессов Кокса к дисперсионно-сдвиговым нормальным смесям | 297 |
| <i>Е.Б. Яровая.</i> О структуре спектра эволюционных операторов в ветвящихся блужданиях с конечным числом источников ветвления | 299 |
| <i>V.N. Kolokoltsov.</i> The rates of convergence for position-dependent continuous-time random walks approximations to fractional evolutions | 301 |
| <i>A. Mingyao.</i> Optimal Distributed Subsampling for Big Data Analysis | 303 |

Секция 6. Дискретная математика, математическая кибернетика и теория интеллектуальных систем 304

| | |
|---|-----|
| <i>Т.В. Андреева, Ю. Лю.</i> Нижняя оценка числа антицепей в некоторых частично упоря- доченных множествах | 304 |
| <i>Д.Н. Бабин, Д.В. Пархоменко, И.В. Кириллов.</i> Об одном методе сжатия некоторых фильмов | 306 |
| <i>А.В. Власов, С.Б. Гашков.</i> Автомат для отображения Пеано – Гильберта | 307 |
| <i>Н.Ю. Волков.</i> Автоматные системы | 310 |
| <i>А.В. Галатенко, В.А. Носов, А.Е. Панкратьев, К.Д. Царегородцев.</i> О порождении n - квазигрупп с помощью правильных семейств функций | 313 |
| <i>Э.Э. Гасанов.</i> Линейный по порядку алгоритм умножения чисел с помощью двумерного клеточного автомата с локаторами | 316 |
| <i>А.А. Демидова.</i> Алгоритм распознавания почти- R -деревьев автоматами | 319 |
| <i>П.С. Дергач.</i> О классификации автоматов относительно единичных неисправностей ре- берных направлений | 320 |
| <i>М.М. Илхомов.</i> Парные функции и вычислительные системы | 322 |
| <i>Р.М. Колпаков.</i> О конечной непорожденности множеств рациональных чисел в классе элементарных параллельно-последовательных сетей | 324 |
| <i>Ю.А. Комбаров.</i> Схемы глубины два, приближенно вычисляющие функцию голосования | 325 |
| <i>С.А. Корнеев.</i> О сложности реализации схемами композиции монома над системой мо- номов | 327 |
| <i>В.В. Кочергин.</i> О сложности вычисления системы элементов конечной абелевой группы | 329 |
| <i>В.В. Кочергин, А.В. Михайлович.</i> О схемной сложности булевых функций над одним бесконечным базисом | 331 |
| <i>В.А. Литовский.</i> Вычисление функций односторонними и двусторонними автоматами | 333 |

| | |
|--|-----|
| <i>С.А. Ложкин, В.С. Зизов.</i> Асимптотические оценки высокой степени точности для площади мультиплекторов в модели клеточных схем | 336 |
| <i>А.С. Лосев.</i> Алгоритм локализации ациклического подграфа | 339 |
| <i>М.И. Менькин.</i> Применение моделирования логических процессов к задаче перевода изображений в формальную модель дорожных ситуаций | 340 |
| <i>Д.И. Моница.</i> Преследование на бесконечной прямой автоматов-жертв автоматом-хищником с краской | 342 |
| <i>С.Н. Селезнева.</i> Описание замкнутого класса полиномиальных функций по модулю квадрата простого числа посредством отношения | 344 |
| <i>А.И. Сидорчук.</i> Построение диаграммы Мура по регулярному выражению | 345 |
| <i>Т. Тан.</i> О сложности некоторых задач анализа вычислений параметризованных конечных автоматов-преобразователей | 346 |
| <i>В.В. Ушакова.</i> О последовательностях, соответствующих перемещениям по лентам машин Тьюринга при старте на пустой ленте | 349 |
| <i>А.М. Хайруллин.</i> Вычисления с частичным оракулом | 351 |
| <i>С.С. Чаплыгина.</i> О некоторых изотопных преобразованиях квазигрупп, улучшающих криптографические свойства | 353 |
| <i>А.А. Чеповский.</i> Построение и анализ графов взаимодействующих объектов | 355 |

Секция 7. Механика и математическое моделирование (теоретическая и прикладная механика) 358

| | |
|--|-----|
| <i>М.Д. Белоусова.</i> Задача оптимального движения точки при наличии ограничений на ускорение и его производную | 358 |
| <i>В.Ю. Бодряков.</i> Точное решение 2D и 3D задачи о преследовании | 359 |
| <i>Ю.В. Болотин, А.В. Брагин.</i> О необходимых условиях состоятельности обобщенного фильтра Калмана | 362 |
| <i>В.М. Буданов.</i> Аналитическое построение периодических решений системы Лоренца | 365 |
| <i>А.А. Давыдов, А.Ю. Плахов.</i> Динамика флюгера в разреженном потоке частиц | 368 |
| <i>М.Д. Ковалев.</i> О математических моделях теории механизмов | 369 |
| <i>И.Ф. Кожевников.</i> Вынужденные колебания нагруженной вращающейся шины | 372 |
| <i>Н.В. Куликовская, А.П. Кручинина.</i> Стохастическая модель вестибулярного датчика | 373 |
| <i>А.И. Матасов, Е.В. Шестакова.</i> Калибровка блока ньютометров и задача детектирования сбоев для блока чувствительных элементов | 375 |
| <i>А.М. Мухамедов, Х.И. Чаирез Ориа, А.С. Позняк, В.А. Чертополохов.</i> Структурное обучение дифференциальных нейронных сетей с использованием функционального проецирования | 376 |
| <i>И.А. Петренко, А.А. Черевко, Т.С. Шарифуллина.</i> Применение методов теории оптимального управления для повышения эффективности нейрохирургического лечения сосудистой патологии | 378 |
| <i>А.Г. Петров, А.Б. Батхин.</i> Параметрическое представление вещественных ортогонально-симплектических матриц | 380 |

Секция 8. Механика и математическое моделирование (механика деформируемого твёрдого тела) 383

| | |
|---|-----|
| <i>А.М. Антонов, В.А. Левин.</i> Цифровое моделирование в задачах механики деформируемого твердого тела на основе SAAS Prove.Design | 383 |
| <i>А.А. Бобылев.</i> Задача дискретного контакта для упругой стратифицированной полосы | 384 |
| <i>Н.С. Бондаренко.</i> Определение обобщённых моментов при изгибе ортотропной пластины в случае «гипотетического» модуля сдвига на базе $\{1,0\}$ -аппроксимации | 386 |
| <i>Д.В. Георгиевский.</i> Уравнения совместности деформаций в многомерной сплошной среде | 388 |
| <i>В.И. Горбачев.</i> Применение обобщенных функций для решения уравнений механики композитов | 389 |
| <i>И.Г. Горячева.</i> Модели контактного взаимодействия упругих тел с шероховатыми поверхностями | 392 |

| | |
|---|-----|
| <i>В.С. Дряжина.</i> Вязкопластическое течение в слоистых средах | 394 |
| <i>А.С. Желнов.</i> Моделирование фрактальных поверхностей методами искусственного интеллекта | 397 |
| <i>Э.Б. Завойчинская, А.А. Бобылев, А.Р. Каблин.</i> К вопросу об экспериментальном определении кривой усталости при звуковых и ультразвуковых методах исследований | 400 |
| <i>Л.А. Кабанова.</i> Метод структурных функций в решении статической задачи о нагружении пластины | 403 |
| <i>В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская.</i> К задаче о пластическом растяжении полосы с учетом условий на торцах | 407 |
| <i>С.А. Калоев, А.В. Сероштанов.</i> Решение задач изгиба тонких пьезоплит с отверстиями и трещинами методом комплексных потенциалов электромагнитоупругости | 409 |
| <i>В.А. Левин, А.В. Вершинин, М.Я. Яковлев.</i> Некоторые примеры использования инструментария на основе искусственного интеллекта для решения задач нелинейной механики прочности с применением пакета «Фидесис» | 412 |
| <i>В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова.</i> Применение метода Канторовича–Галеркина для анализа явлений резонанса в механических системах с движущимися границами | 414 |
| <i>С.А. Лурье, П.А. Белов.</i> Уравнения совместности деформаций, обобщенные формулы Чезаро. Функции напряжений | 415 |
| <i>В.В. Назаров.</i> Моделирование физических и механических процессов до начала возникновения водородной коррозии в стальном полом цилиндра при высокой температуре | 416 |
| <i>В.В. Назаров.</i> Анализ экспериментальных данных ползучести двух титановых сплавов при одной и той же высокой температуре | 418 |
| <i>М.У. Никабадзе.</i> О некоторых вопросах повторно-градиентных теорий трехмерных тел и тонких тел | 419 |
| <i>А.В. Романов.</i> Масштабные эффекты микрополярного изотропного тела с центром симметрии | 422 |
| <i>Л.В. Фомин, А.Ф. Ахметгалеев, П.М. Третьяков, Д.Д. Малов.</i> Моделирование ползучести и длительного разрушения мембраны внутри низкой жесткой матрицы | 425 |
| <i>Д.В. Христинич, Д.В. Праведников.</i> Эксперименты по определению ориентации главных осей анизотропии упругого материала | 428 |

Секция 9. Механика и математическое моделирование (механика жидкости, газа и плазмы) 431

| | |
|--|-----|
| <i>Р.Р. Айдагулов.</i> Реальные уравнения механики сплошных сред | 431 |
| <i>В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев.</i> Численное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса | 433 |
| <i>А.Н. Богданов.</i> Внутренние структуры при математическом моделировании высокоскоростных газодинамических процессов | 433 |
| <i>И.И. Вигдорovich.</i> Интеграл Крокко и законы стенки для скорости и температуры в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое | 437 |
| <i>А.Н. Голубятников, С.А. Захаров.</i> О моделировании процесса аннигиляции в собственном гравитационном поле | 438 |
| <i>М.А. Гузев.</i> Построение неевклидовых моделей в механике сплошной среды | 440 |
| <i>Ш. Каюмов, Ш.С. Зиядуллаева, Э.А. Хусанов, У.Б. Каюмов.</i> Математическое моделирование задачи фильтрации и вытеснения нелинейно-аномальных флюидов в трехслойном пласте | 442 |
| <i>А.Б. Киселев, Д.П. Логинов.</i> Численное моделирование необратимого деформирования и разрушения, вплоть до фрагментации, осесимметричных конструкций под действием взрыва ВВ | 445 |
| <i>М.Г. Козлова, В.А. Лукьяненко.</i> Итерационные регуляризирующие алгоритмы решения уравнения типа Урысона | 447 |
| <i>В.П. Ларченко, М.Н. Кравченко.</i> Моделирование вытеснения высоковязкой нефти с использованием биополимерных составов | 449 |
| <i>В.А. Лукьяненко, А.А. Гребенева.</i> Сравнение моделей спинового горения | 450 |

| | |
|---|-----|
| <i>С.А. Маслов, В.Л. Натяганов.</i> Электродинамическая левитация шаровой молнии под дипольным газовым облаком | 452 |
| <i>Н.Н. Смирнов.</i> Механика и стратегические информационные технологии | 454 |
| <i>Д.А. Тукмаков.</i> Исследование влияния вязкости несущей среды на результаты численных расчетов динамики газозвеси континуальной методикой динамики многофазных сред | 455 |
| <i>Н.С. Хабеев, М.Ф. Теймуров.</i> Численная верификация решения задачи о смыкании пузырька в жидкости | 457 |
| <i>А.В. Юлдашева.</i> О нелинейном интегро-дифференциальном уравнении, связанном с перидинамической моделью теплообмена | 458 |

Секция 10. Математика в фундаментальных и прикладных космических исследованиях **460**

| | |
|--|-----|
| <i>И.И. Алексеев, Е.С. Беленькая, В.В. Калегаев.</i> Моделирование магнитосфер планет | 460 |
| <i>Н.В. Беляков.</i> Нейросетевая сегментация облачного и снежного покровов по данным российского спутника «Электро-Л №2» | 461 |
| <i>А.А. Буров, В.И. Никонов.</i> О подходах к моделированию гравитационного потенциала небесного тела | 463 |
| <i>А.Ю. Комаровский, И.А. Самыловский, Т.В. Пшеничный, А.А. Филиппов.</i> Исследование вариантов построения группировки космического мониторинга с использованием цифровой платформы проектирования | 465 |
| <i>И.Н. Мяжкова, С.А. Доленко, В.Р. Широкий, И.М. Гаджиев.</i> Использование машинного обучения в центре анализа космической погоды НИИЯФ МГУ для прогнозирования геомагнитной и радиационной обстановки | 466 |
| <i>А.Н. Якунчиков.</i> Моделирование течения разреженного газа в воздухозаборнике спутника на сверхнизких орбитах Земли | 468 |

Секция 11. Актуальные проблемы преподавания математики в школе и в вузе **470**

| | |
|--|-----|
| <i>Ю.В. Абраменкова, С.В. Барковская.</i> Изучение определенного интеграла с позиции метапредметного подхода | 470 |
| <i>В.В. Афанасьев, Е.И. Смирнов, С.А. Тихомиров.</i> Колмогоровские чтения: вчера, сегодня, завтра | 473 |
| <i>В.Ю. Бодряков.</i> Усвоение фундаментальных математических понятий при выполнении лабораторных работ по математике | 477 |
| <i>А.В. Булинский.</i> Новые аспекты преподавания математики в классических университетах России | 480 |
| <i>А.П. Голуб.</i> Особенности преподавания математики у иностранных студентов: от простейших арифметических операций до вступительных испытаний в МГУ | 481 |
| <i>О.А. Гузеев.</i> Монетный набор для профилактики дискалькулии у младших школьников | 482 |
| <i>А.И. Дзундза, И.И. Моисеенко, И.А. Моисеенко, В.А. Цапов.</i> Прикладные задачи как эффективное средство мировоззренческого обучения математике | 485 |
| <i>Н.В. Дударева, Е.А. Утюмова.</i> Принципы создания цифровых обучающих тренажеров для закрепления и контроля знаний по математике | 486 |
| <i>Е.Г. Евсеева.</i> Подготовка учителей математики в магистратуре к профессиональной деятельности в условиях цифровой образовательной среды | 488 |
| <i>В.М. Ермаков.</i> Из практики преподавания математики на предвузе для будущих иностранных студентов-бакалавров. Опыт ИРЯиК МГУ | 491 |
| <i>Н.И. Зотова.</i> Система раннего выявления несформированности математических знаний на основе современных информационных технологий | 492 |
| <i>Е.А. Кабанова.</i> Преодоление препятствий: путь к успешному обучению математике на уровне общего и среднего образования | 493 |
| <i>Ю.Ю. Коняева.</i> Проектирование методической системы обучения теории вероятностей и математической статистике будущих физиков на основе фузионистского подхода | 495 |

| | |
|--|-----|
| <i>Н.Н. Костина, А.В. Костин, М.В. Королёва, М.А. Овчинников.</i> Имитационное моделирование при подготовке будущих учителей | 498 |
| <i>И.Г. Лебо, С.А. Розанова.</i> Роль математического моделирования физических процессов при выполнении исследовательских проектов студентами технических университетов | 499 |
| <i>Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко.</i> Модель формирования целостной картины мира старшеклассника | 501 |
| <i>М.М. Луценко.</i> Расчет ошибок ранжирования по результатам тестирования | 503 |
| <i>В.А. Матвеева.</i> Иммерсивное обучение математике в вузе | 511 |
| <i>Д.С. Миндыла.</i> Актуальные проблемы подготовки будущих учителей математики | 513 |
| <i>О.В. Митина, А.В. Райков.</i> Проблемы преподавания математики студентам психологических специальностей | 514 |
| <i>С.Н. Мошков.</i> Методические аспекты преподавания высшей математики для иностранных студентов: учебная программа и пособия | 517 |
| <i>М. Нугмонов, А.Ш. Собиров.</i> Метод обучения решения предикатных задач с помощью теории симметрических многочленов | 520 |
| <i>В.С. Панфёров.</i> Непрерывность математического образования | 524 |
| <i>В.С. Прач, В.Д. Хазан.</i> к вопросу о формировании эвристических приемов при решении задач по математике с использованием онлайн-сервисов | 525 |
| <i>Л.Б. Райхельгауз.</i> Повышение результативности обучения математике путём формирования академической резильентности обучающихся в системе непрерывного образования | 528 |
| <i>К.В. Руновский, О.А. Шпырко, Н.В. Лактионова.</i> “Мыслительная матрица” и ее роль при решении нестандартных математических задач | 530 |
| <i>Н.А. Самсикова.</i> Профессионально-методическая подготовка будущих учителей математики в условиях информатизации современного образования | 531 |
| <i>А.Л. Семенов.</i> Математика как основа школьного образования для XXI века | 533 |
| <i>Е.И. Скафа.</i> Подготовка будущего учителя к формированию патриотизма у обучающихся средствами математики | 536 |
| <i>А.С. Смирнов.</i> Преподавание математики иностранным студентам на подготовительном отделении: проблемы и решения. Опыт ИРЯиК МГУ | 539 |
| <i>М.В. Солдаева.</i> Реализация целостного подхода к обучению началам математического анализа старшеклассников | 540 |
| <i>Е.М. Степанова.</i> Открытые задачи как средство обучения теме «Функция» в 7 классе | 540 |
| <i>А.В. Ступакова, А.П. Антонов, Р.С. Сауткин, А.А. Суслова, М.Ю. Карпушин, С.А. Афонин.</i> Обучение междисциплинарных команд для развития цифровых технологий нефтегазовой отрасли на примере работы научно-образовательного центра ПАО «НК «РОСНЕФТЬ» и МГУ имени М.В. Ломоносова | 541 |
| <i>Р.М. Туркменов, Ю.В. Садовничий.</i> Решение проблем отбора учащихся и разработки учебной программы по математике на примере Университетской гимназии МГУ имени М.В. Ломоносова и Первого университетского лицея имени Н.И. Лобачевского | 542 |
| <i>Б.А. Шмагин.</i> От лиц чернова к гильбертову пространству: о визуализации в науках о Земле. Курс многомерной статистики на кафедре гидрогеологии МГУ | 543 |
| <i>И.В. Яценко.</i> Российский совет олимпиад школьников и развитие олимпиадного движения по математике в России | 545 |

Секция 12. Вычислительная математика и математическое моделирование физических процессов **548**

| | |
|--|-----|
| <i>А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев, Г.А. Джээнбаева, М.М. Шаршенбеков.</i> Применение разностного уравнения второго порядка к построению М-матриц высокого порядка | 548 |
| <i>А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, М.М. Шушарин.</i> Сингулярность электромагнитного поля в окрестности ребра цилиндра произвольной формы сечения | 549 |
| <i>С.В. Богомолов.</i> Лагранжева формализация, методы частиц | 551 |

| | |
|---|-----|
| <i>Э.Э. Боос, В.Е. Буничев, Л.В. Дудко, М.Н. Дубинин, В.Ф. Еднерал, А.П. Крюков, В.И. Саврин.</i> Моделирование с помощью программы ComrNEP процессов рождения и распада элементарных частиц на коллайдерах | 553 |
| <i>П.Н. Вабищевич.</i> Вычислительная декомпозиция и композиция для решения нестационарных задач | 556 |
| <i>А.В. Лапин.</i> Конечно-разностная схема для вариационного неравенства с дробной производной по времени | 557 |
| <i>В.С. Лапонин, С.А. Складчиков.</i> Математическое моделирование гидродинамических потоков в глазу человека | 559 |
| <i>А.С. Леонов, Н.Н. Нефедов, А.Н. Шаров, А.Г. Ягола.</i> Трехмерная обратная задача эластографии: «супербыстрое» решение методом малого параметра | 560 |
| <i>С.А. Матвеев.</i> Неотрицательные малоранговые аппроксимации в ТТ-формате и их использование при решении многокомпонентного уравнения коагуляции | 561 |
| <i>Ю.И. Ожигов.</i> Математика должна завоевать биологию | 562 |
| <i>А.В. Пененко, Е.В. Русин, М.К. Емельянов, В.В. Пененко.</i> Усвоение данных и решение обратных задач на основе операторов чувствительности для многомерных моделей адвекции–диффузии–реакции | 566 |
| <i>Д. Утебаев, Б.Д. Утебаев, Х.Б. Токаева.</i> Об устойчивости решений нелинейных разностных уравнений и ее некоторые приложения | 567 |
| <i>Е.В. Чижонков.</i> Оптимизация вычислений при моделировании эффекта опрокидывания электронных колебаний в холодной плазме | 568 |
| <i>А.И. Чуличков, О.В. Фаломкина, Ю.П. Пытьев, Д.А. Балакин.</i> Математические методы теории возможностей и субъективного математического моделирования | 570 |
| <i>А.И. Чуличков, Н.Е. Шапкина, П.В. Голубцов, В.А. Газарян, С.Н. Куличков.</i> Методы морфологического анализа временных рядов | 572 |

Секция 13. Математическое моделирование экономических и социальных процессов **574**

| | |
|--|-----|
| <i>П.Н. Александров, О.Ю. Шаховская-Ро.</i> Математическое моделирование закона о выборах | 574 |
| <i>Г.И. Бобрлик, П.П. Бобрлик.</i> Влияние биржевых операций с нулевой суммой на цены | 577 |
| <i>Т.А. Звонарева, О.И. Криворотько.</i> Модель игры среднего поля с управлением для описания распространения информации в онлайн социальных сетях | 578 |
| <i>С.И. Кабанишгин.</i> Обратные задачи рассеяния, спектральные и динамические | 581 |
| <i>И.В. Козицин.</i> Прогнозирование динамики общественного мнения при помощи SCARDO-модели: роль сильных связей | 581 |
| <i>А.И. Козко, Л.М. Лукина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский.</i> Приближенные решения в некоторых математических моделях теории экономического роста | 583 |
| <i>О.И. Криворотько, С.И. Кабанишгин, Н.Ю. Зятьков, А.В. Неверов.</i> Математическое моделирование эпидемиологических процессов с учетом социально-экономических факторов: искусственный интеллект и обратные задачи | 585 |
| <i>А.С. Куць.</i> Анализ изменений на рынке публичных вакансий с помощью непараметрического метода | 586 |
| <i>Е.П. Мочалина, Г.В. Иванкова, Д.И. Назарова, Н.С. Семина, Н.С. Зайцева.</i> Адаптация модели Самуэльсона–Хикса для применения на открытой экономике с ограничениями | 587 |
| <i>Н.М. Новикова, И.И. Поспелова.</i> Аппроксимация по Хаусдорфу решений двухкритериальных матричных игр | 590 |
| <i>Н.К. Обросова, А.А. Шананин.</i> Математическое моделирование межотраслевых связей и инфляционных рисков в условиях реструктуризации экономики | 592 |
| <i>Н.Н. Оленев.</i> Производственные мощности с предельным возрастом | 595 |
| <i>Л.И. Родина, А.В. Черникова.</i> Об оптимальном периодическом сборе возобновляемого ресурса для достижения наибольшей средней временной выгоды | 598 |
| <i>Н.В. Трусов.</i> Численные методы решения задачи среднего поля при наличии магистрального эффекта и их приложение к анализу кризиса на фондовом рынке | 600 |

| | |
|---|------------|
| <i>М.А. Шишленин, А.И. Глухов.</i> Социальная динамика общества: от математического моделирования до управления | 602 |
| <i>М.А. Шишленин, С.И. Кабанихин, Н.С. Новиков.</i> Электроакустическая томография: обратные задачи и машинное обучение | 603 |
| Секция 14. Математические методы искусственного интеллекта | 604 |
| <i>С.Т. Главацкий, Р.Р. Айдагулов, В.В. Борисенко, И.Г. Бурыйкин, И.Б. Кожухов, В.В. Тензина, А.В. Шокуров.</i> Математические методы и алгоритмы теоретической информатики в науке о данных и искусственном интеллекте | 604 |
| <i>С.Ю. Елистратов, Т.А. Южаков, Д.П. Ветров.</i> Исследование методов оптимизации нейронных сетей, улучшающих обобщающую способность моделей, и анализ их влияния на ландшафт функции потерь | 607 |
| <i>М.Ю. Трапезников.</i> Исследование существующих методов предсказания явного взаимодействия на основе неявного в рекомендательных система | 608 |
| <i>А.Г. Шихжин, М.В. Никонов, М.О. Шмитов, А.А. Долматов.</i> Интеграция систем видеоаналитики на основе искусственного интеллекта для улучшения механизмов общественной безопасности в общеобразовательных учреждениях | 609 |
| <i>S.S. Goncharov, A.V. Nechesov, D.I. Sviridenko.</i> Hybrid Artificial Intelligence | 613 |
| Секция 15. Математическая теория управления и оптимизация | 614 |
| <i>Л.А. Артемьева, А.А. Дряженков.</i> Регуляризованный двухэтапный экстраградиентный метод в задачах квадратичной минимизации с неточно заданными входными данными | 614 |
| <i>Р.Р. Бегишев.</i> Алгоритм формирования группы на основе обучения с подкреплением | 616 |
| <i>Ю.М. Васильев, Е.В. Глазунова, А.В. Смирнова, Г.М. Фридман.</i> Проектирование сети железнодорожных концентраторов (хабов) для перевозки грузовых вагонов: точные математические постановки | 617 |
| <i>Р.А. Гиргидов.</i> Статическая система оценки регулярности пространственной структуры группы дронов | 619 |
| <i>М.В. Зайцева, П.А. Точилин.</i> Применение обучения с подкреплением в задаче моделирования потоков людей | 621 |
| <i>А.В. Ильин, А.С. Фурсов.</i> О стабилизации переключаемой интервальной линейной системы с запаздываниями в управлении | 623 |
| <i>Я.Д. Сергеев, Р.Г. Стронгин.</i> Современные алгоритмы решения задач липшицевой глобальной оптимизации | 625 |
| <i>П.А. Точилин, М.В. Паршиков.</i> Алгоритм вычисления субоптимального решения задачи быстрогодействия с фазовыми ограничениями | 626 |
| <i>К.Ю. Шутова, А.А. Лукьяница.</i> Повышение точности определения координат автономных роботов путем комплексирования информации от различных датчиков | 627 |
| Секция 16. Суперкомпьютерные вычисления | 630 |
| <i>Г.А. Армеев, А.С. Князева, А.К. Шайтан.</i> Мультимасштабное моделирование хроматина | 630 |
| <i>В.Г. Бобков, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская, П.В. Родионов.</i> Суперкомпьютер как инструмент научно-технического прогресса в авиационно-космической отрасли | 632 |
| <i>Д.А. Желтков, Н.Л. Замагаршин, Е.Е. Тьртышиников.</i> Криптография: задачи отображения алгоритмов на вычислительные системы | 633 |
| <i>Д.Ю. Нечипуренко, А.А. Масальцева, Е.С. Бершадский, М.А. Пантелеев.</i> Суперкомпьютерный анализ гемостаза и тромбоза: выводы и перспективы | 633 |
| <i>А.В. Сулимов, Д.К. Кутов, В.Б. Сулимов.</i> Суперкомпьютеры для разработки лекарств | 634 |
| <i>М.М. Тихомиров, Д.И. Чернышев, Н.В. Лукашевич, Б.В. Добров.</i> Суперкомпьютеры как необходимая основа для развития больших языковых моделей | 637 |
| Секция 17. Математическое обеспечение современных телекоммуни- | |

| | | |
|---|-------------------------|------------|
| | кационных систем | 639 |
| <i>В.О. Писковский.</i> Прогнозирование временных характеристик периферийных вычислений при реализации прикладных сетевых сервисов | | 639 |
| <i>А.М. Рязанов, Д.Ю. Волканов.</i> Методы оценки параметров качества обслуживания сетевого трафика для решения задачи прогнозирования качества гетерогенных каналов в сетях передачи данных | | 641 |
| <i>Р.Л. Смелянский.</i> ИИ в управлении вычислительной инфраструктурой нового поколения | | 643 |
| <i>Е.П. Степанов.</i> Балансировка транспортных потоков многоагентным методом машинного обучения в наложенной сети | | 645 |
| <i>Ю.Ю. Терентьева.</i> Актуальные задачи моделирования телекоммуникационных сетей и подходы к их решению | | 647 |
| Секция 18. Искусственный интеллект и большие языковые модели | | 649 |
| <i>П.В. Гращенков, Л.И. Паско, К.А. Студеникина, А.А. Герасимова.</i> Большие модели как носители русской грамматики | | 649 |
| <i>Н.С. Горбунов, О.В. Донина.</i> Автоматизация проведения криптоклассного исследования с помощью больших языковых моделей | | 651 |
| <i>В.А. Громов, Н.С. Бородин.</i> Фрактальная размерность естественного языка | | 653 |
| <i>Н.В. Лукашевич.</i> Большие языковые модели в задачах анализа тональности | | 656 |
| <i>Е.В. Рахилина, Д.А. Рыжова.</i> Математика и лингвистика | | 657 |
| <i>И.С. Рожков.</i> Предобученные языковые модели в задаче извлечения вложенных именованных сущностей | | 658 |
| <i>С.Г. Татевосов.</i> Большие языковые модели и большие модели языка | | 660 |
| <i>М.М. Тихомиров.</i> Адаптация больших мультязычных языковых моделей путем настройки токенизации на русский язык | | 663 |
| <i>Д.И. Чернышев.</i> Методы коррекции поведения языковых моделей в задаче абстрактивного реферирования | | 664 |
| Секция 19. Математика и психология | | 666 |
| <i>О.В. Алмазова.</i> Формирование комбинаторного мышления у студентов психологического профиля обучения | | 666 |
| <i>В.В. Барабанщикова, И.В. Блинникова.</i> Многомерное шкалирование (mds) в исследованиях ментальных представлений человека | | 667 |
| <i>Г.Д. Взорин.</i> Психология машин и математика машин | | 670 |
| <i>П.Н. Ермаков, И.В. Абакумова.</i> Смыслы в математике или математика смыслов | | 671 |
| <i>О.А. Карбанова, С.М. Чурбанова.</i> Развитие когнитивной уверенности в решении международной математической олимпиады «Кенгуру» у 8-12-летних школьников | | 672 |
| <i>С.В. Леонов, И.С. Поликанова.</i> Инновационные технологии в современной психологической подготовке хоккеистов | | 675 |
| <i>А.Д. Наследов.</i> Применение математических методов в психологии: некоторые актуальные проблемы | | 676 |
| <i>В.Ф. Петренко, Е.И. Первичко, О.В. Митина.</i> Возможности медиаторного анализа для построения моделей, описывающих влияние черт личности и психологического дистресса на дисфункциональное дыхание в условиях пандемии covid-19 | | 676 |
| <i>А.Н. Поддьяков.</i> Мнения решателей о причинах правильных и ошибочных ответов в задачах на нетранзитивность превосходства | | 679 |
| <i>Э.Э. Сыманюк, А.П. Усольцев.</i> Реализация принципов развития мышления школьников при обучении математике | | 681 |
| <i>Д.В. Ушаков, Е.В. Битюцкая.</i> Разработка алгоритма классификации трудных жизненных задач на основе компьютерного моделирования | | 682 |
| <i>А.М. Черноризов, В.Е. Дубровский.</i> Геометрические методы в сенсорной психофизике | | 683 |
| Секция 20. Математика и философия | | 687 |
| <i>Е.В. Брызгалкина.</i> Трансформация методов дескриптивной биоэтики в цифровом пространстве | | 687 |

| | |
|--|-----|
| <i>В.В. Винокуров.</i> Язык математики в видениях Вольфганга Паули и критерий рамсификации | 689 |
| <i>О.М. Григорьев.</i> Объекты, их свойства и формальные понятия | 691 |
| <i>Д.В. Зайцев.</i> Языковые модели и логические рассуждения | 693 |
| <i>Е.А. Зайцев.</i> О предпосылках применения математики для описания движения | 694 |
| <i>Н.В. Зайцева.</i> Феноменология и нейроинтерфейсные технологии | 697 |
| <i>В.П. Казарян.</i> Междисциплинарность и трансдисциплинарность: их проявления в прикладной математике | 698 |
| <i>А.П. Козырев.</i> Философия перед лицом математической очевидности | 700 |
| <i>Е.В. Косилова.</i> Перспективы фикционализма в философии математики | 701 |
| <i>А.А. Костикова.</i> Математическая метафора во французской философии конца 20 века | 703 |
| <i>А.Н. Кричевец.</i> набросок феноменологического исследования развития понятийных систем в математике | 704 |
| <i>Т.В. Кузнецова.</i> Математика и философия: объединение дисциплин для понимания мира | 706 |
| <i>С.М. Кускова.</i> Оправдание философии математическими концепциями | 707 |
| <i>А.Е. Лестев.</i> Онтология чисел | 709 |
| <i>З.А. Сокулер.</i> О попытках постичь «непостижимую эффективность математики» | 710 |
| <i>Г.В. Сорина.</i> Математические предпосылки формирования антитезы психологизма-антипсихологизма в конце XIX – начале XX веков | 711 |
| <i>И.Э. Фролов.</i> К вопросу о предметной роли математических онтологий в генезисе финансовых отношений | 712 |
| <i>В.А. Шапошников.</i> Соотношение математики и физики: Некоторые исторические аспекты проблемы | 715 |
| <i>В.А. Яковлев.</i> Проблема информационного обоснования математики | 717 |

Секция 21. Моделирование и прогнозирование глобальных процессов 719

| | |
|--|-----|
| <i>И.А. Алешковский, А.А. Гребенюк, А.С. Максимова.</i> Перспективы использования «больших данных» для анализа миграционных процессов | 719 |
| <i>С.Э. Билюга.</i> Социально-политическая дестабилизация государств на постсоветском пространстве: методологические проблемы количественного анализа и прогноза | 722 |
| <i>Е.Е. Гиричева, В.Н. Бочарников.</i> Модельный подход к анализу взаимодействия человека и природы на примере стран БРИКС | 725 |
| <i>Н.Н. Голуб, Н.В. Лактионова, О.М. Олефиренко, О.А. Шпырко.</i> Применение метода парных сравнений для идентификации российской цивилизации | 727 |
| <i>Л.Е. Гринин, А.Л. Гринин.</i> Африка в 21 столетии: проблемы и перспективы в мир-системном и геополитическом аспектах | 730 |
| <i>Л.В. Зотов, В.Д. Юшкин, Н.Л. Фролова, А.А. Фадеев.</i> Космическая гравиметрия GRACE и GFO | 731 |
| <i>О.Г. Леонова.</i> Альтернативные (нематематические) подходы к прогнозированию глобальных политических процессов | 734 |
| <i>Н.В. Лактионова, А.В. Мартышкин, А.В. Сумилов, О.А. Шпырко.</i> Матрица духовно-нравственных ценностей арабо-исламской цивилизации | 736 |
| <i>С.Ю. Малков.</i> Моделирование глобальных процессов: промежуточные итоги и задачи на будущее | 739 |
| <i>С.Ю. Малков.</i> Идеология, менталитет, моральное поведение: возможности математической интерпретации и анализа | 740 |
| <i>Д.М. Мусиева.</i> Индекс качества жизни LQI | 741 |
| <i>В.Л. Натяганов.</i> Современная активизация планеты — опасная тенденция или пугающий миф? | 744 |
| <i>С.Н. Ткаченко, И.С. Ткаченко.</i> Глобальное влияние озона на атмосферу земли | 747 |
| <i>А.Х. Шахвердиев, Ю.В. Шестопалов, С.В. Арефьев.</i> Моделирование многофазной полиномиальной динамической системы в условиях неустойчивости процесса | 748 |

| | |
|---|------------|
| Секция 22. Математика в современной биологии | 752 |
| <i>С.А. Бобков, А.Б. Теслюк, В.Е. Велихов, В.А. Ильин.</i> Потенциал современных информационных технологий для анализа данных экспериментов на установках Стуго-ЕМ и XFEL | 752 |
| <i>А.И. Буглаков, А. Фатихова, А.В. Чертович, А.К. Шайтан, А.Р. Хохлов.</i> Особенности моделирования ДНК и РНК комплексов: крупнозернистые модели и оптимизация последовательностей | 753 |
| <i>Н.Б. Гудимчук.</i> Компьютерное моделирование тубулинового цитоскелета | 754 |
| <i>Д.Ф. Клеева, Г.А. Согоян, А.Р. Биктимиров, М.Ю. Синцов, М.А. Лебедев.</i> Пространственно-спектральные характеристики электроэнцефалографии пациентов с фантомными болями | 756 |
| <i>М.П. Кнышенко, Г.А. Согоян, Н.С. Пылюгин, М.А. Лебедев.</i> Машинное обучение в анализе электрической мышечной активности для управления протеза | 759 |
| <i>Н.О. Ковалева, И.В. Ковалев, Е.А. Звычайная.</i> Математические методы в исследовании морфологии почвенных конкреций | 761 |
| <i>И.Б. Коваленко, В.А. Федоров, С.С. Хрущев, Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин.</i> Молекулярная и броуновская динамика взаимодействия белков в фотосинтезе | 764 |
| <i>Е.А. Кузьмина, Д.О. Крюков, М.А. Лебедев.</i> Моделирование распространяющихся волн нейронной активности в моторной коре объясняет вращательную динамику | 765 |
| <i>М.А. Лебедев, Д.Ф. Клеева.</i> Нейроинтерфейсы для реабилитации | 768 |
| <i>Е.Е. Маркелова, Д.В. Антонен, А.Р. Минин, Ю.В. Вяткин, Д.Н. Штокало, Ю.А. Медведева, В.Е. Раменский.</i> Предсказание изменений экспрессии генов в единичных клетках с помощью методов глубокого обучения | 770 |
| <i>М.А. Пантелеев.</i> Математическое и компьютерное моделирование в проблемах гемостаза и тромбоза | 771 |
| <i>Д.Д. Пензар, В.В. Вяльцев, Е.О. Носкова, А.О. Зинкевич, А.Н. Бакулин.</i> Улучшение предсказания доступности нуклеотидов РНК по ее последовательности при помощи ArmNet | 773 |
| <i>Т.Ю. Плюснина, С.С. Хрущев, Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин.</i> Моделирование первичных процессов фотосинтеза. Иерархический подход | 775 |
| <i>Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин.</i> Модели процессов в фотосинтетической мембране высших растений и микроводорослей | 778 |
| <i>Д.В. Сорокин, Н.А. Аношина, Е.А. Арифудилин, Е.В. Шеваль.</i> Методы совмещения микроскопических изображений клеточных структур и их применение в задачах клеточной биологии | 781 |
| <i>А.В. Сулимов.</i> Квазидокинг: путь от классического к квантовому докингу | 783 |
| <i>А.В. Хвостиков, В.Б. Ипполитов, А.С. Крылов, И.А. Михайлов, П.Г. Мальков.</i> PathScribe: программное обеспечение для работы с полнослайдовыми гистологическими изображениями для учебного процесса и научных исследований | 786 |
| <i>М.Г. Хренова, А.М. Кулакова, Т.И. Мулашкина, Р.А. Степанюк, И.В. Поляков.</i> Методы искусственного интеллекта в задачах молекулярного моделирования процессов в биомакромолекулах | 789 |
| <i>К.В. Шайтан, А.К. Шайтан, Г.М. Кобельков, А.Т. Фоменко, М.П. Курпичников.</i> Математика в биологии — где точка роста? | 790 |
| <i>А.В. Шмелев, Ю.М. Куратов, В.С. Фишман, О.Л. Кардымон, М.С. Бурцев.</i> Трансформеры с рекуррентной памятью для анализа длинных последовательностей ДНК | 792 |
| Секция 23. Актуальные проблемы прикладной математики | 796 |
| <i>Б.А. Будаев.</i> О модификациях метода стрельбы для задач равновесного программирования | 796 |
| <i>А.И. Майсурадзе.</i> Моделирование нейрофизиологических данных с привлечением информации о расстояниях между каналами | 797 |
| <i>А.А. Никитин, М.В. Николаев.</i> Численное и аналитическое исследование интегрального уравнения, возникающего в модели популяции растительных сообществ | 798 |
| <i>Н.А. Орел, О.Ю. Черкасов.</i> Оптимальное торможение при спуске в сопротивляющейся среде | 799 |

| | |
|---|-----|
| <i>В.В. Терновский, В.П. Илютко, Д.В. Камзолкин.</i> Задача оптимального управления коэффициентом в дифференциальном уравнении математического маятника | 800 |
| <i>П.А. Точилин.</i> О построении кусочно-кубических оценок функции цены в задаче управления нелинейной системой | 801 |
| <i>А.Ю. Щеглов, Ли Суй.</i> Обратная задача для популяционной модели с возрастным структурированием и интегральным учётом перенаселения | 802 |
| <i>Y. Luo.</i> Long time behavior of the focusing NLS on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$ via the semivirial-vanishing geometry | 804 |
| <i>V.F. Melnikov.</i> On an approach to the study of distances between DNA sequences | 805 |
| <i>Ye Zhang.</i> Generalized asymptotic regularization methods for inverse and ill-posed problems | 806 |
| Указатель авторов | 809 |

Пленарные доклады

МАТЕМАТИКА В СОЗВЕЗДИИ НАУК

В.А. Садовничий

info@rector.msu.ru

В докладе представлены основные результаты многолетних исследований в области спектральной теории дифференциальных операторов и её приложений в различных прикладных областях, включая подготовку космонавтов, разработку медицинских диагностических приборов, моделирование глобальных процессов и др.

Теория операторов

Теория следов дифференциальных операторов

Рассмотрим оператор Штурма – Лиувилля на отрезке $x \in [0, \pi]$ с непрерывно дифференцируемым потенциалом $q(x)$:

$$Ly = -y'' + q(x)y.$$

Представляет интерес исследовать след собственных значений λ_n этого оператора. В 1953 году И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан опубликовали работу, в которой нашли значение суммы ряда, и получили замечательную формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2) = -\frac{1}{4} (q(0) + q(\pi))$$

в случае краевых условий Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$ и потенциала с нулевым средним

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx = 0.$$

Для краевых условий $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(\pi) - Hy(\pi) = 0$ справедливо представление:

$$\lambda_n = n^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx + O(n^{-2}).$$

Садовничий Виктор Антонович, д.ф.-м.н., академик РАН, профессор, ректор МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

В своей работе И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан показали, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{1}{4} (q(0) + q(\pi)) + hH,$$

где μ_n — собственные значения оператора L_0 с нулевым потенциалом.

В 1966 году А. Г. Костюченко поставил задачу исследовать следы операторов вида

$$Ly = (-1)^m y^{(2m)} + p(x)y$$

с краевыми условиями $y^{(i)}(0) = y^{(i)}(\pi) = 0$, $i = 0, \dots, 2m - 1$. Для этого были рассмотрены вспомогательные параболические уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -L_0 u = -Lu + p(x)u, \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -Lu$$

с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi(x)$. Если λ_n и μ_n — собственные значения операторов L и L_0 , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\text{Tr}(e^{-tL_0}) - \text{Tr}(e^{-tL}))'_t, \text{ где } \text{Tr}(e^{-tL}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}.$$

С помощью асимптотического разложения функции Грина параболического уравнения были получены асимптотические формулы для λ_n . В частности, для случая $m = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{1}{4} (p(0) + p(\pi)).$$

Позднее с применением дзета-функции были получены формулы следов для случая $m > 2$.

В 1967 году В. Б. Лидский и В. А. Садовничий предложили общий метод нахождения следов для операторов высокого порядка с нераспадающимися краевыми условиями. Возникновение метода было стимулировано трудностью применения имевшихся методов к таким операторам и их неприменимостью к задачам типа задачи Редже:

$$-y'' + q(x)y = s^2 y, \quad y(0) = y'(a) + isy(a) = 0,$$

где $q(x) \sim c_\mu (a - x)^\mu$ при $x \rightarrow a - 0$, $\mu \geq 0$, $c_\mu \neq 0$. В этом случае асимптотическое распределение собственных значений выражается следующей формулой:

$$z_n = \frac{\pi n}{a} + \frac{\ln n}{2ia} + O(1).$$

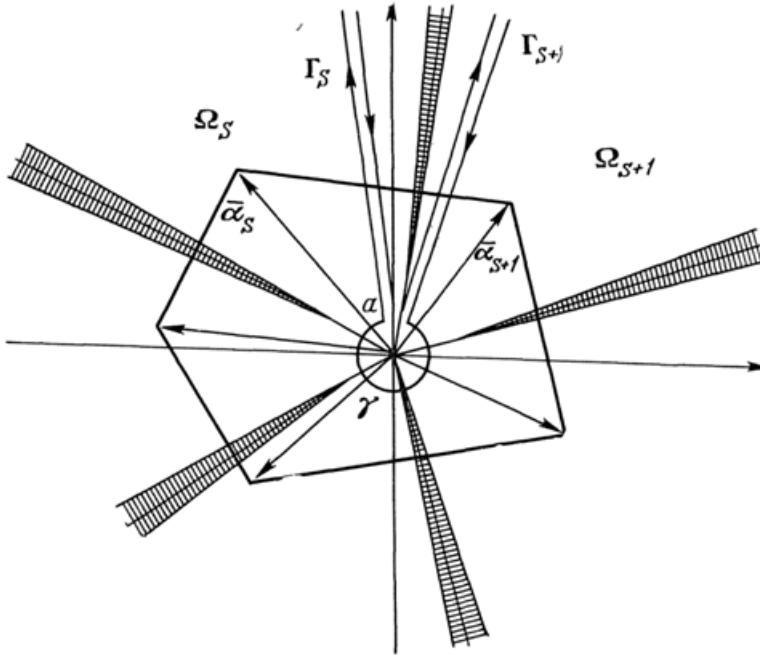
Г. Д. Биркгоф, Я. Д. Тамаркин, а позже М. В. Келдыш, рассмотрели общие задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений со сложным вхождением спектрального параметра. Для решения этих задач и получения формул следов в общем случае были введены функции класса K .

Функции класса K

Будем называть $f(z)$ функцией класса K , если имеет место представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_k(z), \quad P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l^{(k)} z^{-l}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Направления внешних нормалей к выпуклой оболочке множества точек $\{\alpha_k\}$ называются критическими; удалим из плоскости сектора малого размаха с биссектрисами, параллельными критическими направлениям, и обозначим оставшееся множество Ω . Тогда в Ω и вне круга достаточно большого радиуса нет нулей $f(z)$.



Мы нашли области на плоскости, где у этой целой функции нет нулей при больших радиусах круга. В дальнейшем были предприняты попытки вычислить регуляризованные нули этой функции. Мы ввели дзета-функцию, связанную с функциями класса K , доказали, что она продолжается на всю плоскость, вычислили значения дзета-функции в целых отрицательных точках, занялись асимптотикой корней этой целой функции (при условии, что на границе нет других точек, кроме двух).

Функция

$$Z(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

называется *дзета-функцией, ассоциированной с $f(z)$* . Здесь γ — контур, состоящий из дважды проходимого луча L и окружности R с центром в нуле, лежащий в Ω и такой, что все нули находятся вне γ .

Лемма. При $\text{Re } \sigma > 1$ можно показать, что $Z(\sigma) = \sum_l z_l^{-\sigma}$, где z_l — нули $f(z)$.

Лемма. Дзета-функция $Z(\sigma)$ можно продолжить во всю плоскость и при $m = 0, 1, 2, \dots$ верно равенство

$$Z(-m) = \omega_{m+1}, \text{ где } \frac{f'(z)}{f(z)} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_m}{z^m}, z \rightarrow \infty, z \in \gamma.$$

Исследуем корни функций класса K . Они распадаются на r серий по количеству вершин многоугольника:

$$z_{n,s} = a_s n (1 + o(1)), \quad a_s = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}.$$

Поведение $z_{n,s}$ уточняется методом последовательных приближений. Если на границе R лежат только $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}$, то верно равенство

$$z_{n,s} = a_s n \left(1 + b_s \frac{\ln n}{n} + \frac{c_s}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}} \right),$$

где $R_k^{(s)}$ — многочлены степени k . Если на границе R лежат другие α_s и делят его стороны на соизмеримые части, то верны аналогичные формулы с разложением по дробным степеням n .

Наконец, мы ввели функции $\Phi_\tau(\sigma)$ и $\Psi_\tau(\sigma)$, для которых было установлено фундаментальное соотношение для регуляризованных нулей. Рассмотрим функцию

$$\Psi_\tau(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \left(z_{n,s}^{-\sigma} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right),$$

где $Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)$ — полиномы, τ — натуральное. Можно показать, что она аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$. Представляет интерес исследовать числа $\Psi_\tau(-m)$, $m < \tau$, называемые *регуляризованными m -суммами корней $f(z)$* . Для этого введём в рассмотрение функцию

$$\Phi_\tau(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}}$$

регулярную при $\operatorname{Re} \sigma > 1$. Тогда $\Psi_\tau(\sigma) = Z(\sigma) - \Phi_\tau(\sigma)$.

Так как $Z(\sigma)$ — целая функция, то $\Phi_\tau(\sigma)$ продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} \sigma > -\tau$ вместе с $\Psi_\tau(\sigma)$. Но $\Phi_\tau(\sigma)$ выражается через ζ -функцию Римана:

$$\Phi_\tau(\sigma) = \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k \left(\sum_{s=0}^{r-1} a_s^{-\sigma} d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\nu n}{n^{k+\sigma}} = \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^k D_{k\nu}(\sigma) (-1)^\nu \zeta^{(\nu)}(k+\sigma).$$

Поэтому справедлива следующая

Теорема. *При любом целом $m < \tau$ имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \left(z_{n,s}^m - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} \right) = \omega_{m+1} - \Phi_\tau(-m).$$

Если в формуле следа положить $m = 0$, то мы получим дефект регуляризации:

$$\kappa = \omega_1 + \frac{r}{2} - \sum_{s=0}^{r-1} b_s \ln a_s + \sum_{s=0}^{r-1} c_s.$$

Таким образом, эта теорема Лидского–Садовниченко закрыла тематику формул регуляризованных следов для обыкновенных уравнений со сложным вхождением параметра.

Следы для задачи Орра – Зоммерфельда, возникающей в теории гидродинамической устойчивости

Мы применили наше уравнение к задаче Орра – Зоммерфельда, описывающей течение жидкости между двумя пластинами. Главным в данной задаче выступает вопрос устойчивости течения. Рассмотрим задачу

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right)^2 u = i\alpha R \left((p(x) - c) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2 \right) u - p''(x)u \right),$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0.$$

Целая функция $f(z)$, корнями которой являются собственные числа этой задачи, допускает асимптотическое разложение при $z \rightarrow \infty$ (здесь $i\alpha R c = -z^2$):

$$f(z) = z^{-3} \frac{\operatorname{sh} a}{2\alpha} \left(e^z \left(\sum_{\nu=0}^m \frac{\beta_\nu}{z^\nu} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right) - e^{-z} \left(\sum_{\nu=0}^m \frac{\beta_\nu}{z^\nu} (-1)^\nu + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\sum_{1 \leq 2s+1 \leq m} \frac{\gamma_{2s+1}}{z^{2s+1}} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right) \right) \right),$$

и следовательно, является функцией класса K . Для двух серий собственных чисел этой задачи верны асимптотические разложения:

$$z_{n,1} \sim 2\pi i n \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,1}}{n^{2\mu}} \right), \quad z_{n,2} \sim 2\pi i \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{r_{\mu,2}}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^{2\mu}} \right),$$

причём для коэффициентов $r_{\mu,1}$ и $r_{\mu,2}$ существуют рекуррентные соотношения. Используя теорию функций класса K , получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(c_{n,1}^k - \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,1}(-2k)}{n^{2\nu-2k}} \right) + \left(c_{n,2}^k - \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \frac{\rho_{\nu,2}(-2k)}{\left(n + \frac{1}{2} \right)^{2\nu-2k}} \right) \right) = \\ & = \frac{i^k}{2(\alpha R)^k} \omega_{2k+1} + \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} - \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(-2k) \zeta \left(2\nu - 2k, \frac{1}{2} \right) + \\ & \quad + \frac{(2\pi)^{2k} (-i)^k}{(\alpha R)^k} \sum_{\nu=0}^k \rho_{\nu,2}(-2k) 2^{2\nu-2k}. \end{aligned}$$

Соотношения для нулей функции Бесселя

В качестве ещё одного простого применения нашего подхода рассмотрим задачу для уравнения Бесселя. Исследованием нулей функции Бесселя занимались давно, есть целый справочник с формулами нулей этой функции. Мы получили формулы для регуляризованных нулей функции Бесселя. Сейчас приведём их.

Рассмотрим сингулярный оператор на отрезке $[0, \pi]$:

$$-y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y + p(x) y = \lambda y, \quad y(\pi) = 0.$$

Для операторов такого типа так же можно получить формулы следов, причём если положить в этих формулах $p(x) \equiv 0$, то получатся новые соотношения для нулей функции Бесселя. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{n,\nu} - \left(n + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu}{12} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{8\pi^2} (4\nu^2 - 1) (\nu + 1),$$

где $\lambda_{n,\nu}$ — нули функций Бесселя $I_{\nu}(s\pi)$.

Функции класса C

Для функций класса K остался один случай, когда на выпуклой оболочке индикаторной диаграммы есть разбиение на несоизмеримые части. Для распространения теории на все функции класса K , в том числе с несоизмеримым разбиением сторон многоугольника показателями экспонент, были изучены регуляризованные суммы корней функций известного и важного класса C целых функций экспоненциального типа σ (функции типа синуса):

1. Все корни $f(z)$ лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < h$;
2. Для фиксированного $\operatorname{Im} z = y$, $|y| > h$ верно $0 < m \leq |f(x + iy)| \leq M < \infty$;
3. Типы $f(z)$ в верхней и нижней полуплоскости совпадают.

Пусть λ_k — корни некоторой функции $f_0(z)$ класса C , μ_k — корни целой функции $f(z)$, имеющей представление:

$$f(z) = f_0(z) + \frac{1}{z} \sum_{k=1}^N A_k(z) \gamma_k^{(1)} + \dots + \frac{1}{z^m} \sum_{k=1}^N A_k(z) \gamma_k^{(m)} + O \left(\frac{1}{z^{m+1}} e^{\sigma|y|} \right)$$

при $z \rightarrow \infty$, где $A_k(z)$ — целые функции, $|A_k(z)| \leq M_1 e^{\sigma|y|}$.

Теорема. При любом целом m , $m < \tau$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \sum_j \left(\sum_{\mu_k \in G_j} \mu_k^m - \sum_{\lambda_k \in G_j} \lambda_k^m + \right. \\ & \left. + m \sum_{\lambda_k \in G_j} \sum_{\nu=1}^{\tau} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k_1+\dots+k_N=n} B_{k_1, \dots, k_N} \operatorname{Res}_{\lambda_k} \left(z^{m-\nu+1} \frac{A_1^{k_1}(z) \cdots A_N^{k_N}(z)}{f_0^{k_1+\dots+k_N}(z)} \right) \right) = \\ & = \omega_f^{(m+1)} - \omega_{f_0}^{(m+1)} + m \sum_{\nu=1}^{\tau} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k_1+\dots+k_N=n} B_{k_1, \dots, k_N} Z_{k_1, \dots, k_N}(\nu - m + 1). \end{aligned}$$

Важным представителем класса C явились функции класса K с несоизмеримостью отрезков на выпуклой оболочке показателей. Таким образом, были получены формулы регуляризованных следов и в этом случае.

Оператор Лапласа – Бельтрами на сфере S^2

В 1991 году мы доказали следующую формулу регуляризованного следа для оператора Лапласа – Бельтрами на сфере S^2 с возмущением оператора умножения на гладкую нечётную функцию q :

$$\mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2n} \mu_{n,i} - n(n+1)(2n+1) \right) = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} q^2 dS,$$

здесь $n(n+1)$ — собственные числа невозмущенного оператора, $2n+1$ — их кратность.

Следы операторов с ядерной резольвентой

Рассмотрим положительный оператор A_0 и пусть оператор B таков, что $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$, существует число $\delta \in [0, 1)$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, и некоторое число $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$, такое, что $A_0^{-(1-\delta-\omega)}$ — ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и последовательность контуров $\Gamma_m \subset \mathbb{C}$ такая, что при $\omega \geq \frac{\delta}{l}$ верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0.$$

В частности, при $\omega = \delta = 0$, то есть для ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0.$$

Следы операторов с неядерной резольвентой

Теорема. Пусть у оператора A_0 существует подпоследовательность его собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=0}^{\infty}$ такая, что $\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Пусть оператор $B \in \mathfrak{S}_p$, где p — натуральное и $p \geq 2$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0.$$

Следующий результат отражает специфику случая неядерной резольвенты: или достаточно первой поправки, или не спасает никакое их количество.

Теорема. Пусть существует число $\delta \geq 0$ такое, что оператор BA_0^δ продолжается до ограниченного и что $A_0^{-(1+\delta)}$ — ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0.$$

Степень оператора Лапласа на квадрате

Рассмотрим в качестве оператора A_0 оператор $(-\Delta)^\alpha$, где через $-\Delta$ обозначен оператор с дифференциальным выражением

$$\frac{-\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

действующий в $L_2([0, \pi] \times [0, \pi])$ с условиями Дирихле на границе квадрата, а в качестве оператора B оператор умножения на ограниченную измеримую (комплекснозначную) функцию $q(x, y)$, обычно называемую потенциалом. Формула ранее была известна для степени оператора $\alpha > 93/80$. Так как в этой задаче $\lambda_n \sim n^\alpha$, то формула следа верна для степеней $\alpha > 1$, и для потенциала, периодическое продолжение которого принадлежит классу $C^\beta(\mathbb{R}^2)$ с показателем $\beta > 1$, имеем (исходная формула верна для любого ограниченного измеримого потенциала, но гладкость обеспечивает абсолютную суммируемость коэффициентов Фурье потенциала и существование его значений на границе):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^\infty \sum_{r_k < n^2 + m^2 < r_{k+1}} (\mu_{nm} - (n^2 + m^2)^\alpha - \\ & - \frac{1}{\pi^2} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy + \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dy \right) \cos 2nx dx + \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dx \right) \cos 2my dy \right) = \\ & = \frac{1}{16} (q(\pi, \pi) + q(0, \pi) + q(\pi, 0) + q(0, 0)) - \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^\pi (q(0, y) + q(\pi, y)) dy + \int_0^\pi (q(x, 0) + q(x, \pi)) dx \right) + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Для $\alpha = 1$ вопрос остаётся пока открытым.

О приближенном вычислении собственных чисел

В конце 50-х годов И. М. Гельфанд предложил метод вычисления собственных чисел операторов с помощью системы регуляризованных следов, а Л. А. Дикий совершил попытку его реализации. Суть метода в следующем: выписываем, например, для оператора Штурма – Лиувилля несколько следов (потенциал с нулевым средним)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^\infty (\lambda_n - n^2) = \frac{-q(0) + q(\pi)}{4}, \\ & \sum_{n=1}^\infty \left(\lambda_n^2 - n^4 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q^2(x) dx \right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi q^2(x) dx - \frac{q^2(0) + q^2(\pi)}{4} + \frac{q''(0) + q''(\pi)}{8}, \dots, \end{aligned}$$

заменяем ряды на частичные суммы и решаем полученную систему, считая решения приближением к собственным числам.

Л. А. Дикий для уравнения Матъе

$$-y'' + \cos 2xy = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

получил следующие значения первых трёх собственных чисел:

$$\lambda_1 \approx 0,47061, \quad \lambda_2 \approx 3,97929, \quad \lambda_3 \approx 9,01364,$$

которые любопытно сравнить с табличными

$$\lambda_1 \approx 0,47065, \quad \lambda_2 \approx 3,97919, \quad \lambda_3 \approx 9,01371.$$

Однако обоснования метода авторами сделано не было. Ниже обсудим возможные пути решения этой проблемы.

Вычисление первых собственных чисел в задаче гидродинамической устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе

Мы предложили метод приближенного вычисления собственных значений с помощью формул следов и применили его к задаче об устойчивости течения Пуазейля. Данная задача имеет вид

$$T^2 \varphi + U \varphi = R \sigma r T \varphi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \varphi(1) = \left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=1} = 0, \text{ где}$$

$$T \varphi = \left(r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} - \lambda^2 r \right) \varphi, \quad U \varphi = -i \lambda R r (1 - r^2) T \varphi,$$

σ — спектральный параметр, λ — волновое число, R — число Рейнольдса.

Применением теории регуляризованных следов к задаче, получаемой из исходной умножением на T^{-1} , удалось получить систему

$$\sum_{i=1}^4 \sigma_i^k \approx \sum_{i=1}^4 \mu_i^k + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

с точными оценками приближения; здесь μ_i — собственные числа невозмущенной задачи

$$T \varphi = R \mu r \varphi, \quad T^{-1} \varphi(1) = \left. \frac{dT^{-1} \varphi}{dr} \right|_{r=1} = 0,$$

$$\alpha_i^k = \frac{(-1)^{l+1} k}{2\pi i l} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_4} \mu^{k-1} (P R(\mu))^l d\mu - \text{поправки теории возмущений},$$

Γ_4 — контур, содержащий первые 4 собственных числа невозмущенной задачи, P — возмущение, $R(\mu)$ — резольвента невозмущенного оператора.

Приведём некоторые численные результаты решения этой системы:

при $R = 1$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -2,64 \cdot 10^1, & \sigma_1 &= \mu_1 - 2,79 \cdot 10^{-2} i, \\ \mu_2 &= -7,09 \cdot 10^1, & \sigma_2 &= \mu_2 - 2,63 \cdot 10^{-2} i, \\ \mu_3 &= -1,35 \cdot 10^2, & \sigma_3 &= \mu_3 - 2,58 \cdot 10^{-2} i, \\ \mu_4 &= -2,19 \cdot 10^2, & \sigma_4 &= \mu_4 - 2,55 \cdot 10^{-2} i, \end{aligned}$$

при $R = 5$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -5,28 \cdot 10^0, & \sigma_1 &= \mu_1 - 1,40 \cdot 10^{-1} i, \\ \mu_2 &= -1,42 \cdot 10^1, & \sigma_2 &= \mu_2 - 1,31 \cdot 10^{-1} i, \\ \mu_3 &= -2,70 \cdot 10^1, & \sigma_3 &= \mu_3 - 1,29 \cdot 10^{-1} i, \\ \mu_4 &= -4,38 \cdot 10^1, & \sigma_4 &= \mu_4 - 1,28 \cdot 10^{-1} i. \end{aligned}$$

Мнимые части собственных чисел отрицательны, следовательно, течение Пуазейля при малых числах Рейнольдса устойчиво.

Обратные задачи

Обратные задачи имеют большое значение в физике, поэтому ими стали заниматься математики по всему миру.

- Обратная задача Штурма–Лиувилля была впервые рассмотрена в фундаментальных работах В. А. Амбарцумяна и Г. Борга. С этих работ началось развитие теории обратных спектральных задач.
- Значительный вклад в становление этой теории внесли А. Н. Тихонов, И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, Л. Д. Фадеев и другие.
- В настоящее время обратная задача Штурма–Лиувилля с распадающимися краевыми условиями достаточно хорошо изучены. Получены необходимые и достаточные условия её разрешимости.

Несамосопряженная задача с нераспадающимися краевыми условиями

Напомним, что задачей Штурма–Лиувилля с нераспадающимися граничными условиями называют следующую задачу на собственные значения:

$$Ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y, \quad (1)$$

$$a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(\pi) + a_{i4}y'(\pi) = 0 \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где $q(x)$ — непрерывная на отрезке $[0, \pi]$ функция, a_{ij} — комплексные постоянные, λ — спектральный параметр. Обратная задача Штурма–Лиувилля для L — состоит в идентификации функции $q(x)$ из уравнения (1) и краевых условий (2). Большинство исследований было посвящено обратной задаче с краевыми условиями двух типов:

$$a_{11}y(0) + y'(0) + a_{13}y(\pi) = 0, \quad a_{21}y(0) + a_{23}y(\pi) + y'(\pi) = 0, \quad (3)$$

$$y(0) + \omega y(\pi) = 0, \quad \bar{\omega}y'(0) + \alpha y(\pi) + y'(\pi) = 0. \quad (4)$$

Заметим, что общие самосопряжённые нераспадающиеся граничные условия (2) приводят к одному из следующих двух типов:

- Краевые условия (3), где a_{11}, a_{23} — произвольные вещественные числа, $a_{13} \neq 0$ — произвольное комплексное число, $a_{21} = -\bar{a}_{13}$;
- Краевые условия (4), где $\omega \neq 0$ — произвольное комплексное число, α — произвольное вещественное число.

Нами впервые была доказана единственность восстановления задачи L с несамосопряжёнными краевыми условиями (3).

Прямоугольная мембрана

Задача. Идентифицировать закрепление мембраны, которая по-разному закреплена на своих контурах, по собственным частотам. Напомним, что прямая задача о колебаниях однородной прямоугольной мембраны, которая упруго закреплена по каждой из своих сторон $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ_4 , сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

при граничных условиях

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h_j u \right) \Big|_{\Gamma_j} = 0, \quad 0 \leq h_j \leq \infty, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (6)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + h_j u \right) \Big|_{t=0} = F(x, y). \quad (7)$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная функции u по внешней нормали к границе области. При $h_j = \infty$ считаем, что соответствующее краевое условие имеет вид $u|_{\Gamma_j} = 0$.

Собственные частоты колебаний мембраны находятся по формуле $\omega_{mn} = c\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2}$, где α_m и β_n — собственные значения задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} X''(x) + \alpha^2 X(x) &= 0, \quad X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(a) + h_3 X(a) = 0, \\ Y''(y) + \beta^2 Y(y) &= 0, \quad Y'(0) - h_2 Y(0) = 0, \quad Y'(b) + h_4 Y(b) = 0, \end{aligned}$$

соответственно. Формулировка обратной задачи в терминах задачи (5)–(7): идентифицировать краевые условия (6) и (7) по значениям ω_{mn} .

Основной результат. Упругое закрепление прямоугольной мембраны с точностью до перестановок закреплений на противоположных сторонах может быть однозначно диагностировано по четырём собственным частотам ω_{11} , ω_{12} , ω_{21} , ω_{31} её колебаний; а количество жёстко закреплённых и свободных сторон прямоугольной мембраны распознаётся по собственному значению ω_{11} .

Полученные результаты для обратных спектральных задач имеют важные приложения в акустической диагностике механических систем и теории колебаний. Недавно были доказаны теоремы единственности для общего случая задачи (5), (6). Этот красивый результат очень важен для приложения в акустике, механике, теории колебаний. Мы продолжаем активно заниматься этой задачей.

Обратные спектральные задачи с неполными данными

Пусть задан линейный самосопряжённый оператор с дискретным спектром L_0 , требуется построить линейный оператор D из заданного класса Ω , доставляющий минимум некоторому функционалу F (в частном случае функционалу нормы) такой, чтобы наперёд заданные числа $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$ являлись собственными числами оператора $L_0 + D$.

Рассмотрим в пространстве $L_n^2(0, 1)$ оператор

$$L[Q](\vec{y}) = -\frac{d^2}{dx^2} \vec{y}(x) + Q(x)\vec{y}(x)$$

где $Q \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ — эрмитова матрица.

Теорема. Пусть заданы $\lambda^* \in R$, $k \in N$ и $Q_0 \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$. Тогда найдётся потенциал $\widehat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ такой, что k -ое собственное значение $\lambda_k(\widehat{Q})$ оператора $L[\widehat{Q}]$ совпадает с λ^* и

$$\|Q_0 - \widehat{Q}\|_{L^2} = \inf \left\{ \|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2} : \lambda^* = \lambda_k(Q), Q \in \mathcal{M}_n^2(0, 1) \right\}.$$

Космос

Имитационные стенды для космических полётов

На базе центрифуги ЦФ-18 (ЦПК имени Ю. А. Гагарина) нами был создан тренажёр по выполнению операций при выведении на орбиту, визуальному управлению движением на орбите и спуску на Землю по программам ОС «Мир» и Международной космической станции. Проводится имитационное моделирование всех трёх этапов космического полёта: старт, невесомость, посадка.

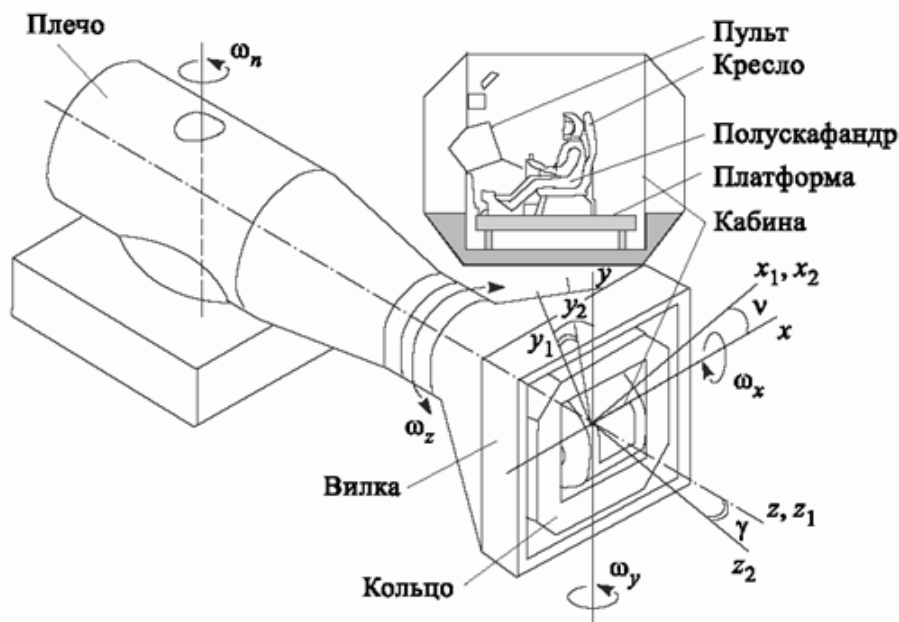


Рис. 1: Радиус вращения центрифуги = 18 м. Максимальная перегрузка = 30g.

Динамическая имитация подъёма на орбиту

Для решения задачи динамической имитации перегрузки нами было предложено осуществить такое движение консоли и кардановых колец центрифуги, при котором **показатель качества имитации J не превышал бы пороговых значений** чувствительности вестибулярной системы космонавта.

Показатель качества имитации

$$J = \max_{0 \leq t \leq t_k} |\vec{n}(t) - \vec{n}_0(t)|$$

представляет собой разность между векторами перегрузки, действующих на космонавта в процессе полёта и на центрифуге. *Дифференциальное уравнение, описывающее угловую скорость вращения консоли центрифуги:*

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4 = \left(\frac{g}{l}\right)^2 (n^2 - 1).$$

Для построения решения этого уравнения был предложен разностный алгоритм, позволяющий в реальном времени с достаточной точностью найти приближенное решение уравнения.

Имитация невесомости для системы кровообращения

Была модифицирована модель Гайтона. Был создан **полускафандр**, позволяющий сохранять заданное внешнее давление для нижней половины корпуса космонавта, и осуществлена герметизация кабины, позволяющая менять по заданному закону **давление в кабине**. Благодаря этому можно было добиться правильного оттока крови от ног, при котором человек начинал ощущать состояние, аналогичное тому, которое космонавты испытывают в космосе в состоянии невесомости.

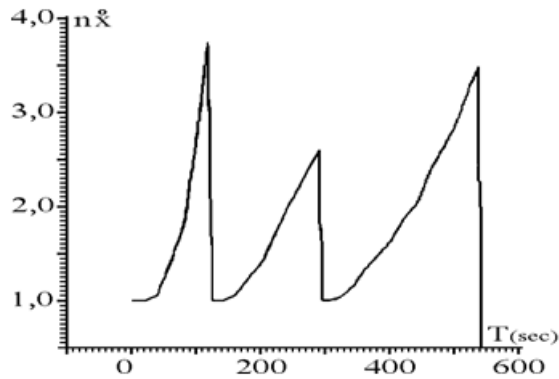
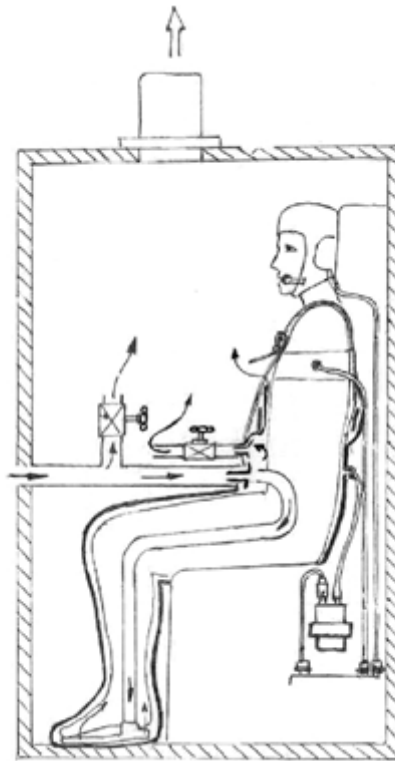


Рис. 2: Характерный вид требуемой перегрузки, где видны 3 резких перепада, соответствующие работе 3 ступеней ракеты-носителя.

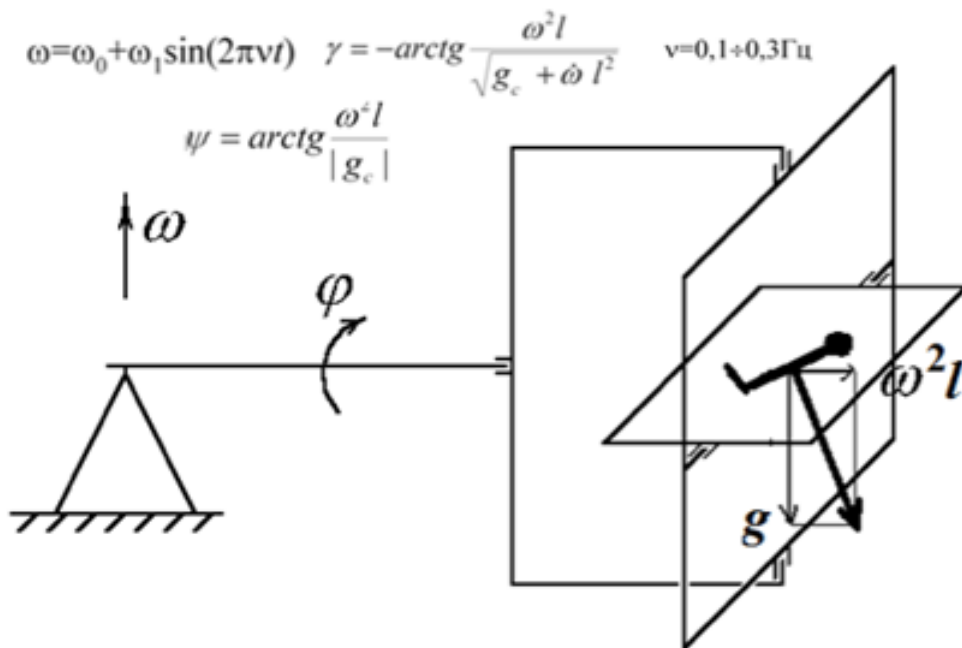


Имитация невесомости для вестибулярной системы

Для имитации невесомости разработан закон вращения консоли с периодически меняющимися скоростью и поворотами карданового подвеса центрифуги таким образом, чтобы суммарный вектор перегрузки в геометрическом центре карданового подвеса оставался в течение всего времени имитации ортогональным корпусу космонавта.

Динамическая имитация спуска с орбиты

Задача акселерационной имитации управляемого спуска является наиболее сложной для имитации, поскольку



- неизвестна заранее динамика спускаемого аппарата,
- присутствуют участки быстрого изменения величины и направления вектора перегрузки.

Было показано, что качество имитации улучшается, если **в алгоритме имитации использовать все степени свободы** карданового подвеса центрифуги.

Мы предложили на каждом шаге имитации направления вектора перегрузки **в реальном времени решать экстремальную задачу о минимуме суммарного поворота карданных колец** центрифуги при фазовых ограничениях.

$$J(\theta_k) = (\theta_k - \theta_{k-1})^2 + (\psi_k - \psi_{k-1})^2 + (\gamma_k - \gamma_{k-1})^2 \rightarrow \min_{\theta_k \in [-\pi, \pi]},$$

$$n_x = (C + r_2 S) \cos \gamma + (S - r_2 C) \sin \psi \sin \gamma - r_1 \cos \psi \sin \gamma,$$

$$n_y = (-C - r_2 S) \sin \gamma + (S - r_2 C) \sin \psi \cos \gamma - r_1 \cos \psi \cos \gamma,$$

$$n_z = (-S + r_2 C) \cos \psi - r_1 \sin \psi,$$

$$\psi = -\arcsin \frac{n_z}{\sqrt{s_1^2 + r_1^2}} + \arctg \frac{s_1}{r_1},$$

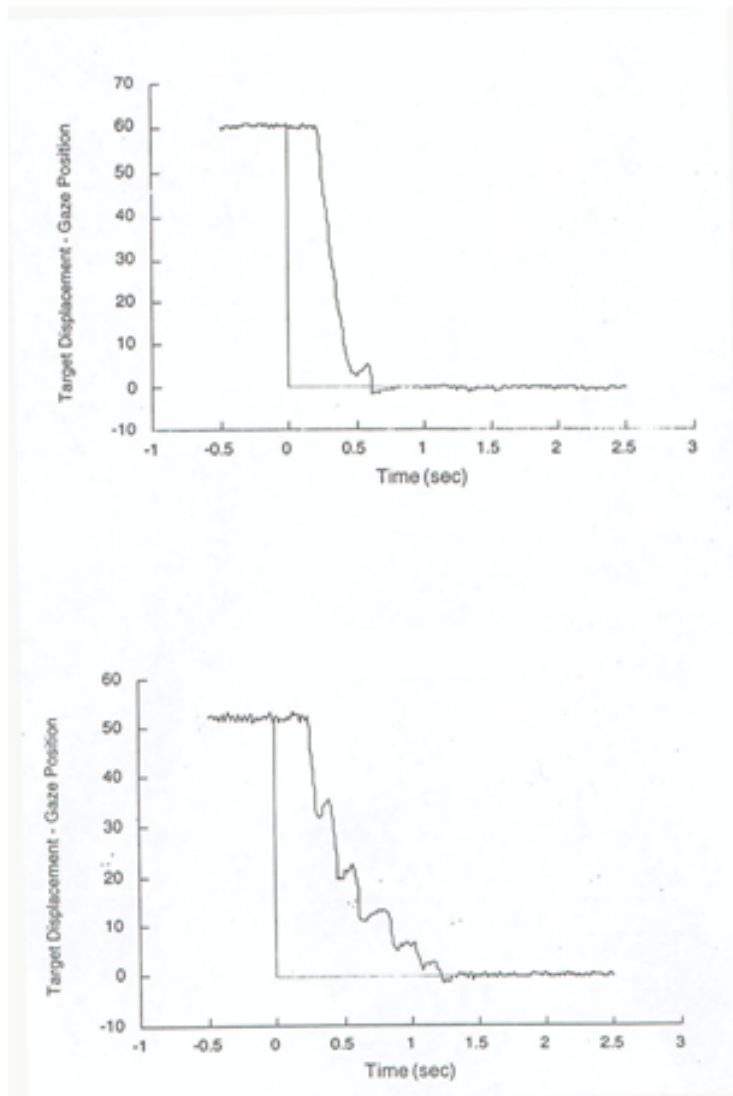
$$\gamma = \arctg \frac{n_x w_3 - n_y w_1}{n_x w_1 + n_y w_3}.$$

Такой тренажёр был создан, его включили в программу подготовки космонавтов. Наша работа была удостоена государственной премии СССР. Таким образом, центрифуга — это работа, связанная с математикой, и она была важна для подготовки космонавтов.

Запаздывание взгляда

Эксперименты, проведённые на борту орбитальной станции «МИР» в 1990-97 гг. привели к экспериментальному подтверждению запаздывания взгляда космонавта при визуальном управлении движения почти на секунду. То есть человек может сначала сделать, а потом увидеть.

Разрабатываемые нашей группой **модели биосенсоров** позволяют решать задачи создания различного рода **корректоров персональной ориентации** человека в экстремальных усло-



виях. Это была серьёзная работа, она связана с вестибулярным аппаратом. Эта работа так же получила государственную премию, уже Российской Федерации

Гальваническая стимуляция и имитация

Одно из последних исследований, гальваническая стимуляция и имитация. Нами доказано, что с помощью гальванической стимуляции можно реализовать на выходе вестибулярного аппарата сигнал, дающий возможность избежать вестибуло-сенсорного конфликта. Для коррекции запаздывания мы создали **новые варианты технологии виртуальной реальности** — гальваническую имитацию земной силы тяжести в условиях невесомости. На будущий полет МКС готовится шлем нашей группы, который будет испытан космонавтами. Он будет имитировать виртуальную реальность.

Медицина

Тактильный механорецептор

Аппарат представляет собой цилиндр, на рабочей части которого расположен воспринимающий тактильный комплекс, содержащий датчики давления. Путём прокола, а не разреза, менее травматичной операции, датчик проходит внутрь организма и хирург ощупывает этим стержнем орган.

Показатели датчиков, после оцифровки и усиления, беспроводным образом передаются на компьютер, где с помощью специально созданного программного обеспечения эти сигналы регистрируются, анализируются и **преобразуются в цифровую и аналоговую цветовую шкалу, которая отражает свойства объекта** (неоднородность, границы, плотность), ощущаемые тактильным механорецептором.

Воспроизведение тактильной информации было реализовано на механическом дисплее на основе соленоидов, передающего информацию на палец врача с точностью **свыше 90%**. Этот прибор был внедрён в медицинскую практику в ряде клиник страны.

Методологически задачи распознавания тактильных образов близки к задачам обработки изображений и видео. Методов распознавания тактильных образов не существовало. Была создана система обработки тактильных образов, фиксируемых механорецептором. Одной из проблем здесь является неортогональность сетки, используемой при снятии тактильной информации. Именно этот факт послужил толчком для развития **теории орторекурсивных разложений**, являющихся непосредственным обобщением ортогональных разложений.

Робот-реаниматолог «Ангел»

Робот «Ангел» — это аппаратно-программный комплекс, который

- осуществляет **сбор информации с неинвазивных датчиков** (пульс, АД, функцию внешнего дыхания, ЭКГ, ЭЭГ и др.), данных анамнеза, жалоб пациента и автоматически получаемых лабораторных показателей;
- автоматически устанавливает **диагноз 10 групп неотложных состояний** (шоки, комы, инфаркт, инсульт, ТЭЛА, нарушения ритма сердца, сепсис);
- проводит **лечение** встроенными инфузоматами и помпой.

Телеметрические данные передаются отдалённому консультанту из движущегося транспорта. Возможно дистанционное управление инфузоматами и автономная работа комплекса. Этот комплекс успешно используется в ряде регионов.

Эвакуационный модуль — развитие проекта «Ангел»

Ведётся создание эвакуационного модуля на основе дополнения робота «Ангел» аппаратом ИВЛ, системой жизнеобеспечения, системой взаимной изоляции с внешней средой. Модуль должен быть переносным, транспортируемым, изолируемым и роботизированным, оказывать **полный объем квалифицированной медицинской помощи** минимальным числом персонала в ручном, автономном и дистанционном режимах, быть готовым к использованию без специального развёртывания.

Моделирование глобальных процессов

Совместно с А. А. Акаевым мы взяли за решение проблем, обсуждаемых Римским клубом, и стали делать математические модели по экономике, народонаселению, демографии, COVID и др.

Модель мировой динамики

Мы разработали новую методологию построения математических моделей глобальных процессов, которая использует нелинейные свойства элементов сложных систем и их взаимосвязей.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} \approx r \cdot N \cdot G(N, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \gamma, \kappa), \\ \frac{dX}{dt} = \frac{F(R^-, I_1, S) - I_1 - I_2}{N} - Q, \\ \frac{dS}{dt} \approx c \cdot N \cdot (S - S_0), \\ \frac{dW}{dt} = W_{CO_2}^+(E(N(t)), S) - W_{CO_2}^-(S), \\ \frac{dR}{dt} = k_R^+ \cdot q \cdot R \cdot I_1 - \frac{F}{AR(S)}, \end{cases}$$

где

- N — численность населения Земли, млрд чел.,
- X — объем потребительской продукции на душу населения,
- S — уровень развития технологий,
- W — объёмы отходов, загрязняющих окружающую среду,
- W_{CO_2} — объёмы накопления CO_2 в атмосфере,
- R — природные ресурсы, используемые в процессе производства,
- τ_1 — запаздывание репродуктивной способности,
- τ_2 — запаздывание внедрения базисных технологий,
- τ_3 — запаздывание реакции биосферы на антропогенную нагрузку,
- r, γ, κ — постоянные параметры.

Моделирование экономического развития

Предложенные нами модели экономического развития строятся с учётом совместного действия **равновесного долговременного роста и циклических колебаний** вокруг него, что позволяет выявить точки бифуркации, в которых экономическая система теряет устойчивость. Поэтому можно прогнозировать время наступления кризиса, тогда как традиционные модели описывали только трендовые траектории и не могли предсказывать кризисы и рецессии.

Наша модель **предсказала вторую волну сильнейшего экономического кризиса 2008–2009 годов с точностью до дня — 3 августа 2011 года.**

Моделирование демографической динамики

Отдельно была смоделирована демографическая динамика для Китая и Индии, которые наиболее близко подошли к пределам ёмкости окружающей среды. Благодаря введению жёсткого контроля рождаемости в Китае, демографическая траектория осуществит плавный аперiodический переход к стационарному уровню в **1,2 млрд.** человек. А вот Индия может столкнуться с масштабным эколого-демографическим кризисом. Мы предупреждаем как учёные об этом сценарии.

Моделирование пандемии COVID-19

Существенным недостатком большинства моделей — отсутствие взаимосвязи протекания заболевания с изменением экономических факторов. В нашей модели мы рассмотрели **влияние пандемии на экономику** — ВВП на душу населения и уровень преодоления пандемии государством. В результате мы получили модель, которая не только позволяет эффективно и адекватно прогнозировать течение заболевания, но и даёт возможность практического управления динамикой пандемии и ВВП в целях стабилизации социально-экономического развития.

Моделирование энергопотребления

Мы разработали эффективные модели энерго-экологического изменения климата, позволяющие последовательно **прогнозировать долгосрочную динамику глобального энергопотребления**, соответствующих объёмов выброса парниковых газов в атмосферу и их накопления там, а также вызванных этим изменений температуры приземной атмосферы.

Модели позволяют прогнозировать различные сценарии энергоперехода к преимущественно безуглеродным источникам энергии и селектировать те сценарии, которые позволяют достичь целей Парижского соглашения, т.е. стабилизации глобального потепления на уровне 1,5–2°С.

Результаты этих исследований мы объединили в доклад «Преодолевая пределы роста». Он был направлен Римскому клубу и по рекомендации опубликован в издательстве Springer на английском языке.

Метеорология

Территориально-распределенная система космического мониторинга окружающей среды

Система представляет собой замкнутый непрерывный технологический цикл планирования, приёма, обработки, архивирования и обеспечения потребителей спутниковой информацией для решения задач экологии и рационального природопользования, гидрометеорологии и геофизики, контроля чрезвычайных ситуаций, изучения глобальных изменений Земли и ее климата.

- Объем данных — более 280 Гбайт/сутки.
- Более 40 комплексов приёма спутниковых данных.
- Более 460 потребителей федерального и регионального уровня.
- Охватывает более 1/5 суши поверхности Земли.

Распоряжением Правительства № 146-р от 6 февраля 2012 года за разработку системы присуждена премия Правительства Российской Федерации 2011 года в области науки и техники.

Задачник по математическому анализу

Задачник содержит широкий круг упражнений по основным темам, а также значительную подборку теоретических задач. Изложение каждой темы предваряется полной системой определений и формулировок основных теорем, а также примерами решения ключевых задач: от типовых упражнений до заданий повышенного уровня сложности. Все упражнения снабжены ответами, к наиболее трудным упражнениям и теоретическим задачам приводятся указания.

К 270-летию Московского университета мы подготовили **новую версию задачника**, которая подарена каждому участнику конференции. Это исправленная версия пособия 2017-18 гг., полностью совместимой с прошлым изданием.

О МЕХАНИЗМЕ ДИФФУЗИИ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ**В.В. Козлов***kozlov@pran.ru***МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ДОЛГОСРОЧНОГО
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ****В.А. Садовничий, А.А. Акаев***info@rector.msu.ru, askarakaev@mail.ru*

В докладе излагаются математические модели, описывающие глобальные процессы, протекающие в условиях перехода от взрывного роста к стабилизации. Основное внимание уделено «параметрам порядка» — демографической динамике и технологическому прогрессу. На их основе разработаны модели, которые используются для долгосрочного прогнозирования социально-экономического и энергоэкологического развития, а также сценария энергоперехода стабилизирующего потепление климата на уровне требований Парижского климатического соглашения 2015 года.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ**А.А. Шкалик***ashkaliko@yandex.ru*

В докладе будут представлены отдельные результаты, полученные научным коллективом под руководством автора по следующим темам.

1. О решении прямой и обратной задач Штурма–Лиувилля в полной шкале пространств Соболева, о равномерной устойчивости решения и восстановлении потенциала по конечным спектральным данным.
2. О равносходимости спектральных разложений для системы Дирака.
3. О развитии аналитического направления в спектральной теории операторов, ведущего начало от работ М.В. Келдыша.
4. О точных константах в неравенствах типа Колмогорова–Маркова–Фридрихса для функций и их производных.

Козлов Валерий Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, зав. кафедрой, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Садовничий Виктор Антонович, д.ф.-м.н., академик РАН, профессор, ректор МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Акаев Аскар Акаевич, д.т.н., иностранный член РАН, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет глобальных процессов (Москва, Россия)

Шкалик Андрей Андреевич, д.ф.-м.н., член-корр. РАН, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

ТРАЕКТОРИИ СИСТЕМ, РАСПОЗНАВАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, БИЛЛИАРДЫ

А.Т. Фоменко, Г.В. Белозеров

atfomenko@mail.ru, gleb0511beloz@yandex.ru

УДК 517.938.5

Изучаются траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на поверхностях постоянной энергии. Для интегрируемых билиардов и их обобщений исследуется монотонность функций вращения на однопараметрических семействах 2-торов Лиувилля.

Ключевые слова: интегрируемая система, траекторный инвариант, функция вращения, интегрируемый билиард.

В настоящее время активно изучаются интегрируемые гамильтоновы системы (далее ИГС) с двумя степенями свободы. Такие системы часто возникают в различных задачах физики и механики.

Рассмотрим ИГС $v = \text{sgrad } H$ с дополнительным первым интегралом F на симплектическом многообразии M^4 . Пара интегралов H и F задает разбиение M^4 на связные компонентны поверхностей их совместного уровня, которое называется *слоением Лиувилля*. Согласно теореме Лиувилля, все регулярные слои этого слоения являются лагранжевыми подмногообразиями, диффеоморфными $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^k$ ($k = 0, 1, 2$). Более того, если слой компактен, то он диффеоморфен двумерному тору (в этом случае слой называют *тором Лиувилля*), а в его малой окрестности U слоение Лиувилля тривиально. При этом, в U можно ввести координаты, называемые *переменными действие-угол*, в которых траектории системы v представляют собой прямолинейные обмотки торов Лиувилля.

Зафиксируем неособый уровень энергии h и рассмотрим ограничение системы v на изоэнергетическую поверхность $Q_h^3 = \{x \in M^4 | H(x) = h\}$. В случае, когда Q_h^3 компактно, а ограничение F на Q_h^3 является функцией Ботта, слоение Лиувилля на этой изоэнергетической поверхности однозначно кодируется *инвариантом Фоменко-Цишанга*. Напомним, что инвариантом Фоменко-Цишанга называется граф Роба, вершины которого оснащены символами атомов, описывающих слоение Лиувилля в окрестности особого слоя, а ребра — числовыми метками, отвечающими склейке торов Лиувилля на границах соседних атомов (более подробно см. в [1]). Отметим, что инвариант Фоменко-Цишанга классифицирует ИГС на неособых изоэнергетических 3-поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Помимо лиувиллевой эквивалентности на множестве ИГС есть еще одно не менее важное отношение *траекторной эквивалентности*. Напомним, что две ИГС v_1 и v_2 , определенные на симплектических многообразиях M_1 и M_2 соответственно, называются непрерывно (гладко) траекторно эквивалентными, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) многообразий M_1 и M_2 , переводящий траектории системы v_1 в траектории системы v_2 . Согласно теореме Лиувилля в случае общего положения траектории ИГС представляют собой прямолинейные обмотки торов Лиувилля.

Как и в случае лиувиллевой эквивалентности существует инвариант, классифицирующий ограничения ИГС на неособые изоэнергетические 3-поверхности относительно траекторной эквивалентности. Этот инвариант — *меченая t -молекула*, которая получается из инварианта Фоменко-Цишанга дополнительным оснащением числовыми характеристиками (см., например, [2]). На ребрах инварианта Фоменко-Цишанга дополнительно указывается вектор вращения, который вычисляется по экстремальным значениям *функции вращения* и однозначно кодирует устройство траекторий системы на соответствующем однопараметрическом семействе 2-торов Лиувилля.

Исследование выполнено в рамках научно-образовательной Школы МГУ “Математические методы анализа сложных систем”, созданной и возглавляемой академиком Виктором Антоновичем Садовничим.

Фоменко Анатолий Тимофеевич, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, зав. кафедрой, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Белозеров Глеб Владимирович, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Использование инвариантов помогает находить эквивалентные системы, которые на первый взгляд никак друг с другом не связаны. С помощью этого метода А. Т. Фоменко и А. В. Болсинов доказали следующий нетривиальный результат. При подходящем выборе полуосей эллипсоида и моментов инерции твердого тела геодезический поток эллипсоида v_J непрерывно траекторно эквивалентен системе Эйлера v_E (с нулевой постоянной площадью) в динамике тяжелого твердого тела (см. [3]).

Пожалуй, наиболее геометрически наглядными ИГС с двумя степенями свободы являются интегрируемые бильярды, ограниченные софокусными квадриками, и их обобщения — бильiardные книжки, введенные В. В. Ведюшкиной (см. [4]). Такие системы не являются гладкими, однако к их исследованию применим подход с использованием инвариантов Фоменко-Цишанга. Как оказалось (см, например, [5]), бильiardные книжки реализуют особенности всех ИГС с двумя степенями свободы в ограничении на Q_h^3 . В настоящее время активно изучается вопрос, о реализации бильiardными книжками слоений Лиувилля произвольных ИГС.

Возникает весьма разумный вопрос. Как устроены траекторные инварианты бильiardных книжек? В работе [6] В. В. Ведюшкина вычислила меченую t -молекулу плоского бильiardа, ограниченного эллипсом. Оказалось, что функции вращения такой системы являются монотонными. В связи с этим А. Т. Фоменко предположил, что функции вращения любого бильiardа монотонны (см. [7]).

Для того чтобы определить функцию вращения на однопараметрических семействах 2-торов Лиувилля произвольной бильiardной книжки необходимо ввести переменные действие-угол. Для почти всех бильiardных книжек мы смогли это сделать. Более того, нами была получена общая формула функции вращения таких систем.

Теорема 1. *Функции вращения ρ бильiard-книжки на однопараметрических семействах 2-торов Лиувилля вычисляются по формуле*

$$\rho(\Lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} \int_{a_{1,j}}^{b_{1,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda-t)(a-t)(b-t)}}}{\sum_{j=1}^{N_2} \int_{a_{2,j}}^{b_{2,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda-t)(a-t)(b-t)}}},$$

где a и b — параметры семейства софокусных квадрик, а величины $N_i, a_{i,j}, b_{i,j}$ зависят от комбинаторного устройства книжки.

Используя эту формулу, нам удалось показать, что функции вращения бильiardов устроены весьма нетривиально и зачастую не монотонны. Таким образом, гипотеза о монотонности функций вращения бильiardов, вообще говоря, неверна.

Тем не менее, для некоторых важных классов бильiardов эта гипотеза подтвердилась (в некотором смысле). Таковыми системами оказались *бильiardы-гармошки* — замкнутые топологические бильiardы, склеенные из круговых колец и дисков. Эти бильiardы реализуют интегрируемые геодезические потоки на двумерных ориентируемых поверхностях с линейным дополнительным первым интегралом. Как оказалось, функции вращения таких систем не обязательно являются монотонными, однако, меняя радиусы склейки листов гармошки и не меняя при этом топологию слоения Лиувилля, можно добиться одновременной монотонности всех функций вращения.

Литература

1. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1990, **54**:3, 546-575.
2. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация // т. 1, 2, Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999, 1: 444 с.; 2: 447 с.
3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // Функци. анализ и его прил., 1995, **29**:3, 1-15.
4. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильiardные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб., 2018, **209**:12, 17-56.

5. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т., Харчева И.С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими билиардами // Докл. РАН, 2018, **479**:6, 607-610.

6. Ведюшкина В.В. Траекторные инварианты плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадратов и содержащих фокусы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2021, 4, 48-51.

7. Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические билиарды // Изв. РАН. Сер. матем., 2019 **83**:6, 63-103.

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ СБЛИЖЕНИЯ В ОТКРЫТОМ КОСМОСЕ

В.В. Александров, С.С. Лемак, М.Х. Магомедов, К.В. Тихонова, Н.Э. Шуленина
vladimiralexandrov366@hotmail.com

Цикл четырёх работ, представленных в этом докладе, является результатом многолетнего сотрудничества коллектива авторов с нашим Учителем — академиком РАН Виктором Антоновичем Садовничим, начиная с 1977 года. Приезд Берегового С.Т. — начальника Центра Подготовки Космонавтов — в МГУ с просьбой об оказании помощи ЦПК в научной подготовке космонавтов, положил начало нашей работе совместно с сотрудниками Центра по разработке математического и прикладного обеспечения подготовки космонавтов для реализации визуального управления движением в открытом космосе.

1. Динамическая имитация ПОДЪЁМА на орбиту и «частичной» невесомости в начале полёта — на Центрифуге с 4-мя степенями свободы (ЦФ-18) в ЦПК (1988).
2. Тестирование качества сближения УСК (устройство спасения космонавта) с МКС на ПСВР — панорамном стенде виртуальной реальности в МГУ (2015).
3. Доказательство возможности гальванической коррекции установки зрения космонавта в процессе сближения с МКС (2019).
4. Разработка и создание автоматического гальванического вестибулярного стимулятора для реализации 3-го результата (2024).

Александров Владимир Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Лемак Степан Степанович, д.ф.-м.н., профессор, зав. лабораторией, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Магомедов Магомед Хабибович, д.ф.-м.н., ст.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Тихонова Катерина Владимировна, к.ф.-м.н., директор ЦНИР МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)
Шуленина Нейля Энверовна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

ПИЛОТИРУЕМЫЕ ПОЛЕТЫ В КОСМОС: ОТ Ю.А. ГАГАРИНА ДО НАШИХ ДНЕЙ

В.А. Соловьев

dean@cosmos.msu.ru

Значение пилотируемой космонавтики невозможно переоценить. В ходе пилотируемых программ отрабатывается большинство космических технологий, которые в последствие применяются, в том числе, и для использования автоматических аппаратов. Проводится широкий спектр научно-прикладных исследований. Отрабатываются подходы, методики и технологии для освоения дальнего космоса. Формируется спрос на новые технические решения, которые затем используются, как в космонавтике, так и народном хозяйстве. Управляемые полеты в космос, развитие пилотируемой программы и создание долговременных обитаемых станций потребовало решения сложных задач в теории устойчивости, теории управления и вариационном исчислении и др.

ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА С РТ-ПОТЕНЦИАЛАМИ

И.А. Тайманов

taimanov@math.nsc.ru

В начале 1990-ых годов в математической физике возник интерес к специальному классу операторов Шредингера с комплексными потенциалами, которые однако обладают РТ-симметрией, а именно сохраняются при одновременном ортогональном преобразовании объемлющего пространства, обращающим ориентацию, и комплексном сопряжении.

Как оказалось, среди одномерных операторов с такими невещественными потенциалами есть операторы с унитарной матрицей рассеяния. В недавней работе Р.Г. Новикова и докладчика было показано, что в случае больших размерностей для достаточно быстро убывающих потенциалов это невозможно: унитарность S -матрицы влечет вещественность потенциала.

Мы также изложим, полученное нами, описание одномерных конечнозонных периодических операторов с РТ-потенциалами. Оно основано на свойствах τ -функций вещественных спектральных кривых.

Соловьев Владимир Алексеевич, д.т.н., профессор, академик РАН, генеральный конструктор РКК «Энергия», научный руководитель факультета космических исследований МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Тайманов Искандер Асанович, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, главный научный сотрудник, Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

СПЕКТРЫ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФАХ

А.И. Аптекарев

aptekaa@keldysh.ru

Рассматриваются дискретные операторы Шредингера \mathfrak{J} на ориентированных графах деревьях с корнем (*графы Кэли*). В простейшем одномерном случае (когда в каждую вершину одно ребро входит и одно выходит) речь идет о трехдиагональной *матрице Якоби*, действующей на вектор в $\ell_2(\mathbb{Z}^+)$.

В этом случае, *рекуррентные соотношения* с коэффициентами из матрицы \mathfrak{J} порождают *многочлены ортогональные относительно спектральной меры* этого оператора, что играет решающую роль в спектральном анализе.

В общем случае (графа Кэли с d -ребрами, выходящими из вершин) векторы коэффициентов d -мерного дискретного потенциала, сосредоточенные в вершинах графа, формируют разностный оператор, связывающий каждую вершину с $(d + 1)$ соседом. Здесь можно выделить класс потенциалов, коэффициенты которых в $(d + 2)$ -членных рекуррентных соотношениях порождают *совместно ортогональные многочлены* с набором из d мер.

Мы обсудим теорему о спектре операторов принадлежащих этому классу.

ТЕНЗОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗА ГРАНЬЮ
ВОЗМОЖНОСТЕЙ СУПЕРКОМПЬЮТЕРОВ

Е.Е. Тыртышников

eugene.tyrtysnikov@gmail.com

Даже самые мощные компьютеры не могут работать с астрономически большими массивами (таблицами) данных. В таких случаях данные необходимо задавать специальным образом, с помощью каких-то разумных моделей представления. Например, если ранг матрицы порядка n равен r , то для ее представления достаточно задать r строк и r столбцов, то есть всего $2rn$ элементов. Аналогичным образом можно ввести понятие ранга для d -мерного массива и представлять его с помощью $d rn$ элементов. Как выбрать эти элементы?

Фактически это вопрос о том, можно ли, а если да, то как получить параметры модели приближенного представления массива данных через малый набор его элементов. Другими словами, на каких данных нужно проводить “обучение” модели? Достаточно общий и простой принцип отбора данных существует!

Более того, этот принцип можно распространить на выбор параметров специальных тензорных разложений (например, для модели тензорного поезда), которые используются для приближенного представления многомерных массивов данных [1, 2].

Литература

1. *Oseledets I., Tyrtysnikov E.* TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and Its Applications, 432, 70–88 (2010).
2. *Zheltkov D., Tyrtysnikov E.* Global optimization based on TT-decomposition // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 25 (4), 247-261 (2020).

Аптекарев Александр Иванович, д.ф.-м.н., член-корр. РАН, профессор, директор Института прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша; механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Тыртышников Евгений Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, директор Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН; зав. кафедрой, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

ОБ ОДНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Б.Н. Четверушкин, А.Е. Луцкий, Е.В. Шильников

office@keldysh.ru

Для получения дополнительных уравнений, описывающих поведение пульсационных моментов турбулентного течения, использовалась кинетическая модель

$$\frac{f^{j+1} - f_0^j}{\tau_T} + \operatorname{div}(\bar{\xi} f_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\xi_i \xi_k \tau_T}{2} \frac{\partial f_0}{\partial x_k},$$

ранее применяемая для получения квазигазодинамической системы уравнений [1].

Здесь f_0^j — значение локально максвелловской функции распределения на момент времени $t = t^j$, f^{j+1} — значение функции распределения на момент времени $t^{j+1} = t^j + \tau_T$.

Обсуждается выбор f^{j+1} и турбулентного времени τ_T . Построение модели проводится на примере пространственно двумерного течения слабосжимаемого газа. Приводятся примеры расчета задачи о слое смешения и турбулентного течения в плоском канале.

Литература

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. — М.: МАКС-пресс. 2004. 328 с.

РОБОТИЗИРОВАННАЯ МЕДИЦИНА

М.Э. Соколов, В.Е. Подольский, В.В. Галатенко, В.М. Староверов, Р.Ф. Солодова,
В.М. Буданов, Д.Ю. Грибис

vvgalatenko@yahoo.com, rozaliya@solodov.org, vlbudanov@gmail.com

УДК 51-7

Работа раскрывает выполненные и перспективные разработки по новейшей теме — роботизированная медицина.

Ключевые слова: медицинский робот, тактильный механорецептор, роботизированная медицинская эвакуация.

Четверушкин Борис Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, зав.кафедрой, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша (Москва, Россия)

Луцкий Александр Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова; Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша (Москва, Россия)

Шильников Евгений Владимирович, к.ф.-м.н., ст.н.с., Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша (Москва, Россия)

Соколов Михаил Эдуардович, д.м.н., профессор, зам.директора ИМИСС МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Подольский Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Галатенко Владимир Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Староверов Владимир Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Солодова Розалия Фаилевна, к.м.н., н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, ИМИСС (Москва, Россия)

Буданов Владимир Михайлович, к.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, НИИ механики (Москва, Россия)

Грибис Дмитрий Юрьевич, к.т.н., доцент, филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

Актуальность темы. Современное здравоохранение столкнулось с серьезным вызовом. Медицинская помощь во всем мире становится все менее доступной. Возникает жесткий дефицит медицинского персонала. Проблема эта стала острой не только для нашей страны, но и для Европы, США, Японии. На наш взгляд существенный вклад в решение этой проблемы может внести развитие нового прикладного направления современной математики. В результате выполнения нами прикладных и фундаментальных разработок возникло новое перспективное, социально значимое и в чем-то безальтернативное научное направление — медицинская робототехника.

Под руководством академика В.А. Садовниченко для решения вопросов создания роботизированной медицинской техники была создана научно-промышленная группа. Она выросла из междисциплинарных проектов середины нулевых, которые позволили объединить специалистов разных подразделений МГУ. Костяк группы состоит из математиков, программистов, инженеров, медиков. В последующем нам удалось привлечь крупнейшие оборонные предприятия и предприятия медицинской техники Тулы, Технологический центр МИЭТ (Зеленоград), важнейшие медицинские центры, включая Центр медицины катастроф «Защита» и т.д.

Целью настоящей работы стало подведение промежуточного итога деятельности научно-промышленной группы академика В.А. Садовниченко.

Задачами настоящей публикации является ознакомление с нашими реализованными и перспективными проектами в этой области.

Наиболее успешные работы группы — это создание электронного аналога человеческого пальца (в 2013 году работа была признана проектом года в мире в области грудной хирургии), и робота-реаниматолога («Ангел»), способного не только распознавать основные неотложные состояния, но и назначать и проводить лечение по медицинским стандартам.

Тактильный механорецептор представляет собой цилиндр длиной 350 мм и диаметром основания 10 или 20 мм. На рабочей части инструмента расположен воспринимающий тактильный комплекс, содержащий датчики давления в количестве 7 или 19 единиц. Он обеспечивает регулярное дискретное снятие показателей до 10 измерений в секунду (от 70 до 190 измерений в секунду со всей рабочей поверхности). Эти показатели, после оцифровки и усиления, беспроводным образом передаются на компьютер, где с помощью специально созданного программного обеспечения сигналы регистрируются, анализируются и преобразуются в цифровую и аналоговую цветовую шкалу, которая отражает свойства объекта (неоднородность, границы, плотность), осязаемые тактильным механорецептором.

Воспроизведение тактильной информации было реализовано в виде механического дисплея на основе микромоторов (соленоидов), передающего информацию на палец врача с точностью свыше 90%.

Робот «Ангел» — это аппаратно-программный комплекс, осуществляющих сбор информации практически со всех возможных неинвазивных датчиков (пульс, АД, функцию внешнего дыхания, ЭКГ, ЭЭГ). Информация дополняется данными анамнеза и жалобами пациента и автоматически получаемыми лабораторными показателями.

Ангел способен автоматически установить диагноз 10 групп неотложных состояний (шоки, комы, инфаркт, инсульт, ТЭЛА, нарушения ритма сердца, сепсис) и поводить лечение встроенными инфузоматами и помпой. Реализован контроль обратной связи. Телеметрические данные передаются отдаленному консультанту из движущегося транспорта. Возможно дистанционное управление инфузоматами и автономная работа комплекса.

«Тактил» и «Ангел» зарегистрированы Росздравнадзором как медицинское оборудование. Под наши разработки был создан новый класс приборов — лечебно-диагностическое оборудование.

Дополнение «Ангела» аппаратом ИВЛ, системой жизнеобеспечения (электрическая батарея большой емкости, кондиционер, запас кислорода и проч.), системой взаимной изоляции с внешней средой, поможет создать **«модуль спасения»**. Он должен быть переносным, транспортируемым, изолируемым и роботизированным, оказывать полный объем квалифицированной медицинской помощи минимальным числом персонала в ручном, автономном и дистанционном режимах, быть готовым к использованию без специального развертывания.

Комплекс компактен, его масса вместе с весом карбонового корпуса «капсулы» не превышает 50-75 кг и будет удобен для перевозки пациента в одном и том же объеме всеми видами транспорта.

В настоящее время, совместно с ФМБА подготовлен соответствующий проект Фонда перспективных исследований. Также возможно создание **роботизированного стационарного комплекса быстрого развертывания** для оказания специализированной медицинской помощи пациентам с радиационными или сочетанными поражениями. Он позволит проводить высококвалифицированное роботизированное и дистанционное лечение пациентов, надежно защитить обслуживающий персонал и внешнюю среду от попадания радиоактивных продуктов.

Проведение СВО выявило серьезную проблему оказания эффективной медицинской помощи тяжелораненым. Успешное их лечение требует скорейшей эвакуации, при которой существует риск уничтожения противником транспорта, медицинского персонала, сопровождающих.

Мы должны создать для **беспилотника роботизированный медицинский блок**, который будет способен автономно осуществлять полный объем реанимационной помощи, включая проведение искусственной вентиляции легких, непрямого массажа сердца, инфузионной терапии, проведение динамического контроля состояния раненого с автоматической коррекцией проводимого лечения, оптимальную безопасность и жизнеобеспечение.

Эвакуация беспилотником может быть осуществлена с борта боевого корабля, из медицинского отряда вблизи передовой, где выполнены жизненно необходимые медицинские процедуры (остановка массивного кровотечения, интубация, катетеризация центральной вены) до центрального госпиталя. Время нахождения пострадавшего в беспилотнике — до 2-х часов.

Одной из самых острых социальных проблем во всем мире стало катастрофическое положение с первичным здравоохранением. В свете поручений Президента России необходимо осуществить коренное улучшение системы оказания первичной медицинской помощи каждому гражданину страны по утвержденным МЗ РФ стандартам.

Это обусловлено нехваткой врачебного и фельдшерского персонала и недостаточно развитой инфраструктурой здравоохранения. Министр здравоохранения РФ Михаил Мурашко не раз заявлял о необходимости расширения полномочий среднего медперсонала. Так, поздравляя в 2022 году главных помощниц докторов с Международным днем медицинской сестры, он предложил обеспечить разработку и внедрение современных дополнительных профессиональных образовательных программ для таких специалистов, а также развивать региональные системы целевой подготовки медицинских кадров. По мнению главы ведомства, уже сегодня медсестры блестяще справляются с некоторыми функциями, считавшимися ранее сугубо врачебными.

Представители Центрального НИИ организации и информатизации здравоохранения Минздрава РФ уверены, что распределение функций позволяет повысить доступность медпомощи без потери ее качества в рамках имеющихся ресурсов, в том числе финансовых и трудовых. Такой подход даст возможность высвободить время доктору на работу с пациентом за счет передачи части функционала, не требующего глубоких знаний в области медицины, среднему и немедицинскому персоналу. Там уточнили, что этот вопрос актуален сегодня в большинстве стран.

Переданы могут быть лишь отдельные функции, но назначать лечение должен только врач или фельдшер. При этом часть обязанностей предлагается делегировать немедицинским работникам.

Мы считаем, что такими людьми должны стать «парамедики» — школьные учителя, почтальоны, работающие с АПК. Актуально создание и массовое внедрение технологий и решений, обеспечивающих оказание медицинской помощи в дистанционном режиме, разработка **АПК «робот-терапевт»** с системой помощи принятия врачебных решений.

АПК «робот-терапевт» предназначен для первичного обследования и динамического наблюдения пациента в амбулаторных условиях с возможностями автоматической интеграции данных о физиологических параметрах человека, их дистанционной передаче, автоматизированной постановке предварительного диагноза, поддержки принятия решений при назначении лечения. Он может применяться при наблюдении диспансерных больных, работать в формате «пациент - врач».

АПК «робот-терапевт» будет размещен в ФАП, амбулаторно-поликлинических отделениях, в которых отсутствует квалифицированный врач. В сегодняшних условиях, — это не «вытеснение» квалифицированного медицинского персонала, а восполнение отсутствующих функций. По самым скромным подсчетам число таких роботов должно составлять не менее 100-150 тысяч единиц. «Охват» медицинской нозологии — порядка 600 заболеваний (требование к квалификации

врача общей практики).

«Человеческий фактор» является одной из основных причин техногенных катастроф. Ежегодно за штурвалом самолета умирает не менее четырех летчиков. И это только доказанные случаи. Для достижения существенных улучшений в этой области, необходимо решить проблему недопущения к выполнению работ лиц, ухудшение состояния которых может привести к катастрофе. Существующая система предсменного медицинского допуска к работе субъективна и не соответствует требованиям безопасности.

Медицинский осмотр должен быть дополнен использованием специального оборудования с возможностью дистанционного контроля. Все полученные сведения должны сохраняться и анализироваться в электронной базе уполномоченной организации.

В «**приборе допуска**» (**роботизированном комплексе**) должна быть реализована идентификация личности работника, исключая его «подмену», автоматизированное распознавание нарушений психофизиологической адаптации и ранних признаков наиболее опасных заболеваний, выявление депрессивных состояний, обнаружение признаков употребления алкоголя и психотропных средств, а также исключена возможность фальсификации результатов обследования.

Система допуска предназначена для использования не только на предприятиях транспортно-го комплекса, но и на любых других техногенноопасных площадках (транспорт, нефтегазовый комплекс, энергетика и др.).

В ходе собственной разработки медицинского варианта робота на базе FANUC и KAWASAKI нам удалось найти подход к решению ключевой задачи - системе управления промышленными роботами. Мы научились делать на макете хирургическую операцию без участия врача.

Хирургический робот имеет ряд преимуществ перед человеком: Точность — робот выполняет манипуляции с точностью 0,1 мм; робот способен точно запомнить 3-х мерную форму образования (по данным ультразвукового исследования, ядерно-магнитной и рентгеновской томографии) можно построить модель сложного по форме образования. Такую опухоль удалить хирургу в пределах капсулы, без повреждения соседних тканей, очень трудно; робот не может «заразиться» от инфекционного больного. В некоторых странах 50-60% населения инфицированы СПИДом.

Другими направлениями в области роботизированной медицины уже стали нейрохирургические вмешательства и создание «умного» гастроскопа.

Таким образом, весьма важным является создание актуального научного направления — **медицинской робототехники**.

Научной составляющей должно стать создание в РАН (в рамках прикладных математических наук) соответствующей академической группы.

Для реализации важнейших проектов должен быть организован научно-исследовательский институт с проектными и клиническими возможностями.

Должно быть создано и новое образовательное направление — открытие специальности и постдипломной подготовки «Врач-лечебник, специалист по робототехнике».

Литература

1. С.Ф. Гончаров, М.Э. Соколов, Н.Н. Баранова, Р.Ф. Солодова, И.Г. Тутов Концепция переносного изолируемого роботизированного медицинского модуля для эвакуации больных и пострадавших // Медико-биологические и социально-психологические проблемы безопасности в чрезвычайных ситуациях. – 2020. – № 3. – С. 14-23.

2. Патент РФ 2018г. Переносной и транспортируемый изолируемый роботизированный эвакуационный медицинский модуль. Авторы: Садовничий В.А., Соколов М.Э., Подольский В.Е., Солодова Р.Ф., Галатенко В.В., Солодов Е.В., Староверов В.М., Кусов И.С., Антонов А.П. № 2658466, 21 июня

3. Патент РФ 2020г. Изолируемый роботизированный эвакуационный медицинский модуль Авторы: Садовничий В.А., Соколов М.Э., Гончаров С.Ф., Подольский В.Е., Солодова Р.Ф., Староверов В.М., Солодов Е.В., Бочков Е.И., Прягина Т.В., Баранова Н.Н., Антонов А.П., Соколова Л.М., Елифанов В.А., Тараканов А.А., Шпырко О.А., Криницын О.А. № 118697, 13 февраля

4. Патент РФ 2020г. Транспортируемый изолируемый роботизированный эвакуационный медицинский модуль. Авторы: Садовничий В.А., Соколов М.Э., Гончаров С.Ф., Подольский В.Е., Солодова Р.Ф., Староверов В.М., Солодов Е.В., Бочков Е.И., Прягина Т.В., Баранова Н.Н., Антонов А.П., Соколова Л.М., Григорьева Е.Л., Смирнов С.А., Щитунев И.В., Шпырко О.А., Львова О.А., Криницын О.А. № 118696, 13 февраля

5. Solodova Rozaliia F., Galatenko Vladimir V., Nakashidze Eldar R., Shapovalyants Sergey G., Andreytsev Igor L., Sokolov Mikhail E., Podolskii Vladimir E. Instrumental mechanoreceptor palpation in gastrointestinal surgery. // Minimally invasive surgery, издательство Hindawi Pub. Corp. (New York, United States), № 2017. P. 183–189 DOI: [10.1155/2017/6481856](https://doi.org/10.1155/2017/6481856)

6. Александров Д.Е., Галатенко А.В., Галатенко В.В., Нерсисян С.А., Подольский В.Е., Соколов М.Э., Солодова Р.Ф., Староверов В.М. О методах обработки и автоматизированного анализа инструментальных тактильных образов // Издательство ООО «МАКС Пресс» (Москва), ISBN 978-5-317-06002-2, 120 с. DOI: [10.29003/m244.MTEC018](https://doi.org/10.29003/m244.MTEC018)

7. Галатенко А.В., Галатенко В.В., Соколов М.Э., Солодова Р.Ф., Староверов В.М. ЯОМП - специализированный язык программирования для формального описания медицинских протоколов // II Всероссийская конференция с международным участием «Математика в медицине», г.Владивосток., Россия, 11-14 октября 2022г.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

А.И. Шафаревич

shafarev@yahoo.com

Теория геометрических асимптотик хорошо развита для широкого класса дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами. Эта теория основана на конструкции, сопоставляющей асимптотические решения эволюционных и спектральных задач геометрическим объектам — лагранжевым поверхностям или комплексным векторным расслоениям над изотропными поверхностями.

Обобщения этих конструкций на случай уравнений с особенностями известны только в отдельных случаях; в то же время, такие уравнения интересны как с теоретической точки зрения, так и благодаря многочисленным приложениям.

В докладе мы сначала напомним основные идеи теории для случая гладких коэффициентов. Затем обсуждается ряд примеров и классов уравнений, в которых можно построить геометрические асимптотики при наличии сингулярностей и, в частности, описать перестройки соответствующих геометрических объектов в точках носителя особенности коэффициентов.

Секция 1

Алгебра и теория чисел

ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ А.Г. ПОСТНИКОВА В ПОЛЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ Х. Аль-Ассад

Получен новый результат по обобщению формулы А.Г. Постникова на случай степени простого числа 2. Это, вместе с оригинальной работой А.Г. Постникова и некоторыми структурными теоремами о приведенных системах вычетов по модулю степени простого идеала, используется для получения оценок сумм характеров в полях алгебраических чисел.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗНАЧЕНИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ А.И. Галочкин *alexander.galochkin@math.msu.ru*

Рассмотрим следующую обобщенную гипергеометрическую функцию

$$\psi(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)},$$

где $a(x)$, $b(x)$ — многочлены с алгебраическими коэффициентами, $\deg a(x) < \deg b(x)$.

Функция $\psi(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$b(\delta)y = a(\delta)zy + b(0), \quad \delta = z \frac{d}{dz}.$$

В докладе будет дан обзор результатов об оценках линейных форм от значений функции $\psi(z)$ в алгебраических точках и об оценках общих знаменателей коэффициентов этой функции.

Хафез Аль-Ассад, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)
Галочкин Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

О РАВНОМЕРНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ЭКСПОНЕНТАХ РЕШЁТОК

О.Н. Герман

oleg.german@math.msu.ru

Мы обсудим равномерные аналоги диофантовых экспонент решёток. Существует как минимум два способа их определить. Мы называем соответствующие экспоненты *слабыми* и *сильными*. Хорошо известно, что равномерная диофантова экспонента вещественного числа тривиальна. Мы покажем, что сильные диофантовы экспоненты решёток также тривиальны, тогда как слабые оказываются нетривиальными.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

А.Х. Гияси, И.П. Михайлов, О.В. Попов, В.Н. Чубариков

azarghyasi@yahoo.com, ipm32@yandex.ru, oleg.popov@math.msu.ru,

vladimir.chubarikov@math.msu.ru

УДК 511.3

Дан обзор результатов по работам авторов по очень коротким суммам Гаусса, по очень коротким суммам по обратным к простым числам, рациональным тригонометрическим суммам по числам Фибоначчи, по динамическим системам в теории чисел, по распределению остатков в разложении действительных чисел по последовательности Фибоначчи, по обобщению метода Адамара в теории дзета-функции Римана и рядов Дирихле.

Ключевые слова: суммы Гаусса, рациональные тригонометрические суммы, последовательность чисел Фибоначчи, метод Адамара в теории дзета-функции Римана.

Настоящее сообщение посвящено применению аналитических методов к исследованию асимптотических свойств арифметических функций. В 1924–1928 г.г. И.М.Виноградов дал яркий пример использования анализа Фурье и конечных тригонометрических сумм для вывода асимптотической оценки числа решений уравнения в проблеме Варинга. В 1934 г., продолжая эти исследования, он нашел новый мощный метод оценок тригонометрических сумм, который позволил существенно уточнить предыдущие результаты в проблеме Варинга.

Приведем результаты нашей работы в этом направлении, полученные на Механико-математическом факультете МГУ.

Неполные суммы Гаусса. Пусть $\chi(n)$ — неглавный характер Дирихле по простому модулю p , $0 \leq x < p$, $1 \leq h \leq p$, и $N_p\{x : \dots\}$ обозначает количество целых чисел x , удовлетворяющих условиям, указанным в скобках. Рассмотрим сумму Гаусса $G_h(x)$ вида

$$G_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(x) e^{2\pi i \frac{an}{p}}.$$

Если $h = p$, то имеем полную сумму Гаусса, и $|G_p(x)| = \sqrt{p}$. При $0 < h < p$ справедлива оценка Виноградова – Пойа (1918)

$$|G_h(x)| < \sqrt{p} \log p.$$

Герман Олег Николаевич, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Гияси Азар Ходабахш, к.ф.-м.н., доцент, Allameh Tabataba'i University, Iran (Иран)

Михайлов Илья Петрович, ст. преп., Казанский политехнический институт (Лениногорск, Россия)

Попов Олег Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Чубариков Владимир Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Э. К. Жимбо (2001) доказал следующее утверждение. Пусть $p \rightarrow \infty, h \rightarrow \infty$

$$\xi = \xi(h, p) = \left| \frac{G_h(x)}{\sqrt{h}} \right|^2$$

очень короткая нормированная сумма Гаусса, т.е. $\ln h / \ln p \rightarrow 0$. Тогда имеем

$$\frac{1}{p} N_p \{x : \xi < y\} \rightarrow 1 - e^{-y} \quad \text{при } p \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного вещественного числа y .

Очень короткая сумма по обратным к простым числам. Пусть p, q — простые числа. Пусть q^* определяется сравнением $qq^* \equiv 1 \pmod{p}$, $3 < h < p$, $1 \leq x \leq p-1$, и

$$K_h(x) = \sum_{q \leq h} e^{2\pi i \frac{xq^*}{p}}.$$

В. Н. Чубариков и Э. К. Жимбо установили следующую теорему. Пусть $p \rightarrow \infty, h \rightarrow \infty, \ln h / \ln p \rightarrow 0$, $\xi = \xi(x, h) = \left| \frac{K_h(x)}{\sqrt{h}} \right|^2$ — очень короткая нормированная сумма по обратным к простым по модулю p . Тогда имеем

$$\frac{1}{p} N_p \{x : \xi < y\} \rightarrow 1 - e^{-y} \quad \text{при } p \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного вещественного числа y .

Рациональные тригонометрические суммы по числам Фибоначчи Члены последовательности $\{f_n\}$, где $f_0 = 1, f_1 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ при $n \geq 1$, называются числами Фибоначчи. Пусть $m > 1$ — натуральное число, $\lambda > 0$ — постоянная, и пусть $N_m\{n : \dots\}$ обозначает количество целых чисел n , удовлетворяющих условиям, которые указаны в скобках. Пусть, далее,

$$S_m(h; a) = \sum_{n=0}^{h-1} e^{2\pi i \frac{af_n}{m}}$$

очень короткая тригонометрическая сумма, и

$$N_m(\lambda) = N_m\{a : 0 \leq a \leq m-1, |S_m(h; a)| < \sqrt{\lambda h}\}.$$

Автор и Р.Н. Бояринов получили следующий результат. Пусть $m \rightarrow \infty$ и h как функция от m удовлетворяет условиям $h = h(m) \rightarrow \infty$ и $h \leq 0.5 \log_\tau m$, где $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{N_m(\lambda)}{\lambda} = 1 - e^{-\lambda}$$

для любого фиксированного вещественного $\lambda > 0$.

Динамические системы в теории чисел. На связь однопараметрических задач теории диофантовых приближений с динамическими системами указал А.Я. Хинчин. Динамическую систему, связанную с распределением дробных долей многочлена произвольной степени от одной переменной описал А.Г. Постников. Пространством такой системы для многочлена n -й степени является декартово произведение n окружностей единичной длины. Тогда преобразование T вида

$$T = T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_{n+1-k} \right\}, \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha_{n+1-k} \right\}, \dots, \{\alpha_{n+1} + 2\alpha_n + \alpha_{n-1}\}, \{\alpha_{n+1} + \alpha_n\} \right),$$

где α_{n+1} — фиксированное иррациональное число, является эргодическим.

И.П. Михайлов доказал эргодичность подобной динамической системы для многочленов от нескольких переменных.

Пусть r, n_1, \dots, n_r — натуральные числа,

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \geq 1}}^{n_1} \cdots \sum_{\substack{t_r=0 \\ t_1+\dots+t_r \geq 1}}^{n_r} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r} + \alpha(n_1 + 1, n_2, \dots, n_r),$$

причем $\alpha(n_1 + 1, n_2, \dots, n_r)$ — фиксированное действительное иррациональное число, $m = (n_1 + 1) \dots (n_r + 1) - 1$. Пространство Ω динамической системы представляет собой декартово произведение m окружностей единичной длины или m -мерный куб, состоящий из точек $\bar{\alpha} = (\alpha(t_1, \dots, t_r))$, $0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r, t_1 + \dots + t_r \geq 1$.

Упорядочим эти окружности следующим образом.

Положим $m(\bar{t}) = t_1 + (n_1 + 1)t_2 + \dots + t_r(n_1 + 1) \dots (n_{r-1} + 1)$, где $0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r, t_1 + \dots + t_r \geq 1$. Расположим координаты набора $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\bar{t})$ в порядке возрастания параметра $m(\bar{t})$. Имеем

$$\alpha(t_1, \dots, t_r) = \beta(m(\bar{t})), 0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r, t_1 + \dots + t_r \geq 1,$$

$\alpha(n_1 + 1, n_2, \dots, n_r) = \beta(m + 1)$. Определим взаимно однозначное отображение T в m -мерном пространстве Ω следующим образом

$$\begin{aligned} T(\bar{\alpha}(t_1, \dots, t_r)) &= T(\bar{\beta}(\bar{m}(\bar{t}))) = \\ &= \left(\left\{ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \beta(m+1-k) \right\}, \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \beta(m+1-k) \right\}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \{ \beta(m+1) + 2\beta(m) + \beta(m-1) \}, \{ \beta(m+1) + \beta(m) \} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что на Ω мера Лебега в m -мерном пространстве является инвариантной относительно T .

Для любого натурального k имеем

$$T^k(\bar{\alpha}) = \left(\{ \gamma(m)^{(k)} \}, \{ \gamma(m-1)^{(k)} \}, \dots, \{ \gamma(1)^{(k)} \} \right),$$

где

$$\gamma(s)^{(k)} = \sum_{l=0}^{s-1} \binom{s-1}{l} \alpha_{m+1-l} k^{s-l-1}, 1 \leq s \leq m.$$

Распределение остатков в разложении действительных чисел по последовательности Фибоначчи. А.Х.Гияси, И.П.Михайлов, В.Н.Чубариков доказали следующее утверждение. Для почти всех действительных чисел a из полуинтервала $[0, 1)$ (в смысле меры Лебега) последовательность остатков

$$x_n = x_n(a) = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} x_{n-1} \right\} = \left\{ \frac{F_n}{F_{n-1}} \left\{ \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} \cdots \left\{ \frac{F_2}{F_1} a \right\} \cdots \right\} \right\}.$$

равномерно распределена по модулю единица, где F_k — последовательность чисел Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, k \geq 1$.

КОРАЗМЕРНОСТИ ТОЖДЕСТВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

М.В. Зайцев

zaicevmv@mail.ru

УДК 512.554

В докладе обсуждаются числовые характеристики неассоциативных алгебр.

Каждой алгебре A над полем F нулевой характеристики можно сопоставить целочисленную последовательность $\{c_n(A)\}$, характеризующую количество ее тождественных соотношений. Если алгебра A конечномерна, $\dim A = d$, то эта последовательность экспоненциально ограничена, $c_n(A) \leq d^{n+1}$. Если поле алгебраически замкнуто, а A — простая ассоциативная или лиевская алгебра, то $\{c_n(A)\}$ растет асимптотически в точности как d^n . Для не простых алгебр $c_n(A) \leq (d-1)^n$. Ранее долгое время считалось, что асимптотическое равенство $\{c_n(A)\}$ и $(\dim A)^n$ является признаком простоты алгебры. Нам впервые удалось построить серию примеров не простых алгебр, опровергающих эту гипотезу.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЧЕТНО-ДЕДЕКИНДОВА РАСШИРЕНИЯ РЕШЁТОЧНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ПОРЯДКОВЫХ ГРАНИЦ

В.К. Захаров, Т.В. Родионов

zakharov_valeriy@list.ru

УДК 512.56, 517.982.272

Характеризуется счётно-дедекиндово расширение решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций, полученное присоединением к нему счётных порядковых сечений, аналогично тому, как это было сделано Р. Дедекиндом для линейно упорядоченного поля рациональных чисел.

Ключевые слова: равномерные функции, латлинеалы, st_b -пополнение.

Ещё в 1872 году Р. Дедекиндом была построена система вещественных чисел как некоторое расширение системы рациональных чисел способом присоединения счётных порядковых сечений.

С тех пор особый интерес представляло применение этого способа к решёточному линейному пространству $C \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных ограниченных функций $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ на вполне регулярном (тихоновском) пространстве (T, \mathcal{G}) с ансамблем открытых подмножеств \mathcal{G} .

Если применить способ Дедекинда к C , то получается некоторое абстрактное расширение D^0C , построенное присоединением к C всех счётных порядковых сечений. Здесь показатель 0 происходит от обозначения счётного множества всех натуральных чисел через ω_0 .

Долгое время чисто функциональное описание абстрактного расширения D^0C через какие-либо функции на T было неизвестно, несмотря на интерес к нему. В окончательном виде оно было дано в работе [6] (см. также [1]–[5]). В этой работе было введено общее понятие \mathcal{S} -равномерных функций, обобщающее понятие \mathcal{S} -измеримых функций с счётно-аддитивных конечно-мультипликативных ансамблей \mathcal{S} подмножеств множества T на конечно-мультипликативные ансамбли, содержащие \emptyset и T .

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 22-11-00052).

Зайцев Михаил Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Захаров Валерий Константинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Родионов Тимофей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Рассмотрим в качестве \mathcal{S} следующий ансамбль \mathcal{ZP}^0 . Через \mathcal{G}^0 обозначим ансамбль конуль-множеств $\text{coz } f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ всех функций $f \in C$. Через \mathcal{U}^0 обозначим подансамбль ансамбля \mathcal{G}^0 , состоящий из всех всюду плотных конуль-множеств $U \in \mathcal{G}^0$. Рассмотрим булеанов идеал $\mathcal{N}^0 \equiv \{N \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}^0 (N \subset T \setminus U)\}$, состоящий из всех подмножеств нигде не плотных нуль-множеств $z f \equiv \{t \in T \mid f(t) = 0\}$ функций $f \in C$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{ZP}^0 \equiv \{P \subset T \mid \exists G \in \mathcal{G}^0 \exists N \in \mathcal{N}^0 (P = G \cup N)\}$.

Рассмотрим семейство $U(T, \mathcal{ZP}^0)$, состоящее из всех \mathcal{ZP}^0 -равномерных функций $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, т. е. таких, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует конечное покрытие $(S_k \in \mathcal{ZP}^0 \mid k \in K)$ множества T , для которого колебание $\omega(f, S_k) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid s, t \in S_k\} < 1/n$ при всех $k \in K$.

Для любых ограниченных функций f и g из T в \mathbb{R} введём такое отношение эквивалентности $f \sim g \pmod{\mathcal{N}^0}$, что $\{t \in T \mid |g(t) - f(t)| > 1/n\} \in \mathcal{N}^0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим фактор-семейство $U(T, \mathcal{ZP}^0)/\sim$ через Z^0 . В работе [6] было анонсировано следующее функциональное описание счётно-дедекиндова расширения $D^0(C)$.

Теорема. $D^0(C) = Z^0$.

После нахождения функционального описания возникла задача характеристики расширения $u : C \rightarrow Z^0$ в терминах структур $\mathbf{0}, \mathbf{1}, +, \cdot, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge$.

Если рассматривать кольцевые структуры $\mathbf{1}, +, \cdot$, то они связаны дистрибутивным равенством $a(b+c) = ab+ac$. Если же рассматривать структуры решёточного линейного пространства $\mathbf{1}, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge$, то они связаны лишь дистрибутивным неравенством $a \wedge (b+c) \leq a \wedge b + a \wedge c$. По этой причине работа с последними структурами является концептуально более сложной, чем с первыми.

Характеризация кольцевого расширения $u : C \rightarrow Z^0$ была дана в работах [1]–[5].

Данная работа посвящена характеристике расширения $u : C \rightarrow Z^0$ как решёточного линейного расширения. Контуры этой характеристики были анонсированы в [6].

Теорема. Счётно-дедекиндово расширение $u : C \rightarrow Z^0$ является единственным sr_b -пополнением sr_b -латтиснеала (C, \mathcal{L}_b) типа $Z^{0c} |^a Z^{0c}$ в следующем смысле:

- а) оно является наибольшим из всех граничных sr_b -расширений типа Z^{0c} ;
- б) оно является наименьшим из всех полных sr_b -расширений типа Z^{0c} ;
- в) оно является полным типа ${}^a Z^{0c}$.

Все определения, отсутствующие в формулировке данной теоремы, подобны определениям, приведённым в статье [7]. Нужно только sr_{μ} -расширение $(C, \mathcal{L}_{\mu}) \rightarrow (Z^0, \mathcal{O}_{\mu})$ заменить на sr_b -расширение $(C, \mathcal{L}_b) \rightarrow (Z^0, \mathcal{O}_b)$.

Литература

1. Zakharov V.K. On functions connected with sequential absolute, Cantor completion, and classical ring of quotients // Periodica Math. Hungar. 1988. V. 19. № 2, 113-133.
2. Захаров В.К. Связь между классическим кольцом частных кольца непрерывных функций и функциями, интегрируемыми по Риману // Фундам. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1, 161-176.
3. Захаров В.К. Расширения кольца непрерывных функций, порождённые классическим, рациональным и регулярным кольцами частных как делимые оболочки // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 12, 81-118.
4. Zakharov V.K. Classical extensions of the ring of continuous functions and the corresponding preimages of a completely regular space // J. of Math. Sciences. 1995. V. 73. № 1, 114-139.
5. Захаров В.К. Связи между расширением Римана и классическим кольцом частных и между прообразом Семадени и секвенциальным абсолютом // Труды ММО. 1996. Т. 57, 254-279.
6. Захаров В.К. Описание некоторых расширений семейства непрерывных функций посредством порядковых границ // Доклады РАН. 2005. Т. 400. № 4, 444-448.
7. Захаров В.К. Характеризация расширения решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций, порождённого функциями, μ -интегрируемыми по Риману, посредством порядковых границ // Алгебра и анализ. 2023. Т. 35. № 4, 135-166.

ИЗОМОРФИЗМЫ ПОЛУГРУПП ОБОБЩЕННЫХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

И.Б. Кожухов

kozuhov_i_b@mail.ru

УДК 512.53, 512.5652, 512.565.8

Пусть X и X' – множества, содержащие каждое не менее двух элементов, L и L' – полные цепи, $L(X)$ и $L'(X')$ – полугруппы обобщённых бинарных отношений. Доказано, что если полугруппы $L(X)$ и $L'(X')$ изоморфны, то этот изоморфизм индуцирован изоморфизмом цепей L, L' и взаимно однозначным соответствием между X и X' .

Ключевые слова: полная цепь, обобщённое бинарное отношение.

Пусть X – множество, необязательно конечное, но содержащее более одного элемента, а L – полная вполне дистрибутивная решётка [1, гл. V, §5] с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1. отображение $b : X \times X \rightarrow L$ называется *обобщённым бинарным отношением на множестве X* . На множестве $L(X)$ всех таких отображений можно ввести операцию умножения так же, как на множестве обычных бинарных отношений:

$$(bc)(x, y) = \bigvee_{x \in X} (b(x, z) \wedge c(z, y)). \quad (1)$$

Элементы из $L(X)$ можно рассматривать как матрицы $X \times X$ с элементами из L . Размеры матриц, как видно из определения, могут быть бесконечными, причём любой мощности. Нетрудно проверить, что умножение, определённое по формуле (1), ассоциативно, поэтому $L(X)$ – полугруппа. Эта полугруппа имеет единицу Δ_X (отношение равенства, единичная матрица) и нуль Θ_X (пустое отношение, нулевая матрица). Алгебраические свойства полугруппы $L(X)$ (группоида в случае, если решётка L недистрибутивна) изучались рядом авторов, см., например, [2,3].

При $L = B = \{0, 1\}$ с операциями $a \wedge b = \min\{a, b\}$ и $a \vee b = \max\{a, b\}$ мы получаем полугруппу $B(X)$ обычных бинарных отношений на множестве X . Если $L = C_k$ – k -элементная цепь, то $C_k(X)$ – полугруппа бинарных отношений в k -значной логике. Если $L = [0, 1]$, то $L(X)$ – полугруппа нечётких бинарных отношений (см. [4]).

В ряде работ рассматривались изоморфизмы полугрупп бинарных отношений (на множествах X и X'), а также полугрупп преобразований этих множеств, полугрупп частичных преобразований и т.д. (см. [5]). В частности, всякий эндоморфизм полугруппы $B(X)$ индуцирован взаимно однозначным преобразованием множества X (см. [6]).

Вполне дистрибутивная решётка L определяется однозначно (с точностью до изоморфизма) полугруппой обобщённых бинарных отношений, как показывает следующее утверждение.

Предложение. Пусть X и Y – непустые неоднородные множества, L и M – полные вполне дистрибутивные решётки, $L(X)$ и $M(Y)$ – полугруппы обобщённых бинарных отношений. Если $\Phi : L(X) \rightarrow M(Y)$ – изоморфизм полугрупп, то существуют изоморфизм решёток $\varphi : L \rightarrow M$ такой, что $\Phi(\lambda \Delta_X) = \varphi(\lambda) \Delta_Y$ для всех $\lambda \in L$.

В случае, когда X и Y – полные цепи, имеет место более сильное утверждение.

Теорема. Пусть X и Y – непустые неоднородные множества, L и M – полные цепи, $L(X)$ и $M(Y)$ – полугруппы обобщённых бинарных отношений. Если $\Phi : L(X) \rightarrow M(Y)$ – изоморфизм полугрупп, то существуют взаимно однозначное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ и изоморфизм решёток $\psi : L \rightarrow M$ такие, что $\psi(b(u, v)) = \Phi(b)(\varphi(u), \varphi(v))$ для всех $u, v \in X$ и $b \in L(X)$.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984. — 568 с.
2. Шматков В.Д. Изоморфизмы и автоморфизмы алгебр матриц над решётками, *Фундамент. и прикл. матем.*, 19:1 (2014), 195–204.
3. Кожухов И.Б., Ярошевич В.А. О потенциальной делимости матриц над дистрибутивными решётками. *Дискрет. матем.*, 22:2 (2010), 148–158.

4. *Beg I., Ashraf S.* Fuzzy relational calculus. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 37(1) (2014), 203–237.
5. *Кожухов И.Б., Манилов Д.Ю., Решетников А.В.* Изоморфизмы полугрупп преобразований. В сб. “Algebra and Model Theory, 14” (материалы XIV летней школы-конференции «Пограничные вопросы универсальной алгебры и теории моделей»), Новосибирск, НГТУ, 2023, 45-54.
6. *Magill K.D.Jr.* Automorphisms of the semigroup of all relations on a set. Canad. Math. Bull., 9, 21 (1966), 73–77.

КОНСТРУКЦИИ НА ОКРУЖНОСТИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ВЫЧЕТАМИ

М.А. Королёв

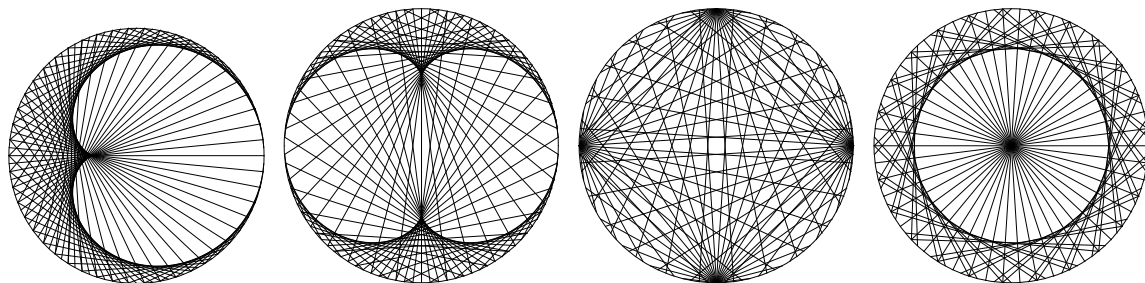
hardy_ramanujan@mail.ru, korolevma@mi-ras.ru

УДК 511.3

Доклад посвящён некоторым статистическим характеристикам теоретико-числовых (и одновременно геометрических) объектов, как конструкции на окружности, образованные вычетами по заданному модулю.

Ключевые слова: вычеты по модулю, конструкции на окружности, кардиоида, нефроида.

Нанесём на окружность q точек, разбивающих её на дуги равной длины, и пронумеруем их числами от 0 до $q-1$. Возьмём некоторое целое a , не делящееся на q , и соединим точку, имеющую номер k , с точкой номер m , где $m \equiv ak \pmod{q}$. Проделав это для всех k , мы получим рисунок из линий, который иногда называется «конструкцией, образованной вычетами» («*residue design*»). Такие конструкции – объекты, давно и хорошо известные как профессионалам, так и любителям математики (см., напр., [1], [2]). Одна из причин – в том, что они обладают несомненной эстетической привлекательностью:

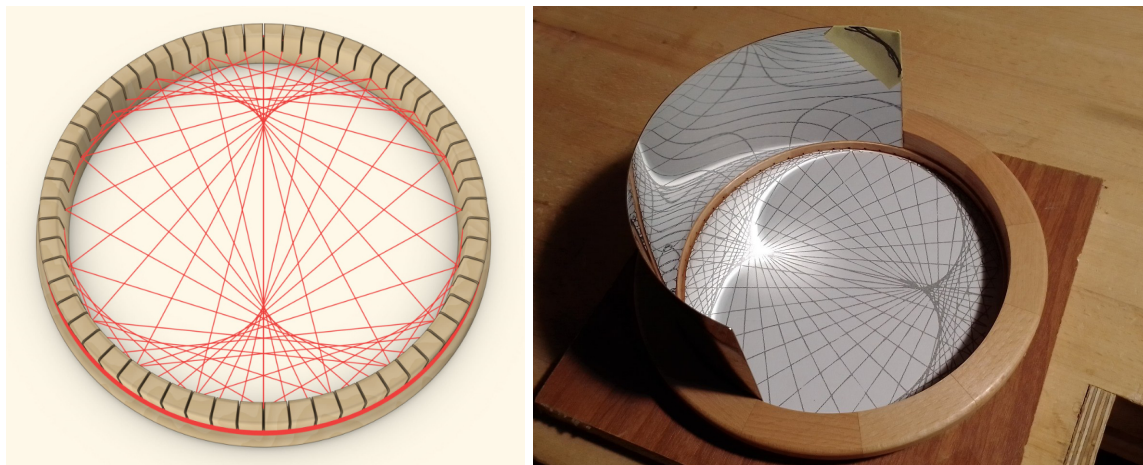


Кроме того, картинки, возникающие в ходе такой процедуры, можно реализовать в виде вещественных конструкций из нитей. Техника, основанная на создании изображений с помощью нитей, именуется «string art», «изонить», «вышивка по картону». Кроме того, на основе таких картинок можно объяснить физические явления, с которыми мы сталкиваемся повседневно, каждый раз, как берём в руки чашку с кофе или чаем¹.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-01-00000).

Королёв Максим Александрович, д.ф.-м.н., в.н.с., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, отдел теории чисел (Москва, Россия)

¹Иллюстрации любезно предоставлены Н.Н. Андреевым (проект «Математические этюды», <https://etudes.ru>).



Пусть задано число q , а радиус окружности равен (для простоты) единице. Какова суммарная длина $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, a)$ нити, необходимой для реализации такой конструкции для заданного a ? Известно, что если $a - 1$ и q взаимно просты, она не зависит от a (это - школьное упражнение, но похоже, что этот факт был отмечен совсем недавно, см. [3]).

А что будет, если соединять точки не по «линейному» правилу $k \mapsto ak \pmod{q}$, а по более сложному: $k \mapsto af(k) \pmod{q}$, где f - некоторая арифметическая функция? Визуальная красота, как правило, разрушается. Но можно поставить, например, тот же вопрос о поведении суммарной длины $\mathcal{L}(q, a)$ нити при фиксированном q и изменении a .

В докладе планируется познакомить слушателей с результатами численных экспериментов, отвечающих разным арифметическим функциям f , высказать некоторые предположения и сформулировать в виде утверждений то немногое, что удаётся строго доказать.

Литература

1. *I.D. Johnson* Paving the way to algebraic though using residue designs, *The Mathematical Teacher*, **91** (1998), № 4, 326–332.
2. *D. Richeson* Residue designs, string art, and number theory. In: J. Holdener, E. Torrence, C. Fong, K. Seaton (eds.), *Proceedings of Bridges 2023: Mathematics, Art, Music, Architecture, Culture*. Phoenix, Arizona, 2023, 365–368.
3. *D. Richeson* How much string to string a cardioid? // [arXiv:2311.15101v1](https://arxiv.org/abs/2311.15101v1) [math.HO] (25.11.2023).

ЦИКЛИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ КАК ОБРАЗУЮЩИЕ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР

О.В. Маркова

ov_markova@mail.ru

УДК 512.643

Сообщение посвящено решению вопроса о количестве различных с точностью до подобия подалгебр алгебры матриц, порождённых циклическими матрицами, над различными полями.

Ключевые слова: матричная алгебра, циклическая матрица, разбиения натурального числа, длина алгебры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-21-00267).
Маркова Ольга Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Доклад основан на работе [1].

Обозначим через $M_n(\mathbb{F})$ алгебру $n \times n$ квадратных матриц над полем \mathbb{F} . Напомним, что матрица называется *циклической*, если её минимальный многочлен совпадает с характеристическим. Ранее многократно подтверждалось, что наличие циклических матриц в системах порождающих матричных подалгебр является сильным условием, которое позволяет решить те или иные вопросы, связанные с системами порождающих и алгебрами. Так, например, в статье А. Гутермана, Т. Лаффи, О. Марковой и Х. Шмигоц [2] в случае, когда система содержит циклическую матрицу, доказана справедливость гипотезы А. Паза 1984 года [3] об оценке длины порождающей системы алгебры матриц порядка n числом $2n - 2$. При этом в общем случае эта гипотеза до сих пор является открытой. В работе [4] Д. Новочадовым установлено, что в точности для этого класса систем порождающих вопрос о совпадении алгебры, порождённой данным множеством, с полной матричной алгеброй можно решить в терминах графа Бернсайда.

Как принято в задачах, связанных с описанием семейств матриц, решение будет получено с точностью до подобия. Поэтому здесь и далее, говоря о различных матрицах и алгебрах, мы будем иметь в виду различные с точностью до подобия. Отметим, что задачу подсчёта самих циклических матриц имеет смысл рассматривать только для конечных полей, поскольку для любого бесконечного поля количество различных циклических матриц тоже заведомо всегда бесконечно за счёт бесконечности количества вариантов выбора собственных чисел. Естественным образом аналогичный вопрос возникает и для алгебр:

Вопрос 1. *Для заданных поля коэффициентов \mathbb{F} и порядка матриц n определить, сколько существует различных подалгебр алгебры матриц $M_n(\mathbb{F})$, порождённых циклическими матрицами. В частности, если их конечное число, вычислить его как функцию от порядка матриц n .*

В докладе будет представлено решение вопроса 1 над различными полями. В случае алгебраически замкнутых полей решение этого вопроса в явном виде получается благодаря использованию матричных методов, а именно жордановой нормальной формы матриц. Для поля вещественных чисел и конечных полей вопрос о количестве алгебр был решён с привлечением методов теории многочленов и целочисленных последовательностей.

Во-первых, существуют поля, для которых количество различных алгебр, порождённых циклическими матрицами, бесконечно для всех значений $n \geq 2$.

Теорема 1. *Для любого $n \geq 2$ в алгебре $M_n(\mathbb{Q})$ матриц над полем рациональных чисел найдётся бесконечно много различных алгебр, порождённых циклическими матрицами.*

Для дальнейшей классификации напомним необходимые сведения из теории чисел.

Разбиение натурального числа n — это представление n в виде суммы положительных целых чисел, называемых частями, так что порядок следования частей не учитывается. Число разбиений $P(n)$ натурального числа n является одним из фундаментальных объектов изучения в теории чисел. Нахождение его выражения в виде функции от n остаётся открытой проблемой. Асимптотическое равенство для числа разбиений найдено Г.Х. Харди и С. Рамануджаном (см., например, последовательность A000041 в энциклопедии целочисленных последовательностей [5]).

Пусть \mathbb{F} — алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим циклическую матрицу $C \in M_n(\mathbb{F})$. В жордановой нормальной форме матрицы C каждому собственному значению γ_j соответствует единственная жорданова клетка размера n_j . Поскольку жорданова нормальная форма матрицы единственна с точностью до порядка клеток, то жордановой нормальной форме матрицы C можно сопоставить разбиение числа n . Обозначим его $p_J(C)$.

Лемма. *Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей A . Если $C \in \mathcal{A}$ — циклическая матрица, то $p_J(C) = p_J(A)$. Разбиение, соответствующее произвольной циклической матрице в алгебре \mathcal{A} , обозначим $p_J(\mathcal{A})$.*

Пусть $\mathcal{N}_k \subset M_k(\mathbb{F})$ обозначает алгебру, порождённую жордановой клеткой порядка k . Пусть дано разбиение $\mathbf{p} = (n_1, \dots, n_m)$ числа n , где $n \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 0$, $1 \leq m \leq n$, $\sum_{i=1}^m n_i = n$.

Тогда сопоставим ему алгебру $\mathcal{T}_{\mathbf{p}} = \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{N}_{n_j} \subset M_n(\mathbb{F})$, где прямая сумма понимается как алгебра блочно-диагональных матриц.

Теорема 2. Пусть \mathbb{F} — алгебраически замкнутое поле, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Рассмотрим коммутативные подалгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Тогда

1. подалгебры \mathcal{A} и \mathcal{B} подобны в $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $p_J(\mathcal{A}) = p_J(\mathcal{B})$;
2. в $M_n(\mathbb{F})$ содержится ровно $P(n)$ различных с точностью до подобия подалгебр, порождённых циклическими матрицами;
3. подалгебра \mathcal{A} подобна верхнетреугольной подалгебре $\mathcal{T}_{p_J(\mathcal{A})}$.

Теперь перейдём к действительным алгебрам. Введём последовательность $P_2(n) = P(n) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P(j)P(n-2j)$ (последовательность A002513 в энциклопедии целочисленных последовательностей [5]).

Теорема 3. В алгебре $M_n(\mathbb{R})$ матриц над полем действительных чисел содержится $P_2(n)$ различных с точностью до подобия подалгебр, порождённых циклическими матрицами.

Далее перейдём к случаю больших конечных полей. Сначала определим необходимую числовую последовательность (последовательность A006171 в энциклопедии целочисленных последовательностей [5]). Для $n \in \mathbb{N}$ через $P_g(n)$ обозначим количество возможных способов разложения многочлена степени n на неприводимые множители над кольцом целых чисел, т.е. в предположении, что степени сомножителей могут принимать все значения от 1 до n , а для любой степени количество неприводимых многочленов неограничено.

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $q \geq n$ — степень простого. В алгебре $M_n(\mathbb{F}_q)$ матриц над конечным полем из q элементов содержится $P_g(n)$ различных с точностью до подобия подалгебр, порождённых циклическими матрицами.

Литература

1. Маркова О.В. Коммутативные матричные алгебры, порождённые циклическими матрицами // Зап. научн. сем. ПОМИ, **524** (2023), 112-124.
2. Guterman A.E., Laffey T., Markova O.V., Šmigoc H. A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix // Linear Algebra Appl., **543** (2018), 234-250.
3. Paz A. An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear Multilinear Algebra, **15** (1984), 161-170.
4. Маркова О.В., Новочадов Д.Ю. Системы порождающих полной матричной алгебры, содержащие циклические матрицы // Зап. научн. сем. ПОМИ, **504** (2021), 157-171.
5. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), <https://oeis.org/>.

СТАНДАРТНЫЕ БАЗИСЫ ИДЕАЛОВ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛИ И СВОБОДНЫХ (p -) СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

А.А. Михалев

aamikhalev@mail.ru

Стандартные базисы идеалов свободных алгебр Ли (техника композиции) были введены А.И. Ширшовым в 1962 г. Эта техника стала очень полезным инструментом при решении многих комбинаторных и алгоритмических проблем. Для свободных (p -)супералгебр Ли аналогичные конструкции были построены А.А. Михалевым. Доклад посвящен конструкциям стандартных базисов идеалов свободных (p -)супералгебр Ли и их применениям при решении алгоритмических проблем.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.В. Нестеренко

yunester@outlook.com

УДК 511.4

В обзорном докладе будет рассказано о трансцендентности и алгебраической независимости значений экспоненциальной и модулярных функций, о некоторых открытых проблемах.

Ключевые слова: математика, трансцендентные числа, алгебраическая независимость.

Главные задачи теории, о которой пойдёт речь в докладе, состоят в исследовании иррациональности и трансцендентности различных чисел, а в более общей постановке — в доказательстве отсутствия между ними алгебраических соотношений над полем рациональных чисел. Исследуемые числа, как правило, — значения аналитических функций.

Примеры трансцендентных чисел, относящиеся к значениям экспоненциальной функции:

e (Ш. Эрмит, 1873),

π и e^α при алгебраическом $\alpha \neq 0$ (Ф. Линдеман, 1882),

e^π (А.О. Гельфонд, 1929)

Следующие два утверждения эквивалентны, составляли утверждение 7-й проблемы Гильберта и были независимо доказаны в 1934 году Гельфондом и Т. Шнайдером.

Степень a^b при алгебраическом основании a и алгебраическом иррациональном показателе b есть трансцендентное число.

Логарифм алгебраического числа по алгебраическому основанию может быть либо рациональным числом, либо числом трансцендентным, другими словами, если α и β — алгебраические числа, отношение $\frac{\ln \beta}{\ln \alpha}$ определено и иррационально, то это отношение трансцендентно.

Ещё два примера относятся к линейной и алгебраической независимости над \mathbb{Q} чисел, связанных с экспоненциальной функцией.

(К. Вейерштрасс, 1885) *Если алгебраические числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то*

$$e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$$

алгебраически независимы над полем всех алгебраических чисел.

(А. Бейкер, 1966) *Если логарифмы алгебраических чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, m \geq 2$, линейно независимы над полем рациональных чисел, то они линейно независимы с 1 над полем всех алгебраических чисел.*

Последнее утверждение при $m = 2$ совпадает с теоремой Гельфонда-Шнайдера.

Приведём здесь ряд открытых гипотез о значениях экспоненциальной функции.

Гипотеза (Гельфонд, 1948). *Если логарифмы алгебраических чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, m \geq 2$, линейно независимы над полем рациональных чисел, то они алгебраически независимы над полем всех алгебраических чисел.*

Эта гипотеза имеет два известных частных случая.

Гипотеза о 4 логарифмах (Шнайдер, 1957). *Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ненулевые алгебраические числа. Если $\log \alpha \log \gamma - \log \beta \log \delta = 0$, то указанные 4 логарифма линейно зависимы над полем рациональных чисел.*

Гипотеза (Н.И. Фельдман, 1982). *Пусть α, β ненулевые алгебраические числа. Если*

$$\log \alpha - \log^2 \beta = 0,$$

то $\alpha = \beta = 1$.

Обобщение другой формулировки 7-й проблемы Гильберта выглядит так.

Гипотеза (Гельфонд, 1948). Если $\alpha \neq 0, 1$ и β - алгебраические числа, $d = \deg \beta \geq 2$, то числа

$$\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}} \quad (1)$$

алгебраически независимы.

В 1948 г. Гельфонд доказал следующий частный случай этой гипотезы.

Теорема 1. Если $\alpha \neq 0, 1$ - алгебраическое число и β - кубическая иррациональность, то $\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}$ алгебраически независимы.

Наилучший в настоящее время результат - "половина" гипотезы Гельфонда при $d > 3$ был доказан разными способами в 1989 г. в работах [3] и [1].

Теорема 2. Если $\alpha \neq 0, 1$ и β - алгебраические числа, $d = \deg \beta \geq 2$, то среди чисел (1) имеется не менее $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ алгебраически независимых.

Рассмотрим теперь иной класс функций, исследования которых позволяют доказать новые утверждения о трансцендентности и алгебраической независимости классических постоянных.

Нормализованные ряды Эйзенштейна веса $2k$, $k \geq 1$, определяются двойными рядами.

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}},$$

$$k \geq 1, \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } \tau > 0,$$

При $k \geq 2$ они являются модулярными формами, а функция $E_2(\tau)$ в силу условной сходимости двойного ряда устроена немного сложнее. Ряды Фурье этих функций в области $\text{Im } \tau > 0$, выглядят так

$$E_2(\tau) = P(e^{2\pi i \tau}), \quad E_4(\tau) = Q(e^{2\pi i \tau}), \quad E_6(\tau) = R(e^{2\pi i \tau}),$$

где

$$P(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) z^n, \quad Q(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) z^n,$$

$$R(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) z^n, \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

так называемые функции Рамануджана.

Эти функции привлекательны с точки зрения теории трансцендентных чисел, так как они

- Имеют целые коэффициенты рядов Тейлора, растущие не очень быстро;
- Удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (Рамануджан, 1916)

$$\delta P = \frac{1}{12}(P^2 - Q), \quad \delta Q = \frac{1}{3}(PQ - R), \quad \delta R = \frac{1}{2}(PR - Q^2),$$

где $\delta = z \frac{d}{dz}$;

- Алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$ (Малер, 1969).

Для них удалось доказать следующие утверждения, см. [2].

Теорема 3. Пусть $\tau \in \mathbb{C}, \text{Im } \tau > 0$. Тогда среди значений

$$e^{\pi i \tau}, \quad E_2(\tau), \quad E_4(\tau), \quad E_6(\tau)$$

есть по крайней мере три алгебраически независимых числа.

Например, для $\tau = i$ имеем

$$E_2(i) = \frac{3}{\pi}, \quad E_4(i) = 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^8}{(2\pi)^6}, \quad E_6(i) = 0.$$

Поэтому

Следствие 1. Числа

$$\pi, \quad e^\pi, \quad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

алгебраически независимы. В частности, π и e^π алгебраически независимы, а для любого многочлена $A \in \mathbb{Z}[x, y]$, $A \neq 0$, значение $A(\pi, e^\pi)$ трансцендентно.

Следствие 2. Для любого натурального d числа

$$\pi, \quad e^{\pi\sqrt{d}}$$

алгебраически независимы.

Следствие 3. Для любого алгебраического q , $0 < |q| < 1$, числа

$$\sum_{n \geq 0} q^{n^2}, \quad \sum_{n \geq 0} n^2 q^{n^2}, \quad \sum_{n \geq 0} n^4 q^{n^2},$$

алгебраически независимы и, в частности, каждое из них трансцендентно.

В 1851 г. Ж. Лиувилль доказал, что для любого целого $k > 1$ сумма ряда $\sum_{n \geq 0} k^{-n^2}$ есть число иррациональное. Трансцендентность его он доказать не смог, хотя построил первые примеры трансцендентных чисел в виде быстро сходящихся рядов.

Следствие 4. Для любого алгебраического числа q , $0 < |q| < 1$, следующие числа трансцендентны:

1. значение эта-функции Дедекинда

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

2. значение непрерывной дроби Роджерса-Рамануджана

$$RR(q) = 1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \dots}}}$$

Упомянем здесь ещё некоторые нерешённые проблемы.

Гипотеза. Для любого комплексного числа τ , $\text{Im } \tau > 0$, отличного от мнимой квадратичной иррациональности, множество

$$\tau, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad P(q), \quad Q(q), \quad R(q)$$

содержит не менее четырех чисел, алгебраически независимых над \mathbb{Q} .

Трансцендентность чисел $\Gamma(\frac{1}{4}), \Gamma(\frac{1}{3})$ и даже их алгебраическая независимость с π были доказаны в 1980 г. Г.В. Чудновским в связи с исследованием алгебраических соотношений между периодами эллиптических кривых с комплексным умножением. Отметим, что

для чисел $\Gamma(\frac{1}{5})$ или $\Gamma(\frac{2}{5})$ не доказана даже иррациональность, как, впрочем, и для числа $e + \pi$.

Литература

1. Нестеренко Ю. В. О степени трансцендентности некоторых полей, порожденных значениями экспоненциальной функции // Матем. заметки, **46:3** (1989), 40–49.
2. Нестеренко Ю. В. Модулярные функции и вопросы трансцендентности // Матем. сб., **187:9** (1996), 65–96.
3. Diaz G. Grand degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles // J. Number Theory, **31:1** (1989), 1-23.

ТОПОЛОГИЧЕСКИ ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ КОЛЕЦ

В.В. Тензина

viktoria.tenzina@math.msu.ru

УДК 512.556, 512.552.12, 512.552.12, 512.552.2

В данной работе определяется топологически первичный радикал. Рассматриваются различные свойства этого радикала и как он соотносится с другими наднильпотентными радикалами. В частности, он строго больше топологического радикала Бэра, не совпадает с пересечением всех замкнутых первичных идеалов, лежит в топологическом радикале Джекобсона, является специальным радикалом, но при этом может содержать единицу.

Ключевые слова: топологические кольца, первичные кольца.

В теории дискретных колец очень большое значение имеет понятие первичного идеала. Каждое первичное кольцо не содержит никаких ненулевых нильпотентных идеалов, но существуют первичные кольца, содержащие Σ -нильпотентные идеалы (идеал I топологического кольца R называется Σ -нильпотентным, если для любой окрестности нуля V найдётся натуральное n такое, что $I^n \subseteq V$).

Определение. Будем говорить, что топологическое кольцо R топологически первично справа (слева), если для любого ненулевого идеала A кольца R найдётся окрестность нуля V в R такая, что для любого идеала B справедливо, что V не содержит идеал AB (BA).

Лемма 1. Топологически первичное справа (слева) кольцо не содержит Σ -нильпотентных идеалов.

Предложение 1. Кольцо R топологически первично слева (справа) тогда и только тогда, когда оно первично и существует окрестность нуля V в R , не содержащая никакого ненулевого двустороннего идеала.

Последнее утверждение характеризует топологически первичные кольца и показывает, что топологическая первичность слева и справа совпадают. Назовём такие кольца просто *топологически первичными*.

Заметим, что существуют первичные кольца, не являющиеся топологически первичными.

Естественно определить *топологически первичный идеал*, как замкнутый первичный идеал, фактор по которому с индуцированной топологией обладает окрестностью нуля, не содержащей никакого ненулевого идеала, то есть является топологически первичным кольцом. Очевидно, что каждый топологически первичный идеал является замкнутым первичным идеалом.

Для топологического кольца R определим идеал $\text{top } \mathcal{B}(R)$ как пересечение всех топологически первичных идеалов. Назовём такой идеал *топологически первичным радикалом*. Далее будет показано, что это действительно радикал в классе всех топологических колец.

Предложение 2. Пусть R — кольцо с системой окрестностей из идеалов, тогда идеал $\text{top } \mathcal{B}(R)$ замкнут и является пересечением множества всех открытых первичных идеалов.

Последнее утверждение обобщает тот факт, что топологически первичный радикал совпадает с первичным радикалом в классе дискретных колец.

В работе [1] для каждого топологического кольца R определяется топологически первичный квазирадикал $\mu(R)$ как пересечение всех замкнутых идеалов кольца R . Ясно, что $\text{top } \mathcal{B}(R) \supseteq \mu(R)$. Строится пример, показывающий, что $\text{top } \mathcal{B}(R) \neq \mu(R)$.

В статье [2] введено понятие топологического радикала Бэра как нижнего радикала (одно из определений $\mathcal{L}(R)$ как пересечение всех замкнутых идеалов, не содержащих Σ -нильпотентных идеалов).

В работе [3] определяется топологически примитивное кольцо, как кольцо, обладающее точным топологически неприводимым левым модулем (здесь и далее все модули левые), то есть модулем без собственных замкнутых подмодулей. Там же для всякого топологического кольца

R определяется топологический радикал Джекобсона $\text{top } J(R)$, как множество всех элементов кольца, аннулирующих всякий топологически неприводимый модуль над этим же кольцом.

Лемма 2. *Топологически примитивное кольцо топологически первично.*

Теорема 1. *Для любого топологического кольца выполняется:*

$$\mathcal{L}(R) \subseteq \text{top } \mathcal{B}(R) \subseteq \text{top } J(R)$$

В работе строится кольцо R , показывающее, что $\mathcal{L}(R) \neq \text{top } \mathcal{B}(R)$.

Пусть R — топологическое кольцо. Согласно работе [2] последовательность b_1, b_2, \dots элементов кольца R называется m -последовательностью, если для любого натурального i выполняется $b_{i+1} \in (b_i)_R^2$. Последовательность b_1, b_2, \dots называется *исчезающей*, если для любой окрестности V нуля из R существует такое натуральное число n , что $b_n \in V$. В этой же работе [2] через $\mathfrak{M}(R)$ обозначено множество всех таких элементов $b \in R$, что любая m -последовательность, начинающаяся с b , является исчезающей. Доказывается, что множество $\mathfrak{M}(R)$ является идеалом. Далее автор, во-первых, показывает, что если R — кольцо с полной системой идеальных окрестностей нуля, то $\mathcal{L}(R) \subseteq \mathfrak{M}(R)$, а, во-вторых, приводит пример, когда равенство не достигается в том же самом классе колец. Для топологически первичного радикала справедливо равенство.

Теорема 2. *Пусть R — кольцо с системой окрестностей из идеалов, тогда $\text{top } \mathcal{B}(R) = \mathfrak{M}(R)$.*

Определение [4]. *Множество \mathcal{P} топологических колец класса \mathcal{K} называется специальным классом топологических колец, если выполняются следующие условия:*

- 1) Любое кольцо из \mathcal{P} первично.
- 2) Если $R \in \mathcal{P}$ и A — идеал топологического кольца R , то $A \in \mathcal{P}$.
- 3) Если $A \in \mathcal{P}$ и A — идеал топологического кольца $R \in \mathcal{K}$, тогда фактор-кольцо $R/\{r \in R : r \cdot A = A \cdot r = \{0\}\} \in \mathcal{P}$.
- 4) Пусть $R \in \mathcal{P}$ и $\bar{R} \in \mathcal{K}$. Если топологическое кольцо R — открытый изоморфный образ топологического кольца R , то $\bar{R} \in \mathcal{P}$.

Теорема 3. *Множество всех топологически первичных колец является специальным классом колец.*

Следствие. *В классе всех топологических колец свойство кольца R совпадать с $\text{top } \mathcal{B}(R)$ является радикальным свойством.*

Из специальности радикала $\text{top } \mathcal{B}(R)$ следует, что этот радикал наследственен. Заметим, что топологический радикал Бэра таковым не является. Из существования кольца с единицей, радикального в смысле топологического радикала Бэра следует, что топологически первичный радикал также может содержать единицу.

Литература

1. Базигаран Б. Главацкий С.Т. Михалёв А.В. Топологический первичный квазирадикал // *Фундамент. и прикл. матем.*, **10**:3 (2004), 11-22.
2. Арнауттов В.И. Топологический радикал Бэра и разложение кольца // *Сибирский математический журнал*, **5**:6 (1964) 1209-1227.
3. Главацкий С.Т. Михалёв А.В. Тензина В.В. Топологический радикал Джекобсона колец, часть I // *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:8 (2010), 49-68.
4. Водинчар М.И. Наследственные и специальные радикалы в топологических кольцах // *Математические исследования*, **4**:2 (1969), 29-50.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗНАЧЕНИЙ РАСХОДЯЩИХСЯ В \mathbb{C} РЯДОВ

В.Г. Чирский

vgchirskii@yandex.ru

УДК 511.36

Рассматриваются современные подходы к исследованию арифметических свойств значений расходящихся в поле \mathbb{C} рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$. При этом либо изучаются свойства результатов некоторого суммирования таких рядов, либо свойства их значений в полях p -адических чисел.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, суммирование рядов, p -адические числа, полиадические числа.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n, \tag{1}$$

коэффициенты которого – алгебраические числа с некоторыми свойствами (см. [1], [2]). Такие ряды, если они отличны от многочленов, расходятся в поле \mathbb{C} .

Можно рассматривать функции, полученные в результате суммирования Бореля–Лапласа (см. [3]) таких рядов. Например, ряд связанный с именем Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \tag{2}$$

представляет собой асимптотическое разложение для интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-w}}{1+w} dw$. Результат суммирования ряда (2) при $z = 1$ является известной постоянной Гомпертца. В этом направлении проводятся интенсивные исследования [4], [5].

С другой стороны, упомянутые ряды сходятся в полях p -адических чисел, что позволяет рассматривать бесконечномерные векторы, координаты которых представляют собой суммы рассматриваемых рядов в полях p -адических чисел. Это позволяет ввести понятия бесконечной и глобальной линейной или алгебраической независимости. В работах [1], [2] установлены теоремы, подобные теоремам А.Б. Шидловского для E -функций (ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$). Вместе с тем, для конкретного поля p -адических чисел не удаётся доказать хотя бы иррациональность значений таких рядов.

Оказалось, что в отличие от E -функций и G -функций можно рассмотреть ряды (1) с трансцендентными коэффициентами – полиадическими числами Лиувилля. Полиадическое число α имеет каноническое представление

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, \quad a_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_n \leq n.$$

Сумму этого ряда в поле p -адических чисел обозначим $\alpha^{(p)}$. Будем называть полиадическое число α полиадическим числом Лиувилля, если для любых чисел n, P найдётся такое целое число A , что для всех простых чисел $p, p \leq P$ выполняется неравенство $|\alpha^{(p)} - A|_p < |A|^{-n}$. В работе [6] получены теоремы о бесконечной линейной независимости полиадических значений рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n z^n$$

с полиадическими лиувиллевыми параметрами. В работе [7] установлено, что существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в поле p -адических чисел хотя бы одно из чисел

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_m)_n, \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_m + 1)_n$$

является трансцендентным. Этот результат, по-видимому, является первым результатом о трансцендентности чисел вида (3).

Литература

1. *Chirskii V.G.* Product Formula, Global relations and Polyadic Integers // Russ.J.Math.Phys.2019. V.26. №3, 286-305.
2. *Bertrand D., Chirskii V.G., Yebbou J.* Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann.Fac.Sci.Toulouse.2004. V.13, №2, 241-260.
3. *Рамис Ж. П.* Расходящиеся ряды и асимптотические теории.— Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2002, 80 с.
4. *Rivoal T.* On the arithmetic nature of the values of the Gamma function, Euler's constant and Gompertz's constant // Michigan Math. Journal 61(2012), 239-254.
5. *Ferguson T.* Algebraic properties of E-functions // J.Number Theory 229(2021), 168-178.
6. *Чирский В. Г.* Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Российской Академии наук, математика, информатика, процессы управления, — 2022. Т. 506, 95-107.
7. *Чирский В. Г.* Трансцендентность p -адических значений обобщённых гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Российской Академии наук, математика, информатика, процессы управления, — 2023. Т. 510, 29-32.

О ПРОСТО ПРИВОДИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

И.А. Чубаров

igor.chubarov@math.msu.ru

Группа называется просто приводимой (или SR -) группой, если любой ее элемент сопряжен со своим обратным и тензорное произведение любых ее неприводимых комплексных представлений раскладывается на неприводимые без кратностей. Рассматриваются свойства конечных SR -групп, в частности, разрешимость.

Ключевые слова: Группа, конечная группа, просто приводимая группа.

Определение. Группа G называется SR -группой (просто приводимой группой), если она удовлетворяет двум условиям:

(1). Любой элемент группы G сопряжен со своим обратным (такой элемент называют вещественным).

(2). Тензорное произведение любых двух (конечномерных) неприводимых комплексных линейных представлений группы G разлагается на попарно неэквивалентные неприводимые компоненты.

(Для группы G должна иметь место полная приводимость линейных представлений.)

Просто приводимые группы введены Ю. Вигнером [1]. Позднее более широкий класс групп рассмотрел Макки [3]. Просто приводимые группы имеют применение при изучении квантовомеханических систем, обладающих симметрией относительно неприводимых представлений некоторой группы. Как примеры SR -групп, Вигнер отмечает симметрические группы 3 и 4 степеней, группу кватернионов порядка 8, а также группу вращений трехмерного пространства $SO(3)$ и накрывающую её группу $SU(2)$.

В книге Хамермеша [2] просто приводимым группам посвящен параграф 8 главы 5. Он (вслед за Вигнером) вывел теоретико-групповой критерий для конечной группы быть SR -группой.

А.И.Кострикин в конце третьего тома учебника “Введение в алгебру” [4] поставил задачу описания конечных просто приводимых групп. Там же он с помощью критерия Вигнера проверил, что SR -группами являются конечные группы диэдра D_n порядка $2n$ и обобщенно-кватернионные группы Q_{2^n} порядка 2^n .

В дальнейшем речь идет только о конечных группах. В терминах характеров комплексных представлений определение SR -группы G формулируется следующим образом.

(1) Все характеры группы G вещественнозначные; (2) Пусть $\chi_i, i = 1, \dots, r$ – все неприводимые характеры группы G . Тогда $\chi_i \chi_j = \sum_k a_k \chi_k, a_k = 0, 1$.

Обозначим через $\theta(g)$ число квадратных корней из элемента $g \in G$. Критерий Вигнера гласит: конечная группа G тогда и только тогда является просто приводимой, когда

$$\sum_{g \in G} \theta^3(g) = \sum_{g \in G} |C_G(g)|^2, \text{ где } C_G(g) \text{ – централизатор элемента } g \in G.$$

С.П. Струнков [5] доказал, что если SR -группа G имеет хотя бы одно неприводимое представление, которое не реализуется над R , то ее центр нетривиален. Он же записал в Коуровскую тетрадь вопрос: верно ли, что SR -группа разрешима? Положительный ответ дали Л.С.Казарин, В.В. Янишевский и Е.И. Чанков [6,7] по модулю классификации простых конечных групп, причем для более широкого класса ASR -групп. В определении ASR -группы условие (1) отбрасывается, а отсутствие кратностей (2) требуется только в разложении квадрата любого неприводимого характера.

Этим и смежным результатам посвящен доклад.

Литература

1. Wigner E.P. On representations of certain finite groups.// Amer. J. Math., 1941, 63, №1, 57-63.
2. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам.— М.: Мир, 1968.
3. Maskey G.W. Multiplicity free representations of finite groups// Pacific J. Math., 1958, 4, 8, №4, 503-510.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. — М.: Физматлит, 2000.
5. Струнков С.П. О расположении характеров просто приводимых групп // Мат.Заметки, 1982, 4, 31, №3, 357-362.
6. Казарин Л. С., Янишевский В.В. О конечных просто приводимых группах// Алгебра и анализ, 2007, 19, №6, 86–116
7. Казарин Л.С., Чанков Е. И. Конечные просто приводимые группы разрешимы// Матем. сборник, 2010,201 №5, 27-40.

ОБ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ГЕЛЬФОНДА ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ОСТРОВСКОГО

А.В. Шутов

a1981@mail.ru

УДК 511.3

В работе рассмотрен аналог задачи А.О. Гельфонда о распределении сумм цифр b -ичных разложений наугуальных чисел по арифметическим прогрессиям. Вместо b -ичных разложений рассматриваются разложения в систему счисления Островского, связанную с произвольным иррациональным α .

Ключевые слова: цепные дроби, разложение Островского, суммы цифр, задача Гельфонда.

Пусть

$$N = \sum_i n_i b^i,$$

где $b_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ – разложение N в b -ичной системе счисления. Пусть $N_{d,a}^{(b)}(X)$ – количество натуральных чисел, меньших X , для которых $\sum_i n_i \equiv a \pmod{d}$.

А.О. Гельфонд показал [1], что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^\mu).$$

Позднее Ламбергер и Тусвальднер [2] получили аналогичный результат в случае, когда вместо b -ичного разложения натуральных чисел рассматривались разложения по линейным рекуррентным последовательностям, удовлетворяющим определенным условиям.

Мы рассматриваем аналогичную задачу для разложений Островского. Пусть $\alpha = [0; q_1, q_2, \dots)$ – иррационально, $\{q_i\}$ – неполные частные, а $\{Q_i\}$ – знаменатели подходящих дробей. Разложением Островского называется представление

$$N = \sum_i z_i(N) Q_i,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям $0 \leq z_0(N) < q_1$, $0 \leq z_i(N) \leq q_{i+1}$, причем $z_i(N) = q_{i+1}$ влечет за собой $z_{i-1}(N) = 0$.

Пусть $N_{d,a}^{(\alpha)}(X)$ – количество натуральных чисел, меньших X , для которых сумма цифр разложения Островского сравнима с a по модулю d . Из работы [3] вытекает асимптотика

$$N_{d,a}^{(\alpha)}(X) \sim \frac{X}{d},$$

однако метод, использованный в данной работе не позволяет получить никаких оценок остаточного члена.

В случае квадратичной иррациональности вида $\alpha = [0; \bar{g})$ последовательность знаменателей подходящих дробей является линейной рекуррентной последовательностью второго порядка и из вышеупомянутого результата Ламбергера-Тусвальднера вытекает, что остаток в этом случае может быть оценен как $O(X^{\mu_\alpha})$, то есть имеется степенное понижение с показателем, зависящим от иррациональности. Аналогичный результат позднее был получен для квадратичных иррациональностей вида $\alpha = [0; \bar{1}, \bar{g})$ [4].

Нами получены следующие результаты.

Теорема 1. Для любого иррационального α

$$N_{2,a}^{(\alpha)}(X) = \frac{X}{2} + O(\log X).$$

Теорема 2. Для любого $d \geq 3$ существует постоянная $\lambda_d < 1$ такая, что для любого иррационального α

$$N_{d,a}^{(\alpha)}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\lambda_d}).$$

Результат данной теоремы может быть улучшен для конкретных α . В докладе мы рассмотрим ряд результатов в данном направлении. В частности, для любого d можно построить иррациональности со сколь угодно медленным ростом остаточного члена.

Теорема 3. Пусть ϕ монотонная функция и $\phi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда для любого d существует $\alpha = \alpha(d, \phi)$ такое, что

$$N_{d,a}^{(\alpha)}(X) = \frac{X}{d} + o(\phi(X)).$$

Приведем также один пример ситуации, где фактически удается получить точную границу остатка.

Теорема 4. Пусть $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r(X) = |N_{3,0}^{(\tau)}(X) - \frac{X}{3}|$, λ – максимум модулей корней уравнения $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$, $\mu = \log_{\tau} \lambda$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$r(X) = o(X^{\mu+\varepsilon}),$$

но

$$\limsup_{X \rightarrow \infty} \frac{r(X)}{X^{\mu}} > 0.$$

Литература

1. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica, **13**:3 (1968), 259-265.
2. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca, **53**:1 (2003), 1-20.
3. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Fourier-Bohr Spectrum of Sequences Related to Continued Fractions // Journal of Number Theory, **17**:3 (1983), 327-336.
4. Amri M., Spiegelhofer L., Thuswaldner J. W. Sur la répartition jointe de la représentation d'Ostrowski dans les classes de résidu // International Journal of Number Theory, **18**:5 (2022), 955-976.

Секция 2

Геометрия и топология

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ СИСТЕМЫ ЖУКОВСКОГО

Е.С. Агуреева, В.А. Кибкало

agureevamath@yandex.ru, slava.kibkalo@gmail.com

УДК 517.938.5

Для псевдоевклидова аналога системы Жуковского с парой совпадающих главных моментов инерции была построена бифуркационная диаграмма и описаны типы бифуркаций слоения Лиувилля. На плоскости существенных параметров системы построено разделяющее множество, так что разным стратам отвечают разные наборы топологических инвариантов системы.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, динамика твердого тела, слоение Лиувилля, псевдоевклидово пространство, топологический инвариант.

Топологический подход к изучению интегрируемых гамильтоновых систем был развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы [1]. Инвариантом Фоменко–Цишанга системы в ее неособой зоне энергии является граф с оснащением, ребра которого отвечают однопараметрическим семействам регулярных торов Лиувилля, а вершины — бифуркациям слоения. Слоением Лиувилля, напомним, называют разбиение фазового пространства на совместные поверхности уровня первых интегралов.

Совпадение двух инвариантов у разных систем в выбранных неособых зонах энергии означает их топологическую эквивалентность (т.е. послойную гомеоморфность слоений Лиувилля с сохранением некоторых ориентаций). Вычисление топологических инвариантов ряда систем геометрии, механики и математической физики позволило обнаружить нетривиальные эквивалентности систем разной природы.

Большой интерес представляет обобщение топологического подхода на “разумные” классы систем со слоениями Лиувилля более общего вида, в частности, с некомпактными слоями и некритическими бифуркациями. Обзор ряда известных результатов о свойствах таких систем недавно был сделан А.Т. Фоменко и Д.А. Федосеевым [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-71-00111) в МГУ имени М.В.Ломоносова. Е.С. Агуреева является стипендиатом Фонда «БАЗИС».

Агуреева Екатерина Сергеевна, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Кибкало Владислав Александрович, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

В работе А.В. Борисова и И.С. Мамаева [3] был введен класс “псевдоевклидовых” аналогов систем классической механики. При этом выполняется следующая замена в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ со скобкой Пуассона $\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k$, $\{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k$, $\{x_i, x_j\} = 0$, где ε_{ijk} — знак перестановки $123 \rightarrow ijk$.

$$x_1 \rightarrow ix_1, \quad x_2 \rightarrow ix_2, \quad J_1 \rightarrow iJ_1, \quad J_2 \rightarrow iJ_2, \quad J_3 \rightarrow J_3, \quad x_3 \rightarrow x_3.$$

Слоения Лиувилля таких систем содержат как компактные, так и некомпактные слои, некритические бифуркации. В работах В.А. Кибкало изучались топологические свойства псевдоевклидовых аналогов волчка Эйлера [4] и волчка Ковалевской [5, 6].

Доклад посвящен системе Жуковского, обобщающей волчок Эйлера (т.е. систему динамики твердого тела, закрепленного в центре масс) путем добавления постоянного гиростатического момента $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Параметрами задачи являются главные моменты инерции тела A_i и компоненты λ_i вектора λ .

Четырьмя первыми интегралами системы являются функции Казимира $f_1 = a, f_2 = b$, гамильтониан $H = h$ и функция $K = k$ — интеграл аналога волчка Эйлера.

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \quad f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 - x_3J_3 = b,$$

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

В работе [7] авторами было описано критическое множество системы, проверена невырожденность его точек и выписаны уравнения бифуркационных кривых.

Теорема 1. *Бифуркации слоения Лиувилля псевдоевклидова аналога системы Жуковского при фиксированных $f_1 = a, f_2 = b$, где $(a, b) \neq (0, 0)$, происходят в прообразе (при отображении момента (K, H)) дуг трех бифуркационных кривых: кривой $(h(t), k(t))$, прямой $k = 0$ и прямой $k = b^2/a$ (если $a \cdot b \neq 0$):*

$$h(t) = \frac{t^2}{2} \left(\frac{A_1\lambda_1^2}{(1 + A_1t)^2} + \frac{A_2\lambda_2^2}{(1 + A_2t)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(1 + A_3t)^2} \right), \quad k(t) = \frac{A_1^2\lambda_1^2}{(1 + A_1t)^2} + \frac{A_2^2\lambda_2^2}{(1 + A_2t)^2} - \frac{A_3^2\lambda_3^2}{(1 + A_3t)^2}.$$

В случае осесимметричной системы (т.е. при $A_2 = A_1$ или $A_2 = A_3$) в [7] были описаны бифуркационные диаграммы и указано, каким дугам бифуркационных кривых соответствуют те или иные бифуркации слоения. Последние описаны как прямые произведения двумерной базы на одномерный слой. Обнаружены как невырожденные (боттовские) особенности, так и некомпактные некритические бифуркации.

Теорема 2. *В прообразе дуг бифуркационных кривых осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского могут происходить следующие бифуркации слоения Лиувилля. Они имеют вид 3-атомов Фоменко типа прямого произведения расслоенной двумерной базы (2-атомы на рис. 1) и гомеоморфного S^1 или \mathbb{R} слоя.*

$$A \times S^1, \quad B \times S^1, \quad \hat{A} = A \times R, \quad \hat{B} = B \times R, \quad B'' \times S^1, \quad X_U \times S^1, \quad X_{||} \times S^1, \quad O = O_2 \times S^1.$$

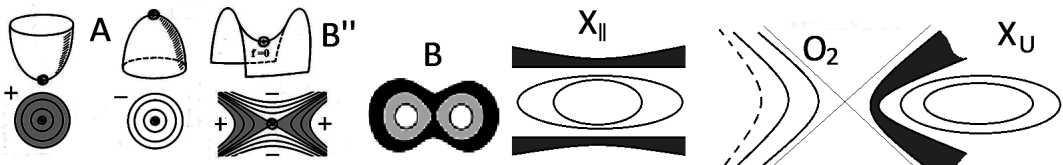


Рис. 1: 2-атомы осесимметричной псевдоевклидовой системы Жуковского.

Расположение бифуркационных кривых на плоскости Okh существенно зависит параметров системы $A_1, A_3, \lambda_1, \lambda_3$. Разделяющим множеством системы назовем набор значений параметров, разбивающих их пространство на области, точкам которых соответствуют системы с фиксированным порядком особых точек на кривой $(k(t), h(t))$ и фиксированными знаками h и k в точках касания осей Oh и Ok . Существенными параметрами оказались $\alpha = (A_3/A_1)^{1/3}, \beta = (\lambda_3/\lambda)^{2/3}$.

Теорема 3. [Е.С.Агуреева] Разделяющее множество пространства параметров $A_1 > 0, A_3 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_3 > 0$ псевдоевклидовой осесимметричной системы Жукковского состоит из прообраза кривых из $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$: $\alpha = 1, \beta = 1, \beta = \alpha^2, \beta = 1/\alpha$. Они разбивают квадрант $\alpha > 0, \beta > 0$ на области I-VIII. На рис. 2 для них указан вид кривой $(k(t), h(t))$ с типами 2-атомов слоения на $\mathbb{R}^3(J_1, J_2, J_3)$ функций K, H .

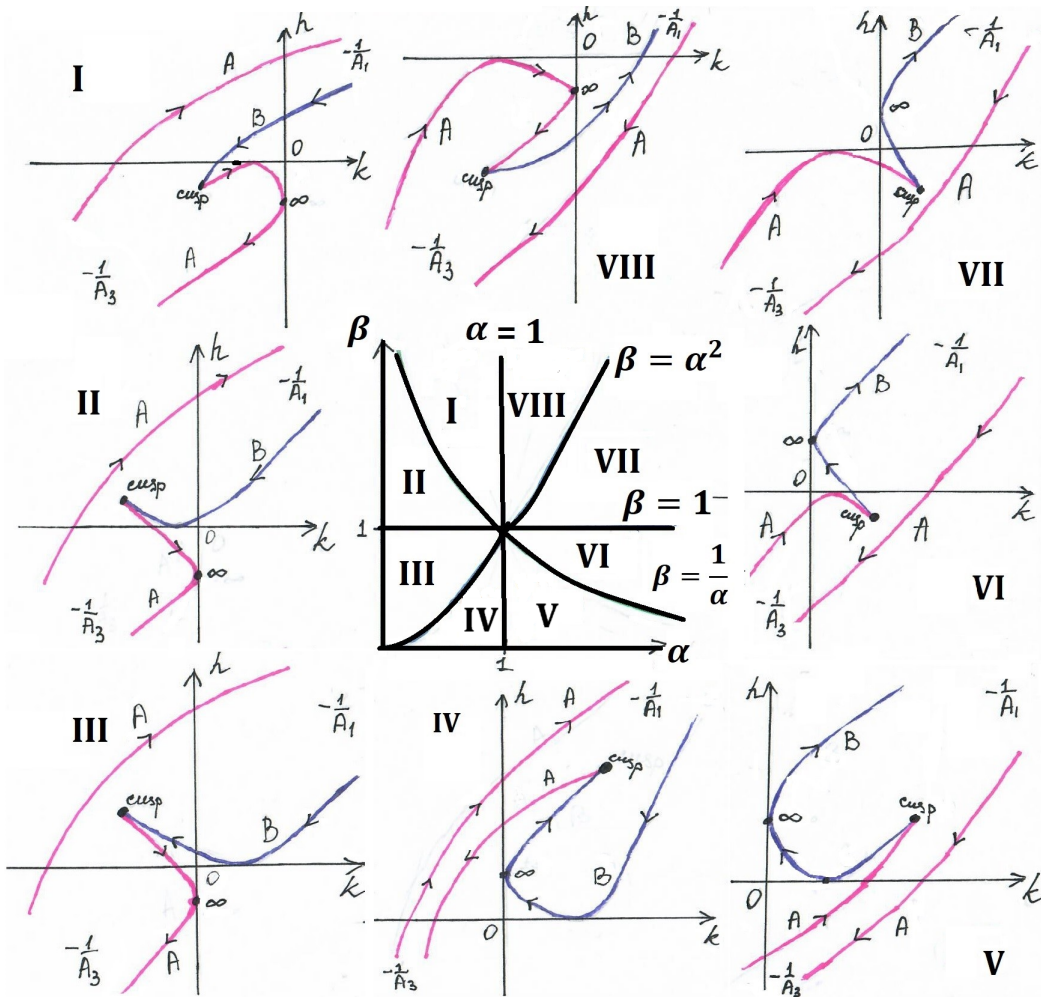


Рис. 2: Разделяющее множество на плоскости $O\alpha\beta$ и отвечающий системам из областей I-VIII вид кривой $(k(t), h(t))$ на плоскости Okh с типами 2-атомов.

При $\alpha = 1$ все моменты инерции $A_1 = A_2 = A_3$ равны. Знаки абсциссы и ординаты точки возврата меняется на кривых $\beta = \alpha^2, \beta = 1/\alpha$ соответственно. Абсцисса точки касания кривой $(k(t), h(t))$ с осью Ok меняет знак при $\beta = 1$.

Для случаев I-VIII вычисление топологических инвариантов на неособых 3-уровнях энергии или интеграла сводится к изучению взаимного расположения прямой $k = b^2/a$ и особых точек кривой $(k(t), h(t))$ и описанию бифуркации совместного уровня $f_1 = a, f_2 = b$ в $\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$ при меняющемся \vec{J} вблизи $k = 0$ и $k = b^2/a$.

Благодарности. Авторы благодарят академика А.Т.Фоменко за внимание к работе.

Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. — Ижевск: Изд. дом "Удмуртский ун.-т 1999.
2. Федосеев Д.А., Фоменко А.Т. Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:6 (2016), 217-243.
3. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // *Rus. J. of Math. Phys.*, **23**:4 (2016), 431-454.
4. Алтуев М.К., Кибкало В.А. Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров // *Матем. сб.*, **214**:3 (2023), 54-70.
5. Kibkalo V.A. Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras // *Moscow Univ. Math. Bull.*, **75**:6 (2020), 263-267.
6. Кибкало В.А. Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской // *Чебышевский сборник*, **24**:1 (2023), 69-88.
7. Агуреева Е.С., Кибкало В.А. Топологический анализ осесимметричной системы Жуковского в случае алгебры Ли $e(2, 1)$ // *Вестник МГУ. Матем.*, (2024), в печати.

ЗВЕЗДЫ В ГЕОМЕТРИИ

Л.А. Антипова, А.В. Горинчук

pridoroga31@yandex.ru, nasya.got@mail.ru

УДК 514.113.5

На примере подробного построения пары полярно-двойственных звездчатых многогранников — большого ромбогексаэдра и полярного к нему в статье вводятся основные понятия теории звездчатых многогранников: однородный многогранник, многогранник каталанового типа, грань и многогранный угол звездчатого многогранника, полярная двойственность.

Ключевые слова: однородный многогранник, многогранник каталанового типа, полярная двойственность звездчатых многогранников.

Известно, что правильных многогранников 9 типов, четыре из которых звездчатые многогранники Кеплера-Пуансо. Три доказательства этого факта предложены Коксетером в [1]. Перечень однородных многогранников, предложенный Коксетером [2], и полнота которого доказана Соповым [3], дает 75 типов непризматических однородных многогранников, среди которых 5 Платоновых тела, 13 архимедовых многогранников и 57 звездчатых однородных многогранников. В статье [4] рассматриваются конфигурации, включающие в себя пары полярно-двойственных многогранников. Один многогранник пары является однородным, а второй — каталанового типа. Дается определение полярного образа однородного звездчатого многогранника и доказывается его полуправильность.

В своем докладе и статье хотим продемонстрировать один из каталановых многогранников, полученный как полярный образ однородного многогранника — большого ромбогексаэдра. Интерес к этому многограннику обусловлен особенностью его грани. Так же как на звездчатую грань правильных многогранников Кеплера нужно смотреть как на объединение треугольников, образующих двумерный симплициальный комплекс с границей пентаграммой, так и грань многогранника полярного к большому ромбогексаэдру — это двумерный симплициальный комплекс, граница которого — это четырехугольник, две стороны которого пересекаются. На рисунке 1 представлен однородный большой ромбогексаэдр и его многогранный угол в вершине, на рисунке 2 — полярный образ многогранного угла большого ромбогексаэдра, являющийся гранью полярного многогранника. И на рисунке 3 продемонстрирован процесс складывания из таких граней многогранника, полярно-двойственного к большому ромбогексаэдру. В статье будет подробно описано построение полярного образа большого ромбогексаэдра, описаны свойства его граней и многогранных углов.

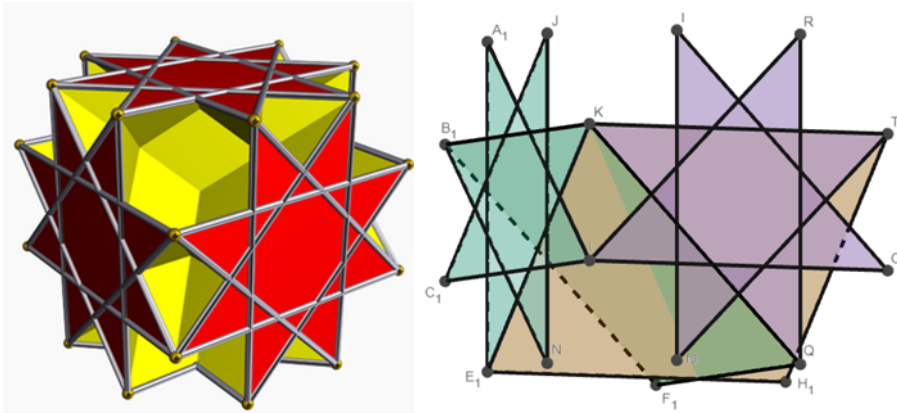


Рис. 1: Большой ромбогексаэдр и его многогранный угол в вершине.

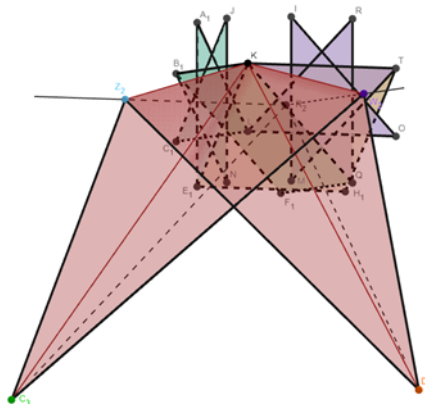


Рис. 2: Полярный образ многогранного угла в вершине большого ромбогексаэдра.

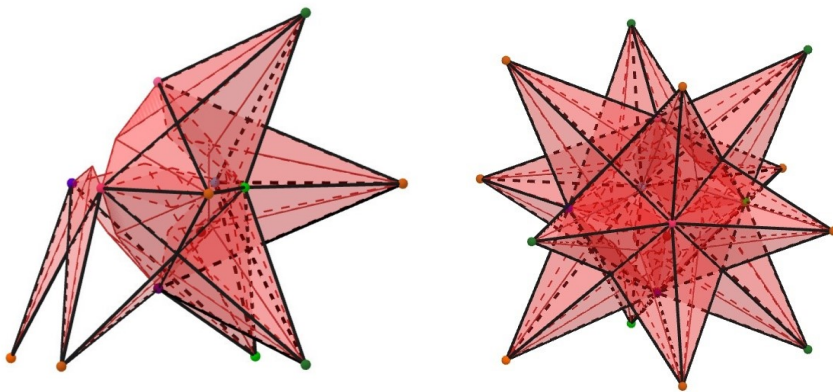


Рис. 3: Несколько граней полярного к ромбогексаэдру многогранника и весь многогранник.

Литература

1. *Coxeter H.S.M.* Regular Polytopes, Изд-во: Courier Corporation, 2012, — 368 с.
2. *Сопов С.П.* Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников // Украинский геометрический сборник, выпуск 8, 1970 год, 139-156.
3. *Coxeter H.S.M. Longuet-Higgins M.S., Miller J.C.P.* Uniform Polyhedra // *Phill.Trans.* 246A, 401-450 (1954).
4. *Антипова Л.А.* Конфигурации полярно-двойственных многогранников. Каталаны звезды. // Современные проблемы математики и математического образования: Герценовские чтения, 76 : сборник научных статей Международной научной конференции // Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. – Санкт-Петербург, 2023. — 326-332.

МНОГОГРАННИКИ — ВЕЧНАЯ ТЕМА НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ. ЗВЁЗДЧАТЫЕ МНОГОГРАННИКИ — ТЕМА СОВРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ И ОБРАЗОВАНИЯ

А.Л. Вернер, Л.А. Антипова, Ю.В. Маслова

werner1934@gmail.com, pridoroga31@yandex.ru, yuliapetrova@mail.ru

В 1932 году Гильберт называл Геометрию “цветущим садом”. Звёздчатые многогранники — одна из аллей этого сада, и мы приглашаем участников конференции прогуляться по этой аллее.

Ключевые слова: многогранник, наука, образование, звёздчатые многогранники.

1. Многогранники геометры изучают со времён Платона, Евклида и Архимеда, а звёздчатые многогранники начали изучать Кеплер и Пуансо. В 20-м веке рисунки правильных звёздчатых многогранников Кеплера – Пуансо стали появляться в школьных учебниках геометрии.

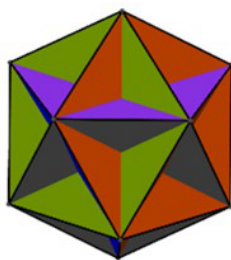


Рис. 1: Большой додекаэдр

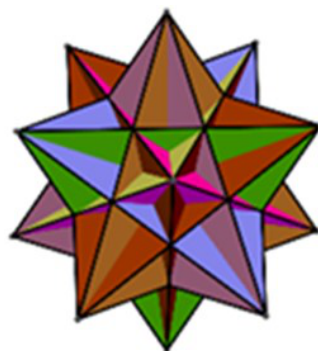


Рис. 2: Большой икосаэдр

2. В 19-м и в 20-м веках геометрами были построены многочисленные виды звёздчатых многогранников. Наиболее интересными из них оказались однородные многогранники Коксетера и полярно двойственные им звёздчатые многогранники Каталанового типа.

3. Изучая их, геометры рассматривают такие понятия современной геометрии поверхностей, как их ориентируемость, род, Эйлерову характеристику, плотность их проектирования на сферу.

4. Авторы доклада стали изучать и кривизну этих многогранников и получили аналоги теоремы Гаусса о сферическом изображении регулярных поверхностей, а также и ряд других результатов.

5. Методы их исследования – наглядны и иллюстрируются красочными рисунками в системе Geogebra3d. Воскрешён древний метод доказательства, когда «Рисунки – доказывают» и сопровождаются лишь одним словом «Смотри!»

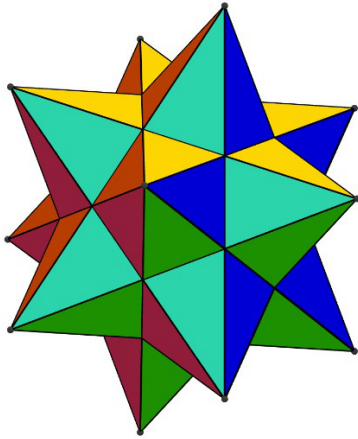


Рис. 3: Малый звездчатый додекаэдр

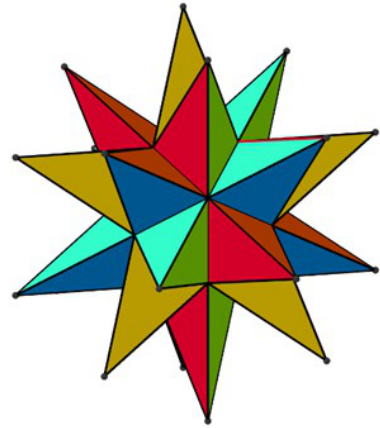


Рис. 4: Большой звездчатый додекаэдр

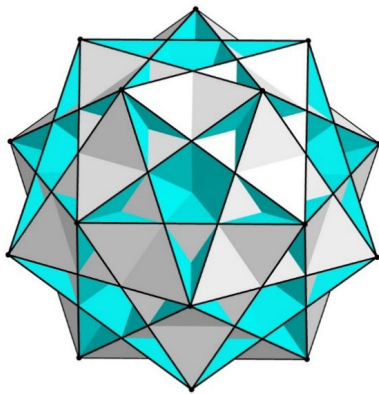


Рис. 5: Большой битригональный икосододекаэдр (однородный многогранник)

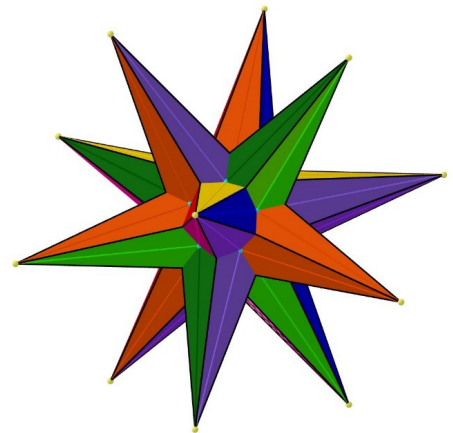


Рис. 6: Большой триамбикикосаэдр (многогранник каталановаго типа)

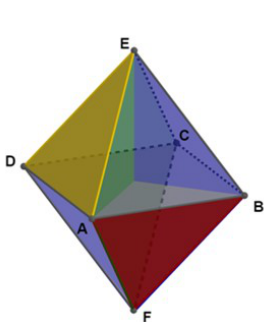


Рис. 7а: Гептаэдр

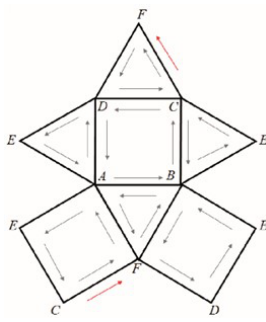


Рис. 7б: Развёртка гептаэдра

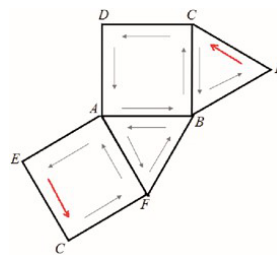


Рис. 7в: Лента Мёбиуса

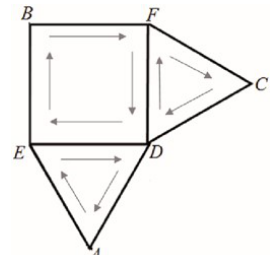


Рис. 7г: Сфера с «дыркой»

6. По этой тематике авторами доклада уже опубликовано несколько книг и выпущено 8 красочных альбомов. Доклад и будет собой представлять презентацию этой литературы. Изображаемые в этой презентации многогранники и теоремы о них – красивые!

7. В 1932 году Гильберт называл Геометрию «цветущим садом». Звёздчатые многогранники —

Вернер Алексей Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, Санкт-Петербургский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия)

Антипова Любовь Александровна, ст.преп., Санкт-Петербургский государственный педагогический универ-

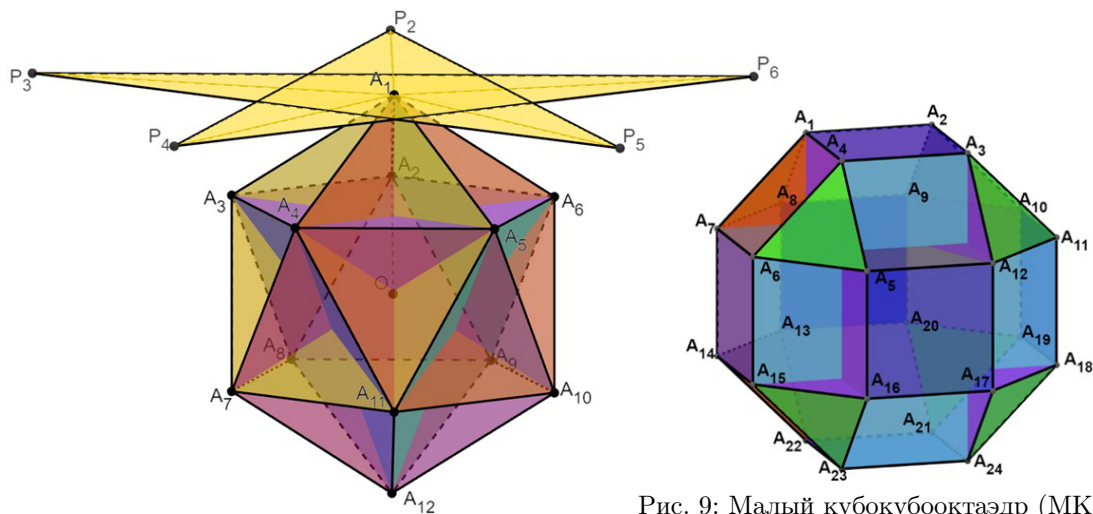


Рис. 9: Малый кубокубооктаэдр (МККО)

Рис. 8: Большой додекаэдр и полярный образ его вершины

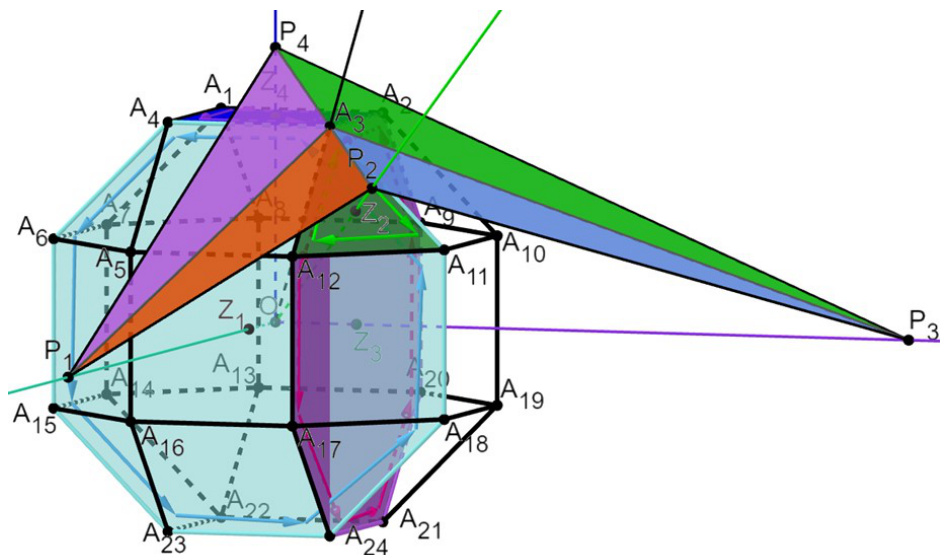


Рис. 10: Полярный образ многогранного угла МККО

одна из аллей этого сада, и мы приглашаем участников конференции прогуляться по этой аллее.

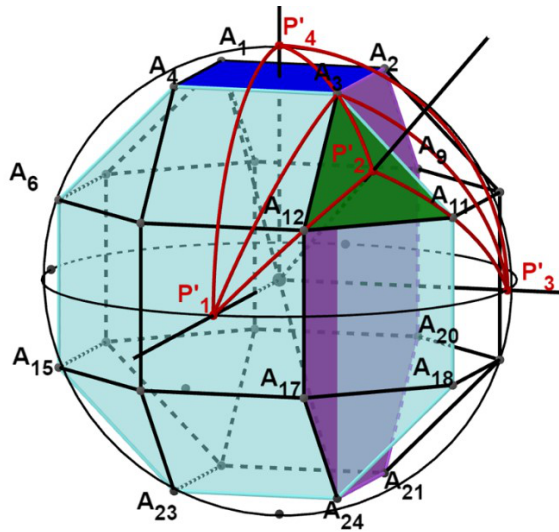


Рис. 11: Сферическое изображение многогранного угла МККО



Рис. 12

ГРУППЫ БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

П.С. Геворкян

pgev@yandex.ru

УДК 515.122.4

Изучаются группы бинарных операций топологического пространства. Доказывается, что эта группа совпадает с группой всех непрерывных левых квазигрупповых операций данного топологического пространства. Получена характеристика дистрибутивного бинарного действия группы G на топологическом пространстве X

Ключевые слова: бинарное действие, квазигруппа, дистрибутивное бинарное G -пространство.

Понятия бинарного действия группы G на топологическом пространстве и бинарного G -пространства были введены в работе [1]. Исследованию теории непрерывных групп бинарных преобразований топологического пространства посвящены также работы [2–7].

Пусть X — топологическое пространство. Множество всех непрерывных бинарных операций $f : X^2 \rightarrow X$ пространства X обозначим через $C_2(X)$. На множестве $C_2(X)$ определим произведение (композицию) двух бинарных операций $f, \varphi : X^2 \rightarrow X$ формулой

$$(f\varphi)(x, y) = f(x, \varphi(x, y)), \quad (1)$$

где $x, y \in X$.

Предложение 1. *Множество $C_2(X)$ с компактно-открытой топологией и операцией (1) является топологическим моноидом с единицей $e(x, y) = y$, где $x, y \in X$.*

Множество всех обратимых бинарных операций моноида $C_2(X)$ обозначим через $H_2(X)$. Итак, $H_2(X)$ является группой.

Теорема 1. *Непрерывная бинарная операция топологического пространства X является обратимой тогда и только тогда, когда она является непрерывной левой квазигрупповой операцией на X .*

Из последней теоремы следует, что $H_2(X)$ — это группа всех непрерывных левых квазигрупповых операций пространства X (с групповой операцией (1)).

Группа $H_2(X)$ не всегда является топологической группой. Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть X — локально компактное и локально связное пространство. Тогда $H_2(X)$ является топологической группой.

Группу всех гомеоморфизмов топологического пространства X обозначим через $H(X)$. Существует естественное вложение группы $H(X)$ в группу $H_2(X)$. Иначе говоря, $H(X)$ является подгруппой группы $H_2(X)$.

Обобщение естественного действия группы преобразований (обратимых унарных операций) $H(X)$ на топологическом пространстве X привело к понятию действия произвольной группы G на пространстве X и к понятию G -пространства. Так как группа $H_2(X)$ действует бинарно на X , то, действуя аналогичным образом, можно определить понятие бинарного действия произвольной топологической группы G на пространстве X и понятие бинарного G -пространства.

Определение 1. Непрерывное отображение $\alpha : G \times X^2 \rightarrow X$ называется бинарным действием топологической группы G на пространстве X , если выполняются условия

$$\alpha(gh, x, y) = \alpha(g, x, \alpha(h, x, y)), \quad (2)$$

$$\alpha(e, x, y) = y, \quad (3)$$

где e — единичный элемент группы G , $g, h \in G$ и $x, y \in X$.

Пространство X с фиксированным бинарным действием группы G или тройка (G, X, α) называется *бинарным G -пространством*.

Если применить обозначение $\alpha(g, x, y) = g(x, y)$, то условия (2) и (3) примут вид:

$$gh(x, y) = g(x, h(x, y)), \quad e(x, y) = y.$$

Пример 1. Любая топологическая группа G бинарно действует на себя формулой

$$g(x, y) = xgy^{-1}, \quad (4)$$

либо

$$g(x, y) = x^{-1}gxy, \quad (5)$$

где $g, x, y \in G$.

Пусть $\alpha : G \times X^2 \rightarrow X$ бинарное действие группы G на X . Для произвольного $g \in G$ рассмотрим непрерывную бинарную операцию $\alpha_g : X^2 \rightarrow X$ пространства X , заданную формулой

$$\alpha_g(x, y) = \alpha(g, x, y).$$

Предложение 2. *Отображение $g \rightarrow \alpha_g$ задает гомоморфизм*

$$\theta : G \rightarrow H_2(X)$$

группы G в группу $H_2(X)$ всех обратимых непрерывных бинарных операций пространства X .

Пусть $\alpha : G \times X^2 \rightarrow X$ — бинарное действие группы G на пространстве X . Для произвольного $x \in X$ определим отображение $\alpha_x : G \times X \rightarrow X$ формулой

$$\alpha_x(g, y) = \alpha(g, x, y),$$

где $g \in G$ и $y \in X$.

Отображение α_x является действием группы G на X . Таким образом, бинарное действие $\alpha : G \times X^2 \rightarrow X$ группы G на пространстве X порождает непрерывное семейство обычных действий $\{\alpha_x, x \in X\}$ группы G на X .

Пусть (G, X, α) и (G, Y, β) бинарные G -пространства. Непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *биеквивариантным*, если выполняется условие

$$f(\alpha(g, x, y)) = \beta(g, f(x), f(y))$$

или

$$f(g(x, y)) = g(f(x), f(y))$$

для всех $g \in G$ и $x, y \in X$.

Биеквивариантное отображение $f : X \rightarrow Y$, являющееся также гомеоморфизмом, называется *эквивалентностью* бинарных G -пространств или *биеквивариантом*.

Все бинарные G -пространства и биеквивариантные отображения составляют категорию, которая является естественным расширением категории G -пространств и эквивариантных отображений.

Перенос основных идей и понятий теории G -пространств в теорию бинарных G -пространств и их последующее исследование обычно связаны с рядом трудностей, вызванных более сложной структурой бинарных действий. Например, объединение биинвариантных подмножеств бинарного G -пространства не является биинвариантным множеством, а орбиты точек бинарного G -пространства могут пересекаться и, следовательно, невозможно построить пространство орбит произвольного бинарного G -пространства. Некоторые из этих проблем удастся решить в специальных классах бинарных G -пространств. Например, понятие пространства орбит можно определить для так называемых *дистрибутивных* бинарных G -пространств.

Определение 2. Бинарное G -пространство (G, X, α) называется *дистрибутивным*, если для произвольных $x, y, z \in X$ и $g, h \in G$ выполняется равенство

$$g(h(x, y), h(x, z)) = h(x, g(y, z)). \quad (6)$$

В этом случае α называется *дистрибутивным* бинарным действием группы G на X .

Пример 2. Бинарное действие (4) группы G на себя является дистрибутивным, в то время как бинарное действие (5) не обладает этим свойством.

Для описания структуры дистрибутивного бинарного действия группы G на X рассмотрим отображение

$$j : G \times X \rightarrow H(X),$$

заданное формулой

$$j(g, x)(y) = g(x, y),$$

где $g \in G$, а $x, y \in X$. Обозначим $j(g, x) = g_x \in H(X)$.

Теорема 3. *Бинарное G -пространство X является дистрибутивным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

1. для произвольных $g \in G$ и $x \in X$ гомеоморфизм $g_x : X \rightarrow X$ является биективным,
2. для произвольных $g, h \in G$ и $x, y \in X$ справедливо равенство $g_x h_y = h_{g_x(y)} g_x$.

Литература

1. Геворкян П.С. О бинарных G -пространствах // Матем. заметки, **96**:4, 2014, 623-626.
2. Gevorgyan P.S. Groups of binary operations and binary G -spaces // Topology and its Applications, 201 (2016), 18-28.
3. Gevorgyan P.S. Groups of Invertible Binary Operations of a Topological Space // Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **53**:1 (2018), 16-20.
4. Геворкян П.С. О пространствах орбит дистрибутивных бинарных G -пространств // Матем. заметки, **112**:2 (2022), 170-178.
5. Gevorgyan P.S., Iliadis S.D. Groups of generalized isotopies and generalized G -spaces // Matematicki Vesnik, **70**:2 (2018), 110-119.
6. Gevorgyan P.S., Melendez Quitze Morales Universal space for binary G -spaces // Topology and its Applications, **329** (2023), 1-8.
7. Геворкян П.С., Назарян А.А. Об орбитах и бинвариантных подмножествах бинарных G -пространств // Матем. заметки, **109**:1 (2021), 47-56.

МНОГООБРАЗИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ВЕКТОРНЫМИ РАСКРАСКАМИ ПРОСТЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Н.Ю. Ероховец

erohovetsn@hotmail.com

УДК 515.164.8, 514.172.45

Каждому простому n -мерному многограннику P и сюръективному отображению Λ множества его гиперграней в \mathbb{Z}_2^r в торической топологии сопоставляется пространство $N(P, \Lambda)$ с действием группы \mathbb{Z}_2^r . Мы даём критерий, когда оно является топологическим многообразием, трёхмерной сферой и трёхмерной рациональной гомологической сферой. Для $n = 3$ мы классифицируем все гиперэллиптические инволюции в \mathbb{Z}_2^r , для которых пространство орбит является сферой.

Ключевые слова: вещественное момент-угол многообразие, несвободное действие конечной группы, гиперэллиптическая инволюция.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-11-00143, <https://rscf.ru/project/23-11-00143/>.

Ероховец Николай Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, МИАН имени В.А. Стеклова РАН (Москва, Россия)

В торической топологии (см. [1]) каждому n -мерному простому выпуклому многограннику P с m гипергранями F_1, \dots, F_m сопоставляется гладкое вещественное момент-угол многообразие

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_P = P \times \mathbb{Z}_2^m / \sim, \text{ где } (p, a) \sim (q, b) \Leftrightarrow p = q \text{ и } a - b \in \langle e_i : p \in F_i \rangle,$$

где e_1, \dots, e_m – стандартный базис в \mathbb{Z}_2^m . На $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P$ действует \mathbb{Z}_2^m , причём $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P / \mathbb{Z}_2^m = P$.

Каждая подгруппа $H \subset \mathbb{Z}_2^m$ ранга $m - r$ задаётся системой r однородных линейных уравнений, описываемых матрицей Λ со столбцами Λ_i . Эти данные можно интерпретировать как векторную раскраску гиперграней многогранника. Обычно рассматриваются подгруппы, действующие свободно, что равносильно условию (*): *векторы $\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k}$ линейно независимы, если $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$* . Тогда пространство орбит $N(P, \Lambda) = \mathbb{R}\mathcal{Z}_P / H$ является гладким многообразием с действием группы $\mathbb{Z}_2^m / H \simeq \mathbb{Z}_2^r$.

Мы рассмотрим случай произвольной подгруппы и следующие вопросы:

1. Когда $N(P, \Lambda)$ является топологическим многообразием (с краем или без)?
2. Когда многообразие $N(P, \Lambda)$ гомеоморфно сфере S^n ?
3. Когда многообразие $N(P, \Lambda)$ является рациональной гомологической n -сферой?
4. Для многообразия $N(P, \Lambda)$ классифицировать все инволюции в \mathbb{Z}_2^r , пространство орбит которых гомеоморфно S^n . Такие инволюции и многообразия называются *гиперэллиптическими*.

Теорема 1. *Пространство $N(P, \Lambda)$ является топологическим многообразием тогда и только тогда, когда все различные ненулевые векторы из множества $\{\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k}\}$ линейно независимы, если $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$. При этом край многообразия $N(P, \Lambda)$ склеивается из гиперграней, у которых $\Lambda_i = 0$.*

Этот результат можно вывести из глубоких результатов М.А. Михайловой и Э. Ланге (см. [3]) но мы даём короткое самостоятельное доказательство, полученное совместно с Д.В. Гугниным.

Предложение 1. *Многообразие $N(P, \Lambda)$ ориентируемо тогда и только тогда, когда векторы Λ_i лежат в одной гиперплоскости в \mathbb{Z}_2^m , не проходящей через 0 .*

Каждая векторная раскраска Λ определяет комплекс $\mathcal{C}(P, \Lambda)$, гипергранями которого являются связные компоненты объединений гиперграней многогранника P одного цвета, а гранями – связные компоненты пересечений гиперграней. Комплексы $\mathcal{C}(P, \Lambda_P)$ и $\mathcal{C}(Q, \Lambda_Q)$ эквивалентны ($\mathcal{C}(P, \Lambda_P) \simeq \mathcal{C}(Q, \Lambda_Q)$), если существует гомеоморфизм $\sigma: P \rightarrow Q$, переводящий гипергрань в гипергрань.

Предложение 2. *Пространства $N(P, \Lambda_P)$ и $N(Q, \Lambda_Q)$ слабо эквивариантно гомеоморфны (то есть существует автоморфизм $A \in Gl_r(\mathbb{Z}_2)$ и гомеоморфизм $\varphi: N(P, \Lambda_P) \rightarrow N(Q, \Lambda_Q)$, такие что $\varphi(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) = (A\mathbf{t}) \cdot \varphi(\mathbf{x})$) тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $\sigma: P \rightarrow Q$, переводящий гипергрань G_i комплекса $\mathcal{C}(P, \Lambda_P)$ в гипергрань комплекса $\mathcal{C}(Q, \Lambda_Q)$, причём $\Lambda_Q(\sigma(G_i)) = A\Lambda_P(G_i)$.*

Пример 1. Для n -мерного симплекса Δ^n и любой его раскраски Λ векторами некоторого базиса $\{e_1, \dots, e_r\} \subset \mathbb{Z}_2^n$ пространство $N(\Delta^n, \Lambda)$ гомеоморфно сфере S^n , склеенной из 2^r копий симплекса. Для фиксированного r все комплексы $\mathcal{C}(\Delta^n, \Lambda)$ эквивалентны. Обозначим через $\mathcal{C}(n, r)$ этот класс эквивалентности.

Пример 2. Любой грани G коразмерности k многогранника P сопоставим раскраску Λ_G ранга $k + 1$ векторами базиса. Гиперграням, содержащим G , сопоставим разные базисные векторы, а остальным гиперграням – один и тот же дополнительный базисный вектор. Комплекс $\mathcal{C}(P, \Lambda_G)$ эквивалентен $\mathcal{C}(n, k + 1)$, поэтому пространство $N(P, \Lambda_G) = \mathbb{R}\mathcal{Z}_P / H_G$ гомеоморфно сфере. Этот пример построен совместно с Д.В. Гугниным и обобщает его конструкцию из [4], где $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k} / \mathbb{Z}_2^{k-1} \simeq S^{n_1 + \dots + n_k}$.

Теорема 2. *Для $n = 3$ пространство $N(P, \Lambda)$, отвечающее раскраске ранга r , гомеоморфно S^3 тогда и только тогда, когда комплекс $\mathcal{C}(P, \Lambda)$ эквивалентен $\mathcal{C}(n, r)$.*

Теорема 3. Для $n = 3$ многообразие $N(P, \Lambda)$, отвечающее раскраске ранга r , имеет такие же рациональные гомологии, как S^3 , тогда и только тогда, когда все векторы Λ_i лежат в одной гиперплоскости, не содержащей $\mathbf{0}$ и внутри этой гиперплоскости для каждой гиперплоскости π объединение $\bigcup_{\Lambda_i \in \pi} F_i$ является диском.

Этот результат следует из описания когомологий $H^*(N(P, \Lambda), \mathbb{Q})$, данного в [5].

Примеры трёхмерных гиперэллиптических многообразий с геометрической структурой в одной из пяти геометрий Тёрстона \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , S^3 , $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ и $S^2 \times \mathbb{R}$ были построены в работах А.Д. Медных и А.Ю. Веснина (см. [6, 7]). Для этого были использованы гамильтоновы (то есть содержащие все вершины многогранника) циклы, тета- и K_4 -подграфы. Тета-подграф и K_4 -подграф – это подмножества 1-остова многогранника, состоящие из 2 вершин и трёх простых путей и 4 вершин, попарно соединённых простыми путями, соответственно. Пути могут пересекаться только в вершинах.

Каждое гамильтоново пустое множество, цикл, тета- или K_4 -подграф Γ в 1-остове комплекса $\mathcal{C}(P, \Lambda)$ задаёт раскраску Λ_Γ ранга 2, 3, 4 и 5 соответственно по следующему правилу. Грани многогранника, лежащие в одной грани G_i подграфа, можно раскрасить двумя векторами \mathbf{a}_i и \mathbf{b}_i так, что смежные грани имеют разный цвет, где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{r-1}, \mathbf{b}_1$ – базис в \mathbb{Z}_2^r и $\tau = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$ не зависит от i . Тогда τ – гиперэллиптическая инволюция на многообразии $N(P, \Lambda_\Gamma)$, индуцированная Γ .

Теорема 4. Для $n = 3$ инволюция $\tau \in \mathbb{Z}_2^r$ является гиперэллиптической тогда и только тогда, когда $2 \leq r \leq 5$, $N(P, \Lambda) = N(P, \Lambda_\Gamma)$ и τ индуцирована гамильтоновым пустым множеством $\Gamma \subset \mathcal{C}(P, \Lambda)$ для $r = 2$, циклом для $r = 3$, тета-графом для $r = 4$ и K_4 -графом для $r = 5$.

Пример 3. Если $r = n$ и подгруппа H действует свободно, то многообразие $N(P, \Lambda)$ называется малым накрытием многогранника P . Для $n = 3$ малое накрытие $N(P, \Lambda)$ является рациональной гомологической сферой тогда и только тогда, когда \mathbb{Z}_2^3 содержит три гиперэллиптические инволюции и тогда и только тогда, когда раскраска Λ индуцирована тремя гамильтоновыми циклами, причём каждое ребро многогранника принадлежит ровно двум из них.

Доказательства всех перечисленных выше результатов будут опубликованы в [8].

Литература

1. Buchstaber V. and Panov T. Toric Topology // Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
2. Михайлова М.А. О факторпространстве по действию конечной группы, порожденной псевдоотражениями // Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:1 (1984), 104-126.
3. Lange C. When is the underlying space of an orbifold a manifold? // Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019), 2799-2828.
4. Гугнин Д.В. Разветвленные накрытия многообразий и $n\mathbb{H}$ -пространства // Функци. анализ и его прил., 53:2 (2019), 68-71.
5. Choi S. and Park H. On the cohomology and their torsion of real toric objects // Forum Math. 29 (2017), no. 3, 543-553, arXiv:1311.7056v1.
6. Mednykh A.D. Three-dimensional hyperelliptic manifolds // Ann. Global. Anal. Geom., 8:1 (1990), 13-19.
7. Vesnin A.Yu., Mednykh A.D. Three-dimensional hyperelliptic manifolds and Hamiltonian graphs // Siberian Math. J., 40:4 (1999), 628-643.
8. Erokhovets N. Manifolds defined by non-free actions of commuting involutions on real moment-angle manifolds // arXiv, in press.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ В ТЕОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ОТОБРАЖЕНИЙ

С. Илиадис

s.d.iliadis@gmail.com

УДК 515.12

Ставятся открытые вопросы об универсальных пространствах и отображениях.

Ключевые слова: универсальное пространство, универсальное отображение.

Все рассматриваемые пространства предполагаются T_0 -пространствами веса фиксированного бесконечного кардинала τ и все отображения непрерывными.

Топологическое пространство X с фиксированной на нем точкой a^X , называется *отмеченным пространством* и обозначается через (X, a^X) . Классы отмеченных пространств обозначаются через $(\mathbb{S}, *)$. Будем говорить, что отмеченное пространство (T, a^T) является *универсальным в некотором классе* $(\mathbb{S}, *)$ если:

(a) $(T, a^T) \in (\mathbb{S}, *)$ и

(b) для любого $(X, a^X) \in (\mathbb{S}, *)$ существует такое вложение $i_T^X : X \rightarrow T$, что $i_T^X(a^X) = a^T$ (т.е. (X, a^X) может быть вложено в (T, a^T)).

Из определения универсальных отмеченных пространств вытекает, что если в $(\mathbb{S}, *)$ существует универсальный элемент, то тогда и в \mathbb{S} также существует универсальный элемент. Однако, обратное не верно. Например, в классе \mathbb{S} всех локально конечномерных сепарабельных метризуемых пространств существуют универсальные элементы, но как легко доказать, в классе $(\mathbb{S}, *)$ всех таких отмеченных пространств не существуют универсальные элементы. Тем не менее, легко показать, что если в классе \mathbb{S} существует однородное универсальное пространство T , то и в любом классе $(\mathbb{S}, *)$ отмеченных пространств существует универсальный элемент. Таким элементом будет любое отмеченное пространство $(T, a) \in (\mathbb{S}, *)$.

Таким образом из однородности Гильбертова куба I^ω и его универсальности в классе всех сепарабельных метризуемых пространств вытекает, что для любой его точки $a \in I^\omega$, отмеченное пространство (I^ω, a) является универсальным в этом классе. Аналогично, из однородности Тихонова куба I^τ и его универсальности в классе всех вполне регулярных пространств вытекает, что для любой его точки $a \in I^\tau$, отмеченное пространство (I^τ, a) является универсальным отмеченным пространством в этом классе.

Заметим, что хотя Александровский куб F^τ (т.е. произведение τ штук связных двоеточий (см. [1]) является универсальным в классе всех пространств, к нему нельзя применить предыдущие рассуждения поскольку он не однороден. Отсюда, возникают следующие два вопроса:

Вопрос 1. Существует ли в классе всех отмеченных пространств универсальный элемент?

Вопрос 2. Существует ли такая точка $a \in F^\tau$, что (F^τ, a) универсально в классе всех отмеченных пространств?

В работе [2] рассматриваются следующие классы пространств:

\mathbb{S}_1 – класс всех пространств;

\mathbb{S}_2 – класс всех регулярных пространств;

\mathbb{S}_3 – класс всех вполне регулярных пространств;

\mathbb{S}_4 – класс всех пространств размерности $ind \leq n \in \omega$;

\mathbb{S}_5 – класс всех регулярных пространств размерности $ind \leq n \in \omega$;

\mathbb{S}_6 – класс всех вполне регулярных пространств размерности $ind \leq n \in \omega$;

\mathbb{S}_7 – класс всех ν -мерных пространств, $\omega \leq \nu \leq \tau$;

\mathbb{S}_8 – класс всех сильно ν -мерных пространств, $\omega \leq \nu \leq \tau$;

\mathbb{S}_9 – любое пересечение одного из классов $\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_6$ с классом \mathbb{S}_7 ;

\mathbb{S}_{10} – любое пересечение одного из классов $\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_6$ с классом \mathbb{S}_8 ;

Во всех этих классах существуют универсальные элементы, которые были построены единым методом в указанной выше работе.

Для любого класса пространств \mathbb{S} , через (\mathbb{S}, \circ) обозначаем класс всех отмеченных пространств (X, a^X) , где $X \in \mathbb{S}$ и a^X – замкнутая точка X (т.е. множество $\{a^X\}$ замкнуто в X). В работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть \mathbb{S} – один из классов $\mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_{10}$. Тогда в классе (\mathbb{S}, \circ) отмеченных пространств существует универсальный элемент.

Наряду с отмеченными пространствами, где фиксированна некоторая точка, рассмотрим пространства где фиксируется некоторое подпространство, одно и то же для всех пространств. Более точно это можно сформулировать следующим образом. Пусть K – топологическое пространство. Пара (X, i_X^K) , где X – пространство и i_X^K – вложение пространства K в X , назовем K -отмеченным пространством. Классы K -отмеченных пространств будем обозначать через (\mathbb{S}, K) . K -отмеченное пространство (T, i_T^K) назовем универсальным в классе (\mathbb{S}, K) , если $(T, i_T^K) \in (\mathbb{S}, K)$ и для любого $(X, i_X^K) \in (\mathbb{S}, K)$ существует такое вложение $e_T^X : X \rightarrow T$, что $i_T^K = e_T^X \circ i_X^K$.

Интересен случай когда K – компактное пространство. Так например, когда K является метризуемым компактом, то в классе всех K -отмеченных сепарабельных метризуемых пространств существует универсальный элемент. Таким элементом будет K -отмеченное пространство $(\mathbf{U}, i_{\mathbf{U}}^K)$, где \mathbf{U} – универсальное метрическое пространство Урысона (см. [4]), а $i_{\mathbf{U}}^K$ – любое вложение компакта K в \mathbf{U} . Это вытекает из известных свойств пространства \mathbf{U} . Таким образом, естественно возникают следующие два вопроса.

Вопрос 3. Существуют ли универсальные элементы в классе всех K -отмеченных пространств, где K – компакт?

Вопрос 4. Существуют ли универсальные элементы в классах (\mathbb{S}_i, K) , $i = 1 - 10$, состоящих из K -отмеченных пространств (X, i_X^K) , где $X \in \mathbb{S}_i$ и i_X^K – (замкнутое) вложение компакта K в X ?

Интересен также случай, когда рассматриваются K -отмеченные пространства (X, i_X^K) , где K – дискретное пространство, а i_X^K – (замкнутое) вложение пространства K в X . Для этого случая также можно поставить указанные выше вопросы. Можно поставить и следующий общий вопрос.

Вопрос 5. Найти пространства K и классы K – отмеченных пространств, для которых существуют универсальные элементы.

В работе [2] доказано, что если \mathbb{S}' и \mathbb{S}'' – два насыщенных класса пространств (в частности, эти классы могут независимо совпадать с одним из классов $\mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_{10}$), то тогда класс \mathbb{F} всех отображений $f : X_f \rightarrow Y_f$, где $X_f \in \mathbb{S}'$ и $Y_f \in \mathbb{S}''$, является насыщенным классом отображений и, следовательно, в этом классе существует универсальное отображение. При этом, отображение $T : X_T \rightarrow Y_T$ называется универсальным в некотором классе отображений \mathbb{F} , если для любого элемента $f : X_f \rightarrow Y_f$ класса \mathbb{F} существуют вложения $i_{X_T}^{X_f} : X_f \rightarrow X_T$ и $i_{Y_T}^{Y_f} : Y_f \rightarrow Y_T$ такие, что $i_{Y_T}^{Y_f} \circ f = i_{Y_T}^{X_f} \circ i_{X_T}^{X_f}$. В этом случае будем говорить, что отображение f вложено в отображение T или, что T содержит f .

Пусть f – некоторое отображение. Отображение F назовем f -отмеченным, если f вложено в F . Для любых двух классов пространств \mathbb{S}' и \mathbb{S}'' через $(\mathbb{S}', \mathbb{S}'', f)$ обозначим класс всех отображение F , область определения которых принадлежит \mathbb{S}' , область значений классу \mathbb{S}'' и которые содержат f . Такие классы будем называть f -отмеченными классами отображений.

По аналогии с отмеченными пространствами мы можем поставить следующие вопросы.

Вопрос 8. Пусть \mathbb{S}' и \mathbb{S}'' являются независимо одним из классов $\mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_{10}$. Будут ли классы отмеченных отображений $(\mathbb{S}', \mathbb{S}'', f)$ иметь универсальные элементы, если: (а) f – отображение, область определения которого является компактом (в частности, одноточечным пространством), (б) f – замкнутое отображение дискретного пространства?

Аналогичные вопросы универсальности можно поставить и в категории пар (f, g) гомотопных отображений.

Литература

1. Александров П.С. К теории топологических пространств // Докл. Акад. Наук СССР 2 (1936), 51-54.
2. Iliadis S.D. Universal Spaces and Mappings // North-Holland Mathematics Studies 198, Elsevier (2005).
3. Iliadis S. Universal marked spaces // в печати.
4. Urysohn P. Sur un espace metrique universel // Bull. de Sciences Mathematiques, 2 ser., vol. 51, 1-38.

О ТЕОРЕМАХ ТИПА КЕЙСИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛАГЕРРА

А.В. Костин

kostin_andrei@mail.ru

УДК 514.13

В работе рассматриваются взаимосвязи между теоремами об окружностях, касательных расстояниях между ними и преобразованиях, сохраняющих такие расстояния в пространствах постоянной кривизны.

Ключевые слова: теорема Птолемея, пространство постоянной кривизны, преобразование Лагерра.

Теорема Кейси [1] (в других транслитерациях, Кези или Кэзи) является одним из обобщений теоремы Птолемея о длинах сторон и диагоналей вписанного четырехугольника. Вершины четырехугольника в ней заменяются окружностями, касающимися одной окружности, а длины сторон и диагоналей – на длины отрезков общих касательных к соответствующим парам окружностей. Теоремы такого типа на евклидовой плоскости и на плоскости Лобачевского [2] можно интерпретировать как теоремы о многоугольниках, вписанных в сферы нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства и трехмерного псевдогиперболического пространства соответственно [3]. У этих теорем есть различные аналоги и обобщения в пространствах постоянной кривизны [4,5]. Между теоремами такого типа в различных пространствах можно установить наглядные взаимосвязи. В частности, с помощью изотропной проекции показывается, что теоремы такого типа на псевдоевклидовой плоскости оказываются эквивалентными аналогичным теоремам на евклидовой плоскости. Наряду с теоремами об окружностях и касательных расстояниях между ними естественно рассматривать преобразования Лагерра, сохраняющие такие расстояния. Между этими преобразованиями и их свойствами в разных пространствах тоже можно установить наглядные взаимосвязи. Ряд взаимосвязей могут быть получены чисто синтетическими методами.

Литература

1. Casey J. A sequel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples, 5th. ed. — Dublin: Hodges, Figgis and Co., 1888.
2. Абросимов Н. В., Михайлова Л. А. Casey's theorem in hyperbolic geometry // Сибирские электронные математические известия, **12** (2015), 354-360.
3. Костин А. В., Костина Н. Н. Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога // Сибирские электронные математические известия, **13** (2015), 242-251.
4. Костин А. В. Об обобщениях теоремы Птолемея на плоскости Лобачевского // Сибирские электронные математические известия, **19:2** (2022), 404-414.
5. Костин А. В. Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского // Владикавказский математический журнал, **25:4** (2023), 58-67.

ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВ И АЛГЕБРЫ POU

В.М. Мануйлов

vladimir.manuilov@math.msu.ru

УДК 517.98

В докладе описана связь между алгеброй POU симплицеального комплекса и равномерными алгебрами POU его дискретизаций.

Ключевые слова: алгебра POU , дискретизация, метрика, C^* -алгебра.

Костин Андрей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета (Елабуга, Россия)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00068).

Мануйлов Владимир Маркович, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Алгебры Роу играют все более важную роль в теории индекса эллиптических операторов на некомпактных многообразиях и их обобщениях. Следуя идеологии некоммутативной геометрии, они обеспечивают взаимодействие между метрическими пространствами (например, многообразиями) и (некоммутативными) C^* -алгебрами.

Напомним определение алгебры Роу метрического пространства X [3]. Пусть H_X – гильбертово пространство с действием алгебры $C_0(X)$ непрерывных функций на X , обращающихся в нуль на бесконечности. Предполагается, что $\{f\xi : f \in C_0(X), \xi \in H_X\}$ плотно в H_X , и если умножение на f компактно, то $f = 0$. Оператор $T \in \mathbb{B}(H_X)$ является *локально компактным*, если операторы Tf и fT компактны для любого $f \in C_0(X)$. Он имеет *конечное распространение*, если существует такое $R > 0$, что $fTg = 0$ всякий раз, когда расстояние между носителями $f, g \in C_0(X)$ больше R . Алгебра Роу $C^*(X, H_X)$ является замыканием по норме $*$ -алгебры локально компактных операторов конечного распространения на H_X . Это определение не зависит от выбора H_X и обычно обозначается как $C^*(X)$. Удобно иметь борелевскую меру на X . Когда мера μ на X не имеет атомов, простейший выбор $H_X = L^2(X)$ со стандартным действием $C_0(X)$ удовлетворяет вышеуказанным свойствам, поэтому достаточно использовать $L^2(X)$ для определения алгебры Роу.

Когда X дискретно (с атомарной мерой), выбор $H_X = l^2(X)$ не годится, поскольку умножение на ненулевую функцию с конечным носителем компактно. Чтобы исправить это, можно взять $H_X = l^2(X) \otimes H$ с бесконечномерным гильбертовым пространством H . Но есть и другой вариант: по-прежнему использовать $H_X = l^2(X)$. Получающаяся таким образом C^* -алгебра называется *равномерной алгеброй Роу* пространства X и обозначается через $C_u^*(X)$. Эта C^* -алгебра существенно отличается от алгебры Роу $C^*(X)$. С ней удобнее проводить вычисления, но она имеет меньше связей с эллиптической теорией.

Многообразия и некоторые другие пространства X часто наделяются дискретными подпространствами $D \subset X$, которые являются ε -плотными для некоторых ε , например, решетки в группах Ли или, в более общем образе, множества Делоне в метрических пространствах [1]. Некоторые проблемы, связанные с X , могут упроститься при сведении к такой дискретизации D . В частности, было бы интересно понять связь между алгеброй Роу пространства X и равномерными алгебрами Роу ее дискретизаций D . Множества Делоне в общих метрических пространствах слишком нерегулярны, чтобы установить такое соотношение, поэтому мы ограничимся случаем, когда X является симплицальным комплексом со стандартной метрикой, а множество его вершин представляет собой дискретизацию X , и для получения более плотных дискретизаций, мы будем делить симплексы на более мелкие одинаковые симплексы.

Наш первый результат состоит в построении непрерывного поля C^* -алгебр над $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ таким образом, что слой над ∞ является алгеброй Роу пространства X , в то время как слой над любой конечной точкой является равномерной алгеброй Роу некоторой дискретизации $D(n)$, $n \in \mathbb{N}$, пространства X . Такие не локально тривиальные непрерывные поля C^* -алгебр интересны тем, что они обеспечивают связь между слоями в разных точках. В частности, они могут предоставить отображение из K -теории слоя над ∞ в K -теорию слоев над конечными точками.

Второй результат состоит в построении прямого предела равномерных алгебр Роу дискретизаций $D(n)$ пространства X , которые становятся все более и более плотными, и вложение этого прямого предела в $C^*(X)$. Такой прямой предел является хорошим кандидатом для того, что могло бы быть равномерной алгеброй Роу недискретного пространства.

Указанные результаты изложены в статье [2]. Исследование поддержано грантом РФФ 23-21-00068.

Литература

- 1 *Bellissard J.V.* Delone Sets and Material Science: a Program // in Mathematics of Aperiodic Order. Progress in Mathematics, **309**, 405-428, Birkhäuser, 2015.
- 2 *Manuilov V.M.* Relating the Roe algebra of a space to the uniform Roe algebras of its discretizations // Lobachevskii J. Math. **45** (2024), в печати.
- 3 *Roe J.* Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds // CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **90**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

ПОСТРОЕНИЕ КАРТ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЗАДАННОМУ ГРАФУ

Ю.В. Маслова, Г.Р. Загорская

yuliapetrova@mail.ru, galinazagorskaa5@mail.ru

УДК 519.173.2, 519.175.3

В данной работе приводится способ построения всевозможных карт, соответствующих заданному графу. Описанная процедура продемонстрирована на примере полного графа с четырьмя вершинами.

Ключевые слова: карта, поверхность, граф.

В настоящее время теория карт активно развивается. Написано большое количество работ, раскрывающих различные аспекты этого раздела комбинаторики: от раскрасок карт до их перечисления. В трудах, связанных с перечислением карт, основным результатом является количество карт с некоторым условием (например, карт с n рёбрами [1] или d -регулярных карт [2]) на ориентируемых или неориентируемых поверхностях заданного рода g с точностью до гомеоморфизма поверхностей. Наше исследование посвящено ответам на следующие вопросы: как построить всевозможные (с точностью до гомеоморфизма поверхности) карты, соответствующие выбранному графу, как отличить их друг от друга.

В данной работе под графом мы понимаем конечное связное одномерное клеточное пространство, а под поверхностью – связное компактное двумерное многообразие.

Основные определения.

Пусть дан граф G и поверхность M .

Определение 1. Вложением графа G в поверхность M называется отображение $f : G \rightarrow M$, такое, что:

- 1) Отображение f – вложение;
- 2) Графы G и $f(G)$ изоморфны;
- 3) Множество $M \setminus f(G)$ – дизъюнктное объединение открытых кругов.

Определение 2. Картой (G, M) называется пара (G, M) , где G – граф, вложенный в поверхность M .

Пусть (G_1, M_1) и (G_2, M_2) – карты.

Определение 3. Будем говорить, что карты (G_1, M_1) и (G_2, M_2) изоморфны, если существует гомеоморфизм h поверхностей M_1 и M_2 , т.е. $h : M_1 \rightarrow M_2$, такой, что его сужение на граф G_1 является изоморфизмом графов G_1 и G_2 .

Стоит отметить, что если поверхности M_1 и M_2 ориентируемы, то в качестве отображения h рассматриваем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм поверхностей. Если поверхности M_1 и M_2 неориентируемы, то в качестве отображения h рассматриваем всевозможные гомеоморфизмы этих поверхностей.

Основные результаты:

- 1) изучены свойства карт, которые сохраняются при изоморфизме;
- 2) построены все карты, графами которых являются букеты одной, двух и трёх окружностей;
- 3) описан способ построения всевозможных карт для графов, ранг одномерной группы гомологий которых равен одному, двум или трём.

В качестве примера, используя описанный способ, построены все карты графа тетраэдра. Их количество оказалось равным девяти.

Литература

1. Krasko E.S., Omelchenko A.V. Enumeration of unsensed orientable and non-orientable maps // European Journal of Combinatorics, 2020, Vol. 86, P. 103093.
2. Краско Е.С., Омелченко А.В. Перечисление регулярных карт на поверхностях заданного рода // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2016, том 450, С 74–108.

Маслова Юлия Валерьевна, к.ф.-м.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия)

Загорская Галина Романовна, РГПУ имени А.И. Герцена, факультет математики (Санкт-Петербург, Россия)

**МИНИМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НИЛЬМНОГООБРАЗИЯ И ПРОСТРАНСТВО
МОДУЛЕЙ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР**

Д.В. Миллионщиков

dmitry.millionschikov@math.msu.ru

УДК 514.763.42

Рассматриваются вещественные нильмногообразия G/Γ , допускающие левоинвариантную комплексную структуру. Для описания пространства модулей $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ таких структур построена техника специальных минимальных моделей $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}^J$ нильмногообразий с учетом комплексной структуры J .

Ключевые слова: нильмногообразие, минимальная модель, комплексная структура.

Рассмотрим односвязную вещественную группу Ли G с касательной алгеброй Ли \mathfrak{g} . Перейдя к комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ ее двойственного пространства \mathfrak{g}^* , рассмотрим прямую сумму собственных подпространств оператора $J_{\mathbb{C}}^*$:

$$(\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}, \tag{1}$$

где $\Lambda^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}$ — собственные подпространства $J_{\mathbb{C}}^*$, отвечающие $\lambda = i, -i$, соответственно. Комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда

$$d\Lambda^{1,0} \subset \Lambda^{1,0} \wedge (\Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}) = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1},$$

где $d : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \wedge \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ — двойственное отображение к скобке Ли $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

Определим для нильпотентной алгебры Ли \mathfrak{g} возрастающую последовательность подпространств в ее двойственном пространстве \mathfrak{g}^*

$$0 \subset V_1\mathfrak{g}^* \subset V_2\mathfrak{g}^* \subset \dots \subset V_l\mathfrak{g}^* \subset \dots \subset V_s\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*,$$

где подпространство $V_l\mathfrak{g}^*$ определено как аннулятор $(\mathfrak{g}^{l+1})^{ann}$ идеала \mathfrak{g}^{l+1} нижнего центрального ряда. Определим также, следуя [1], возрастающую последовательность подпространств $V_l^{1,0}, l \geq 1$, в $\Lambda^{1,0}$

$$V_l^{1,0} = (V_l\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}} \cap \Lambda^{1,0}, \quad l = 1, \dots, s.$$

Расширяя последовательно базисы подпространств $V_l^{1,0}$, Саламон [1] построил специальный базис $\omega_1, \dots, \omega_n$ пространства $\Lambda^{1,0}$ голоморфных форм таких, что

$$d\omega^{l+1} \in I(\omega^1, \dots, \omega^l), \quad l = 0, \dots, n-1, \tag{2}$$

где $I(\omega^1, \dots, \omega^l)$ является идеалом, порожденным формами $\omega^1, \dots, \omega^l$ [1]. Существуют такие комплексные структуры J (называемые нильпотентными [2, 3]), для которых выполнено более сильное условие разложимости дифференциала

$$d\omega^{l+1} \in \Lambda^2(\omega^1, \dots, \omega^l, \bar{\omega}^1, \dots, \bar{\omega}^l), \quad l = 0, \dots, n-1, \tag{3}$$

Дифференциальная алгебра, порожденная таким базисом, может рассматриваться как минимальная модель $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}^J$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ специального вида, однако ее существование накладывает ряд ограничений на структуру \mathfrak{g} — например, оценку для первого числа Бетти $b_1(\mathfrak{g}) \geq 3$. В последнее время вырос интерес к нильпотентным алгебрам Ли (нильмногообразиям), на которых есть только ненильпотентные комплексные структуры. Первый подобный пример был построен Саламоном [1]. В [3] исследовались алгебры Ли с одномерным центром — они тоже не допускают нильпотентные структуры.

Мы предлагаем конструкцию специальной минимальной модели $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}^J$, которая строится по нильпотентной алгебре Ли \mathfrak{g} с учетом комплексной структуры J произвольного вида. С ее помощью доказывается теорема.

Миллионщиков Дмитрий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Теорема 1. *Вещественная 8-мерная нильпотентная алгебра Ли \mathfrak{g} , у которой $b_1(\mathfrak{g}) = 2$, допускает комплексную структуру тогда и только тогда, когда \mathfrak{g} изоморфна одной (и только одной) алгебре Ли из пяти данных:*

$$\mathcal{L}(2, 4), \mathfrak{n}_1^+(5)_0, \mathfrak{n}_1^+(5)_1, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1.$$

Для каждой алгебры Ли описано пространство модулей ее комплексных структур. В [1, 3] используется краткая запись коммутационных соотношений нильпотентных алгебр Ли. С ее помощью запишем соотношения:

- $\mathcal{L}(2, 4) = (0, 0, 12, 13, 23, 14 + 25, 14 - 25, 15 + 24)$;
- $\mathfrak{n}_1^+(5)_t = (0, 0, 12, 13, 23, 14 + 25, 16 + 35 + t \cdot (14 - 25), -26 + 34 + t \cdot (15 - 24))$;
- $\mathfrak{g}_t = (0, 0, 12, 13, 23, 14 + 25, 14 + 3 \cdot 25, 16 + 27 + t \cdot (14 + 25))$.

Также описаны пространства модулей комплексных структур для всех алгебр Ли из списка теоремы 1.

Литература

1. Salamon S.M. Complex Structures on Nilpotent Lie Algebras // J.Pure Appl.Algebra, **157** (2001), 311-333.
2. Cordero L.A., Fernandez M., Gray A., Ugarte L. Compact nilmanifolds with nilpotent complex structures: Dolbeault cohomology // Trans. Amer. Math. Soc. **352**:2 (2000), 5405-5433.
3. Latorre A., Ugarte L., Villacampa R. Complex structures on nilpotent Lie algebras with one-dimensional center // J. of Algebra, **614** (2024), 271-306.

ТРАНСФОРМЕРЫ В ТЕОРИИ ТЕНГЛОВ

В.М. Нежинский

nezhin@pdm.i.ras.ru

УДК 512.56

Главная цель работы — пополнить классическую теорию тенглов отображениями, которые, насколько известно автору, ранее в научной литературе не определялись, и изучить простейшие свойства этих отображений.

Ключевые слова: граф, остов, трансформер, тенгл, изотопия.

Тенглом называется компактное одномерное подмногообразие трёхмерного шара, каждая компонента которого диффеоморфна отрезку $[0, 1]$, пересекает граничную сферу шара только по своему краю, пересекает ортогонально, все точки пересечения принадлежат экватору упомянутой сферы. Предмет работы — тенглы, оснащенные полями нормальных прямых, совпадающих в точках пересечения их компонент со сферой, ограничивающей шар, с касательными в этих точках к её экватору.

Трансформером называется конечный связный граф, снабженный упорядоченной парой остовов (см. [1]).

В работе множество *изотопических* классов оснащённых тенглов разбито на классы, для некоторых упорядоченных пар классов построены биективные отображения, индуцированные подходящими трансформерами, и получены оценки на количества таких отображений.

Литература

1. Нежинский В.М. Родственные диаграммы // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия, 2023, Т.10(68), № 4, 713–719. [Engl. trans.: Nezhinskij, V.M., Kindred diagrams // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics, 2023, Vol. 56, No. 4, 521–525.]

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МЕТОК ЭЛЕМЕНТОВ ДИАГРАММ УЗЛОВ

И.М. Никонов

nikonov@mech.math.msu.su

УДК 515.162.8

Мы даем топологическое описание множеств классов эквивалентности элементов диаграмм узлов под действием движений Рейдемейстера.

Ключевые слова: диаграмма узла, перекресток, дуга, область, четность, индекс.

К теории узлов можно подойти с двух разных сторон. Топологический подход определяет узел как вложение окружности в \mathbb{R}^3 . Таким образом, получается разложение узлов на простые; классификация Терстона для узлов; и инварианты узлов, такие как род, группа узла, гиперболический объем и многочлен Александера.

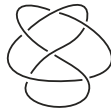


Рис. 1: Диаграмма узла

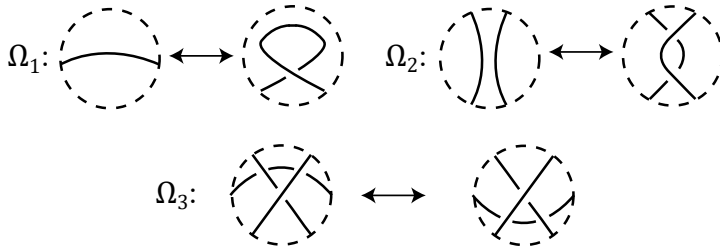


Рис. 2: Движения Рейдемейстера

Комбинаторно узел можно определить как класс эквивалентности диаграмм (рис. 1) по модулю движений Рейдемейстера (рис. 2). Этот подход приводит к гипотезам Тейта, скейн-инвариантам, коциклическим инвариантов квандлов и гомологиям Хованова. Растущая популярность диаграммных методов позволяет говорить о комбинаторной революции в теории узлов.

Диаграмма узлов, как вложенный 4-валентный граф, определяет множества своих элементов, таких как дуги, полудуги, перекрестки и области (рис. 3).

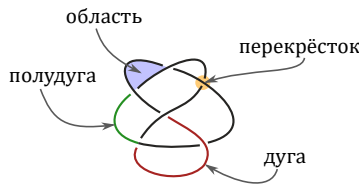


Рис. 3: Элементы диаграммы узла

Движение Рейдемейстера между двумя диаграммами индуцирует биекцию между их элементами, которые не участвуют в движении. С другой стороны, движение (например, второе

движение Рейдемейстера) может разделять, объединять, удалять или создавать элементы диаграммы.

Конструкции многих инвариантов узлов используют метки, присвоенные элементам диаграммы. Например, хорошо известная формула индекса зацепления

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{c \in K_1 \cap K_2} \text{sgn}(c)$$

представляет собой сумму численных меток (знаков) перекрестков, имеющих заданный (смешанный) тип. В других примерах используются метки дуг диаграммы (раскраски квадрантами), перекрестков (скобки четности индексные многочлены) и областей (теневые коциклы квадранта).

Предполагается, что используемые метки неизменны при движениях Рейдемейстера. Это означает, что метки любых соответствующих элементов (при некотором движении Рейдемейстера) должны совпадать. Другими словами, инвариантные метки сопоставляются классам эквивалентности элементов диаграммы по модулю соответствий, вызванных движениями Рейдемейстера. В зависимости от типа элементов диаграммы мы называем эти классы эквивалентности (*полу*)дугами, перекрестками и областями узла, потому что они больше не привязаны к конкретной диаграмме. Наша цель — дать топологическое описание этих классов.

Концептуально ответ следующий (рис. 4). Пусть K — узел в утолщении $F \times I$ компактной ориентированной поверхности F . Тогда

- дуги узла K являются изотопическими классами путей от $F \times \{1\}$ до K ;
- полудугами узла являются изотопические классы путей от $F \times \{1\}$ до $F \times \{0\}$, которые пересекают K один раз;
- перекрестки узла представляют собой изотопические классы путей от $F \times \{1\}$ до $F \times \{0\}$, которые пересекают K дважды; участок пути между точками пересечения оснащен;
- области узла представляют собой изотопические классы путей от $F \times \{1\}$ до $F \times \{0\}$, которые не пересекаются с K .

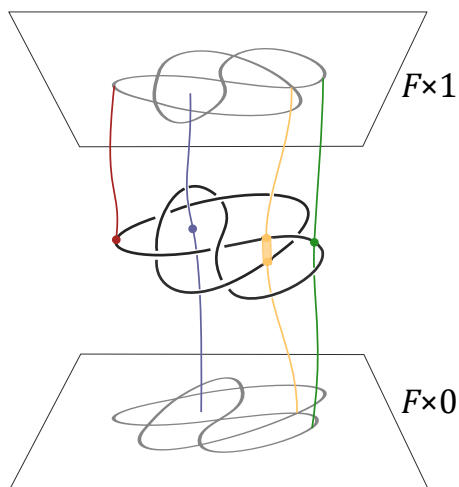


Рис. 4: Топологическая интерпретация элементов диаграммы

Литература

1. Schubert H. Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten // S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 3 (1949), 57-104.
2. Thurston W. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc., 6:3 (1982), 357-381.
3. Alexander J.W. Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), 275-306.

4. *Przytycki J.H.* Skein modules of 3-manifolds // Bull. Polish Acad. Science **39**:1-2 (1991), 91-100.
5. *Khovanov M.* A categorification of the Jones polynomial // Duke Math. J. **101**:3 (2000), 359-426.
6. *Nelson S.* The combinatorial revolution in knot theory // Notices Amer. Math. Soc. **58**:11 (2011), 1553–1561.
7. *Cheng Z.* The chord index, its definitions, applications and generalizations // Canad. J. Math. **73**:3 (2021), 597–621.
8. *Manturov V.O.* Parity in Knot Theory // Sb. Math. **201**:5-6 (2010), 693-733.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ БЕРЖЕ

И.Х. Сабитов

isabitov@mail.ru

УДК 514.772

Как ответ на один вопрос М. Берже строится пример компактной аналитической поверхности, допускающей существование другой изометричной и неконгруэнтной ей аналитической поверхности.

Ключевые слова: изометрии, компактные аналитические поверхности.

1. В книге [1] среди многочисленных нерешенных задач на стр. 387 упоминается задача о существовании неконгруэнтных изометричных поверхностей в аналитическом классе гладкости. Эта задача связана с именем Кон-Фоссена, потому что он в своей работе [2] показал, как при наличии нежесткой поверхности построить пару неконгруэнтных изометричных поверхностей. Во времена Кон-Фоссена компактные нежесткие поверхности были известны только в классе деформаций гладкости C^∞ , поэтому Берже поставил вопрос о переносе результата Кон-Фоссена на аналитический случай, и авторы работы [3] естественно назвали эту задачу проблемой Кон-Фоссена – Берже. Решение этой проблемы объявлено как одна из целей работы [3] и она там решена параллельно с решением проблемы Бонне в классе *погруженных* пар поверхностей рода 1, т.е. найдены классы пар торообразных изометричных поверхностей с одинаковой (своей в каждой паре) средней кривизной (построенные поверхности оказались с самопересечениями). Мы же хотим указать, что если не уточнять требование на топологический класс искомым изометричных аналитических поверхностей, то решение задачи Кон-Фоссена – Берже на самом деле известно довольно давно, причем получается оно тем же методом Кон-Фоссена. Опишем краткую историю этого вопроса с его решением.

2. В статье [2] приводится один способ построения изометричных поверхностей. Пусть некоторая поверхность S с радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$ является нежесткой с полем бесконечно малого (б.м.) изгиба $\mathbf{z}(u, v)$. Тогда выполнено уравнение

$$d\mathbf{r}d\mathbf{z} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь поверхности

$$S_1 : \mathbf{r}_1(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + t\mathbf{z}(u, v) \quad \text{и} \quad S_2 : \mathbf{r}_2(u, v) = \mathbf{r}(u, v) - t\mathbf{z}(u, v).$$

С учетом уравнения (1) имеем, что

$$d\mathbf{r}_1^2 = d\mathbf{r}^2 + t^2 d\mathbf{z}^2 = d\mathbf{r}_2^2,$$

значит, поверхности S_1 и S_2 при каждом t имеют одинаковые метрические формы, т.е. они изометричны.

Сам Кон-Фоссен в [4] утверждает и доказывает существование нежестких поверхностей вращения, не упоминая при этом ничего о классах гладкости рассматриваемых им поверхностей и

тем более о гладкости полей их б.м. изгибаний. В работе Рембса [5] утверждается существование бесконечного счетного семейства нежестких аналитических поверхностей вращения с аналитическими полями их б.м. изгибаний, без предъявления их точного вида. Далее, в 1980 году опубликована работа [6], в которой весьма сложно доказывалось, что существуют нежесткие аналитические поверхности вращения в точности с любыми заранее заданными в конечном числе номерами нетривиальных гармоник поля б.м. изгибаний, но в них не уточняется класс гладкости деформации.

В 2013 г. появилась статья [7] с явным уравнением нежесткой аналитической поверхности вращения и ее аналитического поля б.м.изгибания. Для описания этого результата необходимо ввести некоторые обозначения с их объяснениями. Считаем, что ось Oz является осью вращения и меридиан поверхности в окрестности полюса имеет представление $z = \varphi(r)$ с поведением

$$\varphi(r) \sim ar^{2p} \text{ при } r \rightarrow 0, a > 0, p - \text{натуральное число.}$$

Если $p > 1$, тогда полюс является на поверхности *точкой уплощения* порядка $2p - 2$. Для поверхности вращения компоненты поля ее б.м. изгибания разлагаются в ряд Фурье и для вертикальной компоненты каждая ее гармоника $\alpha_m(r)$ будет удовлетворять своему линейному уравнению 2-го порядка с обращением в нуль коэффициента при $\alpha_m''(r)$. По теории Фукса решение $\alpha_m(r)$ будет иметь в точке $r = 0$ полюс или нуль какого-то порядка, определяемого решением некоторого квадратного уравнения, коэффициенты которого зависят от номера гармоники и от порядка уплощения $2p - 2$ поверхности в полюсе. На замкнутой поверхности есть два полюса со своими порядками уплощения. Если в этом случае найдется номер m , такое, что есть решение $\alpha_m(r)$, регулярное в обоих полюсах (т.е. обращающееся в нуль в обоих полюсах), тогда порядки уплощений в полюсах называются *согласованными*. Теперь мы можем сформулировать теорему

Теорема 1. *Для любого данного натурального числа $m \geq 2$ и любой пары чисел $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$ существует поверхность вращения, имеющая в полюсах уплощения порядка соответственно $q_1 = 2n_1 - 2 \geq 0$ и $q_2 = 2n_2 - 2 \geq 0$ и допускающая б.м. изгибания с нетривиальной гармоникой с номером m , причем возможно любое сочетание уплощений:*

- 1) *в обоих полюсах уплощения имеют порядок $q_1 = 0, q_2 = 0$ (т.е. $n_1 = n_2 = 1$ и уплощения на самом деле нет);*
- 2) *в одном полюсе уплощение есть, в другом его нет;*
- 3) *оба полюса имеют уплощения.*

Во всех случаях можно гарантировать, что и поверхность, и поле б.м. изгибания аналитичны вне полюсов, а в полюсах гладкость следующая:

- 1) *и поверхность, и б.м. изгибание аналитичны, если оба полюса без уплощения;*
- 2) *и поверхность, и б.м. изгибания аналитичны всюду, если в обоих полюсах порядки уплощений согласованы между собой при данном номере гармоники.*

Идея доказательства состоит в следующем. Мы заранее вводим функцию

$$\alpha_m(r) = \frac{1}{r^{-k_1} + r^{k_2}} = \frac{r^{k_1}}{1 + r^{k_1 k_2}}, 0 \leq r < \infty,$$

и показываем, что можно так подобрать натуральные числа k_1 и k_2 , чтобы эта функция была вертикальной компонентой m -й гармоники поля аналитического б.м.изгибания некоторой аналитической поверхности вращения. А восстановление поверхности вращения по известной вертикальной компоненте ее б.м. изгибания проводится по методу работы [8].

Литература

1. Berger M. Geometry revealed : a Jacob's ladder to modern higher geometry. // Springer, Heidelberg, 2010.

2. Кон-Фоссен С.Э. Изгибаемость поверхностей в «целом». // Успехи мат. наук, (1936), вып. 1, 33-76 (переиздано в книге С.Э. Кон-Фоссен, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз. 1959. 303 с.).

3. Alexander I. Bobenko, Tim Hoffman, Andrew O. Sageman-Furnas Compact Bonnet Pairs: isometric tori with the same curvatures. // arXiv: 2110.06335v2, 2023, 1-41.

4. Кон-Фоссен С.Э. Нежесткие замкнутые поверхности // перевод оригинала в книге С.Э. Кон-Фоссен, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз. 1959. 303 с.)

5. Eduard Rembs Zur Verbiegung von Flächen in Grossen. // Mathematische Zeitschrift, (1952), Band 56, Heft 3, 271-279.

6. Троценко Д.А. О нежестких аналитических поверхностях вращения. // Сибирский математический журнал, (1980), 21:5, 100-108.

7. Сабитов И.Х. Жесткость и неизгибаемость «в малом» и «в целом» поверхностей вращения с уплощениями в полюсах. // Математический сборник, (2013), 204:10, 127-160.

8. Милка А.Д. О точках относительной нежесткости выпуклой поверхности вращения. // Украинский геометрический сборник. (1965), вып. 1, 65-74.

О МНОГОГРАННИКЕ, БЛИЗКОМ К ПРАВИЛЬНОГРАННОМУ

В.И. Субботин

vgeometry@mail.ru

УДК 514.172.45

Приведено доказательство существования одного замкнутого выпуклого многогранника с “почти правильными гранями”. Выводится уравнение, позволяющее вычислить угол грани, близкой к правильной.

Ключевые слова: замкнутый выпуклый многогранник, правильногранник.

В работе [1] доказана полнота списка из девяноста двух выпуклых правильногранников, эмпирически найденных в [2]. Представляют интерес многогранники, у которых грани близки к правильным, или почти правильные.

В настоящем докладе рассматривается замкнутый выпуклый 19-гранник в E^3 , шестнадцать граней которого являются правильными треугольными, а три грани равны между собой и “близки” в уточнённом ниже смысле к квадратным. При этом все стороны четырёхугольных граней равны сторонам треугольных граней.

Доказано существование указанного многогранника и для угла α четырёхугольника, близкого к квадрату, получено следующее уравнение:

$$\cos \alpha = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \Omega,$$

где:

$$\Omega = 2 \operatorname{sign} \left(\frac{3\pi}{5} - \alpha \right) \arccos \frac{1 + (1 - \cos \theta) (2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1)}{\sin \theta \sqrt{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + \arccos \frac{1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \left(\arccos \frac{\sin \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2}} + \arccos \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

Компьютерное решение этого уравнения относительно α даёт приближённое значение тупого угла четырёхугольника в градусах: $\alpha \approx 91, 4397^\circ$.

Субботин Владимир Иванович, к.ф.-м.н., доцент, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, кафедра прикладной математики (Новочеркасск, Россия).

Таким образом, три равных четырёхугольных грани рассматриваемого многогранника близки к квадратам.

Литература

1. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2, 1-220.
2. Johnson N.W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, №1, 169-200.

КЛАССЫ РАЙДЕМАЙСТЕРА В КОНЕЧНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ ГРУППАХ КОНЕЧНОГО РАНГА ПРЮФЕРА

Е.В. Троицкий

evgenij.troitsky@math.msu.ru

УДК 512.547.4, 512.544.43

Пусть G — конечно аппроксимируемая группа конечного верхнего ранга, допускающая автоморфизм с конечным числом Райдемайстера. Тогда G — почти разрешимая группа. Если же G конечного ранга, то гипотеза ТВФТ_f выполняется для G .

Ключевые слова: число Райдемайстера, конечно аппроксимируемая группа.

Класс Райдемайстера, или *класс скрученной сопряженности* — это класс эквивалентности отношения $x \sim yx\varphi(y^{-1})$, где $\varphi : G \rightarrow G$ — автоморфизм (или даже эндоморфизм) группы G , $x, y \in G$. Число $R(\varphi)$ этих классов (конечных или бесконечных) называется *числом Райдемайстера*. В данной докладе мы расскажем о продвижении в решении двух основных проблем в этой области, а именно:

1. Доказать или опровергнуть (для некоторого класса групп) так называемую скрученную теорему Бернсайда-Фробениуса (ТВФТ_f): если $R(\varphi) < \infty$, то оно равно числу классов эквивалентности конечномерных неприводимых унитарных представлений G , являющихся неподвижными точками двойственного отображения $\hat{\varphi} : [\rho] \mapsto [\rho \circ \varphi]$.
2. Описать класс групп G со следующим свойством R_∞ : для любого автоморфизма φ группы G имеет место $R(\varphi) = \infty$.

Если $d(H)$ обозначает минимальное число образующих группы H , то *рангом (Прюфера)* группы G называется

$$\text{rk}(G) := \sup\{d(H) : H \text{ — конечно порожденная подгруппа } G\}$$

а *верхним рангом* G —

$$\text{urk}(G) := \sup\{\text{rk}(\overline{G}) : \overline{G} \text{ является конечным фактором } G\}.$$

Подгруппы конечного ранга привлекли большой интерес с конца 1980-х годов. в частности, в связи со скоростью роста числа подгрупп и связанными с этим вопросами [1].

Основные результаты настоящей работы заключаются в следующем.

Теорема 1. *Предположим, что G — конечно аппроксимируемая группа конечного верхнего ранга и $\varphi : G \rightarrow G$ — автоморфизм с $R(\varphi) < \infty$. Тогда G — почти разрешимая группа.*

Другими словами: любая конечно аппроксимируемая группа конечного верхнего ранга, не являющаяся почти-разрешимой, обладает свойством R_∞ .

Исследование поддержано грантом РНФ 23-21-00097.

Троицкий Евгений Вадимович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Теорема 2. Пусть G — конечно аппроксимируемая группа конечного ранга. Тогда $TBFT_f$ выполняется для G .

Теорему 1 можно рассматривать как развитие [2] и в то же время как подтверждающий результат для следующей гипотезы [3]: конечно аппроксимируемая конечно порожденная группа с автоморфизмом с конечным числом Райдемейстера почти разрешима. Доказательство теоремы 1 использует, в частности, основной результат [4].

Первоначальная гипотеза о $TBFT$ была сформулирована А. Фельштыным и Р. Хиллом следующим образом: если число Райдемейстера конечно, то оно совпадает с числом классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений G , которые являются неподвижными точками двойственного отображения $[\rho] \mapsto [\rho \circ \varphi]$, если одно из этих чисел конечно (см. [5]). Контрпример к $TBFT$ из [6] привел к модифицированной версии: а именно $TBFT_f$, где учитываются только конечномерные представления. Наиболее широкий класс групп с $TBFT_f$, а именно, почти полициклические, был найден в [7]. Затем мы нашли несколько контрпримеров, в частности, в [8] найден пример группы, у которой нет ни $TBFT_f$, ни $TBFT$. Также было доказано $TBFT_f$ для класса сплетений [9, 10].

Интерес к теории Райдемейстера, R_∞ и $TBFT$ вызван задачами из топологической динамика и других областей (см. обзор в [5, 7]). В [11, 12] изучены группы конечного ранга (нильпотентные без кручения) в контексте теории Райдемайстера. Здесь мы изучаем гораздо более широкий класс, рассматриваемый многими авторами, как естественное расширение класса полициклических групп.

Настоящий доклад основан на результатах [13]. Исследование поддержано грантом РФФИ 23-21-00097.

Литература

1. *Lubotzky A., Segal D.* Subgroup growth // Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
2. *Jabara E.* Automorphisms with finite Reidemeister number in residually finite groups // J. Algebra, **320** (2008), №10, 3671-3679.
3. *Fel'shtyn A., Troitsky E.* Aspects of the property R_∞ // J. Group Theory, **18** (2015), №6, 1021-1034.
4. *Jaikin-Zapirain A.* Finite groups of bounded rank with an almost regular automorphism // Israel J. Math., **129** (2002), 209-220.
5. *Fel'shtyn A.* Dynamical zeta functions, Nielsen theory and Reidemeister torsion // Mem. Amer. Math. Soc., **147**, №699, xii+146, 2000.
6. *Fel'shtyn A., Troitsky E., Vershik A.* Twisted Burnside theorem for type II_1 groups: an example // Math. Res. Lett. **13** (2006), №5, 719-728.
7. *Fel'shtyn A., Troitsky E.* Twisted Burnside-Frobenius theory for discrete groups // J. Reine Angew. Math., **613** (2007), 193-210.
8. *Fel'shtyn A., Troitsky E., Zietek M.* New Zeta Functions of Reidemeister Type and the Twisted Burnside-Frobenius Theory. Russ. J. Math. Phys., **27** (2020), №2, 199-211.
9. *Troitsky E.* Reidemeister classes in lamplighter-type groups. Comm. Algebra, **47** (2019), №4, 1731-1741.
10. *Troitsky E. V.* Reidemeister classes in some lamplighter-type groups. Mathematical Notes, **113** (2023), №4, 605-609.
11. *Fel'shtyn A., Klopsch B.* Pólya-Carlson dichotomy for coincidence Reidemeister zeta functions via profinite completions. Indag. Math. (N.S.), **33** (2022), №4, 753-767.
12. *Fel'shtyn A., Troitsky E.* Pólya-Carlson dichotomy for dynamical zeta functions and a twisted Burnside-Frobenius theorem. Russ. J. Math. Phys., **28** (2021), №4, 455-463.
13. *Troitsky E.* Twisted conjugacy in residually finite groups of finite Prüfer rank. J. Group Theory (2024).

НУЛИ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Т.Н. Фоменко

tn-fomenko@yandex.ru

УДК 515.124, 515.126.4, 515.126.83

Доклад содержит приложения теоремы о сохранении, при изменении параметра, существования нулей у параметрического семейства многозначных функционалов (Захарян-Фоменко, 2020). Рассматриваются применения к задаче о равновесных стратегиях в антагонистической игре, а также связь с задачей о неподвижных точках нерасширяющих многозначных отображений.

Ключевые слова: поисковый функционал, неподвижная точка, равновесная стратегия.

В процессе развития метода поисковых функционалов, предложенного ранее автором (см., например, [1], [2], [3]), в 2019 году в совместной статье Ю.Н.Захаряна и автора [4] получена теорема о сохранении, при изменении параметра, существования нулей у параметрического семейства многозначных функционалов, которые являются (α, β) -поисковыми на открытом подмножестве $U \subset X$ метрического пространства (X, d) , то есть удовлетворяют следующему условию: для каждой точки $x \in U$ и любого $r > 0, c \in \varphi(x)$ таких, что $\overline{B(x; r)} \subset U, c \leq (\alpha - \beta)r$, существует точка $x' \in B(x; \frac{c}{\alpha})$ и значение $c' \in \varphi(x')$, что $c' \leq \frac{\beta}{\alpha}c$.

В качестве следствий в [4] доказаны теоремы о сохранении, при изменении параметра, существования совпадений и неподвижных точек у параметрического семейства многозначных отображений. В частности, получено существенное обобщение теоремы М. Фригон [5] о непрерывном продолжении по параметру неподвижных точек сжимающего семейства многозначных отображений.

В дальнейшем с помощью результатов [4] удалось получить обобщенную параметрическую версию известной теоремы Э. Майкла о сечениях [6], а также теорему о существовании непрерывной ветви нулей у параметрического семейства поисковых функционалов [7].

В первой части доклада будет представлено применение упомянутой теоремы [4] о нулях семейства функционалов к задаче о сохранении, при изменении параметра, существования равновесных стратегий в параметрическом семействе антагонистических игр с двумя игроками. (По поводу теории игр см., например, [8], [9]). Рассматривается случай, когда пространства стратегий игроков являются метрическими [10].

Пусть задано параметрическое семейство антагонистических игр, а значит, и соответствующее параметрическое семейство игровых функций, где непрерывный параметр $t \in [0; 1]$. Пусть $U \subset X \times Y$ открытое подмножество, $(X, \rho), (Y, d)$ метрические пространства стратегий игроков. Доказана теорема, где найдены достаточные условия для сохранения, при изменении параметра t , существования равновесной стратегии в каждой игре заданного семейства.

Вторая часть доклада посвящена связи упомянутой теоремы [4] о сохранении существования нулей в семействе многозначных функционалов с задачей о неподвижных точках нерасширяющего многозначного отображения.

Пусть, как и выше, $U \subset X$ — открытое подмножество метрического пространства (X, ρ) . Исследуется общая задача о существовании нулей многозначного функционала $\Phi : \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+$, не являющегося (α, β) -поисковым, но связанного некоторым условием θ -непрерывности с параметрическим семейством (α, β) -поисковых функционалов на открытом подмножестве U метрического пространства. Доказана теорема, где предлагается несколько вариантов достаточных условий для существования нуля у функционала Φ .

В качестве следствий из этой теоремы получены теоремы о существовании неподвижной точки у многозначного отображения, связанного с семейством многозначных отображений, обладающими свойством сохранения существования, при изменении параметра, неподвижных точек, на открытом подмножестве метрического пространства.

Оказалось, что если метрическое пространство обладает структурой равномерной выпуклости [11], [12], то в нем справедлив аналог теоремы Эдельштейна [13] о существовании асимптотического центра у ограниченной последовательности в банаховом пространстве. В свою очередь, наличие асимптотического центра позволяет получить в таком пространстве метрический аналог теоремы М. Фригон [5] о неподвижной точке нерасширяющего многозначного отображения на открытом подмножестве метрического пространства, для случая нулевого асимптотического радиуса соответствующей последовательности.

Литература

1. *Фоменко Т.Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // *Матем. заметки*, **86**:2, 2009, 276-281.
2. *Fomenko T.N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings // *Topol. and its Appl.*, **157**:4, 2010, 760-773.
3. *Фоменко Т.Н.* Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии // *Матем. заметки*, **93**:1, 2013, 127-143.
4. *Захарян Ю.Н., Фоменко Т.Н.* Сохранение существования нулей у семейства многозначных функционалов и некоторые следствия // *Математические заметки*, **108**:6, 2020, 837-850.
5. *Frigon M.* On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings // *Recent Advances on Metric Fixed Point Theory* (Sevilla, 1995), Univ. of Sevilla, 1996, 19-30.
6. *Fomenko T.N.* Zeros of functionals and a parametric version of Michael selection theorem // *Lobachevskii J. Math.*, **43**:3, 2022, 1314-1321.
7. *Фоменко Т.Н.* Метод поисковых функционалов и его применения в теории неподвижных точек и совпадений // *Современная математика. Фундаментальные направления*, **69**:1, 2023, 185-200.
8. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений // ЛИБРОКОМ, М. —2011.
9. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики // Изд-во МГУ, Москва, 2005.
10. *Fomenko T.N.* Applications of Fixed Point Theorems to the problem of the equilibrium strategy existence preservation in a parametric family of antagonistic games // *Dynamic Systems and Applications*, **32**, 2023, 55-67.
11. *Takahashi W.* A convexity in metric space and nonexpansive mappings // *Kodai Math. Sem. Rep.*, **22**, 1970, 142-149.
12. *Kaevcharoen A., Panyanak B.* Fixed Points for Multivalued Mappings in Uniformly Convex Metric Spaces // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2008, 1-9.
13. *Edelstein M.* The construction of an asymptotic center with a fixed-point property // *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**:2, 1972, 206-208.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОГО ГОМОМОРФИЗМА ГРУПП ЛИ НА КОММУТАНТЕ

А.И. Штерн
roww@mail.ru

УДК 517.986.4

Показано, что локально ограниченный гомоморфизм групп Ли автоматически непрерывен на коммутанте группы.

Ключевые слова: локально ограниченный гомоморфизм, коммутант группы, группа разрывов гомоморфизма топологических групп.

Пусть G и H – группы Ли, $\pi: G \rightarrow H$ – локально ограниченный гомоморфизм, G' – коммутант группы G . Тогда ограничение $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на G' непрерывно. Основным техническим инструментом в доказательстве [1] является понятие группы разрывов гомоморфизма топологических групп.

Литература

1. Штерн А.И. Автоматическая непрерывность локально ограниченного гомоморфизма групп Ли на коммутанте // Мат. сб., в печати.

LIMIT SETS FOR BRANCHING RANDOM WALKS ON RELATIVELY HYPERBOLIC GROUPS

M. Dussaule, L. Wang, W. Yang

matthieu.dussaule@hotmail.fr, wanglm@nankai.edu.cn, wyang@math.pku.edu.cn

Branching random walks (BRW) on groups consist of two independent processes on the Cayley graphs: branching and movement. Start with a particle on a favorite location of the graph. According to a given offspring distribution, the particles at the time n split into a random set of particles with mean $r \geq 1$, each of which then moves independently with a fixed step distribution to the next locations. It is well-known that if the offspring mean r is less than the spectral radius of the underlying random walk, then BRW is transient: the particles are eventually free on any finite set of locations. The particles trace a random subgraph which accumulates to a random subset called limit set in a boundary of the graph. In this talk, we consider BRW on relatively hyperbolic groups and study the limitset of the trace at the Bowditch and Floyd boundaries. In particular, the Hausdorff dimension of the limit set will be computed. This is based on a joint work with Mathieu Dussaule and Longmin Wang.

Ключевые слова: Growth rate, Hausdorff dimension, Bowditch and Floyd boundaries, Parabolic gap.

Литература

1. M. Dussaule, L. M. Wang & W. Y. Yang. Branching random walks on relatively hyperbolic groups// Preprint 2022, Arxiv: 2211.07213.

Штерн Александр Исаакович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Matthieu Dussaule, Département de mathématiques, Faculté des Sciences Batiment I (2 Boulevard Lavoisier 49045 Angers cedex 01, France)

Longmin Wang, Ph.D., Associate Professor and Master Supervisor, School of Statistics and Data Science, LPMC, Nankai University (Nankai District, Tianjin, China)

Wenyuan Yang, Ph.D., Full Professor, Beijing International Center for Mathematical Research (BICMR), Beijing University (Beijing, China)

ON PROFINITE PROPERTIES OF HYPERBOLIC 3-MANIFOLDS

Y. Liu

liuyi@bicmr.pku.edu.cn

In this talk, I will discuss recent progress on profinite properties of hyperbolic 3-manifolds. I will try to state some implications of known results, and point out some significant unknown ones.

DIFFEOMORPHISMS OF FOLIATED MANIFOLDS

A.Y. Narmanov, G.M. Abdishukurova

narmanov@yandex.ru, abdishukurova.guzal93@gmail.com

UDC 57R30

We investigate the group $Diff_F(M)$ of diffeomorphisms foliated manifold (M, F) with foliated compact open topology. We prove that if all leaves of the the foliation F are closed subsets of M then the foliated compact open topology of the group $Diff_F(M)$ coincides with compact open topology.

Keywords: foliated manifold, submersion, foliated compact open topology, diffeomorphisms of foliated manifold.

This talk deals with the paper “Diffeomorphisms of foliated manifolds” [1]. In this paper we discuss some properties of foliated compact open topology on the group $Diff_F(M)$ of diffeomorphisms foliated manifold (M, F) , which was introduced in the paper [2] and studied in the paper [1].

Let M be a smooth connected manifold of dimension n . Smoothness in this paper means the smoothness of the class C^∞ .

Denote by (M, F) the manifold M with the foliation F of dimension k and call foliated manifold, where $0 < k < n$.

Geometry and topology of foliated manifolds studied by many authors [4].

Definition. A diffeomorphism $\varphi : M \rightarrow M$ is called a diffeomorphism of the foliated manifold (M, F) , if the image $\varphi(L_\alpha)$ of each leaf L_α is a leaf of the foliation F .

The diffeomorphism $\varphi : M \rightarrow M$ of the foliated manifold (M, F) , is denoted by $\varphi : (M, F) \rightarrow (M, F)$. The set of all diffeomorphisms of a foliated manifold is denoted by $Diff_F(M)$. The set $Diff_F(M)$ is a group with respect to the superposition of mappings and is a subgroup of the group $Diff(M)$ of diffeomorphisms of the manifold M .

We recall notion of foliated compact open topology on the group $Diff_F(M)$ [2].

Let $\{K_\lambda\}$ be a family of all compact sets where each K_λ is a subset of some leaf L_λ of foliation F and let $\{U_\beta\}$ is the family of all open sets on M . We consider for each pair K_λ and U_β set of all mappings $f \in Diff_F(M)$ for which $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. This set of mappings we denote through $[K_\lambda, U_\beta] = \{f : M \rightarrow M : f(K_\lambda) \subset U_\beta\}$.

It isn't difficult to show that every possible finite intersections of sets of the form $[K_\lambda, U_\beta]$ forms a base for some topology. This topology we call foliated compact open topology or in brief F - compact open topology. The space $Diff_F(M)$ with F - compact open topology is Hausdorff topological space [2]. Since K runs only over all compact subsets of leaves, F - compact open topology on $Diff_F(M)$ is weaker than induced from $Diff(M)$ usual compact open topology.

Following lemma and the theorem were proved in [1].

Lemma. *The space $Diff_F(M)$ with F - compact open topology is a topological space with countable base.*

Liu Yi, Ph.D., Professor, Peking University (Beijing, China)

Narmanov Abdigappar Yakubovich, Doctor of Science in Physico-mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics, National University of Uzbekistan (Toshkent, Uzbekistan).

Abdishukurova Guzal Maksud kizi, Ph.D, Associate Professor, Department of Mathematics, National University of Uzbekistan (Toshkent, Uzbekistan).

Theorem. *Let (M, F) be a smooth foliated manifold. Then the group $\text{Diff}_F(M)$ is a topological group with F - compact open topology.*

We will study conditions to manifold M and to foliation F under which foliated compact open topology and usual compact open topology on the space $\text{Diff}_F(M)$ coincides.

Theorem-1. *Let M be a smooth compact manifold. Then F - compact open topology coincides with compact open topology on $\text{Diff}_F(M)$.*

Theorem-2. *Let (M, F) be a smooth foliated manifold and all leaves are closed subsets of M . Then F - compact open topology coincides with compact open topology on $\text{Diff}_F(M)$.*

$$\pi : M \rightarrow B, \tag{1}$$

where M and B are manifolds of dimensions n , m respectively and $n > m$. Connected components of the inverse images of the points of $p \in B$ define a $k = n - m$ - dimensional foliation F on M .

To the study of the geometry of the submersions were devoted many investigations [4], [5], [6], in particular, in [7] obtained fundamental equations of Riemannian submersion.

In this case it is not difficult to show that all leaves of F are closed subsets of M . From the theorem-2 we have following result.

Theorem-3. *Let (M, F) be a smooth foliated manifold, where the foliation F generated by submersion. Then F - compact open topology coincides with compact open topology on $\text{Diff}_F(M)$.*

References

1. *Abdushukurova G., Narmanov A.* Diffeomorphisms of foliated manifolds // Methods Funct. Anal. Topology, **27**(1), (2021), 1-9.
2. *Narmanov A., Sharipov A.* On the group of foliation isometries // Methods Funct. Anal. Topology, **15**, (2), (2009), 195-200.
3. *Azamov A., Narmanov A.* On the Limit Sets of Orbits of Systems of Vector Fields // Differential Equations, **40** (2), (2004), 271-275.
4. *Hermann R.* A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle // Proc. Amer. Math. Soc., **11**(4), (1960), 236-242.
5. *Narmanov A. and Abdushukurova G.* On the geometry of riemannian submersions // Uzbek Mathematical journal, **2**, (2016), 3-8.
6. *Reinhart B.* Foliated Manifolds With Bundle-like Metrics // Annals of Mathematics, Second Series **69**, (1959) 119-132.
7. *O'Neill B.* The Fundamental Equations of Submersions // Michigan Mathematical Journal **13** (1966) 459-469.

Секция 3

Дифференциальные уравнения и математическая физика

ВЫСШИЕ ИНВАРИАНТЫ ХАРАКТЕРИСТИК УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.В. Аксенов

aksenov@mech.math.msu.su

УДК 517.95,533.6

Рассмотрено уравнение одномерной газовой динамики в лагранжевых переменных, описывающее движение газа при политропных процессах. Найдены инварианты характеристик первого, второго и третьего порядков.

Ключевые слова: инвариант Римана, инвариант характеристики, полная производная, лагранжева переменная.

Хорошо известные в газовой динамике инварианты Римана [1] представляют собой функции, постоянные на характеристиках одномерной системы уравнений, описывающей движения газа при баротропных процессах. Понятие инварианта характеристики было обобщено Дарбу [2] при исследовании промежуточных интегралов скалярных гиперболических уравнений. Инварианты характеристик представляют собой функции, постоянные на характеристиках систем дифференциальных уравнений. Вообще говоря, они могут зависеть от производных сколь угодно высоких порядков [2–5].

В безразмерных переменных система уравнений одномерной газовой динамики для политропных движений газа может быть записана в виде

$$u_t + uu_x + \rho^{\gamma-2} \rho_x = 0, \quad (1)$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (1),(2) обладает на характеристиках C_+ и C_- инвариантами Римана: $\gamma \neq 1$:

$$r = u + \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_+: dx - (u + \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}) dt = 0;$$

Аксенов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра гидромеханики (Москва, Россия).

$$l = u - \frac{2}{\gamma - 1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_-: dx - (u - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}})dt = 0;$$

$\gamma = 1$:

$$r = u + \ln \rho, \quad C_+: dx - (u + 1)dt = 0;$$

$$l = u - \ln \rho, \quad C_-: dx - (u - 1)dt = 0,$$

которые представляют собой инварианты характеристик нулевого порядка.

Из уравнения неразрывности (2) можно ввести массовую лагранжеву переменную m , что выполнены соотношения

$$m_x = \rho, \quad m_t = -u\rho.$$

Тогда из уравнения импульсов (1) получаем уравнение в лагранжевых переменных

$$x_{tt} - \frac{x_{mm}}{x_m^{\gamma+1}} = 0. \quad (3)$$

Для определения инвариантов характеристик уравнения (3) удобно использовать операторы полных производных

$$D_m = \partial_m + x_m \partial_x + x_{mm} \partial_{x_m} + x_{mt} \partial_{x_t} + \dots,$$

$$D_t = \partial_t + x_t \partial_x + x_{mt} \partial_{x_m} + x_{tt} \partial_{x_t} + \dots$$

Введём в рассмотрение операторы полных производных в силу уравнения (3)

$$\bar{D}_m = \partial_m + x_m \partial_x + x_{mm} \partial_{x_m} + x_{mt} \partial_{x_t} + \dots,$$

$$\bar{D}_t = \partial_t + x_t \partial_x + x_{mt} \partial_{x_m} + \frac{x_{mm}}{x_m^{\gamma+1}} \partial_{x_t} + \dots$$

Характеристики C_{\pm} могут быть описаны в терминах полных производных вдоль характеристических направлений

$$X_{\pm} = \bar{D}_t \pm x_m^{-\frac{\gamma+1}{2}} \bar{D}_m.$$

Определение 1. Назовём функцию f инвариантом характеристики C_+ , если она удовлетворяет условию

$$X_+(f) = 0.$$

Здесь f может зависеть от переменных m, t, x и конечного числа производных $x_m, x_t, x_{mm}, x_{mt}, \dots$

Аналогично определяются инварианты характеристики C_- .

Замечание 1. Уравнение (3) инвариантно относительно дискретного преобразования $t \mapsto -t$. При этом $C_+ \mapsto C_-$. Поэтому достаточно знать инварианты одной из характеристик.

Утверждение 1. Инвариант $(n+1)$ -го порядка I_{n+1} характеристики C_+ может быть получен из инварианта n -го порядка I_n с помощью соотношения

$$I_{n+1} = \frac{\bar{D}_m(I_n)}{\bar{D}_m(r)}, \quad (4)$$

где r – инвариант Римана характеристики C_+ .

Доказательство соотношения (4) следует из тождества

$$X_+ \left(\frac{\bar{D}_m}{\bar{D}_m(r)} \right) \equiv \frac{1}{\bar{D}_m(r)} \bar{D}_m(X_+).$$

Замечание 2. На характеристике C_- выполнено соотношение

$$I_{n+1} = \frac{\bar{D}_m(I_n)}{\bar{D}_m(l)},$$

где l – инвариант Римана характеристики C_- .

1. Инварианты первого порядка. Инварианты первого порядка ищем в виде

$$I_1 = f(t, m, x, x_m, x_t).$$

Утверждение 2. Уравнение (3) допускает при всех γ инварианты Римана

$$r = \begin{cases} x_t + \frac{2}{\gamma-1} x_m^{-\frac{\gamma-1}{2}}, & \text{если } \gamma \neq 1; \\ x_t - \ln x_m, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Инварианты характеристик не выше первого порядка, дополнительные к инвариантам Римана, допускаются только в следующих случаях

$\gamma = -1$:

$$I_0 = m - t;$$

$\gamma = 3$:

$$I_1 = x - \left(x_t + \frac{1}{x_m} \right) t.$$

2. Инварианты второго порядка. Инварианты второго порядка ищем в виде

$$I_2 = f(t, m, x, x_m, x_t, x_{mm}, x_{mt}).$$

Утверждение 3. Инварианты второго порядка имеются только в случаях $\gamma = -1; 1/3; 5/3; 3$.

3. Инварианты третьего порядка. Инварианты третьего порядка ищем в виде

$$I_3 = f(t, m, x, x_m, x_t, x_{mm}, x_{mt}, x_{mmm}, x_{mmt}).$$

Утверждение 4. Инварианты третьего порядка имеются только в случаях $\gamma = -1; 1/3; 5/3; 7/5; 3$.

Литература

1. *Riemann B.* Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematischphysikalische Klasse. 1860. Band 8. Nr. 43. S. 43–66.
2. *Darboux M.G.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. 1870. V. 70. P. 675–678.
3. *Darboux M.G.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. 1870. V. 70. P. 746–749.
4. *Goursat M.E.* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second order a deux variables indépendantes. Tome II. Paris. 1898. 174 p.
5. *Канцов О.В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 184 с.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ

Ш.А. Алимов, Р.Р. Ашуров

sh_alimov@mail.ru, ashurov@gmail.com

УДК 517.958

Рассматривается задача определения порядка дробной производной в уравнении субдиффузии при условии, что входящий в это уравнение эллиптический оператор имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение. Получена асимптотическая формула, по которой, зная решение хотя бы в одной точке рассматриваемой области, можно вычислить искомый порядок.

Ключевые слова: дробная производная, уравнение субдиффузии.

В основе многих современных математических моделей, описывающих возникновение и распространение процесса пандемии, лежит уравнение субдиффузии. Получается оно из уравнения диффузии заменой производной по времени дробной производной порядка ρ , где $0 < \rho < 1$ (см. [1]). На основе многочисленных наблюдений было установлено, что данное уравнение более адекватно описывает изучаемый процесс и позволяет с большей точностью предсказать его развитие (см. [2]). При этом нет единодушия в вопросе о том, каким должен быть порядок ρ дробной производной. Задача его определения является одной из основных обратных задач для уравнения субдиффузии. В случае затухающего процесса пандемии решения данной задачи были получены в [3] и [4].

В настоящей работе предлагается решение обратной задачи нахождения порядка ρ в случае, когда диффузия приводит не к затуханию, а к росту со временем как геометрическая прогрессия.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \partial_t^\rho u(x, t) + Au(x, t) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \partial^{\rho-1} u(t) = \phi, \end{cases} \quad (1)$$

где $\phi \in C(\bar{\Omega})$ – заданная начальная функция.

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ произвольная область с гладкой границей, $A : H \rightarrow H$ – эллиптический самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega)$, порождённый дифференциальной операцией

$$A(x, D)u(x) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + c(x)u(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

и граничными условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Мы предполагаем, что выполняется условие эллиптичности

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0 \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2, \quad a_0 > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

а также обычное для эллиптических операторов вида (2) условие $c(x) \geq 0$.

Из условия эллиптичности следует, что самосопряженный оператор A является полуограниченным и его спектр состоит из собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots, \quad \lambda_k \rightarrow +\infty, \quad (k \rightarrow +\infty),$$

Алимов Шавкат Арифджанович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, филиал в г. Ташкенте, факультет прикладной математики и информатики, Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, лаборатория дифференциальных уравнений и их приложений (Ташкент, Узбекистан)

Ашуров Равшан Раджабович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, лаборатория дифференциальных уравнений и их приложений (Ташкент, Узбекистан)

каждое из которых имеет конечную кратность.

Спектральное разложение произвольной функции $f \in L_2(\Omega)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k f(x),$$

где P_k – оператор проектирования на собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_k .

Каждая собственная функция $v(x)$, отвечающая собственному значению $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$A(x, D)v(x) = \lambda v(x)$$

и граничному условию (3). Отсюда для каждой собственной функции следует равенство

$$\lambda = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} c(x)|v(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |v(x)|^2 \sigma(x) ds(x). \quad (4)$$

Разобьем границу $\partial\Omega$ области Ω на следующие три части:

$$E^+(\sigma) = \{x \in \partial\Omega \mid \sigma(x) > 0\}.$$

$$E^-(\sigma) = \{x \in \partial\Omega \mid \sigma(x) < 0\}.$$

$$E^0(\sigma) = \{x \in \partial\Omega \mid \sigma(x) = 0\}.$$

Заметим, что в случае, когда $\text{mes}_{n-1} E^-(\sigma) > 0$, т. е. поверхностная мера множества $E^-(\sigma)$ положительна, из равенства (4) следует, что собственное значение может оказаться отрицательным. Определяется это значениями коэффициента $\sigma(x)$, входящего в граничное условие (3). При этом появляются экспоненциально растущие решения, что может быть интерпретировано как возникновение пандемии. В данной работе рассматривается именно этот случай.

Отметим, что показатель роста решения существенно зависит от $|\lambda_1|$, а именно, при $|\lambda_1| > 1$ он уменьшается с ростом ρ , при $|\lambda_1| < 1$ он увеличивается с ростом ρ , а при $|\lambda_1| = 1$ вообще от ρ не зависит. Иначе говоря, при $|\lambda_1| = 1$ решения задачи Коши (1) для различных ρ в главном ведут себя одинаково. Таким образом, для однозначного восстановления дробного порядка ρ по главному члену асимптотики необходимо потребовать выполнения условия $|\lambda_1| \neq 1$.

Наше основное предположение заключается в следующем:

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_1 \neq -1. \quad (5)$$

Обозначим символом $N_k(\phi)$ нули функции $P_k\phi$:

$$N_k(\phi) = \{x \in \Omega \mid P_k\phi(x) = 0\}.$$

Фиксируем произвольное число $\lambda > |\lambda_1|$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнено условие (5) и пусть $0 < \rho < 1$. Тогда для любой функции $\phi \in D((A + \lambda I)^\alpha)$, где $\alpha > n/4$, в каждой точке $x \in \Omega \setminus N_1(\phi)$ выполняется следующее равенство

$$\frac{1}{2 \ln |\lambda_1|} \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln \ln |u(x, t)| - \ln t) = \frac{1}{\rho}.$$

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение, М. Физматлит, 2003, 272 с.
2. *Xu C., Yu Y., Chen Y.Q., Lu Z.* Forecast analysis of the epidemic trend of COVID-19 in the United States by a generalized fractional order SEIR model, *Nonlinear Dyn.* 2020 101, 1621–1634.
3. *Alimov Sh.A., Ashurov R.R.* Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2020, 28, 651–658.
4. *Alimov Sh.A., Ashurov R.R.* Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville time-fractional derivative. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 2022, 8, 1–8.

О ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ БЕССЕЛЯ

Х.Ф. Алзамили, Э.Л. Шишкина

alzamili.khitam@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

УДК 517.9

В докладе рассматривается параболический потенциал Бесселя и его свойства.

Ключевые слова: параболический потенциал Бесселя, оператор Лапласа-Бесселя.

Мы рассмотрим отрицательные дробные степени оператора

$$T_\gamma = -(\Delta_\gamma)_x + \frac{\partial}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ — оператор Лапласа-Бесселя.

Многомерное преобразование Фурье-Бесселя имеет вид

$$\mathbf{F}_B[f(x, t)](\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \cdot e^{it\tau} f(x, t) x^\gamma dx dt, \quad (1)$$

где

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел $\gamma_i, i=1, \dots, n,$, $x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}, \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i), x_i > 0, i=1, \dots, n, j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x), J_\nu$ — функция Бесселя первого рода.

Действие оператора T_γ в образах преобразования Фурье-Бесселя определяется следующим образом

$$\mathbf{F}_B[T_\gamma \varphi(x, t)](\xi, \tau) = (|\xi|^2 - i\tau) \mathbf{F}_B[\varphi(x, t)](\xi, \tau).$$

Таким образом, формально, мы можем определить дробную отрицательную степень оператора T_γ как

$$T_\gamma^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi(x, t) = \mathbf{F}_B^{-1}(|x|^2 - it)^{-\frac{\alpha}{2}} \mathbf{F}_B[\varphi], \quad \alpha > 0.$$

При $\alpha = 0$ получим $T_\gamma^0 \varphi(x, t) = \varphi(x, t)$, таким образом, $T_\gamma^0 = I$ — тождественный оператор.

Рассмотрим функцию

$$E_{\gamma}^{\alpha}(x, t) = C_{n, \gamma}(\alpha) \begin{cases} t^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}-1} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$C_{n, \gamma}(\alpha) = \frac{1}{2^{|\gamma|} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

При $\alpha=1$ функция (2) представляет собой фундаментальное решение $(\Delta_\gamma)_x u(x, t) = u_t(x, t)$.

Имеем

$$(\mathbf{F}_B)[E_{\gamma}^{\alpha}(x, t)](\xi, \tau) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-(|\xi|^2 - i\tau)t} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt = (|\xi|^2 - i\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Алзамили Хитам Фахим, аспирант, Белгородский Государственный Национальный Исследовательский Университет (Белгород, Россия).

Шишкина Элина Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, Воронежский Государственный Университет (Воронеж, Россия).

Параболический потенциал Бесселя функции $\varphi(x, t)$ определяется равенством

$$(\mathcal{T}_\gamma^\alpha \varphi)(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} E_\gamma^\alpha(y, \tau) ({}^\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x, t - \tau)) y^\gamma dy d\tau,$$

где ${}^\gamma \mathbf{T}_x^y$ — многомерный обобщенный сдвиг (см. [1])

$$({}^\gamma \mathbf{T}_x^y f)(x) = {}^\gamma \mathbf{T}_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x),$$

${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i}$ — одномерный обобщенный сдвиг вида

$$({}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{\gamma_i-1} \varphi_i d\varphi_i.$$

При $\gamma_i = 0$ одномерный обобщенный сдвиг имеет вид ${}^0 T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}$.

При $t > 0$ рассмотрим обобщенный интеграл Гаусса-Вейерштрасса вида (см. [2], формула (15))

$$(\mathcal{W}_t^\gamma \psi)(x) = \frac{2^{-|\gamma|}}{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \frac{1}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} ({}^\gamma \mathbf{T}_x^y \psi(x)) y^\gamma dy. \quad (3)$$

Тогда можем записать

$$(\mathcal{T}_\gamma^\alpha \varphi)(x, t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} ((\mathcal{W}_\tau^\gamma)_x \varphi(x, t - \tau)) d\tau.$$

Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $1 \leq p < \infty$ — пространство всех измеримых функций переменных (x, t) , $x \in \mathbb{R}_+^n$, $t \in \mathbb{R}$, четных по каждой их переменных x_i , $i = 1, \dots, n$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x, t)|^p x^\gamma dx \right) dt < \infty.$$

Норма в $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^{n+1})$ имеет вид

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^{n+1})} = \|f\|_{p, \gamma} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x, t)|^p x^\gamma dx \right) dt \right)^{1/p}.$$

Теорема 1. Потенциал $\mathcal{T}_\gamma^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, где $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^{n+1})$ сходится абсолютно при $0 < \alpha < n + |\gamma| + 2$ и $1 \leq p < \frac{n+|\gamma|+2}{\alpha}$.

Теорема 2. Потенциал $\mathcal{T}_\gamma^\alpha$ ограничен из $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^{n+1})$ в $L_q^\gamma(\mathbb{R}_+^{n+1})$, при $1 < p < \frac{n+|\gamma|+2}{\alpha}$, $q = \frac{(n+|\gamma|+2)p}{n+|\gamma|+2-\alpha p}$:

$$\|\mathcal{T}_\gamma^\alpha \varphi\|_{q, \gamma} \leq C_{n, \gamma} \|\varphi\|_{p, \gamma}.$$

Литература

1. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. — Elsevier: Amsterdam, 2020.
2. Джабраилов А.Л., Шишкина Э.Л. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности // Прикладная математика & Физика, 54, 2 (2022), 89-97.

КОРОТКОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД РЕЗКО МЕНЯЮЩИМСЯ ДНОМ

А.И. Аллилуева

esina_anna@list.ru

УДК 51-72

Описаны коротковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений мелкой воды в случае, когда рельеф дна и внешний поток меняются скачкообразно вблизи некоторой кривой. Основной результат – асимптотический ряд для решения задачи Коши.

Ключевые слова: малые возмущения, поле скоростей, моды, мелкая вода, асимптотика.

Строим асимптотические ряды для линеаризованных уравнений мелкой воды с начальными условиями в виде быстроосциллирующих функций. Все коэффициенты системы зависят от быстрой переменной $y = \frac{\Phi(x)}{\varepsilon}$ ($\Phi(x)$ – некоторая гладкая функция, ε – малый параметр), что и означает, что рельеф дна и внешний поток меняются скачкообразно вблизи некоторой кривой $\Phi(x) = 0$. Получаем два различных случая поведения внешнего потока, затем из характеристического уравнения получаем три различные фазы: две гидродинамические и одна вихревая. Изучая асимптотику решения для каждого случая поведения внешнего потока, получаем прошедшие и отраженные волны от кривой $\Phi(x) = 0$, где различные моды могут переходить друг в друга, а также появляются обратные волны, когда фазовая и групповая скорости направлены в разные стороны.

Также, в зависимости от типа скачка внешнего потока (тангенциальный или нормальный) изучены кривые Петровского и различные моды прошедших и отраженных волн. Асимптотика выражается через вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение; показано, что это уравнение вырождается (т.е. его порядок меньше, чем в случае гиперболических систем общего положения).

Литература

1. V.P. Maslov, M.V. Fedoriuk Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics, Math. Phys. Appl. Math., vol. 7, Dordrecht: Springer, 1981.
2. С.Ю. Доброхотов Приложение теории Маслова к двум задачам с операторнозначным символом. УМН, 1984, т.39, вып.4, стр. 125.
3. В.С. Буслаев Адиабатическое возмущение периодического потенциала // ТМФ. 1984. Т. 58, №2, 233-243.
4. С.Ю. Доброхотов, А.И. Шафаревич Квазиклассические асимптотики в задаче рассеяния волновых пакетов на быстромеменяющемся потенциале вида $-2|\nabla\Phi|^2/ch^2(\Phi/h)$ // ДАН СССР, 1987, т. 295, №6, 1347-1351.
5. А. И. Шафаревич Квазиклассическое рассеяние волновых пакетов на узком слое, в котором потенциал быстро меняется, Матем. заметки, 45:1 (1989), 106-114; Math. Notes, 45:1 (1989), 72-77.
6. V. P. Maslov, G. A. Omel'yanov Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion, Russian Math. Surveys, 36:3 (1981), 73-149.
7. F. Calogero, A. Degasperis Spectral Transform and Solitons, North-Holland Publishing Company, 1982.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КРИОХИМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА СОЗДАНИЯ ЛЕКАРСТВЕННЫХ НАНОФОРМ

И.В. Астахова, Ю.Н. Морозов, А.В. Филиновский, Г.А. Чечкин, Т.И. Шабатина
ast.diffiety@gmail.com, yunmor@mail.ru, flnv@yandex.ru, chechkin@mail.ru, tatyashabatina@yandex.ru

УДК 546.05, 517.956.4, 517.927

В работе исследуется математическая модель криохимического синтеза наночастиц фармацевтических препаратов, основанного на сублимации или испарении исходной фармацевтической субстанции в условиях вакуума с последующей конденсацией молекул из газовой фазы на охлаждаемую поверхность. Используется стационарное одномерное уравнение теплопроводности с массопереносом. Для таких уравнений изучаются свойства положительных убывающих решений, а также доказываются теоремы существования и единственности решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена.

Ключевые слова: криохимический синтез, наночастицы, одномерная модель, положительное решение, краевая задача.

При создании лекарственных наночастиц фармацевтических субстанций размер и морфология частиц играют существенную роль в терапевтической эффективности препаратов. Для уменьшения дозы лекарств и снижения их побочных эффектов и токсичности размеры частиц можно снижать до наноразмеров с использованием криохимического синтеза – нового метода, основанного на сублимации или испарении исходной фармацевтической субстанции в условиях вакуума и введении образующихся паров в поток инертного газа с последующей низкотемпературной конденсацией потока молекул из газовой фазы на охлаждаемую поверхность.

При моделировании используется одномерное уравнение теплопроводности с массопереносом

$$\frac{\partial T}{\partial t} = V \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho C_V} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где T – температура в потоке газа-носителя, взаимодействующего с охлаждаемой поверхностью, ρ , μ , λ – плотность, молекулярная масса и теплопроводность газа-носителя соответственно, C_V – его молярная теплоёмкость при постоянном объёме, а V – линейная скорость фронта его потока. Физико-химическое описание задачи приводится в работах [1, 2].

В интересующем нас стационарном режиме ($\partial T / \partial t = 0$) уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dT}{dx} - \frac{\mu}{\rho V C_V} \cdot \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (2)$$

Если площадь сопла (формирователя смешанного молекулярного потока) равна S , то молярный расход газа-носителя равен $\dot{N} = \rho V S / \mu$, а его отношение к площади сопла (плотность потока газа-носителя) равно $\dot{n} = \dot{N} / S = \rho V / \mu$. Теперь уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{dT}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda}{C_V \dot{n}} \cdot \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3)$$

Работа выполнена в рамках программы развития МГУ имени М.В. Ломоносова, проект №23-НШ05-26.

Астахова Ирина Викторовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, РЭУ имени Г.В. Плеханова, высшая школа кибертехнологий, математики и статистики (Москва, Россия).

Морозов Юрий Николаевич, к.х.н., с.н.с., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет (Москва, Россия).

Филиновский Алексей Владиславович, д.ф.-м.н., профессор, МГТУ имени Н.Э. Баумана, проф. кафедры “Высшая математика”, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия).

Чечкин Григорий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия).

Шабатина Татьяна Игоревна, д.х.н., зав. лабораторией, в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет, профессор, МГТУ имени Н.Э. Баумана (Москва, Россия).

и найти его решение при известной зависимости теплопроводности λ газа-носителя от температуры. Эта зависимость для многих газов (таких как азот, гелий, аргон и т.д.) выражается приближенной формулой $\lambda = \frac{ik}{3\pi^{3/2}d^2} \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \equiv \alpha\sqrt{T}$, где i — сумма поступательных и вращательных степеней свободы молекул, k — постоянная Больцмана, μ — молярная масса, T — абсолютная температура, d — эффективный диаметр молекул, R — универсальная газовая постоянная. Теперь уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(T - b\sqrt{T} \frac{dT}{dx} \right) = 0, \quad b \equiv \frac{\alpha}{C_V \dot{n}} > 0. \quad (4)$$

В рассматриваемой физико-химической задаче именно строго убывающие решения уравнения (4) представляют интерес.

Теорема 1. Каждое положительное решение T уравнения (4) либо постоянно, либо строго монотонно, а любое строго убывающее его решение имеет вид

$$T(x) = c^2 \Theta \left(\frac{x - x^*}{bc} \right)^2, \quad (5)$$

где $x^*, c > 0$ — произвольные константы, а функция $\Theta: (-\infty, 0) \rightarrow (0, 1)$ — убывает и неявно задаётся формулой

$$x = 2\Theta(x) + \ln \frac{1 - \Theta(x)}{1 + \Theta(x)},$$

причём выражение в скобках в уравнении (4) (не зависящее от x) для решения (5) равно c^2 , а любое непродолжаемое решение T уравнения (4) определено на интервале $(-\infty, x^*)$ и удовлетворяет условиям

$$T(x) \rightarrow c^2, \quad T'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty;$$

$$T(x) \rightarrow 0, \quad T'(x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow x^*.$$

Изучается также существование и единственность решений уравнения (4) при граничных условиях Дирихле, Неймана и Робена.

Теорема 2. Для любых констант $x_0 < x_1, T_0 > T_1 > 0, U_1 < 0$ и каждой из следующих трёх пар условий:

$$1) T(x_0) = T_0, T(x_1) = T_1;$$

$$2) T(x_0) = T_0, T'(x_1) = U_1;$$

$$3) T(x_0) = T_0, T'(x_1) = U_1 T(x_1),$$

существует единственное решение T уравнения (4), определённое на отрезке $[x_0, x_1]$ и удовлетворяющее именно этой паре условий.

Теорема 3. Если $b > 0, T_0 > T_1 > 0$ и $U_1 < 0$, то неравенство

$$b|U_1|\sqrt{T_1} > T_0 - T_1 \quad (6)$$

эквивалентно существованию на некотором отрезке $[x_0, x_1]$ строго убывающего решения T уравнения (4), удовлетворяющего условиям

$$T(x_0) = T_0, \quad T(x_1) = T_1, \quad T'(x_1) = U_1. \quad (7)$$

Замечание. При фиксированных T_0, T_1, U_1 , удовлетворяющих условию (6), и фиксированном x_0 теорема 3 позволяет найти свободную границу отрезка (точку x_1), на котором существует положительное строго убывающее решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (7).

Доказательства части приведённых результатов изложены в [1]. Другие результаты авторов, связанные с математическим моделированием физических и биологических процессов, см. в [3–6] (в частности, моделируемых с помощью параболического уравнения — в [3, 4]).

Литература

1. *Astashova I.V., Chechkin G.A., Filinovskiy A.V., Morozov Yu.N., Shabatina T.I.* Mathematical modeling of cryochemical formation of medicinal substances in nanoforms. the role of temperature and dimensional parameters // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. 2023. V. 20. P. 213–221.
2. *Shabatina T.I., Morosov Y.N., Soloviev A.V., Shabatin A.V., Vernaya O.I., Melnikov M.Y.* Cryochemical production of drug nanoforms: Particle size and crystal phase control of the antibacterial medication 2,3-quinoxalinedimethanol-1,4-dioxide (dioxidine) // Nanomaterials. 2021. V. 11. № 6: 1588. P. 1–17.
3. *Astashova I.V., Filinovskiy A.V.* Controllability and exact controllability in a problem of heat transfer with convection and time distributed functional // J. of Mathematical Sciences. 2020. V. 244, № 2. P. 148–157.
4. *Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.E.* On the Friedrichs inequality in a domain perforated along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems // Russian Journal of Mathematical Physics. 2009. V. 16. № 1. P. 1–16.
5. *Astashova I.V., Belikova K.N.* On periodic solutions to a nonlinear dynamical system from one-dimensional cold plasma model // Functional Differential Equations. 2022. № 3–4. P. 7–15.
6. *Astashova I., Chebotaeva V., Cherepanov A.* Mathematical models of epidemics in closed populations and their visualization via web application PhaPl // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. 2018. V. 15. № 12. P. 112–118.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С СУММАРНЫМ ЯДРОМ МЕТОДОМ НАЙСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

С.Н. Асхабов

askhabov@yandex.ru

УДК 517.968.4

Методом потенциальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения интегрального уравнения со степенным суммарным ядром и нечетностепенной нелинейностью в пространстве Лебега. Показано, что решение можно найти методом наискорейшего спуска.

Ключевые слова: потенциальный монотонный оператор, суммарное ядро.

В работе найдены условия на заданные функции и параметры при которых нелинейное интегральное уравнение с суммарным ядром можно решить методом наискорейшего спуска (градиентным методом).

Рассмотрим в вещественном пространстве Лебега $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, с обычной нормой $\|u\|_p = \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$ оператор

$$(Au)(x) = a(x) \int_0^1 \frac{b(t) u(t)}{(x+t)^\gamma} dt,$$

где $a(x)$, $b(x)$ заданные измеримые на $[0,1]$ по Лебегу функции и число $\gamma \in (0,1)$.

Лемма 1. Пусть $p > 2$, $0 < \gamma < 1$ и $a, b \in L_{2p/(p-2)}(0,1)$. Тогда оператор A действует непрерывно из пространства $L_p(0,1)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(0,1)$, $p' = p/(p-1)$, причем

$$\|Au\|_{p'} \leq \frac{1}{1-\gamma} \|a\|_{2p/(p-2)} \|b\|_{2p/(p-2)} \|u\|_p \quad \forall u \in L_p(0,1).$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № FEFS-2020-0001).

Асхабов Султан Нажмудинович, д.ф.-м.н., доцент, Чеченский государственный педагогический университет, факультет физики, математики и информационных технологий, Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова (Грозный, Россия)

Используя лемму 1 и некоторые результаты, приведенные в [1, с. 14] и [2, с. 199], доказывается

Лемма 2. Если $p > 2$, $0 < \gamma < 1$, $b(x) \neq 0$ почти всюду на $[0, 1]$ и $b \in L_{2p/(p-2)}(0, 1)$, то оператор

$$(Bu)(x) = b(x) \int_0^1 \frac{b(t) u(t)}{(x+t)^\gamma} dt$$

действует непрерывно из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$, $p' = p/(p-1)$ и является потенциальным, симметрическим и строго положительным, причем

$$\langle Bu, u \rangle = \int_0^1 \left(b(x) \int_0^1 \frac{b(t) u(t)}{(x+t)^\gamma} dt \right) u(x) dx \geq 0 \quad \forall u \in L_p(0, 1)$$

и $\langle Bu, u \rangle > 0$, если $u(x) \neq 0$ почти всюду на $[0, 1]$.

Используя лемму 2 и теорему 1.6 [1], методом потенциальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов (см., например, [3]) доказывается

Теорема 1. Пусть $p > 2$ – четное число, $0 < \gamma < 1$, $b(x) \neq 0$ почти всюду на $[0, 1]$ и $b \in L_{2p/(p-2)}(0, 1)$. Тогда для любого $f \in L_{p'}(0, 1)$, $p' = p/(p-1)$, уравнение

$$u^{p-1}(x) + b(x) \int_0^1 \frac{b(t) u(t)}{(x+t)^\gamma} dt = f(x) \quad (1)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(0, 1)$. Это решение можно найти методом наискорейшего спуска по итерационной формуле

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot \|Tu_n - f\|^{2-p'} |Tu_n - f|^{p'-2} (Tu_n - f),$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $u_0 \in L_p(0, 1)$ – произвольная функция, $Tu = u^{p-1} + Bu$,

$$\delta_n = \min \left(1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)(\|u_n\|_p + \|Tu_n - f\|_{p'})^{p-2} + \frac{1}{1-\gamma} \|b\|_{2p/(p-2)}^2} \right),$$

$\varepsilon > 0$ – любое число. Последовательность $\{u_n\}$ сходится к u^* по норме пространства $L_p(0, 1)$.

Итерационный метод решения уравнения (1), указанный в теореме 1, называют также градиентным методом [3, с. 122].

В заключение отметим, что следуя работе [4] аналогичные результаты можно получить для соответствующих нелинейных интегральных уравнений с разностными ядрами общего вида. Интегральные уравнения вольтерровского типа со степенной нелинейностью и суммарным ядром в конусе пространства непрерывных функций $C[0, \infty)$ изучены в [5].

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. Porter D., Stirling D. Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. – Cambr. Univ. Press. 1990. – 382 p.
3. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
4. Асхабов С.Н. Градиентный метод решения нелинейных дискретных и интегральных уравнений с разностными ядрами // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 192. С. 26–37.
5. Асхабов С.Н. Интегральное уравнение с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №9. С. 1210–1219.

**ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОС В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ.
ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ****Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров***baderko.ea@yandex.ru, ser341516@yandex.ru*

УДК 517.956.4

Рассмотрены начально-краевые задачи для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами. Методом граничных интегральных уравнений установлена однозначная классическая разрешимость таких задач в пространстве функций, непрерывных и ограниченных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании областей. Дано интегральное представление решений.

Ключевые слова: параболические системы, начально-краевые задачи.

В работе рассматриваются начально-краевые задачи для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях негладкими боковыми границами, допускающими наличие «клювов», на которых задаются граничные условия общего вида. Такие задачи моделируют, в частности, процессы тепло- и массопереноса в композиционных многокомпонентных материалах (см., например, [1], [2]). При этом рассматриваемый характер негладкости боковых границ областей моделирует возможное резкое изменение границ некоторых металлов при фазовых превращениях (см., например, [3]).

Основным результатом настоящей работы является теорема об однозначной классической разрешимости поставленных задач в пространстве функций, непрерывных и ограниченных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании областей. Дано интегральное представление решений. Это представление дает теоретическую основу для численного исследования поставленных задач методом граничных элементов.

В работе сформулировано алгебраическое условие разрешимости поставленных задач и доказано, что оно эквивалентно известному условию дополнителности. Строится пример, иллюстрирующий тот факт, что в общем случае это условие может не выполняться. Приведен алгоритм вычислений, связанный с проверкой выполнения указанного условия.

Показано, что рассматриваемые условия на характер негладкости боковых границ областей и на характер непрерывности правых частей в граничных условиях являются точными для разрешимости поставленных задач в пространстве функций, непрерывных и ограниченных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании областей. Основные результаты настоящей работы опубликованы в [4]–[9].

Литература

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
2. Криштал М.А. Многокомпонентная диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1985. 177 с.
3. Гуляев А.П. Металловедение. М.: Металлургия, 1986. 544 с.
4. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5, 625–634
5. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуграниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10, 1333–1343.
6. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 502. № 2, 26–29.
7. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуграниченной области на плоскости // Журн. вычислит. матем. 2023. Т. 63. № 4, 584–595.

Бадерко Елена Александровна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Сахаров Сергей Игоревич, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

8. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 5, 608-618.

9. Сахаров С.И. Начально-краевые задачи для однородных параболических систем в полуограниченной плоской области и условие дополнителности // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 12, 1641-1653.

ГОЛОМОРФНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ТИХОНОВСКИХ СИСТЕМ

М.И. Бесова, Д.А. Маслов

besovami@mpei.ru, maslovdma@mpei.ru

УДК 517.928

Рассмотрена задача Коши для нелинейной системы дифференциальных уравнений тихоновского типа с произвольным числом быстрых и медленных переменных. Описано применение метода голоморфной регуляризации к данной задаче и доказано, что при выполнении определенных условий может быть построено псевдоголоморфное решение.

Ключевые слова: задача Коши, тихоновская система, псевдоголоморфное решение, метод голоморфной регуляризации.

Рассмотрим задачу Коши для тихоновской системы дифференциальных уравнений с k медленными и m быстрыми переменными

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \varepsilon \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{cases} \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(0, \varepsilon) = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{z}(0, \varepsilon) = \mathbf{z}^0,$$

где $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_k\}$, $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_m\}$, $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_k\}$, $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_m\}$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Будем считать выполненными условия теоремы А.Н. Тихонова о предельном переходе [1] с усиленными условиями гладкости: функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ и $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ аналитичны в некоторой замкнутой области $\bar{\Omega}_{t\mathbf{y}\mathbf{z}} \subset \mathbb{R}^{k+m+1}$.

Введем дифференциальные операторы

$$L^{\mathbf{f}} = \frac{\partial}{\partial t} + f_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + f_k \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad L^{\mathbf{g}} = g_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + g_m \frac{\partial}{\partial z_m},$$

тогда уравнение интегралов системы (1) примет вид

$$\varepsilon L^{\mathbf{f}} \mathbf{U} + L^{\mathbf{g}} \mathbf{U} = 0. \quad (2)$$

Считая оператор $L^{\mathbf{f}}$ подчиненным оператору $L^{\mathbf{g}}$, будем искать решение уравнения (2) в виде ряда по степеням ε :

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{U}_0(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \varepsilon \mathbf{U}_1(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \dots + \varepsilon^n \mathbf{U}_n(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \dots \quad (3)$$

Коэффициенты ряда (3) могут быть найдены из серии уравнений

$$L^{\mathbf{g}} \mathbf{U}_0 = 0, \quad L^{\mathbf{g}} \mathbf{U}_1 = -L^{\mathbf{f}} \mathbf{U}_0, \quad \dots \quad L^{\mathbf{g}} \mathbf{U}_n = -L^{\mathbf{f}} \mathbf{U}_{n-1}, \quad \dots \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00546).

Бесова Маргарита Ильинична, ассистент, НИУ «МЭИ», кафедра высшей математики (Москва, Россия)
Маслов Дмитрий Александрович, к.т.н., НИУ «МЭИ», кафедра высшей математики (Москва, Россия)

В качестве решения первого уравнения серии (4) возьмем вектор

$$U_0 = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t), y_1 - \widehat{Y}_1(t), \dots, y_k - \widehat{Y}_k(t)\},$$

где вектор-функция $\varphi = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)\}$ аналитична на отрезке $[0, T]$, $\widehat{Y}(t)$ – решение вырожденной задачи, соответствующей (1). Для решения остальных уравнений серии (4) можно воспользоваться интегральным способом решения уравнений первого порядка в частных производных [2].

Доказательство сходимости рядов вида (3) в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$ равномерно на каждом компакте из $\Omega_{t\mathbf{y}\mathbf{z}}$ можно найти в [3].

Решение $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$, $\mathbf{z}(t, \varepsilon)$ начальной задачи (1) называется *псевдоголоморфным* в точке $\varepsilon = 0$, если существуют функции $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$ и $\mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$, такие, что для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ на некотором отрезке $[0, t_\varepsilon] \subset [0, T]$

$$\mathbf{y}(t, \varepsilon) = \mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon) \Big|_{\boldsymbol{\eta}=\varphi(t)/\varepsilon}, \quad \mathbf{z}(t, \varepsilon) = \mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon) \Big|_{\boldsymbol{\eta}=\varphi(t)/\varepsilon},$$

причем функции $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$ и $\mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon)$ при каждом $t \in [0, T]$ и каждом $\boldsymbol{\eta}$ из некоторого неограниченного множества $G \subset \mathbb{R}$ аналитичны по третьей переменной, т.е. представляющие их ряды

$$\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t, \boldsymbol{\eta}) \varepsilon^n, \quad \mathbf{Z}(t, \boldsymbol{\eta}, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(t, \boldsymbol{\eta}) \varepsilon^n,$$

сходятся в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$ (зависящей от t и $\boldsymbol{\eta}$).

Получены достаточные условия существования псевдоголоморфного решения задачи (1) в точке $\varepsilon = 0$. Сначала запишем m первых уравнений из $U(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \varepsilon) = 0$ в виде

$$\varphi'_1 \widetilde{V}^{[1]}(t, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}) = \varphi_1(t)/\varepsilon, \quad \dots \quad \varphi'_m \widetilde{V}^{[m]}(t, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}) = \varphi_m(t)/\varepsilon. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть вектор-функция $\varphi = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)\}$ аналитична на отрезке $[0, T]$; $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i(t)$ строго монотонно убывают на отрезке $[0, T]$ ($i = \overline{1, m}$), и система уравнений (1) имеет решение вида

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z}_0(t, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0, \Phi(\varphi(t)/\varepsilon)),$$

где вектор-функция $\Phi(\boldsymbol{\eta}) = \{\Phi_1(\boldsymbol{\eta}), \dots, \Phi_m(\boldsymbol{\eta})\}$, а $q_i = \Phi_i(\boldsymbol{\eta})$ ($i = \overline{1, m}$) – целые функции с асимптотическими значениями a_i ($i = \overline{1, m}$), строго монотонно возрастающие на действительной оси. Тогда, если функция $\mathbf{Z}_0(t, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0, \mathbf{q})$ является ограниченной на множестве $\mathbf{T}_{t\mathbf{y}\mathbf{z}}^0 \times (a_1, \Phi_1(0)] \times \dots \times (a_m, \Phi_m(0)]$, в котором $\mathbf{T}_{t\mathbf{y}\mathbf{z}}^0$ – произвольный компакт из $\Omega_{t\mathbf{y}\mathbf{z}}$, то решение $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$, $\mathbf{z}(t, \varepsilon)$ задачи Коши (1) будет псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$.

Псевдоголоморфное решение задачи (1) может быть определено из интеграла (3) по теореме о неявной функции. Показано, что с помощью техники продолжения решений [4] псевдоголоморфное решение задачи (1) можно построить на всем отрезке $[0, T]$.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 1989.
3. Качалов В.И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. №4. С. 654-661.
4. Vesova M., Kachalov V. Analytical aspects of the theory of Tikhonov systems // Mathematics. 2022, 10 (1), 72.

ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ ЛИ В ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ ОДНОМЕРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.В. Боровских

aleksey.borovskikh@math.msu.ru

УДК 517.958

Для любой левоинвариантной римановой метрики, заданной на группе Ли, любая динамическая система, инвариантная относительно этой группы, порождается оператором алгебры правых автоморфизмов и ее траектории являются винтовыми линиями (имеющими все постоянные кривизны).

Ключевые слова: геометрия группы Ли, кинетические уравнения, система Френе.

Пусть G – n -мерная группа, реализованная как множество в \mathbb{R}^n , соответствующие переменные мы будем обозначать через $x = (x^1, \dots, x^n)$; $\{\Xi_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i(x)\}_{\alpha=1}^n$ – базис соответствующей порождающей алгебры.

Теорема 1. Множество метрик $g_{ij}(x)dx^i dx^j$, заданных на G и остающихся инвариантными при действии этой группы, образует линейное пространство размерности $\frac{n(n+1)}{2}$.

Теорема 2. Пусть G – группа Ли размерности n , алгебра Ли которой имеет базис $\Xi_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\partial_i$ и структурные константы $C_{\alpha\beta}^\gamma$. На этой группе существует ровно n линейных дифференциальных форм, инвариантных относительно этой алгебры.

Следствие. Все метрические формы из формулировки теоремы 1, инвариантные относительно алгебры, имеют вид квадратичной формы $ds^2 = q_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta$ от линейных дифференциальных форм $\omega^\alpha = \omega_i^\alpha dx^i$, $\alpha = 1, \dots, n$ с постоянными коэффициентами $q_{\alpha\beta}$.

Обозначим через ω_α^α матрицу, обратную к матрице ω_i^α , задающей инвариантные дифференциальные формы $\omega^\alpha = \omega_i^\alpha dx^i$. Тогда для операторов $\Omega_\alpha = \omega_\alpha^i \partial_i$ выполнено $[\Xi_\alpha, \Omega_\beta] = 0$.

Определение. Алгебру, образованную решениями Ω системы уравнений $[\Xi_\alpha, \Omega] = 0$, мы назовем двойственной к алгебре, образованной операторами Ξ_α .

Замечание 1. Двойственная алгебра в принципе не совпадает с исходной.

Замечание 2. Инвариантные относительно Ξ_α формы ω^β являются формами Маурера-Картана для алгебры с базисом Ω_β . Аналогично, формы Маурера-Картана алгебры с базисом Ξ_α оказываются инвариантными относительно Φ_β , так что здесь действительно наблюдается определенная двойственность.

Замечание 3. Если исходная алгебра – это порождающая алгебра группы автоморфизмов, порожденных левыми сдвигами, то двойственная алгебра – это порождающая алгебра группы автоморфизмов, порожденных правыми сдвигами.

Пусть

$$\frac{dx^1}{\phi^1(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\phi^n(x)} \quad (1)$$

– уравнение семейства кривых, инвариантного относительно группы G . Умножением (1) на подходящий множитель можно добиться, чтобы $\omega_i^\alpha \phi^i$ оказались константами. Обозначим их через λ^α .

Для любой инвариантной метрики $ds^2 = q_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta$ единичный касательный вектор $\tau = (\tau^i)$ к кривой (1) имеет вид

$$\tau^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{\phi^i(x)}{\sqrt{Q}}, \quad Q = q_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta$$

и поэтому на касательном векторе τ соответствующая линейная форма оказывается постоянной: $\omega_i^\alpha \tau^i = \frac{\lambda^\alpha}{\sqrt{Q}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2024-1447).

Боровских Алексей Владиславович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Замечание. Вектор $\phi^i = \lambda^\alpha \omega_\alpha^i$ является линейной комбинацией векторных полей, порождающих двойственную алгебру Φ , поэтому изучаемые нами траектории, инвариантные относительно алгебры Ξ , являются траекториями однопараметрической подгруппы, порожденной оператором из двойственной алгебры.

Обозначим через $\tau_N = (\tau_N^k)$ репер Френе, занумерованный индексом $N = 1, \dots, n$, и, соответственно, $\lambda_N^\alpha = \omega_\alpha^i \tau_N^i$.

Теорема 3. В терминах величин λ_N^α система Френе имеет вид

$$\frac{d\lambda_N^\gamma}{ds} + H_{\alpha\beta}^\gamma \lambda_N^\alpha \lambda_1^\beta = -\varkappa_{N-1} \lambda_{N-1}^\gamma + \varkappa_N \lambda_{N+1}^\gamma,$$

где $H_{\alpha\beta}^\gamma$ – постоянные, определяемые формулой

$$H_{\alpha\beta}^\gamma = -\frac{1}{2} [q^{\gamma\sigma} q_{\mu\beta} C_{\alpha\sigma}^{*\mu} + C_{\alpha\beta}^{*\gamma} + q^{\gamma\sigma} q_{\alpha\nu} C_{\beta\sigma}^{*\nu}], \quad (2)$$

$C_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ – структурные константы алгебры с базисом Ω_α .

Следствие. Для всех инвариантных кривых все кривизны и все величины λ_N^α являются постоянными.

Теорема 4. Для любой метрики $g_{ij}(x) = q_{\alpha\beta} \omega^\alpha$ соответствующие тензоры Римана и Риччи имеют вид

$$R_{ijk}^l = M_{\alpha\beta\gamma}^\theta \omega_\theta^l \omega_i^\alpha \omega_j^\beta \omega_k^\gamma, \\ R_{ij} = M_{\alpha\beta} \omega_i^\alpha \omega_j^\beta,$$

где

$$M_{\alpha\beta\gamma}^\theta = -C_{\beta\gamma}^{*\sigma} H_{\alpha\sigma}^\theta + H_{\sigma\beta}^\theta H_{\alpha\gamma}^\sigma - H_{\sigma\gamma}^\theta H_{\alpha\beta}^\sigma,$$

$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta\gamma}^\gamma$, $H_{\alpha\beta}^\sigma$ – постоянные, определяемые формулой (2), а $C_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ – структурные константы алгебры с базисом Ω_α .

Следствие. Все кривизны рассматриваемого риманова пространства на группе являются собственными значениями матричной задачи $M_{\alpha\beta} = Rq_{\alpha\beta}$ или, что то же самое, собственными значениями матрицы $M_\alpha^\beta = M_{\alpha\sigma} q^{\sigma\beta}$.

Замечание 1. То, что кривизны оказались постоянными, естественно – ведь автоморфизмы переводят группу в себя, а значит для инвариантной метрики все ее характеристики при автоморфизмах должны сохраняться.

Замечание 2. Римановы пространства, кривизны которых не зависят от точки пространства, в геометрии известны и называются *однородными*.

Замечание 3. Представляет интерес анализ групп Ли (хотя бы даже трехмерных) с точки зрения выявленных геометрий и использования этих геометрий для классификации групп Ли.

Литература

1. Боровских А.В. Геометрия группы Ли. Инвариантные метрики и динамические системы, двойственная алгебра и их приложения в групповом анализе одномерного кинетического уравнения // ТМФ, 217:1 (2023), 127-141.

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА

А.Д. Брюно, А.Б. Батхин

abruno@keldysh.ru, batkhin@technion.ac.il

УДК 531.18

В классической задаче о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки, описываемой системой Эйлера–Пуассона, найдены новые случаи глобальной интегрируемости. Для одного из этих случаев, обобщающего случай Ковалевской, предложен четвёртый глобальный интеграл.

Ключевые слова: уравнения Эйлера–Пуассона, глобальная интегрируемость, четвёртый интеграл.

Уравнения Эйлера–Пуассона – это вещественная автономная система шести обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{aligned} Ap' + (C - B)qr &= Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), \\ Bq' + (A - C)pr &= Mg(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), \\ Cr' + (B - A)pq &= Mg(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), \\ \gamma'_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \gamma'_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \gamma'_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{aligned} \quad (1)$$

с переменными $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и параметрами A, B, C, x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющими неравенствам треугольника

$$0 < A \leq B + C, \quad 0 < B \leq A + C, \quad 0 < C \leq A + B. \quad (2)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по времени t , Mg – вес тела, A, B, C – главные моменты инерции твёрдого тела, x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести твёрдого тела, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – направляющие косинусы вертикали. Последние три группы параметров указаны в системе координат, связанной с твёрдым телом.

Система (1) описывает движение волчка вокруг неподвижной точки [1] и имеет три первых интеграла – интеграл энергии, интеграл момента и геометрический интеграл:

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{\text{def}}{=} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = h = \text{const}, \\ I_2 &\stackrel{\text{def}}{=} Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = l = \text{const}, \\ I_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Система интегрируема, если имеется четвёртый общий интеграл I_4 . К настоящему времени известны 4 случая интегрируемости:

1. Эйлера–Пуансо: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и

$$I_4 \stackrel{\text{def}}{=} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const}.$$

2. Лагранжа–Пуассона: $A = B \neq C, x_0 = y_0 = 0, z_0 \neq 0$ и

$$I_4 \stackrel{\text{def}}{=} r = \text{const}.$$

3. Ковалевской: $A = B = 2C, x_0 \neq 0, y_0 = z_0 = 0$ и

$$I_4 \stackrel{\text{def}}{=} (p^2 - q^2 + c\gamma_1)^2 + (2pq + c\gamma_2)^2, \quad (4)$$

где $c = Mgx_0/C$.

4. Кинематической симметрии: $A = B = C$ и

$$I_4 \stackrel{\text{def}}{=} x_0p + y_0q + z_0r = \text{const.}$$

Случай 4 выводится из случая 2.

Результаты

Мы нашли следующие случаи интегрируемости системы (1).

5. $A = B = 2C, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 = 0$. Тогда четвёртый интеграл имеет вид

$$I_4 \stackrel{\text{def}}{=} (p^2 - q^2 + c\gamma_1 - d\gamma_2)^2 + (2pq + d\gamma_1 + c\gamma_2)^2, \tag{5}$$

где $c = Mgx_0/C, d = Mgy_0/C$. Это обобщение случая Ковалевской 3 и её четвёртого интеграла (4). Как и для случаев 1–4 четвёртый интеграл (5) не зависит от интегралов (3).

6. $A = 2B, C = B, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 = 0$.

7. $B = A, C = 2A, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$.

8. $B = C, A^2 (A - 2B) x^2 = B (2A - B)^2 y^2, z_0 = 0$.

9. $A(B - C) x^2 + B(A - C) y^2 = 0, A^2 + B^2 - AB - AC - BC = 0, z_0 = 0$.

В случаях 8 и 9 не выполнены неравенства треугольника (2). Для случаев 6–9 дополнительный четвёртый интеграл I_4 не выписывался, а локальная интегрируемость проверялась вблизи соответствующих неподвижных точек для резонансов третьего порядка. Согласно [2, раздел 5.3] коэффициенты резонансных членов нормальной формы при резонансе 2 : 1 должны быть нулевыми в интегрируемых случаях.

Литература

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твёрдого тела около неподвижной точки. — М.: Гостехиздат, 1953, 288 с.
 2. Брюно А.Д. Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы // Прикл. матем. и механика, **71**:2 (2007), 192–227.

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА

Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин
y.bulatov@bk.ru, roshupkinsa@mail.ru

Рассмотрен оператор Киприянова $\Delta_{B-\gamma} = \sum_i^n B_{-\gamma_i}$, где $B_{-\gamma_i}$ — операторы Бесселя с отрицательными параметрами $-\gamma_i, \gamma_i \in (0, 1)$. Вводятся операторы обобщенного \mathbb{T} -псевдосдвига и \mathbb{T} -сдвига. На основе этих операторов определено фундаментальное решение $\Delta_{B-\gamma}$ -оператора Киприянова.

Ключевые слова: сферическая симметрия, оператор Δ_B , обобщенный \mathbb{T} -псевдосдвиг и \mathbb{T} -сдвиг, фундаментальное решение.

1. Введение.

Используются обозначения и некоторые результаты из [1], [2]. Пусть

$$\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}, \mathbb{R}_n^+ = \{x : (x_1 > 0, \dots, x_n > 0)\}, \overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : (x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)\},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad -\gamma_i \in (-1, 0), \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{-\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \Delta_{B-\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект №24-21-00387)
 Булатов Юрий Николаевич, ассистент, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина (Елец, Россия)
 Рощупкин Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина (Елец, Россия)

Сингулярный дифференциальный оператор $\Delta_{B-\gamma}$ называется *оператором Киприянова* [1].

Определение 1. *Функции заданные на полюси $x_i \in [0, \infty)$ будем называть четными по Киприянову, если возможно их четное продолжение на всю ось x_i с сохранением класса своей принадлежности ([3], с. 21).*

Решения сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i) = -\xi^2 \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)$, называются \mathbb{J} -функциями Бесселя [2]. Они выражаются через функции Бесселя первого рода J_μ формулами $\mathbb{J}_\mu(x) = \Gamma(1 + \mu) 2^\mu x^\mu J_\mu(x)$, $\mathbb{J}_{-\mu}(x) = \Gamma(1 - \mu) 2^\mu x^\mu J_{-\mu}(x)$, $\mu_i = \frac{(\gamma_i+1)}{2}$.

Обобщенный \mathbb{T} -псевдосдвиг и \mathbb{T} -сдвиги определены следующими выражениями (см. [2], [4])

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \prod_{i=1}^n C(\gamma_i) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1} f\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i \cos \alpha_i}, x^i\right)}{\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i \cos \alpha_i}\right)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i,$$

$$\mathbb{T}_x^{*y} f(x) = \prod_{i=1}^n C(\gamma_i) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{x_i^{\gamma_i+1} f\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i \cos \alpha_i}, x^i\right)}{\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i \cos \alpha_i}\right)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i,$$

$$\mathbb{T}_x^{**y} f(x) = \prod_{i=1}^n C(\gamma_i) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} f\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i \cos \alpha_i}, x^i\right)}{\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i \cos \alpha_i}\right)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i,$$

где $C(\gamma_i) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\gamma_i+2}{2})}$, $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Введем следующую весовую линейную форму:

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u v x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_i x_i^{-\gamma_i}.$$

Лемма 1. *Эрмитовость \mathbb{T} -псевдосдвига в $L_2^{-\gamma}$: если f и g – функции суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то*

$$(\mathbb{T}^x f(t), g(t))_{-\gamma} = (f(t), \mathbb{T}^x g(t))_{-\gamma}.$$

Следствие 1. $\left(\mathbb{T}^{**} f(t), g(t)\right)_1 = \left(f(t), \mathbb{T}^x g(t)\right)_1$.

Лемма 2. *Коммутируемость с оператором $\Delta_{B-\gamma}$: если $u(x)$ – суммируемая с весом $x^{-\gamma}$, дважды непрерывно дифференцируемая и четная по Киприянову функция, то*

$$\mathbb{T}^x \Delta_{B-\gamma, t} u(t) = \Delta_{B-\gamma, t} \mathbb{T}^x u(t) = \Delta_{B-\gamma, x} \mathbb{T}^x u(t),$$

$$\mathbb{T}^{**} \Delta_{B-\gamma, t} u(t) = \Delta_{B-\gamma, x} \mathbb{T}^{**} u(t).$$

$$\mathbb{T}^x \Delta_{B-\gamma, t} u(t) = \Delta_{B-\gamma, t} \mathbb{T}^x u(t).$$

2. Оператор Δ_B в весовой билинейной форме.

Пусть $\Omega^+ \in \mathbb{R}_n^+$ – конечная область, граница которой состоит из частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma_0 \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. И пусть $u, v \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, четные по Киприянову функции. Через $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ обозначим мультииндекс, состоящий из произвольных действительных чисел. Введем весовую билинейную форму:

$$(u, v)_\omega = \int_{\Omega_n^+} u(x) v(x) x^\omega dx, \quad x^\omega = \prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i} \tag{1}$$

в рамках которой сингулярный дифференциальный Δ_B -оператор Киприянова может быть не эрмитовым.

Дополнительно введем класс функций, соответствующим образом убывающих на границе Γ_0 . Именно, обозначим через $\mathcal{M}_{ev}^\gamma = \mathcal{M}_{ev}^\gamma(\Omega^+) = C_{ev}^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ и положим $\varphi \in \mathcal{M}_{ev, \omega}^\gamma$, если $x_i^{\omega_i} \varphi(x) = O(x_i)$, $x_i \rightarrow +0$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 1. Пусть весовая билинейная форма определена равенством (1) и пусть $\gamma_i \in (0, 1)$, $i = \overline{1, n}$ и ω_i - произвольные действительные числа. Тогда для всех функции $u, v \in M_{ev}^\gamma(\Omega^+)$ имеет место следующая формула Грина:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega - \left(u, \left[\sum_{i=1}^n \left[B_{\gamma_i+2\omega_i} + \frac{(\gamma_i + \omega_i)(\omega_i - 1)}{x_i^2} \right] v \right] \right)_\omega = \\ & = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{\nu}$ направление внешней нормали к части границы Γ^+ .

2. Два вида фундаментальных решений сингулярного дифференциального оператора Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$.

В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство пространства Шварца основных функций S_{ev} , состоящее из функций, четных по каждой переменной x_i . Соответствующее пространство обобщенных функций $S'_{ev, -\gamma}$ и $S'_{ev, 1}$ строится на основе весовой билинейной формы (1) при $\omega = -\gamma$.

Определение 2. δ -Функции Дирака, сосредоточенные в произвольной точке $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ будем называть функционал $\mathbb{T}^y \delta_1 \in S'_{ev, 1}[0, \infty)$, действие которого определено формулой

$$(\mathbb{T}_x^y \delta_1, \varphi)_{-\gamma} = (\delta_1, \mathbb{T}_x^{y**} \varphi)_1 = \varphi(y),$$

Фундаментальное решение оператора Киприянова ищем в классе радиальных функций $f = f(r)$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. В работе [1] для оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ получена формула

$$\Delta_{B_{-\gamma}} f(|x|) = B_\mu f(r), \quad \mu = n - |\gamma| - 1, \quad \text{где } n - |\gamma| > 0.$$

Возможны три случая.

А) $n - |\gamma| > 1$; В) $n - |\gamma| = 1$; С) $n - |\gamma| < 1$;

Случай **А)** изучен в работе [2]. Фундаментальное решение из $S'_{ev, \mu}$ ($\mu > 0$) такого оператора имеет вид

$$\mathcal{E}_A = T_{|x|}^{|y|} |x|^{2-n-|\gamma|},$$

где T_t^τ — обобщенный сдвиг Пуассона [5].

В случае **В)** фундаментальным решением при $y = 0$ оказывается функция

$$\mathcal{E}_B(|x|) = \frac{1}{\gamma + 1} |x|^{\gamma+1},$$

к которому следует применить обычный сдвиг $x \rightarrow |x| - |y|$.

Случай **С)**. Фундаментальное решение $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператора Киприянова с особенностью в точке $x = y$ из пространства распределений $S'_{ev, 1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} E_{-\gamma, C}(x, y) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} \mathcal{E}_C(x) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\gamma_i \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left[1 + \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i)^{\frac{\gamma_i+1}{2}}} \right] \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i. \end{aligned}$$

Данное утверждение вытекает из того что,

$$\left(\Delta_{B_{-\gamma}} \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} \mathcal{E}_C, \varphi \right)_{-\gamma} = \left(\Delta_{B_{-\gamma}} \mathcal{E}_C, \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i**} \varphi \right)_1 = \varphi(y).$$

Литература

1. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 12. С. 1610–1620.
2. Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рошупкин С.А., Санина Е.Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 12. С. 1654–1665.
3. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. Наука, Москва, 1997.
4. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л., Рошупкин С.А., Булатов Ю.Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром // Известия высших учебных заведений. Математика. 2023. № 7. С. 52–65.
5. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. VI, вып. 2 (42). С. 102–143.

ОБ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Б. Васильев

vbv57@inbox.ru

УДК 517.95, 517.983

Изучаются вопросы разрешимости эллиптически псевдодифференциальных уравнений в областях с негладкой границей. Рассматриваются вопросы дискретизации уравнения и некоторые задачи, связанные с предельным переходом по малому параметру.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, разрешимость, дискретизация, малый параметр.

В теории псевдодифференциальных уравнений основную роль играет локальный принцип, который для получения условий фредгольмовости общего уравнения требует описания условия однозначной разрешимости специального *модельного* уравнения в определенной *канонической* области. Модельный псевдодифференциальный оператор – это оператор с символом, не зависящим от пространственной переменной, а каноническая область – это конус в \mathbb{R}^m . Случай пространства \mathbb{R}^m и полупространства $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$ (которые тоже являются конусами) были исследованы в самом начале становления теории [1,2]. В работах [3,4] предложен подход к исследованию разрешимости модельных уравнений, основанный на специальной факторизации эллиптического символа. Общая концепция авторского подхода изложена в работах [5,6].

1. Модельные уравнения. Модельное уравнение в конусе выглядит следующим образом

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad x \in C, \quad (1)$$

где $A : H^s(C) \rightarrow H^{s-\alpha}(C)$ – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

При некоторых дополнительных предположениях относительно символа $A(\xi)$ удается построить явные решения уравнения (1) для конуса C , не содержащего целой прямой [3].

2. Дискретизация. С вычислительной точки зрения целесообразно рассмотреть дискретный аналог уравнения в пространствах функций дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$.

Пусть $C_d = h\mathbb{Z}^m \cap C$, – дискретный конус, $h = h^{-1}$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ и $A_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в \mathbb{R}^m с основным кубом периодов $h\mathbb{T}^m$. Дискретный псевдодифференциальный оператор A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном конусе C_d определяется формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} h^m \int_{h\mathbb{T}^m} A_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} u_d(\tilde{y}) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_d.$$

Можно определить дискретный аналог функционального пространства Соболева–Слободецкого $H^s(C_d)$ и в случае полупространства $C = \mathbb{R}_+^m$ получить картину разрешимости дискретного аналога уравнения (1) [7,8]. Было установлено, что дискретные решения обладают аппроксимационными свойствами при малых значениях h и могут быть использованы в качестве приближенных решений. Аналогичные результаты были получены в дискретном плоском квадранте при некоторых дополнительных условиях на символ, включая сравнение дискретных и непрерывных решений.

3. Малый параметр. Каждый конус C имеет, как правило, определенные параметры, например, u

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$$

– параметр a , характеризующий раствор конуса, u

$$C_+^{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + |x_2|, a, b > 0\}$$

– два параметра a, b аналогичного назначения. Довольно естественно задаться вопросом, что произойдет с решением уравнения (1) (если оно существует и единственно), когда какие-то параметры стремятся к своим предельным значениям 0 и ∞ . Некоторые ситуации рассмотрены в работе [9].

Литература

1. *Mikhlin S.G., Pröbldorf S.* Singular Integral Operators. — Berlin, Akademie-Verlag, 1986.
2. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1973.
3. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — Москва: КомКнига, 2010.
4. *Vasil'ev, V.B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000.
5. *Vasilyev V.B.* Elliptic operators and their symbols. *Demonstr. Math.* **52** (2019) 361–369.
6. *Vasilyev V.B.* Operator symbols and operator indices. *Symmetry* **12**:64 (2020) 1–12.
7. *Vasilyev V.B.* Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization. In: C. Constanda et al. (eds.), *Integral Methods in Science and Engineering, Volume 1*, New York, Springer, 2017, pp. 315–324.
8. *Vasilyev V.B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space. *Math. Model. Anal.* **23**:3 (2018) 492–506.
9. *Vasilyev V.B.* On certain 3-dimensional limit boundary value problems. *Lobachevskii J. Math.* **41**:5 (2020) 917–925.

ВЫРОЖДЕННЫЕ БИЛЛИАРДЫ С ПОЛУЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ И ДЛИННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННЫЕ БЕРЕГАМИ

М.М. Вотякова, С.Ю. Доброхотов, Д.С. Миненков

votiakova.mm@phystech.edu, s.dobrokhотов@gmail.com, minenkov.ds@gmail.com

УДК 517.9

Рассматривается двумерная система мелкой воды для водоема с берегом. Построены почти-периодические асимптотики этой системы, которые связаны с асимптотическими функциями (квазимодами) для волнового уравнения с вырождающейся скоростью и с соответствующими вырожденными бильярдами с полужесткими стенками.

Ключевые слова: уравнения математической физики, динамические системы, бильярды, осреднение, коротковолновые асимптотики.

Под бильярдами с полужесткими стенками мы понимаем динамические (гамильтоновы) системы, задаваемые на двумерной плоскости (x_1, x_2) гамильтонианами $H = D(x_1, x_2)(p_1^2 + p_2^2)$, где $D(x)$ – гладкая функция, обращающаяся в ноль на некоторой гладкой замкнутой кривой G , причем $\text{grad}D$ не обращается в ноль на G . Такие бильярды возникают в теории волн на воде в ограниченных и неограниченных бассейнах, функция D описывает дно бассейна и внутри бассейна принимает положительные значения. Кривая G – береговая линия. В работе [1] при условии интегрируемости гамильтоновой системы с гамильтонианом H были построены периодические по времени решения нелинейной системы уравнений мелкой воды в бассейнах с пологими берегами, локализованные в окрестности береговой линии. Соответствующие траектории гамильтоновой системы образуют некомпактные (“нестандартные”) торы Лиувилля, их проекции на плоскости (x_1, x_2) заматают кольцевую область и отражаются от некоторой простой каустики, находящейся внутри бассейна, и береговой линии, которая представляет собой “нестандартную” каустическую Дефект построенных в [1] решений состоит в требовании интегрируемости введенной гамильтоновой системы, которое практически не может быть выполнено в реальных ситуациях. Мы рассматриваем вырожденные ситуации [2], когда «стандартная» каустика сильно приближается к береговой линии (“нестандартной” каустике). Требование интегрируемости тогда исчезает и всегда возможно построение эффективных асимптотических волновых решений, имеющих небольшое число осцилляций по нормали к берегу (являющихся аналогами волн Стокса и Урселла). Соответствующие траектории сильно локализованы в узкой окрестности берега, при этом они всегда входят в береговую линию и отражаются от нее под углом 90 градусов. Таким образом мы имеем асимптотические решения похожие на известные в акустике решения типа “шепчущей галереи”, но при этом для их существования за счет “вырожденной” стенки (береговой линии) не требуется выпуклости двумерной области, в которой расположен бассейн, то есть области на двумерной плоскости, в которой $D(x_1, x_2) > 0$.

Литература

1. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Цветкова А.В. Нелинейные эффекты и заплеск береговых волн, порожденных бильярдами с полужесткими стенками, в рамках теории мелкой воды // Труды МИАН, **322** (2023), 1-13.
2. Dobrokhотов S. Yu., Minenkov D. S., Votiakova M. M. Asymptotics of Long Nonlinear Coastal Waves in Basins with Gentle Shores // Russian Journal of Mathematical Physics, **31:1** (2024), 79-93.

Доклад основан на совместных проектах, поддержанных Российским научным фондом (проекты 21-11-00341 и 21-71-30011) и Московским центром фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ №075-15-2022-283.

Вотякова Мария Михайловна, инженер, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (Москва, Россия)

Доброхотов Сергей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия)

Миненков Дмитрий Сергеевич, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия)

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

А.А. Гималтдинова
aa-gimaltdinova@mail.ru

УДК 517.956.6

Для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа с оператором Лаврентьева – Бицадзе с двумя плоскостями изменения типа исследована первая краевая задача.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле.

Для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа

$$Lw \equiv w_{zz} + (\text{sign } x)w_{xx} + (\text{sign } y)w_{yy} = 0$$

в области $Q = \{(x, y, z) \in R^3 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1, 0 < z < \alpha\}$, $\alpha > 0$, изучается следующая

Задача D. *Найти функцию $w(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$w(x, y, z) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q),$$

$$Lw(x, y, z) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4,$$

$$w(x, y, z)|_{x=-1} = w(x, y, z)|_{x=1} = 0, \quad 0 \leq z \leq \alpha, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

$$w(x, y, z)|_{z=0} = w(x, y, z)|_{z=\alpha} = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

$$w(x, y, z)|_{y=-1} = g(x, z), \quad w(x, y, z)|_{y=1} = \gamma(x, z), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \alpha,$$

где $g(x, z)$, $\gamma(x, z)$ – заданные достаточно гладкие функции,

$$Q_1 = Q \cap \{x > 0, y > 0\}, \quad Q_2 = Q \cap \{x < 0, y > 0\},$$

$$Q_3 = Q \cap \{x < 0, y < 0\}, \quad Q_4 = Q \cap \{x > 0, y < 0\}.$$

В работе установлена теорема единственности, решение строится в виде суммы ряда.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1].

Литература

1. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Докл. АН СССР, **460**:3 (2015), 1-6.

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ****А.М. Денисов***den@cs.msu.ru*

УДК 517.958, 517.928.2

Рассматриваются обратные задачи для сингулярно возмущенных уравнений математической физики. Предлагаются методы их приближенного решения, основанные на использовании разложения решения начально-краевых задач по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, обратные задачи.

Рассматриваются начально-краевые задачи для сингулярно возмущенных уравнений математической физики. Ставятся обратные задачи, состоящие в определении либо начальных, либо краевых условий, или функций, описывающих источник, по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Выписываются разложения решения начально-краевых задач по малому параметру ε . Приближенные решения обратных задач строятся на основе использования конечного числа членов разложения по малому параметру и определяются как решения обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Получены оценки разности точного и приближенных решений обратных задач в равномерной метрике при малых значениях ε .

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МНОГОТОЧЕЧНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА****А.Л. Джабраилов***ahmed_0065@mail.ru*

УДК 517.968

Применяется метод линейных отображений, устанавливающий связь между пространством бесконечно дифференцируемых функций $C^{(\infty)}(a, b)$ и пространством бесконечномерных непрерывных вектор-функций $C_{\infty}(a, b)$ с непрерывными производными на сегменте $[a, b]$ с помощью некоторой заданной невырожденной матрицы $A(x)$ с непрерывно-дифференцируемыми элементами для сведения одной обобщенной многоточечно-функциональной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения бесконечного порядка к краевой задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение бесконечного порядка, бесконечные определители, системы дифференциальных и алгебраических уравнений, многоточечно-функциональные условия.

Денисов Александр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Джабраилов Ахмед Лечаевич, старший преподаватель, Чеченский государственный университет имени А.А. Кадырова Институт математики, физики и информационных технологий, кафедра математического анализа, алгебры и геометрии (Грозный, Россия)

Рассматривается для общего дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)y^{(j)} = f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots) \quad (1)$$

краевая задача с многоточечно-функциональными условиями

$$y^{(k_i-1)}(x_{i,k_i}) = \Phi_{i,k_i}(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots), \quad (2)$$

где $x_{i,k_i} \in [a, b]$, $k_i = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, m}$, n — конечное натуральное число, $n_i \in 0, 1, \dots, n$, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$;

$$y^{(i-1)}(x_i) = \Phi_i(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots), \quad i = n+1, n+2, \dots \quad (3)$$

Функции $a_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, $f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$ считаются непрерывными по своим аргументам в области $D : \{|y^{(i)}| \leq d_i, i = 0, 1, \dots, x \in [a, b]\}$ (см. [1]) и допускается выполнение неравенства

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)| \leq M, \quad (4)$$

M — некоторое число, и условия Липшица

$$|f(x, u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots) - f(x, v_1, v_2, \dots, v_\nu, \dots)| \leq L(x) \sum_{i=1}^{\infty} |u_i - v_i|, \quad i = \overline{1, m} \quad (5)$$

для любых $u = (u_i)_{i=1}^{\infty}$, $v = (v_i)_{i=1}^{\infty} \in D$, $L(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.

Допускается, что функционалы $\Phi(i, k_i)$, Φ_i по $y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots$ непрерывны (см. [1,2]) и для любой функции $y(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ ограничены, т.е.

$$\begin{aligned} |\Phi_{i,k_i}(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)| &\leq M_{i,k_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ |\Phi_j(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)| &\leq M_j, \quad j = n+1, n+2, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

а также при произвольном подборе двух функций $u(x), v(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ имеют место условия типа Липшица

$$\begin{aligned} |\Phi_{i,k_i}(u, u', \dots, u^{(\nu-1)}, \dots) - \Phi_{i,k_i}(v, v', \dots, v^{(\nu-1)}, \dots)| &\leq L_{i,k_i} \|u - v\|, \quad i = \overline{1, m}, \\ |\Phi_i(u, u', \dots, u^{(\nu-1)}, \dots) - \Phi_i(v, v', \dots, v^{(\nu-1)}, \dots)| &\leq \tilde{L}_i \|u - v\|, \quad i = n+1, n+2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

где $M_{i,k_i}, M_j, L_{i,k_i}, \tilde{L}_i$ — некоторые числа.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функция $f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$ и функционалы $\Phi_{i,k_i}(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$, $\Phi_i(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$ в области D удовлетворяют условиям Липшица (5) и (7);
- 2) функции $a_j(x)$, $j = 0, 1, \dots$, из уравнения (1), элементы $a(i, j)(x)$, $i, j = 1, 2, \dots$, матрицы $A(x)$, функции $L(x)$ из (5) и числа L_{i,k_i}, \tilde{L}_i из (7) таковы, что числовые ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{L}_i^*$, $\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^{x_i^*} \tilde{L}_i(t) dt$, $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_i^*}^b \tilde{L}_i(t) dt$ сходятся;
- 3) выполняется неравенство $P = \sum_{i=1}^{\infty} [\tilde{L}_i^* + 2 \int_a^{x_i^*} \tilde{L}_i(t) dt + \int_{x_i^*}^b \tilde{L}_i(t) dt] < 1$, то $\|\bar{y} - \bar{z}\| = 0$ и $y(x) = z(x), y_i(x) = z_i(x), i = 1, 2, \dots$ или

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\tilde{L}_i^* + \int_a^{x_i^*} \tilde{L}_i(t) dt \right] \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b \tilde{L}_i(t) dt \right) < 1.$$

Тогда в условиях теоремы задача (1)-(3) имеет только единственное решение.

Литература

1. Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик, Издательский центр «Эль-фа». 2004. С. 445.
2. Валеев К.Г., Жаутыков О.Л. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата. Наука. 1974, С. 415.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ, ИМЕЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Э.Х. Джумаев, Б. Шарипов

eraj59_59@mail.ru, boboali.sharipov@mail.ru

УДК 517.956

В докладе исследуются системы нелинейных уравнений в полных дифференциалах произвольного числа независимых переменных, с сингулярными коэффициентами в некотором классе непрерывно-дифференцируемых функций. В случае тождественного выполнения условий совместности многообразие решений системы находится определённой формулой, периодической в заданной области.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в полных дифференциалах, сингулярный коэффициент, многообразия решений, единственное решение.

В работах [1]-[4] рассмотрены некоторые классы систем линейных и нелинейных уравнений в полных дифференциалах с регулярными и сингулярными коэффициентами различного порядка. В случае тождественного выполнения условия совместности этих систем получены многообразия их решений в определённых формах. Также исследованы поведения полученных решений систем на сингулярных линиях и поверхностях вырождений областей исследования.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений в полных дифференциалах (п.д.-систем) с произвольным числом независимых переменных и сингулярными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{a_j(x)}{(x_j - x_j^{(0)})^k} u + \frac{b_j(x)}{(x_j - x_j^{(0)})^k} m(u), \quad j = \overline{1, n}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Пусть условия совместности системы (1) выполняются тождественно. Тогда найдем единственное решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u = u_0, \quad \text{если } x = x^{(0)}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \quad (2)$$

Пусть в системе (1) $a_j, b_j, m_j \in C^1(\overline{D})$, $u \in C^2(D_0)$, $j = \overline{1, n}$, где \overline{D} — замкнутая область n -мерного пространства, а D_0 — область, не содержащая линий вырождения поверхностей n -мерного пространства.

Условия совместности п.д.- системы (1) записываются в виде:

$$P_{ij}(x)u + Q_{ij}(x) \cdot u \cdot m'(u) + R_{ij}(x, u) \cdot m(u) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad (3)$$

где $P_{ij}, Q_{ij}(x), R_{ij}(x, u)$ — функции, выражающиеся через коэффициенты п.д.-системы (1). Если в соотношениях (3) хотя бы одна из функций $P_{ij}, Q_{ij}(x), R_{ij}(x, u) \neq 0$, то из этих соотношений, в силу выполнения теоремы о системе неявных функций, можем определить некоторые функции $u = 0, u(x) = h_{ij}(x)$. Если некоторые из этих найденных функций удовлетворяют системе уравнений (1), то они будут частными, либо особыми решениями этой системы.

Если в системе (1) $m(u) = C$ ($C = const$) или $m(u) = u$, либо $m(u) = u^n$, то эта система сводится, соответственно, к системе линейных уравнений или системе уравнений с разделяющимися переменными, либо к системе уравнений Бернулли для произвольных независимых переменных [3].

Пусть в условиях совместности (3) $P_{ij}(x) \equiv 0, i, j = 1, 2, \dots, n$, т.е.:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{a_i}{(x_i - x_i^{(0)})^n} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{a_j}{(x_j - x_j^{(0)})^n} \right) \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Джумаев Эраж Хакназарович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, филиал МГУ в г. Душанбе (Душанбе, Таджикистан)

Шарипов Бобоали, к.ф.-м.н., доцент, Таджикский государственный финансово-экономический университет (Душанбе, Таджикистан)

Тогда можно определить некоторую функцию вида $\omega(x)$, удовлетворяющую условиям совместности. Умножив обе части уравнений п.д.- системы (1) на $\exp[\omega(x)]$ или $e^{\omega(x)}$, преобразуем данную систему к следующему виду:

$$\frac{\partial(e^{\omega(x)}u)}{\partial x_i} = e^{\omega(x)} \frac{b_i(x)}{(x_i - x_i^{(0)})^k} \cdot m(u), \quad i = \overline{1, n}.$$

В последней системе дифференциальных уравнений производим замену

$$e^{\omega(x)}u = V, \quad V = V(x), \quad u(x) = e^{-\omega(x)} \cdot V, \tag{5}$$

тогда она, т.е. система уравнений, запишется в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = e^{\omega(x)} \frac{b_i}{(x_i - x_i^{(0)})^k} \cdot m(e^{-\omega(x)} \cdot V), \quad i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Если считать, что функция $m(e^{-\omega(x)} \cdot V)$ принадлежит классу аналитических функций, а также она представима в виде $m(e^{-\omega(x)} \cdot V) = m_1(e^{-\omega(x)}) \cdot n(v)$, то последняя система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = e^{\omega(x)} \frac{b_i}{(x_i - x_i^{(0)})^k} \cdot m_1(e^{-\omega(x)}) \cdot n(V), \quad i = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Далее заметим, что системы уравнений (7) и (1) инвариантны, поэтому с учётом замены (5) и (3), (4) выполняются тождественно. В связи с этим, можем интегрировать п.д.-систему (7) как систему уравнений с разделяющимися переменными. В начале обе части уравнений (7) делим на $n(V)$ и преобразуем систему в классическую систему уравнений. Затем интегрируем эту систему уравнений, и переходя к прежним переменным, получим многообразие решений, а также единственное решение исходной системы формулой:

$$u(x) = e^{-\omega(x)} \cdot N^{-1} \left[u_0 + \sum_{i=1}^n \Omega(x_1, x_2, \dots, x_n) \right], \tag{8}$$

где $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выражается через интегральное представление решения системы (7).

Таким образом, имеет место следующее утверждение:

Теорема. Пусть в п.д.-системе (1) $a_j, b_j, t \in C^1(\overline{D}), u \in C^1(D_0), j = \overline{1, n}, D_0$ — область не содержащая точек линий вырождения поверхностей n -мерного пространства. Если условия совместности системы уравнений (1) по всем переменным выполняются, но не тождественно, то существуют некоторые частные, либо особые решения системы. Если условия совместности системы выполняются тождественно, то данная система уравнений разрешима и единственное решение задачи (1)-(2) определяется формулой (8). Причём такое решение системы будет периодическим с периодами $T_k = 2k\pi, k \in \mathbb{N}$ в области \overline{D} .

Литература

1. Михайлов Л.Г. К сингулярной теории полных дифференциалов. // ДАН России, 1997. Т. 35 (№1), С. 21-24.
2. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. — Душанбе: Дониш, 1986. — 116 с.
3. Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Формула представления решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами // Матер. межд. науч. конф. «Уфимская математическая школа-2019». Уфа, 2019. С. 262-263.
4. Джумаев Э.Х., Шарипов Б. Представление решений одного класса систем дифференциальных уравнений с сингулярными точками // Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. 2023. Т. 1, №3(33), 34-43.

ОБ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ

С.С. Ежак, Е.С. Карулина, М.Ю. Тельнова
ezhak.ss@rea.ru, karulina.es@rea.ru, telnova.mj@rea.ru

УДК 517.9

Данная статья посвящена оценкам первого собственного значения различных задач Штурма – Лиувилля для уравнения второго порядка, отличающихся граничными условиями и интегральными условиями на потенциал. В статье представляется обзор ранее полученных результатов и приводятся некоторые новые.

Ключевые слова: задача Штурма–Лиувилля, экстремальные оценки, первое собственное значение, интегральное условие на потенциал.

Одна из первых задач Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где $Q \in R_\gamma$, множеству действительных положительных измеримых на $(0, 1)$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0,$$

была поставлена и изучена Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым [1].

Оценивались значения $m_\gamma = \inf_{Q \in R_\gamma} \lambda_1(Q)$, $M_\gamma = \sup_{Q \in R_\gamma} \lambda_1(Q)$.

В. А. Винокуровым и В. А. Садовничим [2] рассматривалась задача

$$y'' + (\lambda - Q(x))y = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad Q \in L_1(0, \pi). \quad (1)$$

Для произвольной функции $Q \in L_1(0, \pi)$ n -ое собственное значение обозначалось $\lambda = \lambda_n(Q)$, для $Q \equiv 0$ n -ое собственное значение, равное n^2 , обозначалось $\lambda_{n,0}$: $\lambda_n(Q) = n^2 = \lambda_{n,0}$. Исследовалось, как сильно можно увеличить или уменьшить собственное значение, если Q меняется в пределах множества

$$U_p[t] \equiv \{Q \in L_p(0, \pi), \|Q\|_p \leq t\}, \quad t \geq 0, \quad p \in [1, +\infty].$$

Рассматривались величины: $\bar{\lambda}_{n,p}(t) = \sup_{Q \in U_p[t]} \lambda_n(Q)$, $\underline{\lambda}_{n,p}(t) = \inf_{Q \in U_p[t]} \lambda_n(Q)$, соответственно

точная верхняя и точная нижняя грани собственного значения на множестве $U_p[t]$; $v_{n,p}(t) = \bar{\lambda}_{n,p}(t) - \lambda_{n,0}$, $w_{n,p}(t) = \lambda_{n,0} - \underline{\lambda}_{n,p}(t)$, соответственно верхний и нижний сдвиг собственного значения на $U_p[t]$.

В работе авторов приводились оценки снизу и сверху собственных значений задачи (1) при $p \geq 1$ и результат о достижимости оценок при $p > 1$.

Для сдвига $v_{n,1}(t)$ n -го собственного значения в пространстве $L_1(0, \pi)$ приводится теорема: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, +\infty)$ верно неравенство

$$v_{n,1}(t) \leq t + \frac{\lambda_{n,0}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4t}{\lambda_{n,0}}} - 1 \right),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-01-00000).

Ежак Светлана Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова (Москва, Россия)

Карулина Елена Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова (Москва, Россия)

Тельнова Мария Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова (Москва, Россия)

из которой следует, что для точной верхней грани M_1 первого собственного значения первой краевой задачи (1), рассмотренной на отрезке $[0, 1]$ при $p = 1$ и $t = 1$, справедлива оценка $M_1 \leq \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\pi^2 + 4}$. Достижимость данной оценки была доказана С. С. Ежак, например, в [3].

Задача с краевыми условиями Дирихле. Рассмотрим задачу

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на $(0, 1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x) dx < +\infty, \quad \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0.$$

При $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и $\gamma > 0$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$ оцениваются значения

$$m_{\alpha, \beta, \gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q), \quad M_{\alpha, \beta, \gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}} \lambda_1(Q).$$

Для любой функции $Q \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ [4]

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} R[Q, y], \quad \text{где} \quad R[Q, y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x)y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Теорема 1. [4] Если $\gamma > 1$, $\alpha, \beta < 2\gamma - 1$, то существуют такие $Q_* \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ и $u \in H_0^1(0, 1)$, $u > 0$ на $(0, 1)$, что $m_{\alpha, \beta, \gamma} = m = R[Q_*, u]$. Кроме того, u удовлетворяет следующему уравнению и интегральному условию

$$u'' + mu = -x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx = 1. \quad (2)$$

Для получения других оценок $m_{\alpha, \beta, \gamma}$ [4] использовалось свойство монотонности собственного значения $\lambda_n(Q)$ как функции от потенциала Q , применяемое В. А. Винокуровым и В. А. Садовничим, в частности, в работе [2].

Теорема 2. [5]

- 1) Если $\gamma > 1$, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$ или $0 < \gamma \leq 1$, $\alpha \leq 2\gamma - 1$, $-\infty < \beta < \infty$ ($\beta \leq 2\gamma - 1$, $-\infty < \alpha < \infty$), то $M_{\alpha, \beta, \gamma} = \pi^2$.
- 2) Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma \leq 1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, то $M_{\alpha, \beta, \gamma} < \pi^2$. Если $\gamma < -1$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$, то существуют такие $Q_* \in T_{\alpha, \beta, \gamma}$ и $u \in H_0^1(0, 1)$, $u > 0$ на $(0, 1)$, что $M_{\alpha, \beta, \gamma} = R[Q_*, u]$. Кроме того, u удовлетворяет (2).

Замечание. Результат $M_{0,0,\gamma} < \pi^2$ при $0 < \gamma < 1/2$ был получен А. А. Владимировым, Е. С. Карулиной [6].

Задача с краевыми условиями третьего типа. Рассмотрим задачу

$$y'' + qy + \lambda y = 0, \quad (3)$$

$$\begin{cases} y'(0) - k_0^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k_1^2 y(1) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$, а функция q принадлежит множеству A_γ ($\gamma \neq 0$), где $A_\gamma = \{q \in L_1[0, 1] : q(x) \geq 0, \int_0^1 q^\gamma dx = 1\}$.

Оценивается первое собственное значение λ_1 при различных значениях γ , k_0 , k_1 . Пусть

$$m_\gamma = \inf_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q) \quad \text{и} \quad M_\gamma = \sup_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q).$$

Замечание. Задача $y'' - qy + \lambda y = 0$, (4), где $q \in A_\gamma$, была подробно рассмотрена в работах [3], [7] и других.

Теорема 3. [7], [8]

- 1) Если $k_0^2 + k_1^2 \leq 1$, то M_1 достигается на потенциале $q = -k_0^2 \delta_0 - k_1^2 \delta_1 - (1 - k_0^2 - k_1^2)$.
- 2) Если $k_0^2 + k_1^2 \geq 1$ и $k_1^2 - k_0^2 \leq 1$, то M_1 достигается на потенциале $q = -(1 + k_0^2 - k_1^2) \delta_0 / 2 - (1 - k_0^2 + k_1^2) \delta_1 / 2$.
- 3) Если $k_1^2 - k_0^2 \geq 1$, то M_1 достигается на потенциале $q = -\delta_1$.
- 4) Величина m_1 достигается на потенциале $q = -\delta_\zeta$, где $\zeta \in [0, 1]$ определяется из некоторой вспомогательной граничной задачи.
- 5) Если $\gamma < 1$, то $m_\gamma = -\infty$. Если $\gamma > 1$, то M_γ – это первое собственное значение задачи $y'' + \lambda y = 0$, (4).

Здесь δ_ζ – дельта-функция Дирака с носителем в произвольной точке $\zeta \in [0, 1]$.

Литература

1. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи математических наук, 1996, Т. 51(3), С. 73–144.
2. Винокуров В.А., Садовничий В.А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала // Доклады Академии наук, 2003, Т. 392, №5, С. 592–597.
3. Ежак С.С., Карулина Е.С., Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения некоторых задач Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал // Часть 4 в сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012, С. 506 – 647.
4. Ежак С.С., Тельнова М.Ю. Об оценках снизу первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал // Труды семинара имени И.Г. Петровского, 2023, вып. 33, С. 144–160.
5. Ежак С.С., Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал // Дифференциальные уравнения, 2022, Т. 58, №11, С. 1579–1580.
6. Владимиров А.А., Карулина Е.С. Об одной априорной мажоранте наименьших собственных значений задачи Штурма–Лиувилля // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2021, (193), С. 25–27.
7. E. S. Karulina, A. A. Vladimirov, The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue // Tatra Mountains Mathematical Publications, 2013, V. 54, P. 101–118.
8. Карулина Е.С. Экстремальные свойства первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Материалы конференции. Изд. ПНИПУ, 2018, С. 115–119.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ

Д.П. Емельянов

emelianov@cs.msu.ru

Рассматривается следующая задача Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольнике $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < b\}$:

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^m u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (1)$$

Считаем, что $a(y), c(y)$ и $f(x, y)$ – некоторые аналитические функции переменного y в комплексной области G такой, что $[0, b] \subset G$. Также мы потребуем, чтобы были выполнены условия $a(y) \geq 0$ при $y \in [0, b]$ и $c(0) = 0$. Мы предполагаем, что порядок вырождения m уравнения (1) принадлежит интервалу $(0, 1)$.

Теорема. Пусть правая часть $f(x, y)$ задачи (1) аналитична в области G как функция переменного y при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$, имеет вторую непрерывную производную по y в \bar{D} , при каждом фиксированном $y \in (0, b)$ принадлежит классу Гёльдера как функция переменного x . Тогда существует решение задачи (1) в классе $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, представимое в виде следующего ряда:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k(y) \cdot \sin \pi k x, \quad (x, y) \in \bar{D},$$

который сходится абсолютно и равномерно в \bar{D} , допускает двукратное почленное дифференцирование по x и по y внутри D , функции $\eta_k(y) \in A(G \setminus \{0\})$, в достаточно малой окрестности U точки $y = 0$ представимы в виде

$$\eta_k(y) = \psi_{k,0}(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n(2-m)} \cdot \psi_{k,n}(y), \quad y \in U \subset G, \quad (2)$$

где функции $\psi_{k,n}(y)$ аналитичны в U , $\psi_{k,0}(0) = 0$, ряд сходится в $A(U \setminus \{0\})$.

В случае рациональных $m = p/q$ из представления функций $\eta_k(y)$ в виде ряда (2) следует известное разложение по степеням $y^{1/q}$:

$$\eta_k(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_{k,n} y^{n/q}, \quad y \in U.$$

Аналогичные результаты были ранее получены автором и его Учителем для случаев регулярного вырождения $m \in [1, 2]$.

Литература

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Доклады АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. Емельянов Д.П., Ломов И.С. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 45–58.
3. Емельянов Д.П., Ломов И.С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 655–672.
4. Емельянов Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 607–627.
5. Емельянов Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с вырождением нецелого порядка // Вестник Московского университета. Серия 15. 2023. № 2. С. 12–22.

АНАЛИЗ КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТОВ В НАНОПЛАЗМОНИКЕ НА ОСНОВЕ МЕЗОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Ю.А. Еремин, В.В. Лопушенко
eremin@cs.msu.ru, lopushnk@cs.msu.ru

УДК 517.958

Предложен численный метод решения граничной задачи дифракции для системы уравнений Максвелла с мезоскопическими граничными условиями на основе метода дискретных источников. Проведен численный анализ влияния квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц.

Ключевые слова: метод дискретных источников, мезоскопические граничные условия, параметры Фейбельмана.

Введение.

Развитие наноплазмоники в последнее время идет с ускорением. Основу интереса к наноплазмонным структурам составляет явление плазмонного резонанса. Плазмонный резонанс (ПР) заключается в возрастании амплитуды поля вблизи структуры на несколько порядков при определенной частоте внешнего возбуждения. Кроме этого, плазмонные поля обладают уникальным свойством, существенно отличающим их от фотонных полей: они концентрируются вблизи структуры на расстояниях, намного превышающих рэлеевский предел. Именно эти особенности существенно используются на практике. В качестве примеров применения можно привести лазерную фототермию, разрушающую раковые опухоли посредством магнитоплазмонных наночастиц, наноплазмонные солнечные жидкости, способные улавливать, концентрировать и трансформировать солнечную энергию, нанобиосенсоры, предназначенные для ускоренного обнаружения вирусов в растворах и резонаторы плазмонного нанолазера.

Современные технологии позволяют синтезировать структуры заданного размера и состава, в которых размеры металлических элементов оказываются менее 10нм. В этом случае в металле начинают проявляться такие квантовые эффекты, как пространственная нелокальность, выброс электронов за поверхность металла, затухание Ландау и туннельный эффект [1]. Классическая теория Максвелла не позволяет строго описывать оптические свойства подобных структур и возникает необходимость привлечения дополнительных теорий для учета возникающих квантовых эффектов и правильного понимания принципов функционирования современных наноплазмонных устройств.

С целью описания объемного эффекта пространственной нелокальности была разработана гидродинамическая теория Друде и ее обобщение — теория обобщенного нелокального оптического отклика (GNOR) [2]. Она позволяет объяснять возникающие новые оптические эффекты, которые могут существенно искажать картину, предсказанную классической теорией Максвелла. Например, GNOR способна описывать такие эффекты, как снижение амплитуды ПР и его сдвиг в область коротких длин волн (blue shift). Считается, что за счет введения в теорию коэффициента диффузии электронов удастся дополнительно учесть и затухание Ландау. Вместе с тем, теория GNOR не допускает возможность выхода электронов за пределы металла. Это обстоятельство в значительной степени стимулировало поиск новой теории, описывающей квантовые эффекты, оставаясь в рамках классической теории Максвелла.

Такая теория появилась в самое последнее время и получила название мезоскопической теории (МТ) [3]. Эта теория ориентирована на анализ поверхностных квантовых эффектов посредством функций поверхностного отклика - параметров Фейбельмана. МТ позволяет описать такие квантовые эффекты, как выброс электронов за пределы металла (sill out) и затухание Ландау. Она в равной степени применима для анализа структур из благородных (Au, Ag, Pt) и щелочных (Na,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Еремин Юрий Александрович, д.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, лаб. вычислительной электродинамики (Москва, Россия)

Лопушенко Владимир Васильевич, к.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, лаб. математической физики (Москва, Россия)

К) металлов. Считается, что МТ является мостиком между чисто квантовым и классическим описанием явлений, происходящих в наноплазмоне.

Постановка граничной задачи дифракции.

Рассмотрим математическую постановку граничной задачи дифракции поля электромагнитной плоской волны $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на однородной осесимметричной плазмонной частице. Пусть частица занимает область D_i с гладкой замкнутой гладкой поверхностью ∂D_i , а внешнюю область обозначим D_e . Будем предполагать, что все среды являются немагнитными, а зависимость от времени выбрана в виде $\exp(j\omega t)$. В этом случае математическая постановка задачи для определения полного поля внутри D_i $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ и рассеянного поля во внешней области D_e $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ может быть записана как

$$\text{rot}\mathbf{H}_{i,e} = jk\varepsilon_{i,e}\mathbf{E}_{i,e}, \text{rot}\mathbf{E}_{i,e} = -jk\mathbf{H}_{i,e} \quad D_{e,i}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) = -d_{\perp}\mathbf{n}_i \times \nabla \{\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P))\}, P \in \partial D_i,$$

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P) - \mathbf{H}_0(P)) = -j\omega d_{\parallel} \{\mathbf{n}_i \times [\mathbf{D}_i(P) - \mathbf{D}_e(P) - \mathbf{D}_0(P)]\} \times \mathbf{n}_i, \quad (1b)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0; r = |M|. \quad (1c)$$

Здесь $\varepsilon_{i,e}$ – диэлектрические проницаемости сред в областях $D_{i,e}$, при этом $\text{Im} \varepsilon_e = 0$, $\text{Im} \varepsilon_i \leq 0$, $k = \frac{\omega}{c}$, d_{\perp}, d_{\parallel} – параметры Фейбельмана, \mathbf{n}_i – единичная нормаль к поверхности ∂D_i . Параметр Фейбельмана d_{\perp} описывает плотность индуцированных поверхностных зарядов, а d_{\parallel} – плотность поверхностных токов. В нашем случае для границы раздела сред металл-диэлектрик параметр Фейбельмана $d_{\parallel} = 0$ [3]. Параметр d_{\perp} представляет собой комплексную функцию, зависящую от длины падающей волны. Его действительная часть описывает положение центра индукции зарядов по отношению к границе металл-диэлектрик, а мнимая отвечает за поглощение энергии вблизи поверхности. Будем полагать, что граничная задача в постановке (1a)-(1c) имеет единственное классическое решение.

Метод Дискретных источников.

Метод дискретных источников (МДИ) представляет собой численно-аналитический метод, в рамках которого приближенное решение строится на основе полей дискретных источников, удовлетворяющих в аналитическом виде системе Максвелла (1a) и условиям излучения (1c) [4]. Соответствующие амплитуды ДИ определяются из мезоскопических граничных условий (1b). Следует подчеркнуть, что МДИ весьма удобен для решения задачи рассеяния с мезоскопическими граничными условиями, так как поля вблизи поверхности частицы представляют собой аналитические функции и, следовательно, допускают вычисление производных любого типа и порядка на её поверхности.

При рассмотрении осесимметричных структур вычислительная схема МДИ существенно упрощается. В этом случае источники как для внешнего $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$, так и для внутреннего поля $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ располагаются на оси симметрии, а приближенное решение $\{\mathbf{E}_e^N, \mathbf{H}_e^N\}$ представляет собой конечную сумму ряда Фурье по азимутальной переменной φ . С помощью разложения поля плоской волны $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ в ряд Фурье по φ процедура удовлетворения граничным условиям (1b) на поверхности ∂D_i сводится к последовательным сшиваниям гармоник Фурье полей на образующей поверхности вращения [4].

Численные результаты.

Перейдем к рассмотрению численных результатов. В качестве частиц будем рассматривать вытянутые сфероиды ("нанорисинки"), а в качестве плазмонных материалов – золото (Au) и серебро (Ag). Пусть частица располагается в прозрачной среде – стекле ВК7 с показателем преломления $n_e = 1.52$. Для вычисления значений параметра Фейбельмана мы будем использовать соотношение, полученное недавно в работе [5].

$$d_{\perp}(\omega) = -j \frac{\varepsilon_i \varepsilon_e}{\varepsilon_i - \varepsilon_e} \frac{\beta}{\omega_p \sqrt{\varepsilon_b}} \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_i} - 1 \right)^{3/2} \quad (2)$$

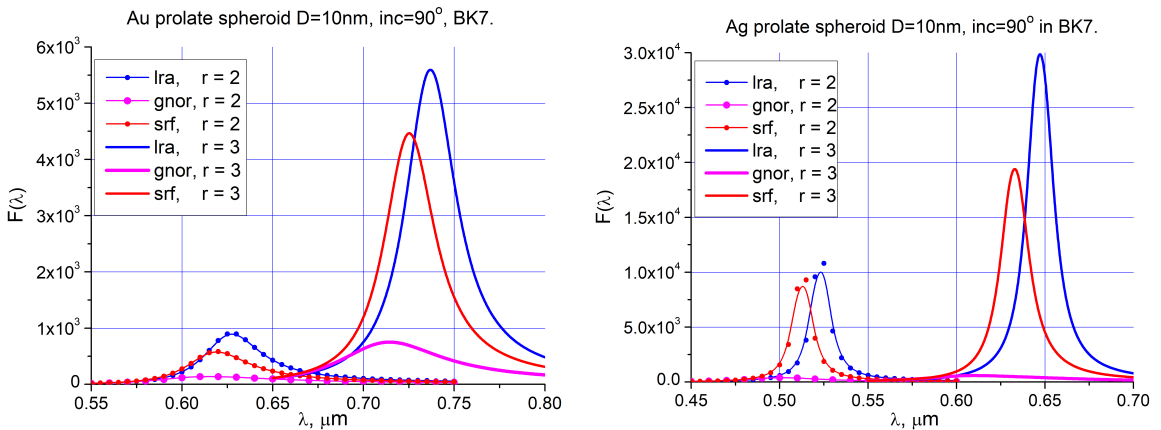
здесь $\varepsilon_b = \varepsilon_i + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega}$, ω_p – плазменная частота металла, γ – скорость затухания Друде, $\beta^2 = \left(\frac{3}{5}\right) v_F^2$, v_F – скорость Ферми. Соответствующие квантовые параметры золота и серебра принимают значения

Au: $\hbar\omega_p = 9.02\text{eV}$, $\hbar\gamma = 0.071\text{eV}$, $v_F = 1.39 \cdot 10^{12}\mu\text{m}/\text{sec}$.

Ag: $\hbar\omega_p = 8.99\text{eV}$, $\hbar\gamma = 0.025\text{eV}$, $v_F = 1.39 \cdot 10^{12}\mu\text{m}/\text{sec}$.

Формула (2) позволяет определять параметр Фейбельмана для любого благородного металла, расположенного в произвольной внешней среде. Ограничимся рассмотрением интегрального коэффициента усиления (КУ) поля на поверхности частицы, именно эта характеристика наиболее показательна при сравнении влияния поверхностных и объемных эффектов [4].

$$F(\lambda) = \int_{\partial D_i} |\mathbf{E}_e^N + \mathbf{E}_0|^2 d\sigma / \int_{\partial D_i} |\mathbf{E}_0|^2 d\sigma \quad (3)$$



На рисунке слева приведены значения КУ для золотых вытянутых сфероидов эквиобъемного диаметра $D = 10$ нм с соотношением осей $r = 2, 3$. Сравнение результатов, полученных для локального случая (lra), объемного (gnor) и поверхностного (srf) эффектов, показывает существенные различия в амплитудах. При этом сдвиг в область коротких волн приблизительно одинаков и не превышает 10 нм. Аналогичные результаты можно видеть на рисунке справа для серебряных частиц. Видно, что разница в амплитудах при объемном и поверхностном эффектах в серебре увеличивается и достигает порядка величин.

Литература

1. Shi H., Zhu X., Zhang S., et al. Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: New effects, fabrication and applications // *Nanoscale Adv.* 2021. V.3, 4349.
2. Mortensen N.A., Raza S., Wubs M., et al. A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures // *Nat. Commun.* 2014. V.5, 3809.
3. Stamatopoulou P.E., Tserkezis C. Finite-size and quantum effects in plasmonics: manifestations and theoretical modelling [Invited] // *Optical Materials Express.* 2022. V.12, No.5. 1869-1893.
4. Еремин Ю.А., Лопушненко В.В. Анализ влияния квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц методом дискретных источников // *Журн. вычислит. мат. мат. физ.* 2023. Т.63, №11. с.1911-1921.
5. Eriksen M.H., Tserkezis C., Mortensen N.A., Cox J.D. Nonlocal effects in atom-plasmon interactions // *ArXiv.* 2023. 2308.09134v.

О ПРОСТРАНСТВЕ C^1 -ГЛАДКИХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

Л.С. Ефремова

lefunn@gmail.com

УДК 517.987.5

Доказана фундаментальная теорема о разложении некоторого содержательного множества в пространстве C^1 -гладких косых произведений, заданных на n -мерном торе ($n \geq 2$), в конечное объединение попарно не пересекающихся подмножеств. Дано описание того из выделенных подмножеств, которое содержит открытое, но не всюду плотное в нем множество Ω -устойчивых в C^1 -норме косых произведений.

Ключевые слова: косое произведение на торе, C^1 - Ω -устойчивость, (маршрутные) динамические многозначные функции.

Результаты доклада являются многомерными обобщениями результатов автора по динамике косых произведений в плоскости [1]-[2].

Получено разложение в объединение четырех непустых попарно непересекающихся подмножеств описанного ниже множества отображений из пространства C^1 -гладких косых произведений отображений окружности $SP^1(T^n)$, где T^n - n -мерный тор ($n \geq 2$).

В пространстве $SP^1(T^n)$ выделим множество косых произведений Ψ , то есть отображений

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\psi_1(x_1), \dots, \psi_n, x_1, \dots, x_{n-1}(x_n)),$$

где $\psi_j, x_1, \dots, x_{j-1}(x_j) = \psi_j(x_1, \dots, x_j)$ при всех $2 \leq j \leq n$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) полные прообразы точек $\widehat{x}_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in T^{n-1}$ относительно факторотображения $\widehat{\psi}_{n-1}(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-2})$, если они не пусты, есть конечные множества;

(2) отображение Ψ содержит периодические точки, а неблуждающее множество $\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})$ факторотображения $\widehat{\psi}_{n-1}$ удовлетворяет равенству

$$\Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) = \Omega(\widehat{\psi}_{n-1}^k), \quad k \geq 1;$$

(3) отображение ψ_1 является Ω -устойчивым в пространстве $C^1(T^1)$ всех C^1 -гладких отображений окружности T^1 .

Разложение основано на рассмотрении всех логических возможностей сочетания свойств непрерывности или, наоборот, разрывности введенных здесь маршрутных динамических многозначных функций косых произведений, которые в случае двумерного тора T^2 как фазового пространства, совпадают с введенными ранее динамическими многозначными функциями (Ω -функцией, вспомогательными и подходящими функциями [3]).

Основное внимание в докладе уделено рассмотрению одного, в некотором естественном смысле, наиболее просто устроенного выделенного подмножества отображений, содержащего открытое, но не всюду плотное в нем подмножество C^1 -гладких Ω -устойчивых косых произведений отображений окружности на n -мерном торе при $n \geq 2$.

Отметим, что при $n = 2$ выделенное в $SP^1(T^n)$ множество отображений, удовлетворяющих условиям (1) - (3), всюду плотно (и открыто) в $SP^1(T^n)$.

В настоящее время не известно, является ли множество косых произведений, удовлетворяющих условиям (1) - (3), всюду плотным (и открытым) в пространстве $SP^1(T^n)$ при $n \geq 3$.

Литература

1. Л.С. Ефремова Теорема о разложении пространства C^1 -гладких косых произведений со сложной динамикой факторотображений, Матем. сб., 204:11 (2013), 55 - 82.
2. Л.С. Ефремова Динамика косых произведений отображений интервала, УМН, 72:1(433) (2017), 107 - 192.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-00242).

Ефремова Людмила Сергеевна, д.ф.-м.н., доцент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики, кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа (Нижний Новгород, Россия)

3. *L.S.Efremova* Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products, *J.Difference Eq. and Applic.*, 29:(9-12) (2023), 1244 - 1274.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ОПЕРАТОРОМ СДВИГА ОБЩЕГО ВИДА

Н.В. Зайцева

zaitseva@cs.msu.ru

УДК 517.956.32, 517.929

В полупространстве, где пространственная переменная принимает все значения, а временная положительна, построены в явном виде многопараметрические семейства бесконечно гладких решений гиперболических уравнений, содержащих либо сумму дифференциальных операторов и оператора сдвига по пространственным переменным, либо суперпозицию этих операторов.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, оператор сдвига, классическое решение.

В полупространстве $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ рассмотрены два уравнения

$$u_{tt}(x, t) - a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) + b u(x - h, t) = 0,$$

$$u_{tt}(x, t) - a^2 \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j}(x, t) - \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j x_j}(x - h_j, t) = 0,$$

где $a \neq 0$, $b > 0$, b_1, \dots, b_n — заданные действительные числа; $h := (h_1, \dots, h_n)$, $h_j := (h_{j1}, \dots, h_{jn})$ ($j = \overline{1, n}$) — заданные векторы с действительными координатами, длины которых не равны нулю.

Доказано, что построенные решения являются классическими, если вещественная часть символа дифференциально-разностных операторов положительна.

Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено. Подробные результаты исследований опубликованы в работах [1, 2].

Литература

1. *Зайцева Н. В., Муравник А. Б.* Гладкие решения гиперболических уравнений со сдвигом на произвольный вектор в свободном члене // *Дифференциальные уравнения.* 2023. Т. 59. № 3. С. 368-373.
2. *Зайцева Н. В., Муравник А. Б.* Классические решения гиперболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигом на произвольный вектор // *Известия вузов. Математика.* 2023. № 5. С. 34-40.

К ТЕОРИИ ДВУХМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ СИММЕТРИЧНОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕННОГО X

С.Б. Зарипов

Zaripov_s89@mail.ru

УДК 517.968.220

Изучен новый класс двумерных интегральных уравнений вольтерровского типа, симметричный по одному из переменных, ядро которого имеет граничную и внутреннюю фиксированную сверх-сингулярную линию.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение, сингулярная линия, симметричное уравнение.

Через D обозначим прямоугольник следующего вида $D_0 = (x, y) : -a < x < a, 0 < y < b$, соответственно обозначим $\Gamma_0 = -a < x < a, \Gamma_1 = 0 < y < b$. В области $D = D_0 \setminus \Gamma_0$ рассмотрим двумерное симметричное интегральное уравнения типа Вольтерра следующего вида

$$\varphi(x, y) + A \int_{-x}^x \frac{\varphi(t, y)}{|t|^\alpha} dt + B \int_0^y \frac{\varphi(x, s)}{|s|^\beta} ds + E \int_{-x}^x \frac{dt}{|t|^\alpha} \int_0^y \frac{\varphi(x, s)}{|s|^\beta} ds = f(x, y), \quad (1)$$

где A, B, E — заданные постоянные, $f(x, y)$ — заданная функция на D , $\varphi(x, y)$ — искомая функция. Решение двумерного симметричного интегрального уравнения (1) согласно [2] будем искать в классе функций, $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$, $\varphi(0, 0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением $\varphi(x, y) = o[|x|^\varepsilon |y|^\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Обозначим через $T_x(\varphi)$ и $T_y(\varphi)$.

Введем следующие интегральные операторы:

$$T_x(\varphi) = \int_{-x}^x \frac{\varphi(t, y)}{|t|^\alpha} dt, \quad T_y(\varphi) = \int_0^y \frac{\varphi(x, s)}{|s|^\beta} ds.$$

Тогда симметричное двумерное интегральное уравнение (1) в операторном виде записываем в следующем виде

$$\varphi(x, y) + AT_x(\varphi) + BT_y(\varphi) + ET_x T_y(\varphi) = f(x, y) \quad (2)$$

Проблема исследования одномерных и многомерных интегральных уравнений типов Вольтерра с граничными и внутренними сингулярными точками, сингулярными линиями сингулярными областями или сверх-сингулярными линиями или сверхсингулярными областями посвящено работы [1]-[2].

Пусть в уравнение (1) или (2) постоянные A, B, E между собой связаны при помощи равенств $E = AB$. Тогда интегральное уравнение (2) можно записать в следующем виде

$$\varphi(x, y) + AT_x(\varphi) + BT_y[\varphi + AT_x\varphi] = f(x, y) \quad (3)$$

Обозначим

$$\varphi(x, y) + AT_x\varphi = \Psi(x, y). \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\Psi(x, y) + BT_y(\Psi) = f(x, y) \quad (5)$$

Таким образом в этом случае, задача о нахождение решения двумерного симметричного интегрального уравнения (1) сводится к нахождение одного одномерного модельного интегрального

уравнения волтерровского типа с сверх-сингулярными линиями. Согласно [1], если решение интегрального уравнения (5) при $B < 0$ существует тогда она даётся формулой

$$\Psi(x, y) = \exp[B\omega_b^\beta(y)]c_1(x) + f(x, y) - B \int_0^y \exp\left[B\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)\right] \frac{f(t, s)}{s^\beta} ds, \quad (6)$$

а при $B > 0$ формулой

$$\Psi(x, y) = f(x, y) - B \int_0^y \exp\left[B\left(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right)\right] \frac{f(t, s)}{s^\beta} ds, \quad (7)$$

Решение вида (6) получено при предположении, что $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(x, 0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o\left[\exp(B\omega_b^\beta(y))y^{\gamma_1}\right], \quad \gamma_1 > \beta - 1, \quad y \rightarrow 0. \quad (8)$$

Решение вида (7) получено при предположении, что $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(x, 0) = 0$ со следующим асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o[y^{\gamma_2}], \quad \gamma_2 > \beta - 1, \quad y \rightarrow 0. \quad (9)$$

Справедливо результатам главы 7 из [1], если решение симметричного интегрального уравнения (4) существует, тогда оно представимо виде:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \Psi(x, y) - AK_1^1[\Psi(x, y)]c_1(x), & \text{когда } (x, y) \in D^+ \\ \Psi(-x, y) + AK_1^1[\Psi(x, y)]c_1(-x), & \text{когда } (x, y) \in D^- \end{cases} \quad (10)$$

где

$$K_1^1[\Psi(x, y)] = \int_0^x \frac{\Psi(t, y) + \Psi(-t, y)}{|t|^\alpha} dt.$$

$c_1(x)$ — произвольная функция точек Γ_1 .

Так как мы ищем решение двумерного симметричного интегрального уравнения (1) в классе функций $\varphi(x, y) \in C(\bar{D})$, $\varphi(0, 0) = 0$, поэтому при $B > 0$ в (10) необходимо полагать $c_1(x) = 0$.

Таким образом, если решение двумерного симметричного интегрального уравнения (4) существует, тогда она представимо в виде

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \Psi(x, y) - AK_1^1[\Psi(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D^+ \\ \Psi(-x, y) + AK_1^1[\Psi(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D^- \end{cases} \quad (11)$$

Решение вида (11) существует, если $\Psi(0, y) = 0$, с асимптотическим поведением

$$\Psi(x, y) = o[|x|^{\gamma_3}], \quad \gamma_3 > \alpha - 1, \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (12)$$

Из представления (6) следует, что поведение $\Psi(x, y)$ при $x \rightarrow 0$ определяется формулой (12), если $f(0, y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x, y) = o[|x|^{\gamma_3}], \quad \gamma_3 > \alpha - 1, \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Случай 1. Пусть $B > 0$, Тогда в представлении (11) вместо $\Psi(x, y)$, подставляя её значение из (7), получим решение симметричного уравнения (1) в случае

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} K_2[f(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D_0^+ \\ K_4[f(x, y)], & \text{когда } (x, y) \in D_0^- \end{cases} \quad (13)$$

где $K_2[f(x, y)]$, $K_4[f(x, y)]$ — известные интегральные операторы.

Теорема 1. Пусть в двумерном симметричном интегральном уравнении (1) $E = AB$, $B > 0$, A — произвольное число. Функция $f(x, y) \in C(\bar{D})$, $f(0, 0) = 0$ со следующим асимптотическим равенством

$$f(x, y) = o[|x|^{\gamma_7}], \quad \gamma_7 > \alpha - 1, \quad \text{при } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Тогда любое решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D})$ представимо в виде (11) и (13).

Литература

1. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх-сингулярными ядрами и их приложения. Издательство «Деваштич» Душанбе, 2007, 221 с.

2. Раджабов Н., Раджабова Л. Н., Зарипов С.Б. Двухмерные симметричные интегральные уравнения типа вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями. LAPLAMBERT Academic Publishing, GERMANY, 2019г. — 112 с. ISBN 978-620-0-3.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В РЕОЛОГИЧЕСКОМ СООТНОШЕНИИ

А.В. Звягин

zvyagin.a@mail.ru

УДК 517.958

В работе рассматривается математическая модель Кельвина–Фойгта с дробной производной Капуто, описывающая движение растворов полимеров. Доказывается существование слабых решений с помощью аппроксимационно-топологического метода исследования задач гидродинамики.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, слабое решение, теорема существования.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) - \\ & - \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\beta)} \operatorname{Div} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \operatorname{grad} p = f; \\ & z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega, \\ & \operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega; \\ & v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0. \end{aligned}$$

Здесь v — вектор–функция скорости, p — функция давление среды, f — плотность внешних сил, $z(\tau; t, x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x , $\alpha > 0$ — скалярный параметр, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $0 < \beta < 1$ — некоторые константы. $\Gamma(\beta)$ — гамма–функция Эйлера, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-71-10026).

Звягин Андрей Викторович, д.ф.-м.н., доцент, Воронежский государственный университет, математический факультет (Воронеж, Россия)

$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j = \overline{1, n}$ — тензор скоростей деформации, $\text{Div } A$ — дивергенция тензора A , то есть вектор $\text{Div } A = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \right)$.

Начально–краевая задача описывает движение слабо концентрированных водных растворов полимеров с памятью вдоль траектории движения частиц среды (см. [1]–[3]). Данная модель основана на реологическом соотношении Кельвина–Фойгта с дробной производной Капуто. В докладе описывается изучаемая задача и доказывается существование слабой разрешимости начально–краевой задачи.

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Тогда начально–краевая задача имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W := \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$.

Литература

1. Звягин А.В. Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной. Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 4. С. 807–825.
2. Звягин А.В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды. УМН. 2019. Т. 74. № 3. С. 189–190.
3. Звягин А.В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта. Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 1. С. 66–97.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ

З.А. Каденова, Д.А. Бекешова, Ш.Э. Юнусов

kadeno71@mail.ru, bekeshova.d@mail.ru, shavyunusov@mail.ru

УДК 517.968

Рассматривается система линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси и доказывается теоремы единственности решений для одного класса.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения, Фредгольма, первого рода, единственность.

Теории некорректно поставленных задач, обоснованной А.Н. Тихоновым [1], В.К. Ивановым [2] и Лаврентьевым М.М. [3], [4] приобрел в последние пятидесятилетие новые грани научных исследований. Теория и приложение некорректно поставленных задач стремительно развивается во всех области естествознания, экологии, обществоведения и других областях науки. Основопологающие результаты для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построенные регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву [4]. На основе регуляризирующим оператором по Лаврентьеву получены результаты в работах [5]–[8].

Рассматривается системы уравнений вида

$$Ku \equiv \int_{-\infty}^a K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in (-\infty, a], \quad (1)$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} A(t, s), & -\infty < s \leq t \leq a, \\ B(t, s), & -\infty < t \leq s \leq a. \end{cases} \quad (2)$$

Каденова Зууракан Ажимаматовна, д.ф.-м.н., доцент, Институт математики Национальной Академии Наук Кыргызской Республики, лаборатория теории обратных и некорректных задач (Бишкек, Кыргызстан)

Бекешова Дамира Аманбаевна, соискатель ИМ НАН КР, Институт математики Национальной Академии Наук Кыргызской Республики, лаборатория теории обратных и некорректных задач (Бишкек, Кыргызстан)

Юнусов Шавкат Эрмекович, преподаватель, Кыргызский Национальный университет имени Ж.Баласагына (Бишкек, Кыргызстан)

$$A(t, s) = a_{ij}(t, s) = \begin{bmatrix} a_{11}(t, s) & a_{12}(t, s) & \dots & a_{1n}(t, s) \\ a_{21}(t, s) & a_{22}(t, s) & \dots & a_{2n}(t, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t, s) & a_{n2}(t, s) & \dots & a_{nn}(t, s) \end{bmatrix},$$

$$B(t, s) = b_{ij}(t, s) = \begin{bmatrix} b_{11}(t, s) & b_{12}(t, s) & \dots & b_{1n}(t, s) \\ b_{21}(t, s) & b_{22}(t, s) & \dots & b_{2n}(t, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t, s) & b_{n2}(t, s) & \dots & b_{nn}(t, s) \end{bmatrix},$$

$$f(t) = (f_i(t)) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T, \quad u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$$

Здесь $A(t, s)$, $B(t, s)$ являются дважды непрерывно-дифференцируемыми матричными функциями, $f(t)$ — известная вектор-функция, $u(t)$ — неизвестная вектор-функция.

Введем следующие обозначения для дальнейшего использования:

1. Для векторов $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ определим скалярное произведение равенством $\langle u, \theta \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \theta_i$ и норму $\|u\| = [\sum_{i=1}^n u_i^2]^{1/2}$.
2. Для $A = (a_{ij})$ — $n \times n$ -квадратной матрицы — определим норму

$$\|A\| = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}.$$

3. Через $L_{2,n}(-\infty, a)$ обозначим пространство всех n -мерных вектор-функций $u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, удовлетворяющих условию $u_i(t) \in L_2(-\infty, a)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Для $u(t) = (u_i(t)) = (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in L_{2,n}(-\infty, a)$ определим норму

$$\|u(t)\|_{L_{2,n}} = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим $H(t, s) = \frac{1}{2}(A(t, s) + B^*(s, t))$, где $B^*(s, t)$ — сопряженная матрица к матрице $B(s, t)$, $(t, s) \in G = \{-\infty < s \leq t \leq a\}$.

Везде допустим, что

$$\|K(t, s)\| \in L_2((-\infty, a] \times (-\infty, a]), \|f(t)\| \in L_2(-\infty, a],$$

В силу (2) преобразуя систему (1) получим

$$\int_{-\infty}^t A(t, s)u(s)ds + \int_{-\infty}^t B(t, s)u(s)ds = f(t). \quad (3)$$

Обе части системы (3) скалярно умножим на n -мерную вектор-функцию $u(t)$. Полученное произведение интегрируем по области $-\infty < t \leq a$:

$$\int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle A(t, s)u(s), u(t) \rangle ds dt + \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle B(t, s)u(s), u(t) \rangle ds dt = \int_{-\infty}^a \langle f(t), u(t) \rangle dt. \quad (4)$$

Применяя формулы Дирихле, преобразуем (4) и получим

$$\int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle A(t, s)u(s), u(t) \rangle ds dt + \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle u(s), B^*(t, s)u(t) \rangle ds dt = \int_{-\infty}^a \langle f(t), u(t) \rangle dt.$$

$$\int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle u(s), B^*(t, s)u(t) \rangle ds dt = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle B^*(s, t)u(s), u(t) \rangle ds dt.$$

$$\int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle A(t, s)u(s), u(t) \rangle ds dt + \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle B^*(s, t)u(s), u(t) \rangle ds dt = \int_{-\infty}^a \langle f(t), u(t) \rangle dt.$$

$$2 \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^t \langle H(t, s)u(s), u(t) \rangle ds dt = \int_{-\infty}^a \langle f(t), u(t) \rangle dt, \quad (5)$$

где

$$H(t, s) = \frac{1}{2}(A(t, s) + B^*(s, t)), (t, s) \in G = \{-\infty < s \leq t \leq a\}. \quad (6)$$

Предполагаем выполнение следующих условий:

а) $H(t, s)$ имеет производные $H'_t(t, s), H'_s(t, s), H''_{st}(t, s)$ и $(H'_t(t, s))^* = H'_t(t, s), (H'_s(t, s))^* = H'_s(t, s), (H''_{st}(t, s))^* = H''_{st}(t, s)$, где H^* — сопряженная матрица к матрице H и $\|H(t, s)\|, \|H'_s(t, s)\|, \|H'_t(t, s)\|, \|H''_{st}(t, s)\| \in L_2(G)$.

б)

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \langle H(t, s)u, u \rangle \geq 0, t \in (-\infty, a], \forall u \in \mathbb{R}^n, H(a, s) \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle H'_t(t, a)u, u \rangle \leq 0, t \in (-\infty, a], \forall u \in \mathbb{R}^n, H'_t(t, a) \leq 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \langle H'_s(a, s)u, u \rangle \geq 0, t \in (-\infty, a], \forall u \in \mathbb{R}^n, H'_s(a, s) \geq 0,$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \langle H''_{st}(t, s)u, u \rangle \leq 0, t \in (-\infty, a], \forall u \in \mathbb{R}^n, H''_{st}(t, s) \leq 0.$$

в) выполняется хотя бы одно из следующих условий

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle H'_t(t, a)u, u \rangle < 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, H'_t(t, a) < 0, \text{ при почти всех } t \in (-\infty, a],$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \langle H'_t(a, s)u, u \rangle > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, H'_s(a, s) > 0, \text{ при почти всех } t \in (-\infty, a],$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \langle H''_{st}(t, s)u, u \rangle < 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, H''_{st}(t, s) < 0, \text{ при почти всех } t \in (-\infty, a].$$

Теорема. Пусть выполняются условия а), б), и в). Тогда решение системы (1) в пространстве $L_2((-\infty, a], \mathbb{R}^n)$ — единственно.

В доказательстве теоремы используется метод неотрицательной квадратичной формы и методы функционального анализа. Для преобразования левой части системы (5) используются следующие соотношения

$$z(t, s) = \int_s^t u(v)dv, d_s z(t, s) = -u(s)ds, u(s)ds = -d_s z(t, s),$$

$$\langle z(t, s), u(t)dt \rangle_n = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle z(t, s), z(t, s) \rangle_n dt.$$

Литература

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методы регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т.151, №3. С. 501-504.
2. Иванов В.К. Некорректно поставленные задачи // ДАН СССР. 1962. Т.145, №2. С. 270-272.
3. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода ДАН СССР. 1959. Т. 127. №1. С. 31-39.
4. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задач математической физики. Новосибирск: Издательство СО АН СССР, 1962.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР.-1989.-Т.309., №5. С. 1052-1055.
6. Иманалиев М.И., Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады РАН. 2007.
7. Иманалиев М.И., Асанов А. Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными // Доклады РАН. 2014. Т. 454, №5. С. 518-522.
8. Asanov A., Kadenova Z.A., Bekeshova D.A. Regularization and stability of solutions of Fredholm linear integral equations of the first kind on a semi-axis // Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. 2023. №1. P. 31-40.

**ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ
НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ С УРАВНЕНИЯМИ
КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ЕЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ
ИЗГИБЕ, С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В КЛАССАХ
СОБОЛЕВА**

Ш.Г. Касимов, А.П. Кошанов

shokiraka@mail.ru, allanazarkoshanov@mail.ru

УДК 517.95

В многомерном случае изучается задача с начальными и нелокальными краевыми условиями для уравнения колебаний балки с учетом ее вращательного движения при изгибе. Доказана теорема существования и единственности поставленной задачи в классах Соболева. Решение рассматриваемой задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи, для которой найдены ее собственные значения как корни трансцендентного уравнения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций получена теорема единственности решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: уравнение балки с учетом ее вращательного движения при изгибе, начально-граничная задача, спектральный метод, базис Рисса, единственность, существование, ряд.

Введение. Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с.141-143]. К уравнению колебаний балки приходит также при расчете устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл.2]. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учетом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [3, с. 364-374].

Постановка задачи. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = (0, l) \times \dots \times (0, l)$, а l, T — заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a^2 \Delta^2 u(x, t) - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_j u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} + \beta_j u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \alpha_j \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=0} + \beta_j \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} &= u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \end{aligned}$$

Касимов Шакирбай Гаппарович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, факультет математики (Ташкент, Узбекистан).

Кошанов Алланазар Пердебаевич, ассистент, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, факультет математики (Ташкент, Узбекистан).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} &= \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=0} &= \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=0} &= \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \Big|_{x_j=0} &= 0, \quad \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \Big|_{x_j=\pi} &= 0, \quad \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (3)$$

где $1 \leq p \leq q \leq N$, $(x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in Q$, число $a > 0, b > 0, c > 0$ и $\alpha_j = const, \beta_j = const, |\alpha_j| \neq |\beta_j|, \alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0$ фиксировано, а $f(x, t)$ и $\varphi(x), \psi(x)$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям

$$\{v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p \times (m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p} \times (m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}}$$

следующей спектральной задачи:

$$\Delta v(x) + \lambda^2 v(x) = 0, \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha_j \cdot v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \Big|_{x_j=0} + \beta_j \cdot v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \Big|_{x_j=\pi} = 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ &\beta_j \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi} = 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ &v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \Big|_{x_j=0} = v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ &\frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} = \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ &v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \Big|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ &v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \Big|_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ &1 \leq p \leq q \leq N. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Существование и единственность решения начально-граничной задачи.

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ назовем функцию $u(x, t)$ из класса $u(x, t) \in C(\bar{Q}), \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in C(\bar{Q}), \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \in C(\bar{Q}), \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \in C(\bar{Q}), \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} \in C(\bar{Q}), \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x_j^3} \in C(\bar{Q}), \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x_j^4} \in C(\bar{Q})$ $j = 1, 2, \dots, N$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q$.

Функцию $u(x, t)$ назовем регулярным решением задача (1)-(3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$, если функция $u(x, t)$ регулярные решение уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_i > 4 + \frac{N}{2}, i = \overline{1, N}, \theta > 2 + \frac{N}{2}$ удовлетворяют уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(x, t)$ является регулярным решением задача (1)-(3) в области Q .

Обозначим через $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ множество всех функций $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям (3).

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0, |\alpha_j| \neq |\beta_j|$ действительные числа при каждом $1 \leq j \leq p$ и $\rho = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\sqrt{\theta_j^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1\right)^2} \right) < 1$, где $\theta_j = \sqrt{2} \max_{x \in [0, \pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|, \lambda_{m_j} = 2m_j + \varepsilon_{m_j} \cdot \varphi_j, \varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, \varepsilon_{m_j} = \varepsilon_{-m_j} = \pm 1$ при $m_j \in \mathbb{Z}$ и пусть начальные функций $\varphi(x), \psi(x)$ и правую часть $f(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_{q+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[|\varphi_{m_1, \dots, m_N}| + \left| \frac{\psi_{m_1, \dots, m_N}}{\sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}}} \right| + \right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} (1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N})} \max_{0 \leq t \leq T} |f_{m_1, \dots, m_N}(t)| \Big]^2 < \infty.$$

Тогда регулярные решение задачи (1)-(3) из класса $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_i > 4 + \frac{N}{2}, i = \overline{1, N}, \theta > 2 + \frac{N}{2}$ существует и единственно представляется в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_{q+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} [\varphi_{m_1, \dots, m_N} \cos \sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} t + \frac{\psi_{m_1, \dots, m_N}}{\sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}}} \sin \sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} t + \frac{1}{\sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} (1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N})} \int_0^t f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) \sin \sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}}(t - \tau) d\tau] v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N),$$

где $\lambda_{m_1, \dots, m_N}^2 = \sum_{j=1}^p (2m_j + \varphi_j)^2 + \sum_{j=p+1}^q (2m_j)^2 + \sum_{j=q+1}^N (m_j)^2, \mu_{m_1, \dots, m_N} = \frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}^4 + c^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}^2}$,

а коэффициенты определяется следующим образом:

$$f_{m_1, \dots, m_N}(t) = (f(x, t), v_{m_1, \dots, m_N}(x))_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)},$$

$$\varphi_{m_1, \dots, m_N} = (\varphi(x), v_{m_1, \dots, m_N}(x))_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}, \psi_{m_1, \dots, m_N} = (\psi(x), v_{m_1, \dots, m_N}(x))_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}.$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
2. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.
3. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учетом ее вращательного движения при изгибе // Дифференциальные уравнения, 2021, том 57, №3, 364-374.

ТРАЕКТОРИИ УТКИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОГЕНЕРАТОРА

А.С. Кирсанова

askirsanova99@gmail.com

УДК 517.928

В работе производится построение и анализ математической модели малого ветрогенератора с вертикальной осью вращения. В результате найдены условия существования релаксационных колебаний и траекторий-уток.

Ключевые слова: динамические модели, ветрогенератор, траектории-утки, релаксационные колебания, сингулярные возмущения.

Ветрогенератор с вертикальной осью вращения создал французский конструктор Жорж Дарье. Данная модель ветрогенератора хороша тем, что она не зависит от направления ветряного потока, а также является менее шумной по сравнению с классическим ветрогенератором [1,2].

В данной работе рассматривается трехтемповая система дифференциальных уравнений, которая описывает математическую модель ветрогенератора Дарье [3-8]:

$$\begin{cases} J\dot{\Omega} = -kI + M(\Omega) \\ L\dot{I} = k\Omega - (R + r)I \\ \dot{R} = \varepsilon F(\Omega, I, R) \end{cases} \quad (1)$$

где J — момент инерции турбины, L — индуктивность якоря, I — сила тока в обмотке якоря, Ω — коэффициент быстроходности, R — внешнее сопротивление, M — относительный момент аэродинамических сил. Константы: k — коэффициент электромеханического взаимодействия, r — малое внутреннее сопротивление якоря. Величины L и ε — малые параметры. Это означает, что в данной системе переменная I является самой быстрой, R самой медленной из трех переменных. Точка здесь означает производную по времени t . На рисунке 1 представлен график функции $M(\Omega)$, основанный на экспериментальных данных [4].

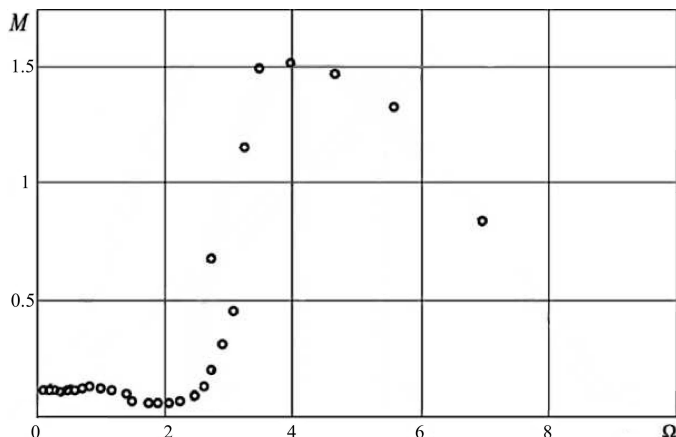


Рис. 1: Экспериментальные данные

В работе был проведен анализ динамической модели малого ветрогенератора Дарье. Произведена аппроксимация аэродинамического момента с помощью кусочно-линейной функции. Найдены условия существования релаксационных колебаний и траекторий-уток [7-9].

Литература

1. Кобрин А.И., Досаев М.З., Ложкин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий С.Ю. Конструктивная теория МВЭУ. Часть I (главы I-II). М.: Изд-во Московского Университета, 2007. 76 с.
2. Кобрин А.И., Досаев М.З., Ложкин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий С.Ю. Конструктивная теория МВЭУ. Часть II (глава III). М.: Изд-во Московского Университета, 2007. 88 с.
3. Климкина Л.А., Досаев М.З., Селюцкий Ю.Д. О динамике ветроэнергетической установки с рабочим элементом на основе механизма антипараллелограмма // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Том 17. №8. С. 536–540. [10.17587/mau.17.536-540](https://doi.org/10.17587/mau.17.536-540).
4. Андронов П.Р., Досаев М.З., Дынникова Г.Я., Селюцкий Ю.Д., Стрекалов С.Д. Моделирование ветродвигателя колебательного типа // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2009. №4. С. 86–91.
5. Досаев М.З., Линь Ч.Х., Лю В.Л., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Качественный анализ стационарных режимов малых ветровых электростанций // Прикладная математика и механика. 2009. Том 73. Выпуск 3. С. 368–374.
6. Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Лю В.Л., Линь Ч.Х. Бифуркации режима функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизации их характеристик // Механика твердого тела. 2009. №2. С. 59–66.
7. Кирсанова А.С. Бифуркации стационарных режимов в модели ветроэнергетической установки // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2021. Т. 27. №4. С. 92-98. [10.18287/2541-7525-2021-27-4-92-98](https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-92-98)
8. A. Kirsanova “Critical Phenomena in the Darrieus Wind Turbine Model”, 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), Moscow, Russian Federation, IEEE, 2023, pp. 1-4, [10.1109/MLSD58227.2023.10304042](https://doi.org/10.1109/MLSD58227.2023.10304042).
9. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1976. 248 с.
10. Соболев В.А., Щепанина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: ФИЗМАЛИТ, 2010. 320 с.

**О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ**

М.А. Кисатов, В.Н. Самохин, Г.А. Чечкин

kisatov@mail.ru, avt428212@yandex.ru, chechkin@mech.math.msu.su

В области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, $X > 0$ рассматривается двумерный стационарный пограничный слой, который описывается системой уравнений

$$\nu \left[1 + 3k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + U(x) \frac{dU(x)}{dx} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где функции $U(x)$ и $p(x)$ связаны равенством $U^2(x) + 2p(x) = const$. Наряду с уравнениями (1) рассматриваются граничные условия вида

$$u|_{x=0} = u_0(y), \quad u|_{y=0} = \Lambda U(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\sigma}{\mu X}, \quad v|_{y=0} = v_0(x), \quad u(x, y) \rightrightarrows U(x) \text{ при } y \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

В задаче (1), (2) $u(x, y)$, $v(x, y)$ — неизвестные компоненты скорости течения жидкости, X — длина обтекаемой области, ν и μ — кинематическая и динамическая вязкости жидкости, Λ ($0 < \Lambda < 1$) — коэффициент проскальзывания вдоль границы $\{y = 0\}$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $p(x)$ — давление; заданные функции $U(x)$, $u_0(y)$, $v_0(x)$ означают, соответственно, скорость внешнего потока, исходный профиль скоростей и скорость всасывания (вдува) жидкости через границу $\{y = 0\}$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: $u_0(y) > \Lambda U(0)$ при $y > 0$; $u_0(0) = \Lambda U(0)$, $u'_0(0) = \frac{\sigma}{\mu X} > 0$, $u_0(y) \rightarrow U(0) \neq 0$ при $y \rightarrow \infty$; $\frac{dU}{dx}$ и $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq X$; $u_0(y)$, $u'_0(y)$, $u''_0(y)$ ограничены при $0 \leq y < \infty$ и удовлетворяют условию Гельдера. Также предполагается, что выполнено условие

$$\nu \left[1 + 3k \left(\frac{du_0(y)}{dy} \right)^2 \right] \frac{d^2 u_0(y)}{dy^2} - v_0(0) \frac{du_0(y)}{dy} + (1 - \Lambda^2) U(0) \frac{dU(0)}{dx} = O(y^2), \quad \text{при } y \rightarrow 0.$$

Тогда при некотором $X > 0$ в области D существует решение $u(x, y)$, $v(x, y)$ задачи (1), (2), обладающее следующими свойствами: функция $u(x, y)$ непрерывна и ограничена в \bar{D} , $u(x, y) > \Lambda U(x)$ при $y > 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} > t > 0$ при $0 < y \leq y_0$, где t и y_0 — некоторые постоянные; $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ непрерывны и ограничены в D ; $\frac{\partial u}{\partial x}$, v , $\frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны и ограничены в любой конечной части \bar{D} . Если $|u'_0(y)| \leq m_1 \exp(-m_2 y)$, $m_1, m_2 = const > 0$, то $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ ограничены в D . В случае, когда $\frac{dp}{dx} \leq 0$ и $v_0(x) \leq 0$ или $\frac{dp}{dx} < 0$, такое решение задачи (1), (2) существует в D при любом $X > 0$.

Если кроме того, выполняются неравенства

$$0 < u < M, \quad \psi > 0, \quad M_1 y \leq u \leq M_2 y, \quad 0 < y < y_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq M_3, \quad (x, y) \in D,$$

где M , M_1 , M_2 , M_3 и y_0 — некоторые положительные постоянные. Тогда $u(x, y)$, $v(x, y)$ — единственное решение задачи (1), (2).

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 20-11-20272).

Кисатов Марат Александрович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Самохин Вячеслав Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, Московский политехнический университет (Москва, Россия)

Чечкин Григорий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия); Институт математики с компьютерным центром — подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН (Уфа, Россия); Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА КОНСТАНТ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БИОРАЗЛОЖЕНИЯ НИКОТИНА

О.Ю. Кожухарь, А.С. Скичко

olesyakozhukhar@yandex.ru, olf_l@list.ru

УДК 004.942,579.695

В данной работе рассматривается возможность использования классических оптимизационных алгоритмов для решения задачи поиска констант математической модели процесса биоразложения никотиновой пыли.

Ключевые слова: математическое моделирование, оптимизация, оптимизационные алгоритмы, поверхность отклика, овражная функция.

При решении оптимизационной задачи поиска констант математических моделей по имеющимся экспериментальным данным всегда ставится вопрос о выборе оптимизационного алгоритма. Как известно, работоспособность различных оптимизационных алгоритмов и конечный результат зависят от конкретики поставленной задачи, точности экспериментальных данных, вида поверхности отклика и других факторов. Особую сложность представляют оптимизационные задачи, имеющие овраг на поверхности отклика. При этом при выработке проектных решений по результатам математического моделирования анализ поверхности отклика проводится достаточно редко. В этой связи задача оценки погрешности результатов поиска констант разрабатываемой модели в зависимости от выбора оптимизационного алгоритма приобретает определённую актуальность. В настоящей работе предлагается подход к решению данной задачи на примере разработки математической модели процесса биодеструкции никотиновой пыли [1].

Согласно основам теории оптимизации при достаточно сложной поверхности отклика любой метод оптимизации может дать несколько итоговых результатов в зависимости от выбора начального приближения. Выбор тестируемых оптимизационных алгоритмов основывался на описаниях, представленных в [2]. Исследование оптимизационных алгоритмов проводилось с помощью поверхности отклика при задании разных начальных приближений. Были рассмотрены следующие методы оптимизации:

- метод поочередного изменения переменных;
- метод релаксации;
- метод градиента.

При исследовании метода поочередного изменения переменных рассматривалось 2 варианта (рис. 1а, 1б) в зависимости от того, какая из искомым констант в начальный момент фиксировалась, а какая изменялась. Так, независимо от последовательности варьирования значений констант, алгоритм приводит, как правило, к границам оврага. К исключениям относились случаи, когда начальное приближение первой варьируемой константы задавалось внутри границ оврага, – тогда итоговим результатом могла стать любая точка оврага, поскольку с учётом выбранной сетки значений каждая точка оврага представляет собой локальный экстремум.

Для тестирования методов релаксации и градиента (рис. 1в и 1г) выполнялся расчёт частных производных с помощью численных методов. Алгоритм метода релаксаций дал самый плохой результат. При любых приближениях первой варьируемой переменной (вдоль оси которой целевая функция улучшается наиболее быстро) алгоритм выбирал, и переключение на варьирование константы ординат уже не происходило даже при существенном уменьшении шага сетки. Таким образом, результатом оптимизации могла быть любая точка кривой.

При использовании метода градиента перемещение по поверхности отклика наблюдалось по обоим переменным, однако чувствительность алгоритма к изменению константы абсцисс также была более высокой, как и в методе релаксаций. Алгоритм метода также сходил к кривой

Кожухарь Олеся Юрьевна, студент, Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева, кафедра кибернетики химико-технологических процессов (Москва, Россия)

Скичко Алексей Сергеевич, к.т.н., доцент, Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева, кафедра кибернетики химико-технологических процессов (Москва, Россия)

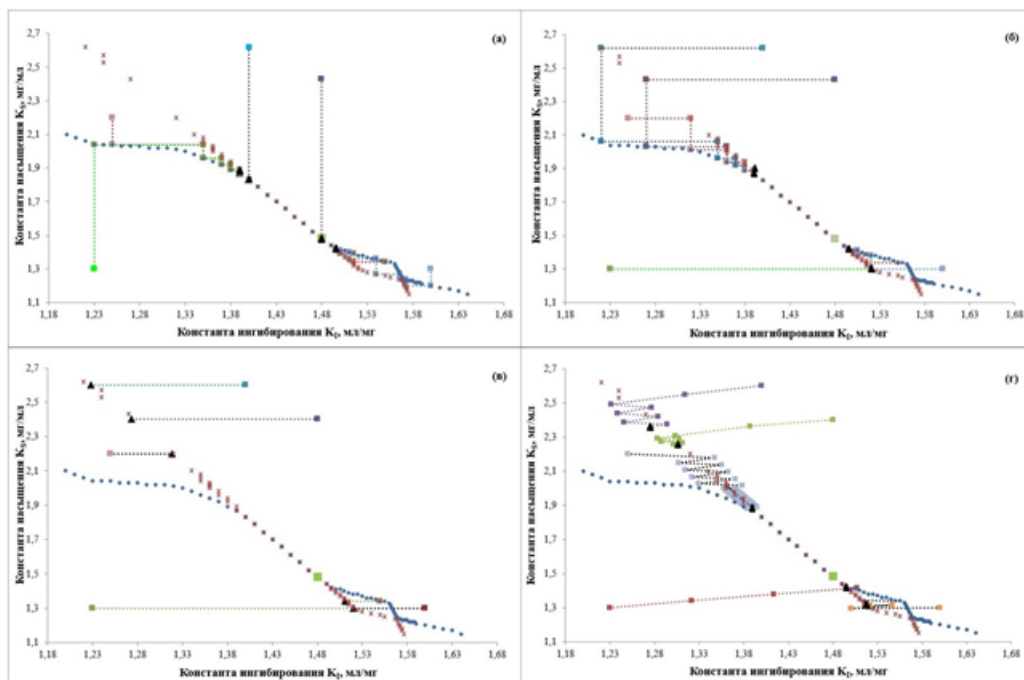


Рис. 1: Графическое отображение результатов метода поочередного изменения переменных: а) на первой итерации константа на оси ординат меняется, а константа на оси абсцисс фиксируется (а); б) на первой итерации константа на оси абсцисс меняется, а константа на оси ординат фиксируется (б). И графическое отображение результатов метода релаксации (в) и метода градиента (г)

более чувствительной константы, однако в отдельных случаях наблюдалось перемещение вдоль этой линии и даже достижение границ оврага.

Таким образом, метод поочередного изменения переменных дал наиболее качественный результат, однако даже в этом случае достижение глобального экстремума носило вероятностный характер.

Литература

1. Скичко А. С., Кожухарь О. Ю. Анализ погрешности результатов поиска констант модели процесса биоразложения никотина // Вестник Международной академии системных исследований. Информатика, экология, экономика. 2020. Т. 22. С. 26-33.
2. Дударов С. П., Папаев П. Л. Использование численных методов в табличном процессоре Microsoft Excel. Лабораторный практикум: учеб. пособие. Москва : РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2013. 115 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЧИСЛО, УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КОНВЕКТИВНОГО УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛИАРДА

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов

anat_kulikov@mail.ru, kulikov_d_a@mail.ru

УДК 517.9

Рассматривается периодическая краевая задача для конвективного уравнения Кана–Хиллиарда. Получены достаточные условия существования двумерных инвариантных многообразий, сформированных пространственно неоднородными t периодическими решениями. Изучен вопрос об их устойчивости. Получены асимптотические формулы для таких решений. Дан ответ о количестве инвариантных многообразий. В частности, указаны варианты, когда краевая задача имеет счетный набор неустойчивых двумерных инвариантных многообразий.

Ключевые слова: уравнение Кана–Хиллиарда, устойчивость, бифуркации.

Рассматривается конвективный вариант известного нелинейного эволюционного уравнения Кана–Хиллиарда, дополненного периодическими краевыми условиями. В случае, когда решение зависит от одной пространственной переменной соответствующая краевая задача после нормировок имеет следующий вид [1]

$$u_t + u_{xxxx} + (b_1u + b_2u^2 + b_3u^3)_{xx} + a_2(u^2)_x = 0, \quad (1)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (2)$$

где $b_1, b_2, b_3, a_2 \in \mathbb{R}$. При $a_2 = 0$ получаем традиционный вариант уравнения Кана–Хиллиарда. Наличие члена a_2 призвано учесть конвекцию [2]. Далее будем считать, что $b_2^2 + b_3^2 \neq 0$. Иной вариант, но при $a_2 \neq 0$, приводит к другому известному уравнению математической физики – уравнению Курамото–Сивашинского.

Отметим, что краевая задача (1), (2) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия

$$u(t, x) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $b(\alpha) = 3b_3\alpha^2 + 2b_2\alpha + b_1$ и квадратное уравнение $b(\alpha) = m^2$ имеет два действительных корня. Положим

$$b(\alpha) = m^2(1 + \nu\mu), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

где $\nu = \pm 1$ или 0 , а $\mu \in (0, \mu_m)$. Тогда справедливо утверждение.

Теорема. *Существует такая положительная постоянная $\mu = \mu(m) > 0$, что при всех $\mu \in (0, \mu_m)$ краевая задача (1), (2) имеет двумерное инвариантное многообразие $V_2(\alpha, \mu, m)$, которое заполнено t периодическими решениями краевой задачи (1), (2), если $\alpha \neq 0$ и $a_2 \neq 0$. При $\alpha = 0$ или $a_2 = 0$ это двумерное инвариантное многообразие заполнено пространственно неоднородными состояниями равновесия краевой задачи (1), (2).*

Для решений, формирующих $V_2(\alpha, \mu, m)$ справедливы асимптотические формулы

$$u(t, x, \mu) = u(t, x, \mu, m) = \alpha + \mu^{1/2}\rho_m(q_m + \bar{q}_m) + o(\mu^{1/2}), \quad (4)$$

где $\alpha = \alpha_m(\mu)$ один из корней квадратного уравнения (3). Здесь $q_m = q_m(t, x) = \exp(i\sigma_m t + imx + i\varphi_m)$,

$$\sigma_m = -2\alpha a_2 m, \quad \rho_m = \sqrt{-\frac{\nu}{l_{1m}}},$$

$$l_{1m} = 5\frac{b_3}{m^2} + \frac{2b_2^2}{3m^4} - 2\frac{b_1 b_3}{m^4} - \frac{a_2^2}{m^6}.$$

Решения (4) существуют, если $\nu l_{1m} < 0$.

Наконец, решения (4) краевой задачи (1), (2) при всех $m \neq \pm 1$ неустойчивы в смысле определения А.М. Ляпунова. При $m = \pm 1$ решения (4) неустойчивы, если $l_{1m} > 0$ и они орбитально асимптотически устойчивы, если $l_{1m} < 0$.

Из полученных результатов вытекает, что ответ о существовании двумерных инвариантных многообразий зависит от наличия корней у квадратного уравнения $b(\alpha) = m^2$. Анализ показал, что при $b_3 > 0$ оно имеет решение при счетном наборе m и следовательно существует счетное множество двумерных инвариантных многообразий $V_2(\alpha, \mu, m)$. При $b_3 = 0, b_2 \neq 0$ такие многообразия уже существуют при любом целом m . При $b_3 < 0$ может существовать лишь конечное число инвариантных многообразий $V_2(\alpha, \mu, m)$. Не исключен вариант, когда их нет.

Отметим, что в случае, когда уравнение $b(\alpha) = m^2$ имеет 1 корень (кратности 2), то возникает особый случай. Его исследование показало, что тогда результаты анализа бифуркаций в краевой задаче (1), (2) аналогичен общему случаю.

Анализ бифуркаций в краевой задаче (1), (2) использовал такие методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий как

- метод инвариантных многообразий;
- метод нормальных форм.

Подчеркнем, что в асимптотической формуле (4) выписано только первое приближение. Соответствующие формулы могут быть уточнены.

Отметим, что в работах [3-5] изучались аналогичные краевые задачи.

Литература

1. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy // The Journal of Chemical Physics 1958. V.28. P. 258-267.
2. Miranville A. The Cahn–Hilliard equation and some of its variants // AIMS Math. 2017. V. 2. P. 479–544.
3. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана-Хиллиарда, Курамото-Сивашинского и их обобщениях // ЖВМиМФ. 2019. Т.59. №4. С. 670-683.
4. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations of invariant manifolds of the Cahn-Hilliard-Oono equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. №3. P. 1003-1017.
5. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Уравнение Кана-Хиллиарда в случае двух пространственных переменных. Формирование паттернов // Теорет. и математ. физика. 2021. Т. 207. №3. С 438–457.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ МАТЕРИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

И.К. Курбонов, Х.П. Сайдалиев

hudson90@mail.ru, homid-1978@mail.ru

УДК 517.95

В нашей работе получены точные периодическое решение задачи электродинамики в случае нелинейных материальных уравнений. Решение получено с помощью эллиптических функций Якоби $sn \xi, cn \xi$ и $dn \xi$ [1], [4], [6].

Ключевые слова: электродинамика, материальные уравнения, эллиптические функции, метод разложения.

Курбонов Икром Курбанович, д.ф.-м.н., профессор, Российско-Таджикский (Славянский) университет (Душанбе, Таджикистан)

Сайдалиев Хомид Пирхонович, к.ф.-м.н., доцент, Бохтарский государственный университет имени Носира Хусрава (Бохтар, Таджикистан)

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial(D(E))}{\partial t} + J(E) + J_{ct}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial(B(H))}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

с материальными уравнениями вида

$$D(E) = \varepsilon E, \quad B(H) = \mu H^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad J(E) = \delta \frac{\partial E}{\partial x}, \quad \mu = \varepsilon = \delta = const. \quad (2)$$

Система (1) будем рассматривать при $J_{ct} = 0$. Итак, подставляя (2) в (1), приходим к системе квазилинейных уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \delta \frac{\partial E}{\partial x}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -2\mu H \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial t}. \end{cases} \quad (3)$$

В системе (3) с помощью замены переменных для функций $H(x, t)$, $E(x, t)$ переходим к функции $H(\xi)$, $E(\xi)$, где $\xi = k(x - ct)$, т.е., $H(x, t) = H(\xi)$ и $E(x, t) = E(\xi)$.

В таком случае из системы (3) получаем обыкновенную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dH}{d\xi} - C\varepsilon \frac{dE}{d\xi} + \delta \frac{dE}{d\xi} = 0, \\ \frac{dE}{d\xi} - 2\mu c H \frac{dH}{d\xi} + Ck^2 \frac{d^3 H}{d\xi^3} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы (4) находим при помощи метода разложения по эллиптическим функциям Якоби. Подобный метод был использован в работе [1]. Методом разложения, решение системы (4) будем искать в виде

$$E = a_0 + a_1 sn\xi + a_2 sn^2\xi, \quad H = b_0 + b_1 sn\xi + b_2 sn^2\xi, \quad (5)$$

где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ – некоторые постоянные коэффициенты. В итоге определяем точное ограниченное решение системы (3) в виде

$$E(x, t) = E(k(x - ct)) = \frac{6k^2 m^2}{\mu(C\varepsilon - \sigma)} sn^2(k(x - ct)),$$

$$H(x, t) = H(k(x - ct)) = \frac{1}{2\mu C} \left[\frac{1}{\mu(C\varepsilon - \sigma)} - 4Ck^2(m^2 + 1) \right] + \frac{6k^2 m^2}{\mu} sn^2(k(x - ct)) sn^2(k(x - ct)), \quad (6)$$

при $\mu \neq 0$, $C\varepsilon - \sigma \neq 0$.

Аналогичным образом, будем искать решение системы уравнений (4) с помощью $dn\xi$ функций Якоби

$$E = a_0 + a_1 dn\xi + a_2 dn^2\xi, \quad H = b_0 + b_1 dn\xi + b_2 dn^2\xi. \quad (7)$$

Следовательно, получаем

$$E(x, t) = E(k(x - ct)) = -\frac{6k^2}{\mu(C\varepsilon - \sigma)} dn^2(k(x - ct)),$$

$$H(x, t) = H(k(x - ct)) = \frac{1}{2\mu C} \left[\frac{1}{C\varepsilon - \sigma} - 4Ck^2(m^2 - 2) \right] + \frac{6k^2}{\mu} dn^2(k(x - ct)), \quad (8)$$

при $\mu C \neq 0$, $C\varepsilon - \sigma \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$, $\sigma \neq 0$.

Литература

1. Liu S.K., Fu Z.T., Liu S.D. Q. Zhao Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations // J. Physics Letters A. — Moscow, 2001. — Vol. 289. — P. 69-74.

2. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 360 с.

3. *Курбанов И.* Краевые задачи электродинамики. — Киев: Инст. математики АН УССР, 1989, С. 3-23

4. *Сафаров Д.С.* Об одном обобщении КдФ уравнения // Сб. научных трудов «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения». — Киев, 1996. — С. 240.

5. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций: с приложениями к механике. — М.: КомКнига, 2006. — 368 с.

6. *Курбанов И.К., Сафаров Д.С.* Точное ограниченное и периодическое решение обобщенного уравнения Бюргерса – Кортевега – де Фриза с постоянными отклоняющимися аргументами. ДАН РТ., Том 66. — С. 7-8.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С МАЛОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Г.А. Курина

kurina@math.vsu.ru

УДК 517.928, 517.93

Для одной нелинейной математической модели электротележки с малой индуктивностью с помощью теоремы Тихонова обосновывается использование решения невозмущенной задачи вместо решения возмущенной и строится равномерное асимптотическое приближение решения любого порядка при помощи метода пограничных функций А.Б. Васильевой. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: электротележка, малая индуктивность, асимптотическое решение.

Некоторые математические модели содержат разнотемповые переменные. К такому классу относятся так называемые сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений, некоторые из которых содержат малый параметр при старших производных. Для таких систем широко известна теорема Тихонова о предельном переходе при стремлении малого параметра к нулю решения сингулярно возмущенной начальной задачи к решению невозмущенной (вырожденной) задачи с нулевым значением малого параметра [1, 2]. При этом для медленных переменных предельный переход выполняется на всем рассматриваемом отрезке времени, а для быстрых переменных в общем случае - на полуинтервале, исключая начальное значение аргумента. Равномерное на всем отрезке асимптотическое приближение решения нелинейной возмущенной задачи было впервые построено А.Б. Васильевой при помощи метода пограничных функций [3].

Результаты указанных работ использовались при асимптотическом анализе задач кинетики, теории полупроводниковых приборов и механики (см., например, [4-6]).

Здесь рассматривается математическая модель электротележки из [7, 8], где на примерах сравнивалось поведение возмущенной и вырожденной моделей при разных значениях параметров. Используя тригонометрические формулы, запишем в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка соотношения из [7, 8] для безразмерных переменных: x , соответствующей угловому смещению, y , соответствующей угловой скорости, z , соответствующей электрическому току, и безразмерного параметра ϵ , соответствующего электрической индуктивности,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z), \\ \epsilon \frac{dz}{dt} &= -y - z + \nu, \end{aligned} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-01-00000).

Курина Галина Алексеевна, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный университет, математический факультет, кафедра математического анализа (Воронеж, Россия), Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (Москва, Россия)

где

$$g(x, y, z) = \frac{-by + z - a \sin(2x)y^2}{1 + a(1 - \cos(2x))}.$$

Будем рассматривать систему (1) с начальными условиями

$$x(0) = x^0, y(0) = y^0, z(0) = z^0. \quad (2)$$

Вырожденная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \\ 0 &= -\bar{y} - \bar{z} + \nu, \\ \bar{x}(0) &= x^0, \bar{y}(0) = y^0. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\bar{x}(0) = x^0, \bar{y}(0) = y^0. \quad (4)$$

Возмущенная задача (1), (2) удовлетворяет условиям теоремы Тихонова, что доказывает близость решения этой задачи к решению начальной задачи (3), (4) для вырожденной системы при достаточно малых значениях ϵ для всех значений аргумента из рассматриваемого отрезка времени, исключая в общем случае для быстрой переменной начальную точку $t = 0$.

Легко проверить, что для задачи (1), (2) выполняются все условия, обеспечивающие возможность построения методом А.Б. Васильевой её асимптотического решения в виде суммы ряда для регулярных функций, зависящих от t и пограничных функций, зависящих от τ , которые существенны в окрестности $t = 0$. А именно, решение $v(t, \epsilon) = (x(t, \epsilon), y(t, \epsilon), z(t, \epsilon))$ ищется в виде

$$v(t, \epsilon) = \sum_{j=0}^{+\infty} \epsilon^j (\bar{v}_j(t) + \Pi_j v(\tau)). \quad (5)$$

Подставляя разложение (5) в условия задачи, представляя правые части уравнений в виде суммы функций, зависящих от t и τ , раскладывая получившиеся функции в ряд по целым неотрицательным степеням ϵ , а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , отдельно зависящие от t и τ , получаем соотношения для определения членов асимптотики (5).

В [9] для рассматриваемой здесь задачи подробно изложено построение асимптотического приближения произвольного порядка.

Приведем графики фазовой траектории и её первых приближений при следующих значениях параметров: $\epsilon = 0,05, b = \nu = 1, d = 10, x^0 = y^0 = 0, z^0 = 4, t \in [0, 0.6]$. Красная линия означает решение начальной задачи (1), (2), найденное при помощи системы Wolfram Mathematica 10.3, черная линия означает решение вырожденной задачи (3), (4), а зеленая и синяя линии означают соответственно приближения нулевого и первого порядков асимптотики (5), найденные при помощи метода пограничных функций А.Б. Васильевой.

Литература

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952. Т. 31(73). №3. С. 575-586.
2. Градштейн И.С. Применение теории устойчивости А.М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб., 1953. Т. 32(74). №2. С. 263-286.
3. Васильева А.Б. Построение равномерного приближения для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, Матем. сб., 1960. Т. 50(92), №1. С. 43-58.
4. Васильева А.Б. Исследование асимптотических свойств дифференциального уравнения, встречающегося в некоторых задачах кинетики. Дифференц. уравнения, 1968. Т.4. №3. С. 397-408.
5. Белянин М.П., Васильева А.Б., Воронов А.В., Тихонравов А.В. Об асимптотическом подходе к задаче синтеза полупроводникового прибора. Матем. моделирование, 1989. Т. 1. №9. С. 43-63.
6. Кузьмина Л.К. Об упрощенных моделях и динамике некоторых сингулярно возмущенных систем. Матем. моделирование, 1989. Т. 1. №8. С. 103-109.
7. Cunha Jr. A., Pereira M., Avanzo R., Tusset A.M., Balthazar J.M. On the reduction of nonlinear electromechanical systems. Meccanica, 2022. V. 57. №6. P. 2679-2697.

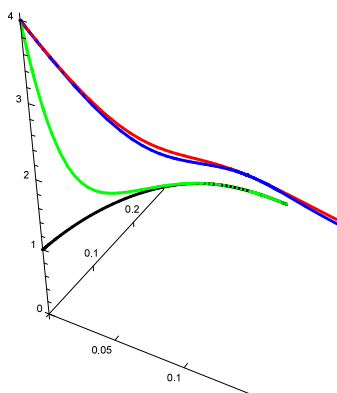


Рис. 1: Фазовая траектория и ее асимптотические приближения

8. *Avanço, R., Zanella, D., Cunha Jr, A., Tusset, A., Balthazar, J.* A tutorial on the simplification of electromechanical dynamic models. In: Balthazar, J. M. (ed) Nonlinear vibrations excited by limited power sources, Mechanisms and machine science. V. 116. P. 3-14, Springer, Cham, 2022.

9. *Kurina G.* Asymptotic analysis of a class of singularly perturbed nonlinear electromechanical dynamic models. 2nd international conference on nonlinear dynamics and applications (ICNDA 2024) (принята к печати).

КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Г. Кушнер

kushner@physics.msu.ru

УДК 514.763.85,517.95

Доклад посвящен применению контактных преобразований к проблеме интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных второго порядка.

Ключевые слова: контактные преобразования, многозначные решения, джеты.

Широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка можно рассматривать как эффективные дифференциальные формы на пространстве 1-джетов гладких функций [1,2]. В этот класс попадают уравнения типа Монжа–Ампера (по терминологии Г. Дарбу), имеющие вид

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + 2Cu_{yy} + D(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + E = 0.$$

Здесь A, B, C, D, E — функции переменных x, y, u, u_x, u_y .

С эффективными дифференциальными формами связаны геометрические структуры на пространстве 1-джетов. Так, например, гиперболические уравнения порождают три распределения, одно из которых одномерно, а два других — двумерны. Эти распределения определяют декомпозицию касательного пространства к пространству джетов и, в свою очередь, декомпозицию комплекса де Рама [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00390).

Кушнер Алексей Гурьевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет (Москва, Россия)

В докладе будут представлены тензорные инварианты нелинейных дифференциальных уравнений относительно псевдогруппы контактных преобразований. В частности, будут представлены дифференциальные 2-формы, обобщающие классические инварианты Лапласа линейных гиперболических уравнений.

Обращение в нуль этих дифференциальных 2-форм является необходимым и достаточным условием существования контактного преобразования, приводящего нелинейное гиперболическое уравнение к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

В случае выполнения этого условия можно построить общее многозначное решение нелинейного уравнения. Если же в нуль обращается только одна из этих дифференциальных форм, то построить общее многозначное решение также можно.

Результаты будут проиллюстрированы на примерах дифференциальных уравнений, возникающих в теории нелинейной двухфазной фильтрации [4].

Литература

1. *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // ДАН СССР 238(5), 273-276 (1978)
2. *Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N.* Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press. — 2007. — xxii+496 P.
3. *Kushner A.G.* A contact linearization problem for Monge–Ampere equations and Laplace invariants // Acta Appl. Math. 101(1-3) P. 177–189 (2008)
4. *Mukhina S.* Contact Transformations in Theory of Frontal Oil Displacement // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. - Vol. 44, №9, 3976-3980.

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ШКАЛЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Д.В. Лиманский

d.limanskiy.dongu@mail.ru

УДК 517.946

В работе получен критерий слабой ε -коэрцитивности системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ минимальных дифференциальных операторов, имеющей постоянные коэффициенты в l -однородных главных частях, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, в шкале анизотропных пространств Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$ при $p \in [1, \infty]$.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, априорная оценка, слабая коэрцитивность, квазиэллиптичность, пространство Соболева.

Пусть Ω — область в \mathbb{R}^n , $l := (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $p \in [1, \infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (1)$$

с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$. Здесь и далее используются обозначения: $x := (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$; $D := (D_1, \dots, D_n)$, $D_j := -i(\partial/\partial x^j)$, $j \in \{1, \dots, N\}$; $|\alpha:l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$, $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

Пусть также

$$P_j^l(x, D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha \quad \text{и} \quad P_j^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

Исследование проводилось по теме государственного задания (рег. № 124012400352-6).
Лиманский Дмитрий Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Донецкий государственный университет, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Россия)

— главная часть и главный символ оператора $P_j(x, D)$ соответственно.

Определение 1. [1, 2] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) называют l -квазиэллиптической, если

$$(P_1^l(x, \xi), \dots, P_N^l(x, \xi)) \neq 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

В частности, в изотропном случае, т. е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, систему $\{P_j(x, D)\}_1^N$ называют эллиптической порядка l .

Определение 2. [1] Анизотропным пространством Соболева $W_p^l(\Omega)$ называют множество функций $f \in L^p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ при всех $|\alpha : l| \leq 1$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha : l| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2)$$

Подпространство в $W_p^l(\Omega)$, совпадающее с замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме (2), будем обозначать через $W_{p,0}^l(\Omega)$. В случае изотропного пространства Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$ неравенство $|\alpha : l| \leq 1$ в (2) принимает обычный вид $|\alpha| \leq l$.

Определение 3. [1] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) называют коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$, если с некоторыми не зависящими от f константами $C_1, C_2 > 0$ верна оценка

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3)$$

Хорошо известно [1], что критерием коэрцитивности системы операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) в анизотропных пространствах Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$ является ее l -квазиэллиптичность. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка (3) для l -квазиэллиптической системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ утрачивает силу. Более того, l -квазиэллиптическая система (1) является коэрцитивной в $W_{\infty,0}^l(\Omega)$ и $W_{1,0}^l(\Omega)$ в исключительных случаях (см. [2]). Тем не менее она является слабо коэрцитивной в $W_{p,0}^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ в смысле следующего определения.

Определение 4. [2] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) называют слабо коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$, если с некоторыми не зависящими от f константами $C_1, C_2 > 0$ верна оценка

$$\sum_{|\alpha : l| < 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4)$$

При $N = 1$ в изотропном случае де Лю и Миркил [3] показали, что при $n \geq 3$ оператор $P(D) := P_1(D)$ с постоянными коэффициентами эллиптивен в точности тогда, когда он слабо коэрцитивен в $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$. Для анизотропного случая в связи с указанным критерием естественно возникает вопрос о возможной характеристизации l -квазиэллиптических систем при помощи априорных оценок вида (4) при $p \in [1, \infty]$.

Определение 5. Систему операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) будем называть ε -слабо коэрцитивной в анизотропном пространстве Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящая от f константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что верна оценка

$$\sum_{|\alpha : l| < 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega).$$

В следующей теореме мы показываем, что при каждом $p \in (1, \infty]$ неравенство (5) с любым $\varepsilon > 0$ характеризует l -квазиэллиптические системы в классе всех слабо коэрцитивных в $W_{p,0}^l(\Omega)$ систем с постоянными коэффициентами в их главных частях.

Теорема 1. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, Ω — область в \mathbb{R}^n и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — система операторов вида (1), главные части которых имеют постоянные коэффициенты, т. е. $P_j^l(x, D) = P_j^l(D)$, и $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha : l| < 1$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

Тогда для каждого $p \in (1, \infty]$ система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ слабо ε -коэрцитивна в $W_{p,0}^l(\Omega)$ в точности тогда, когда она l -квазиэллиптическая.

Результат остается верным при $p = 1$ для операторов $P_j(D)$ с постоянными коэффициентами.

Результаты работы получены совместно с М. М. Маламудом.

Литература

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, Физматлит, 1996. 480 с.

2. Лиманский Д. В., Маламуд М. М. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сб. 2008. Т. 199. №11, 75–112.

3. De Leeuw K., Mirkil H. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm // Illinois J. Math. 1964. V.8. № 1, 112–124.

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

И.С. Ломов

lomov@cs.msu.ru

УДК 517.927.96, 517.984

При минимальных условиях на данные смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения построено обобщенное решение задачи. Уравнение в общем случае не допускает разделения переменных. Рассмотрены двухточечные краевые условия, содержащие производные функций. Решение представлено в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, волновое уравнение, смешанная задача.

Исследуется следующая обобщенная смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x, t)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q = (0, 1) \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + a_1 u(0, t) + b_1 u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} + a_2 u(0, t) + b_2 u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

где коэффициенты $a_i, b_i, i = 1, 2$, — произвольные комплексные числа, q, f, φ , — комплекснозначные функции, $f(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$, суммируемая функция, $Q_T = \{(x, t) : x \in (0, 1), t \in (0, T)\}$, $T > 0$ — произвольно зафиксированное число, $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$, суммируемые функции, а потенциал $q(x, t)$ таков, что найдется функция $q_0(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$, так что справедливо $|q(x, t)| \leq q_0(x)$ для всех $(x, t) \in Q$, и функция $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$.

Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи. Внешний вид ее такой же, как и у обычной смешанной задачи и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией.

Ряд формального решения может быть и расходящимся. Следуя рекомендациям Л. Эйлера для нахождения его суммы привлекаем еще аксиому о перестановке в ряде операций интегрирования и суммирования.

В статье А.П. Хромова и В.В. Корнева [1] найдены необходимые и достаточные условия существования сильного решения задачи (1)–(3) в случае $q = q(x)$, $f = 0$, и получена формула для этого решения. *Сильным решением* называем функцию, удовлетворяющую условиям (2), (3) в обычном смысле, а уравнению (1) — почти всюду в полуполосе Q .

Наша задача — найти формулу для обобщенного решения задачи (1)–(3) при минимальных ограничениях на данные задачи.

Теорема 1. Пусть для задачи (1)–(3) выполняются следующие условия: функции $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$, $f(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ для любого $T > 0$, функция $q(x, t)$ такова, что найдется функция $q_0(x) \in \mathcal{L}(0, 1)$, так что справедливо $|q(x, t)| \leq q_0(x)$ для $(x, t) \in Q$, и функция $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{L}(Q_T)$ для любого $T > 0$. Тогда задача (1)–(3) имеет обобщенное решение, которое представляется формулами

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta, \tau) d\eta, \quad (4)$$

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \quad a_k(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{k-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad k \geq 1,$$

где функции $\tilde{f}(\eta, \tau) = f(\eta, \tau)$, $\tilde{f}_k(\eta, \tau) = f_k(\eta, \tau) = -q(\eta, \tau)a_k(\eta, \tau)$ при $\eta \in [0, 1]$, $k \geq 0$, при каждом τ , далее функции $f(\eta, \tau)$, $f_k(\eta, \tau)$ продолжаются специальным образом по переменной η на всю числовую прямую, функция $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$, далее функция $\varphi(x)$ продолжается на всю прямую. Ряд в формуле (4) сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике Q_T при любом $T > 0$ с экспоненциальной скоростью.

Ранее для обобщенной смешанной задачи для телеграфного уравнения, краевое условие которой содержало значение решения во внутренней точке отрезка, были изложены два способа построения обобщенного решения ([2]).

Литература

1. Хромов А.П., Корнев В.В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4, 215–238.
2. Ломов И.С. Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, №11, 1471–1483.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В.И. Маковецкий, С.М. Ситник

Maikov-Viktor-Sakh@yandex.ru, athsms@yandex.ru

УДК 517.9

Показана технология применения операторов преобразования для построения частных решений неоднородных самосопряженных дифференциальных уравнений. Технология проиллюстрирована решениями Йоста для потенциала Баргмана.

Ключевые слова: операторы преобразования, решение неоднородных диффуравнений, решение Йоста.

Маковецкий Виктор Игоревич, с.н.с., Сахалинский государственный университет, Научно-исследовательская лаборатория дистанционного зондирования Земли (Южно-Сахалинск, Россия)

Ситник Сергей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования (Белгород, Россия)

Пусть дано три объекта:

а) однородное дифференциальное уравнение для исходного потенциала $q_0(x)$

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x, \lambda)}{dx} \right] + q_0(x)u(x, \lambda) - \lambda r(x)u(x, \lambda) = 0$$

б) однородное дифференциальное уравнение с "возмущенным" потенциалом $q_0(x) + q(x)$

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dv(x, \lambda)}{dx} \right] + (q_0(x) + q(x))v(x, \lambda) - \lambda r(x)v(x, \lambda) = 0$$

в) неоднородное дифференциальное уравнение с потенциалом $q_0(x) + q(x)$

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dw(x, \lambda)}{dx} \right] + (q_0(x) + q(x))w(x, \lambda) - \lambda r(x)w(x, \lambda) = f(x)$$

с соответствующими начальными условиями. Для нулевой правой части они обладают двумя линейно независимыми решениями.

Решения первых двух уравнений связаны между собой операторами преобразования второго рода ([1])

$$v_j(x, \lambda) = u_j(x, \lambda) + \int_c^x K_j(x, t)u_j(t, \lambda)dt; \quad j = 1, 2;$$

Здесь $c = 0$ или $c \rightarrow \infty$ и ядра операторов преобразования чаще всего совпадают $K_2(x, t) = K_1(x, t)$. Решение неоднородного уравнения традиционно состоит из линейной комбинации решений однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$w(x, \lambda) = c_1v_1(x, \lambda) + c_2v_2(x, \lambda) + s(x)$$

Постановка задачи:

Построить оператор, связывающий четверку $\{u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda), K_1(x, t), K_2(x, t)\}$ с частным решением $s(x)$.

Конструкция опирается на метод вариации произвольных постоянных. При этом

$$w(x, \lambda) = c_1(x)v_1(x, \lambda) + c_2(x)v_2(x, \lambda) + s(x)$$

Представленное построение оказывается наиболее простым в классическом варианте $p(x) = 1$; $r(x) = 1$. Возникает система уравнений относительно производных от коэффициентов

$$\begin{cases} v_1(x, \lambda)c'_1(x) + v_2(x, \lambda)c'_2(x) = 0 \\ v'_1(x, \lambda)c'_1(x) + v'_2(x, \lambda)c'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

Здесь в качестве $v_j(x)$ понимается их выражение посредством операторов преобразования. При этом

$$v'_j(x, \lambda) = \frac{dv_j(x, \lambda)}{dx} = K_j(x, x)u_j(x, \lambda) + \frac{du_j(x, \lambda)}{dx} + \int_c^x \frac{\partial K_j(x, t)}{\partial x} u_j(t, \lambda)dt$$

причем, в соответствии с общей теорией, $2K_j(x, x) = \int q_0(x)dx$. Интегрирование производных от коэффициентов завершает создание оператора перехода от решений эталонного "невозмущенного" уравнения $\{u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda)\}$ к частному решению неоднородного дифференциального уравнения $s(x)$ при помощи операторов преобразования $\{K(x, t), K_2(x, t)\}$. Указанный подход кажется громоздким, однако в важных частных вариантах он приводит к простым и практически применимым структурам.

Один из этих вариантов - операторы преобразования с вырожденными ядрами ([1], §7), которые частично могут быть представлены реализациями решений для потенциалов Баргмана ([2])

$$p(x) = 1; r(x) = 1; q_0(x) = 0; q(x) = 2 \left(\frac{\mu}{\cosh(\mu x)} \right)^2; \lambda = \omega^2;$$

В.А. Садовничий ([3]) и М.Г. Крейн ([4]) показали, что решениями Йоста для возмущенного уравнения являются

$$v_1(x, \lambda) = \cos(\omega x) - \frac{\mu}{\omega} \tanh(\mu x) \sin(\omega x)$$

$$v_2(x, \lambda) = -\frac{\omega}{\mu^2 + \omega^2} \left(\sin(\omega x) + \frac{\mu}{\omega} \tanh(\mu x) \cos(\omega x) \right)$$

Тогда

$$c_1(x) = -\frac{\omega}{\mu^2 + \omega^2} \int_0^x \left(\sin(\omega t) + \frac{\mu}{\omega} \tanh(\mu t) \cos(\omega t) \right) f(t) dt$$

Это оператор перехода пары $\{\cos(\omega x), \sin(\omega x)\}$ в частное решение неоднородного уравнения $f(x)$. Интеграл легко вычисляется при $f(x) = \cosh(\mu x)$.

В более развернутом варианте настоящий метод переносится на неоднородные дифференциальные уравнения типа Бесселя ([5,6]).

Литература

1. *И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР. Сер. матем., 15:4 (1951), 309–360
2. *К. Шадан, П. Сабатье* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния, М., Мир, 1980
3. *В. А. Садовничий, А. Ю. Попов* О полноте систем гипергеометрических функций Гаусса, Дифференц. уравнения, 1998, том 34, №5, 595–608
4. *М.Г. Крейн* О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции, ДАН СССР, 1953, т.ХСIII, №4
5. *S. Sitnik* “Editorial for the Special Issue “Analytical and Computational Methods in Differential Equations, Special Functions, Transmutations and Integral Transforms”, Mathematics (MDPI), 15:11 (2023), 3402, 7 pp.
6. *V.I. Makovetsky* Transmutations for self-adjoint differential operators, ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 8, pp. 3478–3486. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023.

КРИТЕРИИ ПРОСТОТЫ/СЛОЖНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ДЕНДРИТАХ

Е.Н. Махрова

elena_makhrova@inbox.ru

УДК 517.938

Пусть X – дендрит, $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. В докладе изучаются критерии положительности топологической энтропии отображения f в терминах существования подковы и гомоклинических точек.

Ключевые слова: дендрит, топологическая энтропия, подкова, гомоклиническая точка.

В настоящее время наблюдается интенсивное развитие теории динамических систем на одномерных разветвленных континуумах со сложной топологической структурой. Это связано с тем, что указанные континуумы появляются, например, как множества Жюлиа в комплексных динамических системах [1], как предельные множества динамических систем размерности, большей 1 [2], [3], как глобальный аттрактор косога произведения [4], [5], в задачах математической физики [6], [7] и др.

Под *континуумом* будем понимать компактное связное метрическое пространство. *Дендрит* — локально связный континуум, не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности. Подмножество в дендрите X , гомеоморфное отрезку на прямой, называется дугой в X . Точка $p \in X$ называется *точкой ветвления дендрита X* , если множество $X \setminus \{p\}$ состоит из более

двух связных множеств. Точка $p \in X$ называется *концевой точкой дендрита* X , если множество $X \setminus \{p\}$ связно. Напомним свойства дендритов.

Лемма 1. [8], [9] Пусть X – дендрит. Тогда

- (1) любые две точки $x, y \in X$, $x \neq y$, можно соединить единственной дугой, имеющей в качестве концов точки x и y ;
- (2) X имеет не более чем счетное множество точек ветвления;
- (3) для любой точки $p \in X$ число связных компонент множества $X \setminus \{p\}$ не более чем счетно;
- (4) всякий подконтинуум дендрита – дендрит.

Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X .

Определение 1. Будем говорить, что f имеет подкову (A, B) , если A, B – непересекающиеся подконтинуумы в X такие, что $f(A) \cap f(B) \supset A \cap B$.

Подкова (A, B) называется *дуговой*, если A, B – дуги, находящиеся на одной дуге.

Известно, если некоторая итерация отображения $f : X \rightarrow X$ любого компакта X имеет подкову, то топологическая энтропия такого отображения положительная (см., например, [10]).

Определение 2. Пусть $f : X \rightarrow X$ – непрерывное отображение дендрита X . Точка $x \in X$ называется *гомоклинической точкой отображения* f , если существует периодическая точка $p \in X$ периода $m \geq 1$ такая, что $x \in W^s(p, f^m) \cap W^u(p, f^m)$, где $W^s(p, f^m)$ – устойчивое многообразие точки p относительно отображения f^m , $W^u(p, f^m)$ – неустойчивое многообразие точки p относительно отображения f^m .

Для непрерывного отображения $f : I \rightarrow I$, заданного на отрезке I , положительность топологической энтропии отображения f эквивалентна существованию подковы у f^n при некотором $n \geq 1$ и существованию гомоклинических точек (см., например, [11]). Для непрерывного отображения на дендрите из положительности топологической энтропии не следует существование подковы и существование гомоклинических точек [12], а наличие гомоклинических точек у таких отображений не влечет существование подковы и положительность топологической энтропии [13], [10], [14].

В докладе выделен класс дендритов, на котором получены критерии положительности топологической энтропии непрерывных отображений в терминах существования подковы и гомоклинических точек.

Литература

1. H.-O. Peitgen, P.H. Richter, The beauty of fractals : Images of complex dynamical systems, Berlin : Springer, Cop. 1986. - XII, 199 p.
2. Agronsky, J. G. Ceder. What Sets Can be ω -limit Sets in E^n // Real Anal. Exchange. **17**, 97–109 (1991/1992).
3. F. Balibrea, Juan L. G. Guirao. Continua with empty interior as ω -limit sets // Appl. Gen. Topol. **6:2**, 195–205 (2005).
4. L. S. Efremova. Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor // European conference on iteration theory, ESAIM Proc., **36** (2012), EDP Sci., Les Ulis, 15–25 (2010).
5. L. S. Efremova. Ramified continua as global attractors of C^1 -smooth self-maps of a cylinder close to skew products // Journal of Difference Equations and Applications. **28**, 1–33 (2023).
6. V. Chernyshev, A. Tolchennikov, A. Shafarevich. Behavior of Quasi-particles on Hybrid Spaces. Relations to the Geometry of Geodesics and to the Problems of Analytic Number Theory // Regular and Chaotic Dynamics, **21:5**, 531–537 (2016).
7. В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов. Диффузия и квантовая динамика на графах // Доклады РАН, **451:2**, 141–144 (2013).
8. К. Куратовский, Топология, **1** // Мир, М., 1966, 594 с.; **2**, 1969, 624 с.; пер. с англ.: К. Kuratowski, Topology, **1**, Academic Press, New York–London; PWN, Warsaw, 1966, 560 p.; **2**, 1968, 608 p.
9. S. Nadler, Continuum Theory, Marcel Dekker, N.-Y. (1992).
10. L. S. Efremova and E. N. Makhrova. One-dimensional dynamical systems // Russian Mathematical Surveys, **76:5**, 821–881 (2021).
11. L. Block. Homoclinic points of mappings of the interval // Proceedings of the AMS. **72**, 576–580 (1978).
12. Z. Kočan, V. Kornecká-Kurková, M. Málek. Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, grapha and dendrites // Ergodic. Theory Dynam. Sys. **31**, 165–175 (2011).
13. L. S. Efremova, E. N. Makhrova. On homoclinic points of piecewise monotone mappings of dendrites //

Progress in Nonlinear Science, Int. Conf. dedicated to the 100-th anniversary of A.A. Andronov (Nizhny Novgorod, Russia July 2 - 6, 2001), University of Nizhni Novgorod, 1, 225–228 (2002).

14. *Е.Н. Махро́ва*. Гомоклинические точки и топологическая энтропия непрерывного отображения дендрита // Современная матем. и ее приложения. Труды междунар. конф. по динамическим системам и диф. уравнениям. Суздаль, 2006 **54**, 79–86 (2008); англ. пер.: E.N. Makhrova. *Homoclinic points and topological entropy of a continuous mappings of a dendrite* // Journal Math. Sci. N.-Y., **158**, 241–248 (2009).

ЗАДАЧА КОШИ С СУММИРУЕМЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Муравник, Г.Л. Россовский
amuravnik@mail.ru, grossovski@yandex.ru

УДК 517.955

Рассматривается задача Коши для дифференциально-разностного параболического уравнения с нелокальными младшими членами. Предполагается, что начальная функция принадлежит классу суммируемых функций. Показано, что свертка ядра параболического оператора с данной начальной функцией является решением задачи. Исследовано поведение полученного решения при $t \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: задача Коши, параболический оператор, дифференциально-разностные уравнения, оператор сдвига.

Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(x - h, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

со следующей начальной функцией

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) \in L_1(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Определим на полуплоскости $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ функцию

$$\mathcal{E}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\xi^2 - a \cos h\xi)} \cos(x\xi - at \sin h\xi) d\xi. \quad (3)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (1), и называется ядром Пуассона.

Введем теперь функцию

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Функция (4) удовлетворяет задаче Коши для уравнения (1) с начальным условием u_0 в смысле обобщенных функций и удовлетворяет уравнению (1) в полуплоскости $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ в классическом смысле.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115)

Муравник Андрей Борисович, д.ф.-м.н., директор, Математический институт им. С.М. Никольского, РУДН им. Патриса Лумумбы (Москва, Россия)

Россовский Григорий Леонидович, аспирант, Математический институт им. С.М. Никольского, РУДН им. Патриса Лумумбы; ассистент, РТУ МИРЭА, кафедра Высшей математики-3 (Москва, Россия)

Теорема 2. Пусть выполнено условие $|a|h^2 \leq 2$. Тогда решение (4) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно при $x \in (-\infty, +\infty)$, если $a < 0$, и стремится к нулю с весом $e^{-(a+\delta)t}$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно при $x \in (-\infty, +\infty)$, если $a > 0$. Скорость убывания к нулю оценивается следующими неравенствами:

$$|u(x, t)| \leq \frac{\text{const} \|u_0\|_1}{\sqrt{t}}$$

и

$$e^{-(a+\delta)t} |u(x, t)| \leq \text{const} \|u_0\|_1 e^{-\delta t} \quad \text{для любого } \delta > 0,$$

соответственно.

Литература

1. Skubachevskii A.L. *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser: Basel–Boston–Berlin, 1997.
2. Muravnik A.B. Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem. *J. Math. Sci. (N. Y.)* **2016**, 216, 345–496.

РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Н.Н. Нефедов

nefedov@phys.msu.ru

УДК 517.95

Рассматривается сингулярно возмущенная задача для тихоновской системы уравнений реакция-диффузия-адвекция. Построено асимптотическое приближение стационарного решения задачи, получены условия существования решения и его асимптотической устойчивости по Ляпунову.

Ключевые слова: реакция-диффузия, сингулярные возмущения.

Рассматривается сингулярно возмущенная задача вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_u(u, v) &:= \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \\ \mathcal{N}_v(u, v) &:= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in R^+, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) &= u^0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = u^1, \quad t \in R^+, \\ v(0, t, \varepsilon) &= v^0, \quad v(1, t, \varepsilon) = v^1, \quad t \in R^+, \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, u^0, u^1, v^0, v^1 — заданные постоянные, $u_{init}(x, \varepsilon), v_{init}(x, \varepsilon)$ — заданные функции. Интерес к таким системам обусловлен тем, что они широко используются при моделировании бимолекулярных реакций в случае, когда источники (реакция, нелинейный источник, взаимодействие) имеют различную интенсивность (см., например, [1] и ссылки в этой работе). Исследование систем такого типа, заложившее основы современной теории возмущений было начато для начальных задач для систем ОДУ в работах А.Н. Тихонова и Васильевой (см. [1] и [2]). Актуальным и важным для приложений является исследование решений с

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-11-00069).

Нефёдов Николай Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики (Москва, Россия)

пограничными и внутренними слоями (контрастными структурами) для уравнений реакция-диффузия и реакция-адвекция-диффузия, т.к. они выступают в качестве математических моделей во многих приложениях.

Значительная часть исследований различных классов сингулярно возмущенных задач, в том числе для задач для уравнений с частными производными, отражены в обзорах [3] и [4]. Настоящая работа продолжает исследования автора, его учеников и коллег вопросов существования и устойчивости стационарных решений с пограничными и внутренними переходными слоями. Основной акцент в этой работе сделан на получении эффективных условий существования решений с различными типами пограничных и внутренних слоев в системах уравнений реакция-диффузия с медленной и быстрой компонентами, которые принято называть системами тихоновского типа. Системы сингулярно возмущенных уравнений, в том числе системы тихоновского типа, являются менее исследованными. Результаты, полученные в данной работе, развивают результаты работы [4] на новый класс задач.

Литература

1. V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider “Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities”, *Journal of Mathematical Sciences*, **121**:1 (2004), 1973–2079.
2. А.Н. Тихонов А.Н. “Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных” // Матем. сб. 31(73):3 (1952), 575–586.
3. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, Высшая школа, М., 1990.
4. Н.Н. Неведов “Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, 61:22 (2021), 2074–2094.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУБОСТЬ И БИФУРКАЦИИ: СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ХАОС

Р.О. Оморов

romano_ip@list.ru

УДК 517.9

В работе рассматривается метод топологической грубости динамических систем, который использован для исследований грубости и бифуркаций синергетических систем и хаоса различной физической природы. Приложения метода апробированы для многих синергетических систем, таких как аттракторы Лоренца, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», бифуркации Хопфа, экономических систем Калдора и Шумпетера и др.

Ключевые слова: топологическая грубость динамических систем, бифуркация, синергетические системы, хаос, особые точки систем.

Введение.

Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1-3]. В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксоту или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову – Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε -близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 4]. В работе [5] на базе понятия грубости по Андронову – Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем и хаоса, а также

синтезировать грубые (робастные) системы управления [6-10]. В данной работе рассматриваются основы и приложения метода к некоторым синергетическим системам.

Основные положения метода топологической грубости.

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций систем были поставлены еще в начале становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А. Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову–Понтрягину [2], и сформулированы качественные критерии грубости.

В многомерной постановке рассматривается динамическая система n -го порядка

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \quad (1)$$

где $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых координат; \mathbf{F} — n -мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову–Понтрягину в некоторой области G , если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти \tilde{G} , области G :

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{z}}), \quad (2)$$

являются ε -тождественными в топологическом смысле [1, 2, 5, 7-10].

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типов: особых точек (положений равновесия); особых линий (сепаратрис); замкнутых (периодических) траекторий; притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [5] на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину предложены основы метода топологической грубости на базе меры грубости в виде числа обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$ — матрицы \mathbf{M} — нормированной матрицы приведения системы каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства.

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства, определяется следующей теоремой, доказанной в [5].

Теорема. *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (\mathbf{z}_0) была максимально грубой, а в окрестности негиперболической — минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:*

$$\mathbf{M}^* = \operatorname{argmin} C\{\mathbf{M}\},$$

где \mathbf{M} — матрица приведения матрицы линейной части \mathbf{A} системы (1), в особой точке (\mathbf{z}_0) к диагональному (квазидиагональному) базису; $C\{\mathbf{M}\}$ — число обусловленности матрицы \mathbf{M} .

Теорема сформулирована для общего случая системы (1), когда особая точка (\mathbf{z}_0), соответствующая уравнению $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0$, не вырождена или иначе матрица линейной части \mathbf{A} не вырождена. В случае вырожденной в особой точке динамической системы вычисление $C\{\mathbf{M}\}$ вызывает затруднения при диагонализации (квазидиагонализации) базиса матрицы \mathbf{A} в силу того, что матрицы обратной к матрице \mathbf{M} не существует. Но в этом случае предлагается воспользоваться процедурой псевдообращения матриц и вычислять $C\{\mathbf{M}\}$ по базовому соотношению для числа обусловленности:

$$C\{\mathbf{M}\} = \|\mathbf{M}\| \cdot \|\mathbf{M}^*\|, \quad (3)$$

где $\|\mathbf{M}\|$, $\|\mathbf{M}^*\|$ — соответственно какие-либо (обычно спектральные) нормы матриц \mathbf{M} и псевдообратной матрицы \mathbf{M}^* .

Возможности псевдообращения матриц позволяют сравнивать по грубости близкие по топологическим структурам системы, поскольку как установлено в работах [5, 7] множества грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества, для которых показатель грубости $C\{\mathbf{M}\}$ может принимать непрерывные значения от 1 до ∞ . В этом случае, предполагается сравнение систем по грубости, вводя показатели грубости высокого порядка, а именно 2-го, 3-го и т.д. и

–го порядка, пользуясь процедурой псевдообращения и формулой (3) для матриц приближения 2-го, 3-го и т.д. n -го порядка, в особых точках фазового пространства, которые соответствуют порядкам разложения в классический ряд Тейлора.

Синергетические системы и хаос.

В современной науке возрастает интерес к ее объединяющим направлениям, рассматривающим явления природы и общества, живой и неживой природы с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [10, 11].

При исследовании и управлении синергетическими системами и хаосом в этих системах важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами служит «метод топологической грубости», основы которого изложены в работах [5-10], а некоторые положения кратко приведены выше.

В работе возможности метода проиллюстрированы на двух примерах широко известных синергетических систем - Белоусова-Жаботинского и Чуа [12].

Заключение.

Метод топологической грубости, разработанный автором на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций систем апробированы в работах автора [8-10, 12] и др., на примерах синергетических систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, Лоренца, Рёсслера, «хищник-жертва», динамо Рикитаке, отображения Хенона, бифуркаций Хопфа, моделях экономических систем типа Шумпетера, Калдора и др. При этом результаты метода, полученные на вышеперечисленных системах согласуются с известными результатами других исследователей этих систем.

Литература

1. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т.14. №5. С. 247-250.
2. *Аносов Д.В.* Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР.Т.169). М.: Наука, 1985. С. 59-93.
3. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3-31.
4. *Peixoto M.M.* On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69.№1. P. 199-222.
5. *Оморев Р.О.* Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. №8. С. 36-45;
6. *Оморев Р.О., Ушаков А.В.* Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Изв.вузов. Электромеханика. 1991. №1. С. 78-85.
7. *Оморев Р.О.* Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Автореферат дисс. докт. техн. наук. Санкт-Петербург: СПб ИТМО, 1993. 38 с.
8. *Оморев Р.О.* Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019. 287 с.
9. *Omorov Roman.* Theory of Topological Roughness of Systems. Beau Bassin: LAP LAMBERT, 2019. — 213.
10. *Оморев Р.О.* Метод топологической грубости динамических систем: Приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. №2. С. 257-262.
11. *Хакен Г.* Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах // Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 423 с.
12. *Omorov R.O.* Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. V. 44. P. 61-70.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

А.Л. Павлов
a.pavlov49@mail.ru

УДК 517.955

Приведены достаточные условия существования решения задачи Коши для некоторого класса линейных уравнений соболевского типа в пространстве обобщенных функций медленного роста.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение соболевского типа, обобщенная функция медленного роста, преобразование Фурье.

Рассматривается задача Коши в полупространстве:

$$P_2(D_x)\partial_t^2 u + P_1(D_x)\partial_t u + P_0(D_x)u = 0; \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = g_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = g_1, \quad (2)$$

где $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$, $D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$, $P_k(\sigma)$, $k = 0, 1, 2$, — многочлены с комплексными коэффициентами. Под решением задачи (1), (2) будем понимать обобщенную функцию $u(t)$, зависящую гладко от параметра t и удовлетворяющую (1), (2) в обобщенном смысле. Рассматриваются решения задачи (1), (2) со значениями в пространстве S' — пространстве обобщенных функций медленного роста.

Начальные данные в (2) принадлежат подпространствам S' , зависящих от параметров s и l :

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1 + |\sigma|^2)^s \left| \mathcal{F}_x (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} f \right|^2 d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\},$$

где $\mathcal{F}_x \hat{g}$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$.

Уравнение (1) является классом уравнений соболевского типа. Имеется огромное количество работ, посвященных задачам для уравнений и систем уравнений соболевского типа [1-2]. Однако работ, в которых рассматривалось решение задачи Коши для уравнений соболевского типа в классах растущих функций сравнительно немного (см. [3-6] и литературу в них).

Будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условию Петровского в таком виде:

$$P_2(\sigma)\lambda^2(\sigma) + P_1(\sigma)\lambda(\sigma) + P_0(\sigma) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda(\sigma) \leq \gamma. \quad (3)$$

После применения преобразования Фурье по пространственным переменным задача (1), (2) принимает вид

$$P_2(\sigma)\partial_t^2 \hat{u}(t) + P_1(\sigma)\partial_t \hat{u}(t) + P_0(\sigma)\hat{u}(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\hat{u}(t)|_{t=0} = \hat{g}_0, \quad \frac{d\hat{u}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \hat{g}_1. \quad (5)$$

В силу изоморфности рассматриваемых пространств относительно преобразования Фурье задачи (1), (2) и (4), (5) эквивалентны.

Если выполнено условие (3) и \hat{g}_0, \hat{g}_1 — обычные функции, то решением задачи (4), (5) при каждом $\sigma \notin N_2 = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : P_2(\sigma) = 0\}$ является функция

$$v(\sigma, t) = \eta(t)(q_1(\sigma, t)\hat{g}_0 + q_2(\sigma, t)\hat{g}_1), \quad (6)$$

где $\eta(t) = 1$, если $t \geq 0$ и $\eta(t) = 0$, если $t < 0$, $q_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, решения уравнения (4) удовлетворяющие начальным условиям:

$$q_1(\sigma, 0) = 1, \quad \frac{dq_1}{dt}(\sigma, 0) = 0, \quad q_2(\sigma, 0) = 0, \quad \frac{dq_2}{dt}(\sigma, 0) = 1. \quad (7)$$

Решение задачи (4), (5) может быть основано на описании подпространств пространства обобщенных функций медленного роста, в которых функции $q_1(\sigma, t)$ и $q_2(\sigma, t)$ являются мультипликаторами, гладко зависящими от параметра t . В работе [6] этот подход реализован для уравнения (1) при условии $P_1(\sigma) = 0$. Приведенное там построение задачи Коши основано на исследовании дифференциальных свойств функций $q_j(\sigma, t)$.

Функции $q_j(\sigma, t)$ бесконечно дифференцируемы вне множества $N = N_2 \cup N_1$, где $N_1 = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : \Delta(\sigma) = 0\}$, $\Delta(\sigma) = P_1^2(\sigma) - 4P_0(\sigma)P_2(\sigma)$, и их производные имеют степенные особенности в точках $\sigma \in N$ при выполнении условия (3). Эти особенности можно «погасить», умножив функции на функцию, имеющую нули на множестве N достаточной кратности, например, на $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)$. При соответствующем выборе p и q можно обеспечить дифференциальные свойства функции $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)q_j(\sigma, t)$, необходимые для того, чтобы на них можно было умножать обобщенные функции заданного порядка регулярности. Это позволит строить решения задачи (4), (5) по формуле (6) для начальных данных, которые в окрестности множества N имеют указанную структуру. Преобразование Фурье по пространственным переменным дает решение задачи Коши (1), (2) для начальных данных вида $\Delta^p(D_x)P_2^q(D_x)f$.

Теорема 1. Если выполнено условие (3), то для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $r \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$ справедливы неравенства

$$|\partial_t^r \partial^\alpha q_j(\sigma, t)| \leq C_{\alpha r} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{\mu(\alpha, r)} |\Delta(\sigma)|^{d(\alpha, r)} |P_2(\sigma)|^{b(\alpha, r)},$$

где $C_{\alpha r} > 0$ – некоторые числа, $d(\alpha, r) = -|\alpha| - \frac{1}{2}$, $b(\alpha, r) = -2|\alpha| - r - 1$, $\mu(\alpha, r) = |\alpha|(4m + 3m_2 - 1) + mr + 3m$, $m_i = \deg P_i(\sigma)$, $m = \max_i m_i$.

Рассмотрим семейство функций $\theta_\varepsilon(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 < \varepsilon < 1$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\text{supp } \theta_\varepsilon(\sigma) \subset N^\varepsilon = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : d(\sigma, N) \leq \varepsilon, \text{ где } d(\sigma, N) = \inf |\sigma - \eta|, \eta \in N\}$;
- 2) $\theta_\varepsilon(\sigma) = 1, \sigma \in N^{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Построение функции $\theta_\varepsilon(\sigma)$ стандартное. Через $C_{\gamma p}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых отображений $v(t)$ полуоси $\bar{\mathbb{R}}_+$ в H_s^l с конечной нормой

$$\|v(t)\|_{C_{\gamma p}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} = \sup_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+, 0 \leq \nu \leq r} \left[(1+t)^{-p} e^{-\gamma t} \left\| \frac{d^\nu v(t)}{dt} \right\|^l \right].$$

Теорема 2. Если выполнено условие (3), $\hat{g}_j \in H_s^l, j = 0, 1, l, s \in \mathbb{R}$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\theta_{2\varepsilon}(\sigma)\hat{g}_j = \Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)\hat{f}_j, \hat{f}_j \in H_s^{\tilde{l}}, p > 2\nu(\tilde{l}) + 1, q > 3\nu(\tilde{l}) + 2r + 1,$$

то семейства обобщенных функций $q_j(\sigma, t)\hat{g}_{j-1}, j = 1, 2$, принадлежат пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'})$, где $l' = \min\{l, \tilde{l}\}, s' = \min\{s_1, s_2\}$, функция $v(t) = q_1(\sigma, t)\hat{g}_0 + q_2(\sigma, t)\hat{g}_1$ является решением задачи Коши (1.5), (1.6) и справедливо неравенство

$$\|v(t)\|_{C_{\gamma\nu(l)}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{l'})} \leq c_3(\varepsilon) \sum_{j=0}^1 \left(\|(1 - \theta_\varepsilon(\sigma)g_j)\|_{s'}^l + \|f_j\|_{\tilde{s}}^{\tilde{l}} \right),$$

где $c_3(\varepsilon) > 0$ – некоторое число, зависящее от ε .

Теорема 3. Если выполнено условие (3) и

$$g_i = \Delta^p(D_x)P_2^q(D_x)f_i, f_i \in H_s^{\tilde{l}}, p > 2\nu(\tilde{l}) + 1, q > 3\nu(\tilde{l}) + 2r + 1,$$

то существует решение задачи (1), (2), принадлежащее пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\bar{\mathbb{R}}_+, H_{s'}^{\tilde{l}})$, где $s' = s - \mu(p, q, \tilde{l}, r)$.

Литература

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. — Новосибирск: Науч. кн., 1998. — 564 с.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.А.. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007. — 512 с.
3. Павлов А.Л. Задача Коши для уравнения типа Соболева-Гальперна в пространствах функций степенного роста // Мат. сб. — 1993. — Т. 184, №11. — С. 3–20
4. Павлов А.Л. Задача Коши для одного уравнения соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Мат. труды. — 2018. — Т. 21, №1. — С. 125–154.
5. Павлов А.Л. Существование решения задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журнал. — 2019. — Т. 60, №4. — С. 824–844
6. Павлов А.Л. Разрешимость задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журнал. — 2022. — Т. 63, №5. — С. 1119–1136.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФFUЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

С.С. Постнов

postnov.sergey@inbox.ru

УДК 517.977, 519.7

Рассматриваются задачи оптимального управления системами порядка, которые описываются диффузионно-волновым уравнением – уравнением типа уравнения колебаний или диффузии, в котором производная по времени имеет дробный порядок $\alpha \in (0, 2)$. Для таких систем рассматриваются задачи оптимального граничного и распределённого (подвижного) управления, которые сводятся к обобщённой l -проблеме моментов. Получены условия, при которых получаемая проблема моментов может быть корректно поставлена и является разрешимой, рассмотрены приближённые решения данной проблемы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения дробного порядка, оптимальное управление, проблема моментов.

Рассматриваются системы, состояние которых описывается диффузионно-волновым уравнением:

$$r(x) {}_0^C D_t^\alpha Q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[w(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right] - q(x) Q(x, t) + u(x, t), \alpha \in (0, 2), \quad (1)$$

где $Q(x, t)$ – состояние системы, $u(x, t)$ – распределённое управление, ${}_0^C D_t^\alpha$ – левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени, $t \geq 0$, $x \in [0, L]$, $(x, t) \in \Omega = [0, L] \times [0, \infty)$. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения Капуто. Функции $r(x)$, $w(x) > 0$, $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0, L]$.

Начальные условия для уравнения (1) поставим в виде:

$$\frac{\partial^k Q(x, 0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0, L], k = 0, \dots, [\alpha]. \quad (2)$$

Граничные условия для уравнения (1) ставятся в виде:

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + a_i Q(x, t) \right]_{x=x^i} = u^i(t), \quad t \geq 0, i = 1, 2, \quad (3)$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$; $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_p[0, T]$, $p > 1$ и могут быть объединены в вектор $U(t) = (u^1(t), u^2(t))$. Распределённое управление рассматривается в виде т.н. подвижного управления [1]:

$$u(x, t) = p(t)\psi(x - x_0(t)),$$

где $p(t) \in L_p[0, T]$ определяет интенсивность управляющего воздействия, $x_0(t) \in L_p[0, T]$ — положение источника этого воздействия, а функция $\psi(x)$ определяет пространственную форму воздействия (пространственное распределение интенсивности воздействия).

Считается, что управление обеспечивает достижение системой заданного (желаемого) состояния $Q^*(x)$ в заданный момент времени $T > 0$:

$$Q(x, T) = Q^*(x), \quad T > 0, \quad x \in [0, L]. \quad (4)$$

Рассматриваются две задачи оптимального управления [2]: найти управления $u(x, t)$, $u_{1,2}(t)$ такие, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3) достигнет при $t = T$ состояния (4) и при этом либо норма управлений будет минимальной при заданном времени T , либо время перехода в заданное состояние будет минимальным при заданном ограничении на норму управлений $\|U(t)\| \leq l$ ($l > 0$ — заданное число).

Поставленные выше задачи оптимального управления могут быть сведены к некоторой обобщённой проблеме моментов [3,4].

В случае, когда рассматривается граничное управление и приближённое решение исходного уравнения (1) соответствующая проблема моментов является конечномерной и, при определённых условиях, имеет точное решение. На основе этого решения строится решение задач оптимального управления. Рассмотрены примеры, когда решение задачи быстрогодействия может не существовать, в то время как решение соответствующей проблемы моментов существует [5]. Эти примеры демонстрируют качественное отличие решений задачи быстрогодействия для уравнений дробного порядка от её решений для аналогичных уравнений целого порядка (диффузии и колебаний).

В случае подвижного управления получаемая проблема моментов является нелинейной. Для неё исследованы вопросы разрешимости и примеры решений.

Литература

1. *Кубышкин В.А., Финягина В.И.* Подвижное управление в системах с распределёнными параметрами, М.: Синтез, 2005.
2. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами, М.: Наука, 1965.
3. *Kubyshkin V.A., Postnov S.S.* “The Optimal Control Problem for Linear Systems of Non-integer Order with Lumped and Distributed Parameters”, *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, 4, № 4, 429–443 (2015).
4. *Кубышкин В.А., Постнов С.С.* “Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка”, *Автоматика и телемеханика*, 5, 137–152 (2018).
5. *Постнов С.С.* “О поиске оптимального по быстродействию граничного управления с помощью метода моментов для систем, описываемых диффузионно-волновым уравнением”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 225, 108–114 (2023).

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП

Н.А. Раутиан

nadezhda.rautian@math.msu.ru

УДК 517.968.72

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина – Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, полугруппы.

Работа посвящена применению теории полугрупп к изучению абстрактных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Упомянутые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости, теории распространения тепла в средах с памятью и имеющие ряд других важных приложений. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости.

Получены результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Приведена формулировка соответствующей задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве.

Установлены результаты о корректной разрешимости и экспоненциальной устойчивости этой задачи, а также о корректной разрешимости начальной задачи для исходного абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения. Устанавливается связь между классическими решениями этих задач.

Проведен спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений, а также спектральный анализ генераторов полугрупп, порождаемых этими уравнениями. На основе спектрального анализа получены представления решений рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений.

Литература

1. Раутиан Н. А. Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений методами теории полугрупп // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 513. — С. 88–92.
2. Раутиан Н. А. Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Уфимский математический журнал. — 2021. — Т. 13, №4. — С. 65–81.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.М. Рахимов

boboali.sharipov@mail.ru

УДК 917.156

В сообщении рассматривается одно дифференциальное уравнение второго порядка с сингулярными коэффициентами. Данное уравнение преобразуется к системе дифференциальных уравнений в полных дифференциалах. В случае тождественного выполнения условия совместности системы, многообразие решений системы уравнений, а также исходного уравнения определяется через одну произвольную постоянную и одну произвольную функцию от n независимых переменных.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка, системы уравнений в полных дифференциалах, многообразия решений, сингулярные линии.

В работах [1], а также [2] были исследованы линейные, нелинейные системы дифференциальных уравнений гиперболического типа, а также системы уравнений в полных дифференциалах и функционально-дифференциальные уравнения второго порядка с различными степенями. В классе непрерывно-дифференцируемых функций эти уравнения преобразовывались в системы линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с регулярными и сингулярными коэффициентами. Затем, применяя к этим системам известные результаты [2-3], находятся некоторые частные решения задачи, либо, учитывая тождественное выполнение условий совместности последних систем, находятся многообразия решений систем, а также изучаемых функционально-дифференциальных уравнений.

В предлагаемом сообщении рассматривается одно дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{a(x)}{x_m^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{b_i(x)}{x_i^\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_m} + \frac{d_i(x)}{x_m^\alpha x_i^\gamma} u \right]^n = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + \frac{m(x)}{x_m^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_m} + \frac{h(x)}{x_m^{2\alpha}} u \right]^n, \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad a, b_i, d_i, m, h \in C^1(\bar{\Pi}_m), \quad (1)$$

$$u(x) \in C^2(\bar{\Pi}_m^{(0)}), \quad m(x) = a(x) + p(x), \quad d_i(x) = \frac{\partial a}{\partial x_i} \cdot x_i^\alpha (x - x_0)^\alpha + a(x) \cdot b(x),$$

$$h(x) = x_m^\alpha \frac{\partial a}{\partial x_m} - \alpha x_m^{\alpha-1} \cdot a(x) + a(x)p(x),$$

$$\bar{\Pi}_m^{(0)} = \{x \mid 0 < x'_o < x < x_0\}, \quad m, n > 2, \quad x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}).$$

Учитывая взаимосвязь коэффициентов уравнения (1), перепишем его в виде

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{b_i(x)}{x_i^\alpha} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} + \frac{a(x)}{x_m^\alpha} u \right) \right]^n = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} + \frac{p(x)}{x_i^\alpha} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_{m+1}} + \frac{a(x)}{x_m^\alpha} u \right) \right]^n. \quad (2)$$

В уравнении (2), производя замену $\frac{\partial u}{\partial x_m} + \frac{a}{x_m^\alpha} u = V, V = V(x) \in C^1(\bar{\Pi}_m)$, перепишем данное уравнение в новом операторном виде

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{b_i(x)}{x_i^\alpha} V \right)^n = \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}} + \frac{p(x)}{x_i^\alpha} V \right)^n \quad (3)$$

Наряду с уравнениями (1) и (3) рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{b_i(x)}{x_i^\alpha} V = C_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}} + \frac{p(x)}{x_i^\alpha} V = C_{m+1}. \end{cases} \quad (4)$$

При этом, система дифференциальных уравнений (4) преобразуется в равносильное операторное уравнение

$$\sum_{i=1}^n (C_i)^n = (C_{m+1})^n. \quad (5)$$

Пусть в системе дифференциальных уравнений (4) и операторных уравнениях (5), ее операторы представляются как линейные функционалы вида

$$C_i = \frac{f_i(x)}{x_i^\alpha}, \quad C_i = \frac{f_i(x)V + q_j(x)}{x_i^\alpha}, \quad C_i = \frac{f_i(x)V + q_j(x)V^k}{x_i^\alpha}, \dots$$

Тогда система дифференциальных уравнений (4) приводится к системе

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{r_j(x)}{x_j^\alpha} V = \frac{q_j(x)}{x_j^\alpha} \cdot V^k, \quad r_j(x) = b_j(x) - f_j(x), \quad j = \overline{1, m+1}. \quad (6)$$

Тем самым, получаем систему уравнений вида Бернулли. Умножая обе части уравнений системы (6) на V^{-k} , а затем, заменяя $V^{1-k} = U$, получаем систему линейных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} + (1-k) \frac{r_j(x)}{x_j^\alpha} \cdot U = (1-k) \frac{q_j(x)}{x_j^\alpha}, \quad j = \overline{1, m+1}. \quad (7)$$

Условия совместности системы уравнений (7) записываются в следующем виде:

$$P_j(x)U + Q_j(x) = 0, \quad (8)$$

$$P_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{r_j}{x_j^\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{r_k}{x_k^\alpha} \right); \quad Q_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_j}{x_j^\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_k}{x_k^\alpha} + (1-k) \frac{r_j q_k - r_k q_j}{x_j^{2\alpha}} \right).$$

Если в соотношении (8) функции $P_j(x) \neq 0$, $Q_j(x) \neq 0$, то из этих уравнений можно определить C_{m+1}^2 функций $U(x) = M_j(x)$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (8), то она будет некоторым частным, либо особым ее решением. В противном случае, система уравнений (7) несовместна. Если же некоторые из функций $P_j(x)$, $Q_j(x)$ обращаются в нуль, а другие нет, то также система уравнений (7) не совместна. Пусть теперь эти функции тождественно равны нулю, т. е. условия совместности (8) выполняются тождественно. Допуская,

что функции $\frac{r_j}{x_j^\alpha}$ образуют полный дифференциал некоторой функции $\omega_1(x)$, $\frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x_j} = \frac{r_j}{x_j^\alpha}$,

умножая обе части уравнений системы (7) на $e^{\omega_1(x)}$, преобразуем данную систему к виду $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(e^{(1-k)\omega_1(x)} U \right) = (1-k) e^{(1-k)\omega_1(x)} \frac{q_j(x)}{x_j^\alpha}$.

В силу предыдущих рассуждений, система уравнений (7) и последняя системы инвариантны, поэтому и для последней системы уравнений условия совместности выполняются тождественно, поэтому интегрируя ее, получим:

$$U(x) = e^{(1-k)\omega_1(x)} \left[C_1 + (1-k) \left(\sum_{k=1}^{m+1} \int_x^1 e^{(1-k)\omega_1(x)} \frac{q_j(x)}{x_j^\alpha} \right) \right]^{1/(k-1)}.$$

Переходя к прежним переменным, получаем многообразие решений системы уравнений (6) в виде

$$V(x) = e^{\omega_1(x)} \left[C_1 + (1-k) \left(\sum_{k=1}^{m+1} \int_x^1 e^{(1-k)\omega_1(x)} \frac{q_j(x)}{x_j^\alpha} \right) \right]^{1/(k-1)}. \quad (9)$$

Затем, подставляя значения $V(x)$ из соотношении (9) в линейное уравнение $\frac{\partial u}{\partial x_m} + \frac{a(x)}{x_m^\alpha} u = V$ получим многообразие решений данной п.д.-системы, а также исходного уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$, как решение последнего линейного уравнения.

Литература

1. Юнуси М.К. Математические модели управления агроценозами и охраняемыми биологическими популяциями. // Докторская диссертация. Москва, ВЦ АН СССР, 1990. — 313 с.
2. Раджабов Н., Мирзоев А.Х. Интегральные представления решений для одной системы уравнений первого порядка гиперболического типа с сингулярной точкой. // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложение (сб. науч. трудов). — Душанбе, 1991 с. 75- 80.
3. Шарипов Б., Джумаев Э.Х., Назарова З.С. Формула представление решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами // Вестник таджикского национального университета. Серия естественных наук 2017. №1/5, с. 41-45.

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

И.О. Резниченко, П.А. Крутицкий, В.В. Колыбасова

liorb@mail.ru, biem@mail.ru, kolybasova@physics.msu.ru

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца возникают в различных областях математической физики, например, в теории рассеяния акустических и электромагнитных волн на препятствиях, в геофизической гидродинамике, в теории гравитации, в стационарной термодинамике и электродинамике, при изучении обтекания препятствий потоком идеальной жидкости и т.д. Теория потенциалов позволяет решать краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца путем сведения их к граничным интегральным уравнениям. В частности, используя потенциал простого слоя, трехмерную задачу Неймана можно свести к двумерному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, интегральный член в котором включает прямое значение нормальной производной этого потенциала на границе области, где решается краевая задача. При численном решении такого интегрального уравнения надо иметь квадратурные формулы, вычисляющие прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя с высокой точностью.

В инженерных расчетах обычно используются стандартные квадратурные формулы из [1], [2], основанные на численном интегрировании. В [3], [4] получены новые квадратурные формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя, основанные на приближенном аналитическом вычислении интегралов. В докладе на тестовых примерах для уравнения Лапласа сравнивается точность вычислений по этим формулам. Установлено, что все формулы дают сходимость первого порядка. Однако максимальная абсолютная погрешность вычислений по формуле из [3] в 5 раз меньше, чем по стандартной формуле из [1], [2], а максимальная погрешность вычислений по формуле из [4] в 1.5 раза меньше, чем по формуле из [3]. Таким образом, формула из [4] показывает наилучшую точность.

В докладе обсуждается предложенный в [3], [4] и основанный на аналитическом вычислении интегралов метод получения улучшенных квадратурных формул на примере квадратурной формулы для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала простого слоя в случае уравнения Лапласа.

Литература

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Врубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.

Резниченко Игорь Олегович, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет (Москва, Россия)

Крутицкий Павел Александрович, к.ф.-м.н., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Колыбасова Валентина Викторовна, к.ф.-м.н., с.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет (Москва, Россия)

3. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя. // Дифференциальные уравнения, 2020, т. 56, № 9, с. 1270 — 1288.

4. Krutitskii P.A., Reznichenko I.O. Improved Quadrature Formulas for the Direct Value of the Normal Derivative of a Single-Layer Potential. // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2024, Vol.64, №2, pp.188—205.

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.Г. Романов

romanov@math.nsc.ru

УДК 517.968

Рассматривается гиперболическое уравнение с переменной главной частью и нелинейностью в младшем члене. Предполагается, что коэффициенты уравнения являются гладкими функциями точки трёхмерного пространства и постоянны вне некоторой компактной области. Изучается задача об отыскании коэффициента при нелинейности по информации о решениях задачи Коши для исходного уравнения. Найдена оценка устойчивости решения этой задачи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, обратная задача, оценка устойчивости.

Пусть $B(R)$ — открытый шар в пространстве \mathbb{R}^3 радиуса R с центром в начале координат и границей $S(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$, $a_{ij}(x)$ — гладкие функции переменной x такие, что матрица $A(x) = (a_{ij}(x), i, j = 1, \dots, n)$ является равномерно положительно определенной, т.е. для неё выполнены неравенства

$$\mu_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu_1 |\xi|^2,$$

для любых $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и некоторых положительных μ_0, μ_1 . Пусть, кроме того, $a_{ij}(x) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, вне $B(R)$. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Предположим также, что $q(x)$ — гладкая функция и её носитель содержится в $B(R)$. Под гладкостью функций понимается их бесконечная дифференцируемость в \mathbb{R}^3 .

Пусть функция $u = u(x, t, \ell)$, $x \in \mathbb{R}^3, \ell \in \mathbb{S}^2$, является решением задачи Коши

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = q(x) u^m, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u|_{t < 0} = H(t - x \cdot \ell - R), \quad (1)$$

в которой $m > 1$, $H(t)$ — функция Хевисайда.

Границу шара $B(R)$ обозначим $S(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$. Дополнительно введём обозначения $\bar{B}(R) = B(R) \cup S(R)$,

$$\mathbb{R}_-^3(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \ell + R < 0\}, \quad \mathbb{R}_+^3(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \ell + R > 0\},$$

$$S^+(R, \ell) = \{x \in S(R) \mid x \cdot \ell > 0\}.$$

Пусть $\Sigma(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \ell = -R\}$ — плоскость, касающаяся $S(R)$ в точке $x = -R\ell$, и являющаяся общей границей полупространств $\mathbb{R}_-^3(\ell)$ и $\mathbb{R}_+^3(\ell)$.

Рассмотрим риманову метрику

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 a^{ij}(x) dx_i dx_j,$$

в которой функции $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, 3$, образуют положительно определённую матрицу $A^{-1}(x)$, обратную матрице $A(x)$. Относительно метрики сделаем два предположения.

Предположение 1. Риманова метрика является простой в шаре $B(R + \epsilon)$, где ϵ — некоторое положительное число.

Это предположение означает, что любые две точки x и y в области $B(R + \epsilon)$ могут быть соединены единственной геодезической $\Gamma(x, y)$ римановой метрики. Обозначим через $\hat{\Gamma}(x, \ell) \equiv \Gamma(x, x^0)$ геодезическую линию, которая соединяет точку $x \in \mathbb{R}^3$ с некоторой точкой x^0 плоскости $\Sigma(\ell)$ так, что $\Gamma(x, x^0)$ ортогональна плоскости $\Sigma(\ell)$ в точке x^0 .

Предположение 2. Геодезические линии $\hat{\Gamma}(x, \ell)$, вытупенные из точек плоскости $\Sigma(\ell)$, не пересекаются между собой в шаре $B(R + \epsilon)$.

Введём в рассмотрение функцию $\hat{\tau}(x, \ell)$. Определим её в области $\mathbb{R}_-^3(\ell)$ формулой $\hat{\tau}(x, \ell) = x \cdot \ell + R$, а в области $\mathbb{R}_+^3(\ell)$ положим её равной римановой длине геодезической $\hat{\Gamma}(x, \ell)$. Заметим, что функция $\hat{\tau}(x, \ell)$ является гладким решением задачи Коши для уравнения эйконала

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \hat{\tau}_{x_i}(x, \ell) \hat{\tau}_{x_j}(x, \ell) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3; \quad \hat{\tau}|_{\Sigma(\ell)} = 0.$$

Обратная задача. Пусть функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, 3$, известны всюду в \mathbb{R}^3 , а функция $q(x)$ неизвестна внутри $B(R)$, требуется её найти по следу на $S^+(R, \ell)$ решения задачи (1), заданному при всех $\ell \in \mathbb{S}^2$ для значений t лежащих в некоторой ϱ окрестности фронта $t = \hat{\tau}(x, \ell)$, т.е. $q(x)$ требуется найти по функции

$$g(x, t, \ell) = u|_{x \in S^+(R, \ell)}, \quad \ell \in \mathbb{S}^2, \quad \hat{\tau}(x, \ell) - \varrho \leq t \leq \hat{\tau}(x, \ell) + \varrho, \quad (2)$$

где ϱ — некоторое положительное число.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда существует решение задачи (1), представимое в окрестности фронта $t = \hat{\tau}(x, \ell)$ в виде

$$u(x, t, \ell) = \beta(x, \ell)H(t - \hat{\tau}(x, \ell)) + \gamma(x, \ell)H_1(t - \hat{\tau}(x, \ell)) + \hat{u}(x, t, \ell), \quad (3)$$

в котором $H_1(t) = tH(t)$, $\beta(x, \ell)$ и $\gamma(x, \ell)$ — гладкие функции переменной x , а $\hat{u}(x, t, \ell) \equiv 0$ для $t < \hat{\tau}(x, \ell)$ и имеет порядок $O(\eta^2)$ при $t - \hat{\tau}(x, \ell) = \eta \rightarrow +0$.

В представлении (3) функции β и γ вычисляются по формулам

$$\beta(x, \ell) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\hat{\Gamma}(x, \ell)} a_{ij}(\xi) \hat{\tau}_{\xi_i \xi_j}(\xi, \ell) ds \right),$$

$$\gamma(x, \ell) = \frac{\beta(x, \ell)}{2} \int_{\hat{\Gamma}(x, \ell)} \frac{1}{\beta(\xi, \ell)} \left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(\xi) \beta_{\xi_i \xi_j}(\xi, \ell) + q(\xi) \beta^m(\xi, \ell) \right) ds. \quad (4)$$

В этих формулах ds — элемент римановой длины.

Сопоставляя данные (2) обратной задачи с формулой (3), заключаем, что имеет место равенство

$$g_t(x, t, \ell)|_{t=\hat{\tau}(x, \ell)+0} = \gamma(x, \ell), \quad x \in S^+(R, \ell), \quad \ell \in \mathbb{S}^2. \quad (5)$$

Таким образом, обратная задача сводится к отысканию искомого коэффициента $q(x)$ по заданной функции $\gamma(x, \ell)$. Воспользуемся для решения последней задачи формулой (4) для вычисления

$\gamma(x, \ell)$. Так как функция $\beta(x, \ell)$ входящая в неё известна, то из равенства (4) можно найти интегралы

$$\int_{\widehat{\Gamma}(x, \ell)} \rho(\xi, \ell) q(\xi) ds = \widehat{w}(x, \ell), \quad x \in S^+(R, \ell), \quad \ell \in \mathbb{S}^2, \quad (6)$$

в которых $\rho(x, \ell) = \beta^{m-1}(x, \ell)$, а $\widehat{w}(x, \ell)$ — известная функция для всех $x \in S^+(R, \ell), \ell \in \mathbb{S}^2$.

Задача об отыскании функции $q(x)$ из уравнения (6) называется задачей интегральной геометрии. Впервые подобная задача, но с другой параметризацией геодезических и весовой функции $\rho(x, \ell)$, была исследована в связи с изучением обратной кинематической задачи сейсмологии. Задача (6) является новой. Из выполненного исследования этой задачи выведена оценка устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 2. Пусть $\ell = (\sin \vartheta \cos \psi, \sin \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta)$, выполнены предположения 1 и 2, $\text{supp } q \subset B(R)$, $q \in C^2(B(R))$, $a_{ij} \in C^3(\overline{B}(R))$ для $i, j = 1, 2, 3$, $\rho \in C^2(\overline{B}(R) \times \mathbb{S}^2)$, и, кроме того, имеют место неравенства

$$\sum_{i,j=1}^3 |a_{ij}(x)| \leq M, \quad \|a_{ij}(x) - \delta_{ij}\|_{C^3(\overline{B}(R))} \leq \varepsilon, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

с некоторыми положительными постоянными M и ε . Тогда найдутся положительные числа $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M)$ и $C = C(M, \mu_1)$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива следующая оценка устойчивости для решения обратной задачи

$$\int_{B(R)} q^2(x) dx \leq C \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S^+(R, \ell)} \left[|(\nabla \widehat{w} \times n(x))|^2 + |\nabla_{\vartheta, \psi} \widehat{w}|^2 |\nabla_{\vartheta, \psi} \widehat{\tau}|^2 \right] dS \sin \vartheta d\psi d\vartheta,$$

в которой $n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $S^+(R, \ell)$ в точке x , dS — элемент площади поверхности $S^+(R, \ell)$,

$$|\nabla_{\vartheta, \psi} w|^2 = w_\vartheta^2 + w_\psi^2 / \sin^2 \vartheta.$$

Литература

1. Романов В.Г. Оценка устойчивости решения в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Сиб. матем. журн., 2024 (в печати).

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ, МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ

К.Б. Сабитов

sabitov_fmfm@mail.ru

УДК 517.95

В работе для уравнения смешанного типа в прямоугольной области исследована на корректность постановки первой граничной задачи. Установлен критерий единственности. Найдены оценки возникающих малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Решение задачи Дирихле построено в виде суммы ортогонального ряда. Доказаны теоремы существования и устойчивости решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, критерий единственности, ряд, малые знаменатели, существование, устойчивость.

Рассмотрим уравнение смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе

$$\mathcal{L}u \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn}y)u_{yy} = F(x, y) \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, l – заданные положительные числа, и поставим следующую краевую задачу.

Задача Дирихле. *Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$\mathcal{L}u(x, y) \equiv F(x, y), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \tag{5}$$

где $F(x, y)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возникло после работы Франкля Ф.И. [1]. Здесь впервые было показано, что задачи перехода через звуковой барьер установившихся безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, сводится к этой задаче.

Б.В.Шабат [2] впервые исследовал задачу Дирихле для уравнения Лаврентьева

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn}y)u_{yy} = 0 \tag{6}$$

в смешанной области Ω , ограниченной при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно гладкими кривыми Γ и γ с концами в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$, где кривая γ лежит внутри треугольника со сторонами $x + y = 0$, $x - y = 1$ и $y = 0$, в классе функций

$$C(\overline{\Omega}) \cup C^1(\Omega) \cup C^2(\Omega \setminus \{y = 0\}). \tag{7}$$

Если кривая $\gamma : y = -l(x)$, где $l(x) \in C^2[0, 1]$, удовлетворяет условиям: $l(x) > 0$ для $0 < x < 1$, $l(0) = l(1) = 0$, $|l'(x)| \leq q < 1$, то он в этой работе утверждает, что задача Дирихле для уравнения (6) в классе функций (7) имеет единственное решение.

А.Б. Бицадзе [3] впервые показал, что задача Дирихле для уравнения (6) в области Ω в классе функций (7) поставлена некорректно независимо от величины и формы гиперболической части области Ω , т.е. она переопределена в силу корректности общей смешанной задачи с отходом от характеристик.

Наиболее важные результаты получены А.П. Солдатовым [4, 5] при изучении задачи Дирихле для уравнения (6) в области Ω . Он показал корректность этой задачи в классе функций $C(\overline{\Omega} \setminus A)$ или $C(\overline{\Omega} \setminus B)$, т.е. допускающих особенности степенного порядка в точке A или B при некоторых ограничениях на кривые Γ и γ .

После этих работ возникла необходимость поиска областей, для которых задача Дирихле поставлена корректно в классе функций (7). В качестве такой области был выбран прямоугольник. Первые исследования задачи (2)–5) для уравнения (6) в прямоугольной области D при $l = 1$ были проведены Н.Н. Вахания [6] и Ж.К. Cannon [7], где найдены условия

$$\operatorname{th}(\pi n \beta) \operatorname{ctg}(\pi n \alpha) \neq -1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

единственности решения этой задачи. В работе [7] методом разделения переменных построено решение задачи в областях D_+ и D_- в виде суммы ряда Фурье. При условии, когда $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^4[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$ и число α может принимать значения: $\alpha = p, \frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \dots$, где $p = 1, 2, 3, \dots$, и $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$, $np = mq + r$, $n \in \mathbb{N}$,

$m, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < q$, $\min_{0 \leq p < q} \left| \frac{r}{q} - \frac{3}{4} \right| \geq \delta_q > 0$, $n > N_q = \operatorname{const} > 0$, доказана теорема существования.

В работе Хачева М.М. [8] для обобщенного уравнения Лаврентьева – Бицадзе

$$\operatorname{sgny}[a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u] + u_{yy} = 0$$

в области D при $l = 1$, где коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x) \in C[0, 1]$, $a(x) \geq a_0 = \operatorname{const} > 0$, $c(x) \leq c_0 = \operatorname{const} < 0$ изучена задача Дирихле. Здесь установлен критерий единственности решения, само решение построено в виде суммы ряда Фурье в областях D_+ и D_- по системе собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. При доказательстве существования решения не учтены наличие малых знаменателей.

В данной работе показано, что корректность постановки задачи (2)–(5) существенным образом зависит от отношения сторон $\tilde{\alpha} = \alpha/l$ прямоугольника D_- из гиперболической части смешанной области D . Установлен критерий единственности решения задачи Дирихле.

Предложение 1. Если существует решение задачи (2)–(5), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выражение

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = \operatorname{ch} \lambda_k \beta \sin \lambda_k \alpha + \operatorname{sh} \lambda_k \beta \cos \lambda_k \alpha \neq 0, \quad \lambda_k = \pi k/l.$$

Для примера решение задачи (2)–(5) при $F(x, y) = 0$ и при условии $\Delta_k(\alpha, \beta) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ построено в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x), \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_k x, \quad (8)$$

где

$$u_k(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} \varphi_k \Delta_k(\alpha, y) + \psi_k \operatorname{sh} \lambda_k (\beta - y), & y \geq 0, \\ \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} \varphi_k \sin \lambda_k (\alpha + y) + \psi_k \Delta_k(-y, \beta), & y \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \quad \psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx.$$

Поскольку при значениях

$$\tilde{\alpha} = \frac{n}{k} - \frac{\gamma_k}{\pi k}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad \gamma_k = \arcsin \frac{\operatorname{sh} \lambda_k \beta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda_k \beta + \operatorname{sh}^2 \lambda_k \beta}},$$

знаменатель $\Delta_k(\alpha, \beta)$ функций (9) обращается в нуль, то возникает проблема малых знаменателей как в работах Арнольда В.И. [9, 10] и Козлова В.В. [11], но с более сложной структурой [12]. В связи с чем установлены оценки для $\Delta_k(\alpha, \beta)$ об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой в зависимости от $\tilde{\alpha}$, когда $\tilde{\alpha}$ — натуральное число; $\tilde{\alpha}$ — любое дробное число, т.е. $\tilde{\alpha} = p/q$, $(p, q) = 1$, $p/q \notin \mathbb{N}$, $(q, 4) = 1$; $\tilde{\alpha}$ является любым алгебраическим числом степени $m \geq 2$ и, когда $\tilde{\alpha}$ — иррациональное число с мерой иррациональности $\mu \geq 2$. Эти оценки при некоторых достаточных условиях на заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x, y)$ позволили доказать теоремы существования и устойчивости решения задачи (2)–(5).

Литература

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
2. Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР, 112:3 (1957), 386-389.
3. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // Докл. АН СССР, 122:2 (1958), 167-175.
4. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I. Теоремы единственности // Доклады РАН, 332:6 (1993), 696-698.
5. Солдатов А.П. Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. II. Теоремы существования // Доклады РАН, 332:1 (1993), 16-18.

6. *Вахания Н.Н.* Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа // Тр. АН ГрузССР, 3 (1963), 69-80.
7. *Cannon J.R.* Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient // Ann. Math. pura ed Appl., 62 (1963), 371-377.
8. *Хачев М.М.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области // Дифференц. уравнения, 14:1 (1978), 136-139.
9. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН, XVIII:6 (1963), 91-192.
10. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя // Известия АН СССР. Серия математическая, 25 (1961), 21-86.
11. *Козлов В.В.* Условие вмерзности поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости // ПММ, 63:2 (1999), 237-244.
12. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН, 413:1 (2007), 23-26.

ИНДЕКС ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ГРУППАМИ СДВИГОВ, И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

А.Ю. Савин, Х.Х. Аббас

antonsavin@mail.ru, haydar-abbas@outlook.com

УДК 517.9

Рассматриваются эллиптические операторы со сдвигами, отвечающими действию дискретной группы на компактном многообразии с краем. Для групп вида $\mathbb{Z} \oplus F$, где F — конечная группа, предьявляется топологический индекс задачи, включающий вклады в индекс неподвижных точек действия группы, и устанавливается соответствующая теорема об индексе.

Ключевые слова: действие группы, эллиптический оператор, формула индекса.

Рассматривается действие дискретной группы G на гладком замкнутом многообразии X . Действие индуцирует представление группы операторами сдвига $T_g : u(x) \mapsto u(g^{-1}x)$ в пространствах функций на многообразии и класс матричных операторов со сдвигами вида

$$D = \sum_{g \in G} D_g T_g : C^\infty(X, \mathbb{C}^N) \longrightarrow C^\infty(X, \mathbb{C}^N),$$

где коэффициенты D_g — матричные (псевдо)дифференциальные операторы на X , причём, только конечное число коэффициентов отлично от нуля. При выполнении подходящих условий эллиптичности оператор D является фредгольмовым и возникает задача о вычислении его индекса в терминах главного символа $\sigma(D)$ этого оператора (см., напр., [1] и цитированную литературу). Надо отметить, что главный символ является элементом существенно некоммутативной алгебры — скрещенного произведения алгебры матриц-функций на косферическом расслоении многообразия и группы G , действующей на указанной алгебре автоморфизмами.

В работе [2] был вычислен индекс в случае группы $G = \mathbb{Z}$ и было показано, что индекс равен спариванию класса в K -теории скрещенного произведения, определяемого главным символом $\sigma(D)$ и эквивариантного класса Тодда многообразия в периодических циклических когомологиях скрещенного произведения.

В настоящей работе мы определяем класс Тодда для групп вида $G = \mathbb{Z} \oplus F$, где F — конечная группа, и доказываем соответствующую формулу индекса. Основные сложности, которые было

Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, факультет физико-математических и естественных наук, Математический институт им. С.М. Никольского (Москва, Россия).

Аббас Хайдар Хамед, аспирант, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, факультет физико-математических и естественных наук (Москва, Россия).

необходимо преодолеть: 1) действие группы, вообще говоря, не предполагается изометрическим; 2) необходимо было описать вклады неподвижных точек действия группы в формулу индекса.

Литература

1. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional-differential equations. I. C^* -theory. // Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 70. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994. viii+504 pp. ISBN: 0-582-07251-4

2. *Savin A., Sternin B* Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds // J. Noncommut. Geom. 8 (2014), № 3, 695-734.

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.М. Савчин

savchin-vm@rudn.ru

УДК 531.01

Основная цель работы — построить аналоги символов Кристоффеля для бесконечномерных систем и на этой основе получить уравнения геодезических для таких систем. Указанные аналоги представляют особый интерес в плане выявления взаимосвязи между динамикой систем с бесконечным числом степеней свободы и геометрией Римана, а также геометрией, определяемой псевдоримановой метрикой.

Ключевые слова: символы Кристоффеля, ковариантная производная, геодезическая.

1. Введение. Геодезическими называются линии $u^i = u^i(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $i = \overline{1, n}$, являющиеся решениями уравнений [1]

$$\frac{d^2 u^j}{dt^2} + \Gamma_{ki}^j \frac{du^k}{dt} \frac{du^i}{dt} = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

где Γ_{ki}^j — символы Кристоффеля второго рода.

Здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей, расположенным на разных уровнях, подразумевается суммирование.

Если метрика $a_{ij}(u^1, \dots, u^n)$ невырождена (т.е. $\det(a_{ij}) \neq 0$), то

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} a^{kl} \left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l} \right), \quad (1)$$

где (a^{kl}) — матрица, обратная к (a_{lk}) .

Символы Кристоффеля первого рода находятся через компоненты метрического тензора по формулам

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial u^k} \right). \quad (2)$$

2. Постановка задачи. Уравнения геодезических. Обозначим $U = C^2([t_0, t_1], U_1)$, $V = C([t_0, t_1], U_1)$, где U_1, V_1 — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел R , $U_1 \subseteq V_1$.

Пусть состояние бесконечномерной динамической системы определяется функцией $u \in U$, удовлетворяющей условиям $u|_{t=t_0} = u_0$, $u|_{t=t_1} = u_1$, где u_0, u_1 — заданные элементы из U_1 . Кривой u в U_1 назовем отображение $u : [t_0, t_1] \rightarrow U_1$.

Пусть задана симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_1 \times V_1 \rightarrow R$ и кинетическая энергия системы $T[u, u_t] = \frac{1}{2} \langle u_t, A_u u_t \rangle$, где A_u — линейный дифференцируемый по Гато оператор, в общем случае, зависящий нелинейно от u ; $u_t = \frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \in U_1$.

Обозначим $A'_u(h; g) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} A_{u+\varepsilon g} h \right) \Big|_{\varepsilon=0}$; $F[u] = \int_{t_0}^{t_1} T[u, u_t] dt$,

$u \in D(F) = \{u \in U : u|_{t=t_0} = u_0, u|_{t=t_1} = u_1\}$; дифференциал Гато $\delta F[u, h] = \frac{d}{d\varepsilon} F[u + \varepsilon h] \Big|_{\varepsilon=0}$. Построение в работе сопряженных операторов основано на тождестве Лагранжа [2].

Наша основная цель — построить аналоги символов Кристоффеля (1), (2) для бесконечномерных систем и на этой основе получить уравнения геодезических для таких систем.

Определение 1. Функция $u \in D(F)$ называется стационарной для функционала F , если $\delta F[u, h] = 0 \forall h \in D(F'_u)$.

Теорема 1. Стационарная функция функционала $F[u]$ является решением операторного уравнения

$$\frac{1}{2} (A_u + A_u^*) u_{tt} + \frac{1}{2} \left[A'_u(u_t; u_t) + A_u^{*'}(u_t; u_t) - A_u^{*'}(u_t; u_t) \right] = 0, \quad (3)$$

где $(\dots)^*$ — оператор, сопряжённый к оператору (\dots) относительно заданной билинейной формы, $u_{tt} = \frac{d^2 u}{dt^2}$.

Следствие 1. Если $A_u^* = A_u$, то уравнение (3) принимает вид

$$A_u u_{tt} + \frac{1}{2} \left[A'_u(u_t; u_t) + A_u^{*'}(u_t; u_t) - A_u^{*'}(u_t; u_t) \right] = 0.$$

Следствие 2. Если $A_u^* = A$ и существует обратный оператор A_u^{-1} , то уравнение (3) представимо в виде

$$u_{tt} + \frac{1}{2} A_u^{-1} \left[A'_u(u_t; u_t) + A_u^{*'}(u_t; u_t) - A_u^{*'}(u_t; u_t) \right] = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим конечномерную систему с координатами (u^1, \dots, u^n) , $u^i(t_0) = u_0^i$, $u^i(t_1) = u_1^i$, $t \in [t_0, t_1]$, $i = \overline{1, n}$ и кинетической энергией $T = \frac{1}{2} \dot{u}^i a_{ij}(u) \dot{u}^j$, где $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметрическая матрица, $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0$, $\dot{u}^i = \frac{du^i}{dt}$.

Теорема 2. Если $T = \frac{1}{2} \dot{u}^i a_{ij}(u) \dot{u}^j$, то уравнение (4) совпадает с уравнениями геодезических

$$\frac{d^2 u^j}{dt^2} + \Gamma_{ik}^j \dot{u}^i \dot{u}^k = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} a^{jl} \left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^l} \right)$$

— символы Кристоффеля.

Следствие 3. Уравнение (4) является операторным аналогом уравнений геодезических (5), при этом оператор

$$K_{1u}[\cdot] = \frac{1}{2} \left[A'_u(\cdot; \cdot) + A_u^{*'}(\cdot; \cdot) - A_u^{*'}(\cdot; \cdot) \right]$$

определяет аналог символов Кристоффеля первого рода $\Gamma_{k,ij}$, а

$$K_{2u}[\cdot] = A_u^{-1} K_{1u}[\cdot]$$

— аналог символов Кристоффеля второго рода Γ_{ij}^k .

Оператор $\frac{D}{dt}$, определённый формулой

$$\frac{Du_t}{dt} = u_{tt} - A_u^{-1} K_{1u}[u_t],$$

является аналогом ковариантной производной u_t по t .

3. Пример. Обозначим $U = C^2([t_0, t_1], U_1)$, $V = C([t_0, t_1], V_1)$; Ω — ограниченная область в R^3 с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, $U_1 = C^2(\bar{\Omega})$, $V_1 = C(\bar{\Omega})$, $\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}$ — оператор Лапласа, $x = (x^1, x^2, x^3)$. Положим $A_u = -\Delta + \alpha u + \beta u^2$, где α, β — постоянные. Будем считать, что область определения $D(A_u)$ оператора A_u состоит из тех функций $u \in U$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} u|_{t=t_0} &= u_0, u|_{t=t_1} = u_1, \\ u|_{\Gamma} &= \psi(t, x), \end{aligned}$$

где $\Gamma = [t_0, t_1] \times \partial\Omega$, $u_i \in C^2(\bar{\Omega})$ ($i = 1, 2$), $\psi \in C(\Gamma)$.

В рассматриваемом случае уравнение (3) принимает вид

$$(-\Delta + \alpha u + \beta u^2) u_{tt} + \frac{1}{2} (\alpha + 2\beta u) u_t^2 = 0.$$

В докладе рассматривается также случай, когда на систему с кинетической энергией $T[u, u_t] = \langle u_t, A_u u_t \rangle$ действуют силы с плотностью $\mathcal{F}(u) = P_u u_t + Q(t, u)$, являющейся потенциальным оператором [3].

4. Заключение. Уравнения движения вида (3), (4) допускают содержательную интерпретацию в терминах римановой геометрии. При этом определяющими являются полученные операторные аналоги символов Кристоффеля первого и второго рода, а также обобщенная ковариантная производная. На их основе составляются уравнения геодезических для бесконечномерных систем. Изложенный операторный подход позволяет рассматривать задачи как с римановыми, так и псевдоримановыми метриками.

Литература

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
2. Марчук Г. И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. — М.: Наука, 1992.
3. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1992. — 40. — С. 3–176.

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Э.М. Сайдамов, Ш.Н. Шералиев
saydamatov@mail.ru, shuhrat2500@mail.ru

Рассматривается задача Коши для неоднородного дифференциального уравнения дробного порядка вида

$$D_*^{\alpha_2} u(t, x) + A_1(D_x) D_*^{\alpha_1} u(t, x) + A_0(D_x) u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R^n,$$

$$u(0, x) = \phi_0(x), \quad u_t(0, x) = \phi_1(x),$$

где $D_*^{\alpha_1}$, $0 < \alpha_1 < 1$; $D_*^{\alpha_2}$, $1 < \alpha_2 < 2$ — операторы дробного порядка в смысле Капуто [1];

$A_1(D_x)$ и $A_0(D_x)$ — псевдодифференциальные операторы с аналитическими в некоторой области $G \subseteq R^n$ символами $A_1(\xi)$ и $A_0(\xi)$ соответственно;

Сайдамов Эркин Мамаджанович, исполнительный директор филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Ташкенте (Ташкент, Узбекистан)

Шералиев Шухрат Нуралиевич, заместитель декана факультета прикладной математики и информатики филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Ташкенте (Ташкент, Узбекистан)

$D_x = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$; $f(t, x)$, $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$ — заданные функции.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$D_*^{\alpha_2} u(t, x) + A_1(D_x) D_*^{\alpha_1} u(t, x) + A_0(D_x) u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in R^n.$$

Пусть $\chi(s, \xi) = s^{\alpha_2} + A_1(\xi) s^{\alpha_1} + A_0(\xi)$ — характеристическая функция этого уравнения. Применяя последовательно преобразование Фурье по переменной $x \in R^n$, затем преобразование Лапласа по переменной $t > 0$, и используя преобразование Лапласа для дробной производной [1]

$$L [D_*^\alpha u(t)](s) = s^\alpha L [u(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} u^{(k)}(0), \quad m-1 < \alpha < m, m \in N,$$

где $L [u(t)](s) \equiv \tilde{u}(s)$ обозначает преобразование Лапласа, получим

$$\tilde{u}(s, \xi) = \frac{s^{\alpha_2-1} + A_1(\xi) s^{\alpha_1-1}}{\chi(s, \xi)} u(0, \xi) + \frac{s^{\alpha_2-2}}{\chi(s, \xi)} u_t(0, \xi).$$

Далее, пусть $\Psi_{G,p}(R^n)$, $1 < p < +\infty$, означает пространство функций $\phi(x)$ из $L_p(R^n)$, образы Фурье $F\phi$ которых имеют носители, компактно вложенные в множество $G \subseteq R^n$. В силу известной теоремы Пэли – Винера – Шварца [3], множество $\Psi_{G,p}(R^n)$ составляют функции из $L_p(R^n)$, являющиеся сужениями целых аналитических функций конечного экспоненциального типа от n комплексных переменных. Отметим, что пространство $\Psi_{G,p}(R^n)$, $1 < p < +\infty$, инвариантно относительно произвольного псевдодифференциального оператора $A(D)$, имеющего аналитический в области G символ $A(\xi)$.

Класс абсолютно непрерывных по t на отрезке $[0; T]$ функций $f(t, x)$ со значениями из пространства $\Psi_{G,p}(R^n)$ будем обозначать $AC [[0; T]; \Psi_{G,p}(R^n)]$.

Теорема. *Решение рассматриваемой задачи Коши существует, единственно и представимо в виде*

$$u(t, x) = L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha_2-1} + A_1(D_x) s^{\alpha_1-1}}{\chi(s, D_x)} \right] (t) \phi_0(x) + L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha_2-2}}{\chi(s, D_x)} \right] (t) \phi_1(x) + \int_0^t L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha_2-2}}{\chi(s, D_x)} \right] (t-\tau) D_+^{2-\alpha_2} f(\tau, x) d\tau.$$

где L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа, D_+^α , $0 < \alpha < 1$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля [2].

Решение принадлежит классу $C^{(2)} [t > 0; \Psi_{G,p}(R^n)] \cap C^{(1)} [t \geq 0; \Psi_{G,p}(R^n)]$, если $\phi_0(x) \in \Psi_{G,p}(R^n)$, $\phi_1(x) \in \Psi_{G,p}(R^n)$, $f(t, x) \in AC [[0; T]; \Psi_{G,p}(R^n)]$ для всех $T > 0$ и $D_+^{2-\alpha_2} f(t, x) \in C [t \geq 0; \Psi_{G,p}(R^n)]$.

Литература

1. Gorenflo R., Maimardi F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. — Springer Verlag: Wien and New York, 1997, p. 223-276.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск, 1987, 688 с.
3. Трибель Х. Теория функциональных пространств. — М.: Мир, 1986, 448 с.

**ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ БАНАХОВЫМИ ПРЕДЕЛАМИ,
И СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ТАКИМ МЕРАМ ФУНКЦИЙ****В.Ж. Сакбаев**
fumi2003@mail.ru

УДК 517.982

Мера на бесконечномерном фазовом пространстве, инвариантная относительно группы симплектоморфизмов, определяется как бесконечное произведение инвариантных мер на конечномерных подпространствах. Получены унитарные купмановские представления бесконечномерных гамильтоновых потоков. Для ограничения унитарного представления на инвариантное подпространство сильной непрерывности получено описание спектральных свойств генератора.

Ключевые слова: инвариантная мера, банахов предел, конечно-аддитивная мера, купмановское представление потока преобразований.

Результаты доклада являются реализациями применения изложенного в работе [1] метода построения инвариантных конечно-аддитивных мер на бесконечном произведении пространств, наделенных инвариантной относительно некоторой группы мерой.

Будет построена инвариантная мера типа Лебега как счетное произведение мер Лебега на вещественных прямых. Инвариантная мера Банахова типа строится путем применения счетного произведения банаховых мер (определяемых банаховыми пределами [2]) на вещественных прямых. Одним из преимуществ инвариантной меры банахова типа по сравнению с инвариантной мерой лебеговского типа является конечность значений этой меры на всем пространстве.

Установлена инвариантность построенных мер относительно группы сдвигов на произвольный вектор координатного пространства. Доказано отсутствие свойства счетной аддитивности. Исследовано свойство сепарабельности пространства функций, квадратично интегрируемых по инвариантной мере, а также свойство непрерывности в среднем относительно сдвига аргумента.

Определено подпространство сильной непрерывности однопараметрической группы сдвига в пространстве функций вещественного аргумента, квадратично интегрируемых по банаховой мере на прямой. Найден спектр и найдены собственные функции генератора сильно непрерывной унитарной группы, действующей в подпространстве сильной непрерывности. Доказано, что преобразование Фурье является унитарным преобразованием подпространства сильной непрерывности группы сдвигов на пространство функций, квадратично интегрируемых по считающей мере на вещественной прямой.

С помощью конструкции бесконечного произведения конечно-аддитивных инвариантных мер на вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, снабженном трансляционно инвариантной симплектической формой, введены меры, инвариантные относительно гамильтонова потока произвольной гамильтоновой системы, представимой как счетная совокупность невзаимодействующих двумерных ($2d$ -мерных) гамильтоновых подсистем [3]. Получены унитарные представления фазовых потоков системы гармонических и системы гиперболических осцилляторов, определены подпространства непрерывности соответствующих купмановских групп, установлены свойства спектра и найдены собственные функции их генераторов.

Литература

1. V.M. Busovikov, V.Zh. Sakbaev Direct limit of shift-invariant measures on a Hilbert space, Lobachevskii J. Math., **44** (6) 1998-2006 (2023).
2. E.M. Semenov, F.A. Sukochev, A.S. Usachev, *Geometry of Banach limits and their applications*, Russian Math. Surveys, **75** (4) 725-763 (2020).
3. V.Zh. Sakbaev. *Flows in Infinite-Dimensional Phase Space Equipped with a Finitely-Additive Invariant Measure*. Mathematics, **11** (5) 1161 (2023).

МЕРЫ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И.Н. Сергеев

igniserg@gmail.com

УДК 517.925.51

Приводятся недавние понятия мер устойчивости и неустойчивости ляпуновского, перроновского и верхнепредельного типа, допускающие естественную вероятностную интерпретацию. Формулируются результаты, описывающие эти понятия, их связи со свойствами устойчивости дифференциальной системы и друг с другом, их контрастные сочетания, а также их зависимость от выбора начального значения.

Ключевые слова: дифференциальная система, ляпуновская устойчивость, перроновская устойчивость, мера устойчивости.

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной фазовой области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей точку нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1)$$

с правой частью f и замкнутым временным лучом $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Определение 1 ([1–5], ср. с [6]). *Ляпуновская, перроновская и верхнепредельная, ассоциируемая* (здесь и ниже) с соответствующими значениями $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$, *мера устойчивости* или *мера неустойчивости* системы (1) задаются соответственно формулами

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta}, \quad \nu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\text{mes } N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\text{mes } B_\delta}, \quad (2)$$

где $B_\delta \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n : 0 < |x_0| < \delta\}$, $x(\cdot, x_0)$ — непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$, mes — мера Лебега в \mathbb{R}^n , а $M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)$ и $N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)$ — множества всех значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих и соответственно не удовлетворяющих (в частности, когда решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче \mathbb{R}_+) ассоциируемому требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Теорема 1. *Для любой системы (1), любого $\varepsilon > 0$ и каждого из требований (3) множества всех точек $x_0 \in G$, как удовлетворяющих этому требованию, так и не удовлетворяющих ему, измеримы, а значения мер в формулах (2) не изменятся, если в них пределы при $\varepsilon \rightarrow +0$ заменить точными нижней или соответственно верхней гранями по $\varepsilon > 0$.*

Теорема 2. *Для любой системы (1) выполнены неравенства*

$$0 \leq \mu_\lambda(f) \leq \mu_\sigma(f) \leq \mu_\pi(f) \leq 1, \quad 0 \leq \nu_\pi(f) \leq \nu_\sigma(f) \leq \nu_\lambda(f) \leq 1,$$

$$0 \leq \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) \leq 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Определение 2 [5]. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение) обладает следующим свойством *ляпуновского, перроновского или верхнепредельного типа*:

1) *устойчивостью* или *почти устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что выполнено соответственно равенство

$$M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta) = B_\delta, \quad \text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \delta) = \text{mes } B_\delta, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma;$$

2) *полной неустойчивостью* или *почти полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что выполнено соответственно равенство

$$N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta) = B_\delta, \quad \text{mes } N_\varkappa(f, \varepsilon, \delta) = \text{mes } B_\delta, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Теорема 3. Если система (1) обладает почти устойчивостью или почти полной неустойчивостью какого-либо типа, то ее мера устойчивости или соответственно неустойчивости этого типа равна 1.

Теорема 4. При $n = 2$ существуют две автономные системы вида (1), не обладающие ни почти устойчивостью, ни почти полной неустойчивостью ни одного из трёх типов, причем у одной из них меры устойчивости и неустойчивости всех трёх типов равны соответственно 1 и 0, а у другой — наоборот, 0 и 1.

Теорема 5. При $n = 1$ для любой системы (1) выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) \leq \mu_\pi(f), \quad \nu_\lambda(f) = \nu_\sigma(f) \geq \nu_\pi(f), \quad (4)$$

$$\mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \mu_\varkappa(f), \nu_\varkappa(f) \in \{0, 1/2, 1\}, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma. \quad (5)$$

Теорема 6. При $n = 1$ для некоторой ограниченной линейной системы (1) оба неравенства в цепочках (4) являются строгими.

Теорема 7. При $n = 1$ для любой автономной системы (1) выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mu(f) \equiv \mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f), \quad \nu(f) \equiv \nu_\lambda(f) = \nu_\sigma(f) = \nu_\pi(f), \\ \mu(f) + \nu(f) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 8. При $n = 1$ для каждого из трех значений множества (5) существует автономная система (1), все меры устойчивости которой принимают именно это значение.

Теорема 9. Для любой линейной системы вида (1) в формулах (2) все пределы при $\delta \rightarrow +0$ являются точными, причём возможны только следующие две ситуации:

1) либо имеет место устойчивость всех трёх типов и выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f) = 1 > 0 = \nu_\pi(f) = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f);$$

2) либо имеет место почти полная ляпуновская и верхнепределельная неустойчивость и выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f).$$

Теорема 10. При любом $n \in \mathbb{N}$ каждая из двух перечисленных в теореме 9 ситуаций реализуется на некоторой ограниченной линейной автономной системе вида (1), причём вторая ситуация реализуется по меньшей мере на двух системах, одна из которых, с полной перроновской неустойчивостью, удовлетворяет соотношениям

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f) = 0 < 1 = \nu_\lambda(f) = \nu_\sigma(f) = \nu_\pi(f),$$

а другая, неавтономная, с перроновской устойчивостью — соотношениям

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \mu_\pi(f), \quad \nu_\lambda(f) = \nu_\sigma(f) = 1 > 0 = \nu_\pi(f). \quad (7)$$

Теорема 11. При $n = 2$ для любого $r > 0$ существует автономная система (1) с положительными мерами устойчивости и неустойчивости, удовлетворяющая соотношениям (6) и равенству $\mu(f) : \nu(f) = r$.

Теорема 12. При каждом целом $n > 1$ существуют такие две автономные системы (1), что для одной из них имеют место соотношения (7), а для другой — соотношения

$$\mu_\lambda(f) = 0 < 1 = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f), \quad \nu_\lambda(f) = 1 > 0 = \nu_\sigma(f) = \nu_\pi(f).$$

Примеры из работ [7, п. 6.3] и [8, § 18] отличаются от примеров из теоремы 10 размерностью $n = 2$ и ляпуновскими мерами $\mu_\lambda(f) = \nu_\lambda(f) = 1/2$.

Определение 3. Назовём *ляпуновской*, *перроновской* и *верхнепредельной мерой устойчивости* $\mu_x(f, t_0)$ или *мерой неустойчивости* $\nu_x(f, t_0)$ системы (1) с начальным моментом $t_0 \in \mathbb{R}_+$ (и, возможно, с открытым временным лучом $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$) одноимённые меры устойчивости $\mu_x(f_{t_0})$ или неустойчивости $\nu_x(f_{t_0})$ системы, правая часть f_{t_0} которой получается из правой части системы (1) сдвигом на t_0

$$f_{t_0}(t, x) \equiv f(t + t_0, x), \quad t \geq 0, \quad x \in G.$$

Теорема 13. Если система (1) одномерна или автономна, то все её меры устойчивости и неустойчивости любого типа не зависят от начального момента.

Теорема 14. Если система (1) линейна, то её ляпуновские и верхнепредельные меры устойчивости и неустойчивости любого типа не зависят от начального момента.

Теорема 15. Если какая-либо мера устойчивости или неустойчивости системы (1) хотя бы с одним начальным моментом принимает одно из крайних значений 0 или 1, то она не зависит от начального момента.

Теорема 16. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с открытым временным лучом, у которой меры устойчивости трёх типов совпадают, а с ростом начального момента возрастают, пробегая весь интервал $(0, 1)$ и составляя 1 в сумме с мерой неустойчивости.

Теорема 17. Для каждого $n > 1$ существует система (1) с открытым временным лучом, у которой меры устойчивости трёх типов совпадают, а с ростом начального момента убывают, пробегая весь интервал $(0, 1)$ и составляя 1 в сумме с мерой неустойчивости.

Литература

1. Сергеев И.Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Матем. заметки, **113**:6 (2023), 895-904.
2. Сергеев И.Н. Определение мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения, **59**:6 (2023), 851-852.
3. Сергеев И.Н. Свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения, **59**:11 (2023), 1577-1579.
4. Сергеев И.Н. Примеры автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями мер ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., **1** (2024), 50-54.
5. Сергеев И.Н. О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем // Тр. семинара им. И.Г.Петровского, **33** (2023), 353-423.
6. Денисов Н.В., Васильев В.Д. Определение и свойства примитивной меры устойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Дифференц. уравнения, **59**:11 (2023), 1579-1580.
7. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.
8. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

**ТРЕХМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

С.Н. Сидоров

stsid@mail.ru

УДК 517.95

Для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа со степенным вырождением в прямоугольном параллелепипеде изучена начально-граничная задача. Установлен критерий единственности решения. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений данного уравнения. Установлена устойчивость решения от граничной функции и правой части уравнения.

Ключевые слова: уравнение смешанного парабола-гиперболического типа, трехмерная начально-граничная задача, единственность, ряд, малые знаменатели, существование, устойчивость.

Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu = F(x, y, t), \quad (1)$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - t^n(u_{xx} + u_{yy}) + bt^nu, & t > 0, \\ u_{tt} - (-t)^m(u_{xx} + u_{yy}) - b(-t)^mu, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x, y, t) = \begin{cases} F_1(x, y, t), & t > 0, \\ F_2(x, y, t), & t < 0, \end{cases}$$

заданное в трехмерной области

$$Q = \{(x, y, t) | (x, y) \in D, t \in (-\alpha, \beta)\},$$

где

$$D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

$n, m, \alpha, \beta, p, q$ – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, $F_i(x, y, t)$ ($i = 1, 2$) – заданные функции, и поставим следующую задачу.

Начально-граничная задача. *Найти функцию $u(x, y, t)$, определенной в области Q и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, t) \in C(\bar{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\bar{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-; \quad (3)$$

$$u(x, y, t)|_{x=0} = u(x, y, t)|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, y, t)|_{y=0} = u(x, y, t)|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, y, t)|_{t=-\alpha} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (6)$$

где $F(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$.

Начально-граничные задачи (локальные, нелокальные) для однородного и неоднородного уравнений смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области впервые были

изучены в работах К.Б. Сабитова, С.Н. Сидорова [1–5]. Задача (2)–(6) для трехмерного уравнения (1), когда $n \geq 0$ и $m = 0$, впервые изучена в наших работах [6–9].

Используя идею работы [7], установлен критерий единственности решения задачи (2) – (6). Решение задачи построено в явной форме в виде суммы ортогонального двумерного ряда. При обосновании сходимости ряда впервые возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов, затрудняющая сходимость построенного ряда. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения. Установлена устойчивость решения по граничной функции $\psi(x, y)$ и правой части уравнения.

Литература

1. Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // Матем. заметки, 102:3 (2017), 415-435.
2. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 50:3 (2014), 356-365.
3. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика, 12 (2015), 55-64.
4. Сидоров С.Н. Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 19 (190) (2014), 91-104.
5. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // Journal of Mathematical Sciences, 236:6 (2019), 603-640.
6. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-Boundary Problem for a Three-Dimensional Inhomogeneous Equation of Parabolic-Hyperbolic Type // Lobachevskii Journal of Mathematics, 41:11 (2020), 2257-2268.
7. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для трёхмерного уравнения парабола-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения, 57:8 (2021), 1071-1080.
8. Сидоров С.Н. Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа по нахождению сомножителя правой части, зависящего от пространственных переменных // Дифференциальные уравнения, 57:12 (2021), 1610-1622.
9. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Three-dimensional initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part // Azerbaijan Journal of Mathematics, 12:1 (2022), 49-67.

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ УМЕРЕННО ДЛИННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Х.Г. Умаров

umarov50@mail.ru

УДК 517.958

Для уравнения моделирующего умеренно длинные продольные волны малой амплитуды в вязкоупругом стержне исследуется задача Коши в пространстве $C[R^1]$ непрерывных функций, заданных на всей числовой оси и для которых существуют пределы на бесконечности. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке.

Ключевые слова: продольные волны в вязкоупругом стержне, нелинейные уравнения соболевского типа, глобальное решение, разрушения решения.

Распространение умеренно длинных (длина волны существенно больше характерного поперечного размера стержня) продольных волн малой амплитуды в вязкоупругом стержне с учетом дисперсии и диссипации моделируется [1, § 3.1], [2] нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных:

$$u_{tt} - \alpha u_{tx} + \beta u_{xx} - u_{txx} - u_{ttxx} + \gamma u_{txxx} - \delta u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0, \quad (1)$$

в котором переменные $(t, x) \in R_+^1 \times R^1$; искомая функция $u = u(t, x)$ – продольная деформация; коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – неотрицательные постоянные.

Неразрешенное относительно старшей временной производной уравнение (1) является уравнением соболевского типа с младшими в обобщенном смысле членами [3], получившимся из уравнения, выведенного в [2] и для которого рассмотрена задача Коши в [4], добавлением как старших: γu_{txxx} и δu_{xxxx} , так и младших: αu_{tx} и βu_{xx} , членов уравнения, что, как отмечается в [3], может существенно повлиять на разрешимость задачи Коши.

Лемма. [5] Пусть выполняется условие $\gamma^2 > 4\delta$ и пусть начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$, вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству $C[R^1]$, тогда на временном отрезке $[0, t_0]$ существует единственное классическое решение $u = u(t, x)$ задачи Коши для уравнения (1) причем справедлива оценка

$$\|u\|_C = \sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq h_0(t), \quad t \in [0, t_0].$$

Мажоранта $h_0(t)$ и длина отрезка t_0 определяются параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ уравнения (1) и начальными функциями $\varphi(x), \psi(x)$ задачи Коши. Это замечание относится и к постоянным c_k фигурирующим в формулировках следующих теорем.

Теорема 1. [5] Пусть параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и начальные функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap W_2^2(R^1)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha > 1, \gamma > 1 + \delta, \gamma^2 > 4\delta;$$

$$\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi') + 2(\psi', \varphi''),$$

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \frac{\delta}{\gamma - 1} (\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2) c_0 \geq \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + \frac{2\delta}{\gamma - 1} [(\psi, \varphi') + (\psi', \varphi'')] c_0,$$

где $c_0 = 1 + e^{3t_0/(\gamma-1)}$, тогда из существования классического решения $u = u(t, x)$ в пространстве $C[R^1]$, удовлетворяющего условию $\partial_t^n u(t, x) \in C^{(4-n)}[R^1] \cap W_2^{4-n}(R^1)$, $n = \overline{0, 2}$, на отрезке $t \in [0, t_0]$, следует существование единственного глобального классического решения задачи Коши для уравнения (1), для которого в пространстве $C[R^1]$ справедлива оценка

$$\|u\|_C = \sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq c_1 e^{c_2 t}, \quad t \in \overline{R}_+^1.$$

Достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала

$$y(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx$$

на отрезке $[0, t_0]$, т.е. условия разрушения решения уравнения (1) на конечном временном отрезке получены в теореме 2.

Теорема 2. [5] Пусть параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и начальные функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap W_2^2(R^1)$, удовлетворяют условиям

$$\gamma > 2, \gamma^2 > 4\delta,$$

$$\alpha \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi''\|_2^2 \geq 2(\psi, \varphi') + 2(\psi', \varphi''),$$

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2 + 2(\varphi, (\varphi')^2) > (\varphi', \alpha\psi + \psi') + \gamma(\varphi'', \psi'),$$

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \frac{\delta}{\gamma - 2} (1 + t_0 c_3) > \beta \|\varphi'\|_2^2 + \delta \|\varphi''\|_2^2,$$

$$(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > c_4 \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0,$$

тогда время существования решения $u = u(t, x)$, удовлетворяющего условию $\partial_t^n u(t, x) \in C^{(4-n)} [R^1] \cap W_2^{4-n} (R^1)$, $n = \overline{0, 2}$, на отрезке $t \in [0, t_0]$, не может быть сколь угодно большим: решение разрушается за конечное время T_0 и для времени существования решения справедлива оценка сверху

$$T_0 = 1 / \left(c_5 \|\varphi\|_{W_2^1}^{2c_6} \right),$$

при этом для функционала $y(t)$ имеет место оценка снизу

$$y(t) \geq e^{c_5 t / c_6} / \left(\|\varphi\|_{W_2^1}^{-2c_6} - c_5 t \right)^{1/c_6}.$$

Литература

1. Ильичев А.Т. Устойчивость локализованных волн в нелинейно-упругих стержнях. М.: Физматлит, 2009. 159 с.
2. Куликовский А.Г., Гвоздовская Н.И. О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Тр. МИАН. 1998. Т. 223. С. 63–73.
3. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289 – 1303.
4. Умаров Х.Г. Задача Коши для уравнения нелинейных длинных продольных волн в вязкоупругом стержне // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62. № 1. С. 198–209.
5. Умаров Х.Г. Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения умеренно длинных продольных волн в вязкоупругом стержне // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 7. С. 1177–1191.

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

М.В. Фролова, Е.А. Михайлов, Ю.А. Тихонов

pashentceva.mv17@physics.msu.ru, ea.mikhajlov@physics.msu.ru, yurytik@yandex.ru

УДК 524.7-466

В работе изучается вопрос о спектре оператора, возникающем в магнитной гидродинамике при изучении эволюции магнитных полей галактик и аккреционных дисков. Для нее получены строгие оценки для области, в которой могут находиться собственные значения, а также получены асимптотические выражения в предположении малости слагаемого, отвечающего за перенос

Ключевые слова: динамо, магнитное поле, турбулентность.

Задача о генерации магнитного поля B в астрофизических дисках (к которым относятся галактики и аккреционные диски) может быть в простейшем случае описана с помощью задачи на собственные значения [1]:

$$\gamma \tilde{B} = D^{1/2} \tilde{B} + h D^{1/2} z \frac{d\tilde{B}}{dz} + \lambda^2 \frac{d^2 \tilde{B}}{dz^2}, \tag{1}$$

$$\tilde{B} \Big|_{z=\pm\lambda} = 0 \tag{2}$$

Фролова Мария Владимировна, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)
 Михайлов Евгений Александрович, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)
 Тихонов Юрий Андреевич, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

где λ — параметр, характеризующий толщину диска, D — т.н. динамо-число, $|h| \leq 1$ — коэффициент, связанный с ролью вертикальных потоков. Особую роль с точки зрения приложений играет то, есть ли собственные значения γ , расположенные в правой половине комплексной плоскости.

Основную сложность представляет то, что оператор $D^{1/2} z \frac{d}{dz}$, стоящий в правой части, не является самосопряженным. Поэтому с помощью замены $x = \frac{z}{\lambda}$, $y(x) = \tilde{B} \exp\left(h \frac{D^{1/2} x^2}{4}\right)$ [2] мы получаем следующую задачу на собственные значения для $y(x)$:

$$\gamma y = \hat{A}y + \hat{V}y;$$

$$y(-1) = y(+1) = 0;$$

где введены операторы:

$$\hat{A} = D^{1/2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) + \frac{d^2}{dx^2};$$

$$\hat{V} = -h^2 \frac{Dx^2}{4}.$$

Спектр оператора \hat{A} ищется тривиально:

$$\gamma_n^0 = D^{1/2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4}\pi^2 n^2$$

а решение для полной задачи требует построения оценок.

Утверждение. Спектр оператора $\hat{L} = \hat{A} + \hat{V}$ является действительным и лежит в области:

$$\gamma < D^{1/2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{h^2 D}{6}$$

а для старшего собственного значения справедлива оценка:

$$D^{1/2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{h^2 D}{6} < \gamma_1 < D^{1/2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{h^2 D}{6}.$$

Найдем теперь асимптотическое приближение для γ_n . Найдем поправку, связанную с оператором возмущения \hat{V} [3]:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_n = (y_n, V y_n) &= -h^2 \int_{-1}^1 \sin^2\left(\frac{\pi n(x+1)}{2}\right) \frac{Dx^2}{4} dx = \\ &= -\frac{h^2 D}{12} + \frac{h^2 D}{2\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическое приближение для γ_n :

$$\gamma_n = -\frac{\pi^2 n^2}{4} + D^{1/2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) - \frac{h^2 D}{12} + \frac{h^2 D}{2\pi^2 n^2}$$

Литература

1. Mikhailov E., Pashentseva M. Eigenvalue problem for a reduced dynamo model in thick astrophysical discs // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 14. — P. 3106.
2. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М., Наука, 1988.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Квантовая механика (Нерелятивистская теория). М., ФИЗМАТЛИТ, 2005.

**НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО
МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА
ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА – ЛИУВИЛЛЯ (ОМКДФ-Л)**

А.Б. Хасанов, А. Абдивохилов

ahasanov2002@mail.ru, azamatabdivoxidov@mail.ru

УДК 517.957

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования модифицированное уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка–Лиувилля (пМКДФ-Л) в классе периодических бесконечнозонных функций.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза отрицательного порядка, уравнения Лиувилля, оператора Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина.

В настоящей работе рассматривается начально-граничная задача для нелинейного модифицированное уравнения Кортевега–де Фриза отрицательного порядка–Лиувилля (омКДФ-Л) вида (см. [1]):

$$\begin{cases} u_{xt} - e^{2u} - a(t) (u_{xxxx} - (2u_x \mu_{xt})_x) = 0, \\ \mu_{xx} = u_x^2, x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= u_0(x), u(x, t)|_{x=0} = \alpha(t), u_0(x + \pi) = u_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \\ \mu_x(xt)|_{x=0} &= \beta(t), [u_{xt}(x, t) + \mu_{x,t}(x, t)]|_{x=0} = \gamma(t) \end{aligned} \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных π - периодических по x функций удовлетворяющие условиям гладкости

$$u(x + \pi, t) = u(x, t) \in C_{x,t}^{4,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0), \mu_x(x, t) \in C_{x,t}^{1,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

Здесь $a(t) \in C(t \geq 0)$ и $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ - заданные непрерывные ограниченные функции.

В данной работе предлагается алгоритм построения точных решений $(u(x, t), \mu_x(x, t))$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ задачи (1)-(3) сведением её к обратной спектральной задаче для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u_x(x, t) \\ u_x(x, t) & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если в уравнении (1) коэффициент $a(t) = 0$, то (1) принимает популярный в литературе вид уравнения Лиувилля (см. [2]):

$$u_{xt} = e^{2u}, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$ соответственно. Функция $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Спектр оператора Дирака $L(\tau, t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет, математический факультет (Самарканд, Узбекистан)

Абдивохилов Азамат, аспирант, Самаркандский государственный университет, математический факультет (Самарканд, Узбекистан)

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, называются лакунами, где λ_n – корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и при этом $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Числа $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, называются спектральными параметрами оператора $L(\tau, t)$. Спектральные параметры $\{\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau, t)$. С помощью начальной функция $u_0(x + \tau)$ построим оператора Дирака $L(\tau, 0)$:

$$L(\tau, 0)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega_0(x + \tau)y = \lambda y, \quad x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u'_0(x) \\ u'_0(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Решая прямую задачу, найдём спектральные данные $\{\lambda_n(\tau), \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, оператора $L(\tau, 0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $(u(x, t), \mu_x(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0)$ решение задачи (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, оператора $L(\tau, t)$, удовлетворяют аналогу системы дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \lambda_n(\tau, t)}{\partial \tau} = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) g_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{6}$$

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{7}$$

где $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$. Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, участвующие в уравнении (6) определяются по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{1 + 4a(t)\xi_n^2(\tau, t)} \left[\frac{e^{2u(\tau, t)}}{\xi_n(\tau, t)} + 2a(t)\xi_n(\tau, t) \left\{ u_{xt}(\tau, t) + \mu_{xt}(\tau, t) + \frac{1}{2} \right\} \right],$$

где

$$\xi = \xi(\tau, t) = (\dots, \xi_{-1}(\tau, t), \xi_1(\tau, t), \dots), \quad \sigma(\tau, t) = (\dots, \sigma_{-1}(\tau, t), \sigma_1(\tau, t), \dots).$$

Теорема 2. Если начальная функция $u_0(\tau)$ удовлетворяет условию

$$u_0(\tau + \pi) = u_0(\tau) \in C^6(\mathbb{R})$$

и функции $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ - ограниченные, то существует однозначно определяемое решение $(u(\tau, t), \mu_\tau(\tau, t))$, $\tau \in \mathbb{R}, t > 0$ задачи (1)-(3), которое определяются по формулам:

$$u(\tau, t) = \alpha(t) + \int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s, t) h_k(\xi(s, t)) \right) ds,$$

$$\mu_\tau(\tau, t) = \beta(t) + \int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s, t) h_k(\xi(s, t)) \right)^2 ds.$$

Отметим, что задача Коши в классе периодических бесконечнозонных функций для нелинейного уравнения Хирота и нелинейного модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза-синус-Гордона изучались в работах [3]-[4].

Литература

1. *Abdul-Majid Wazwaz*. A new integrable equation combining the modified KdV equation with the negative-order modified KdV equation: multiple soliton solutions and a variety of solitonic solutions. *Waves in random and complex media*, 28:3 (2017), pp. 1-11.
2. *A. B. Khasanov, Kh. N. Normurodov, U. O. Khudayorov* Cauchy Problem for the Nonlinear Liouville Equation in the Class of Periodic Infinite-Gap Functions. *Differential equations*, 59:10 (2023), pp. 1413 - 1426.
3. *A.B. Khasanov, R.Kh. Eshbekov, Kh.N. Normurodov*. Integration of a nonlinear Hirota type equation with finite density in the class of periodic functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 44:10, pp. 4323-4340.
4. *A.B. Khasanov, Kh.N. Normurodov, U.O.Hudayerov* Integrating the modified Korteweg–de Vries–sine-Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions, *Theoret. and Math. Phys.*, 214:2 (2023), 170–182.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

А.Б. Хасанов, Х.Н. Нормуродов

ahasanov2002@mail.ru, normurodov.96@bk.ru

УДК 517.957

Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических бесконечнозонных функций.

Ключевые слова: уравнения Шредингера отрицательного порядка, оператора Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка (см. [1]-[2]):

$$\begin{cases} q_{xt} = 2q\mu_t + q, \\ p_{xt} = 2p\mu_t + p, \\ \mu_x = p^2 + q^2, x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} q(x, t)|_{t=0} &= q_0(x), q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \\ p(x, t)|_{t=0} &= p_0(x), p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \\ \mu(x, t)|_{x=0} &= \mu_0(t), \mu_0(t) \in C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \\ [q(x, t) + \mu(x, t)]|_{x=0} &= \alpha(t), \alpha(t) \in C(t \geq 0) \end{aligned} \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций:

$$\begin{aligned} q(x + \pi, t) &= q(x, t), p(x + \pi, t) = p(x, t), \\ q(x, t), p(x, t), \mu(x, t) &\in C_{x,t}^{1,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0) \end{aligned} \quad (3)$$

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет, математический факультет (Самарканд, Узбекистан)

Нормуродов Хожимурод Нормунинович, аспирант, Самаркандский государственный университет, математический факультет (Самарканд, Узбекистан)

В данной работе предлагается алгоритм построения точных решений $(q(x, t), p(x, t), \mu(x, t))$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ задачи (1)-(3) сведением её к обратной спектральной задаче для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T \quad \text{и} \\ s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$$

решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$ соответственно. Функция $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Спектр оператора Дирака $L(\tau, t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$, называются лакунами, где λ_n -корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Числа $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, и знаки $\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными параметрами оператора $L(\tau, t)$. Спектральные параметры $\{\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau, t)$. Коэффициенты $q(x + \tau, t)$ и $p(x + \tau, t)$ оператора $L(\tau, t)$ определяются однозначно по спектральным данным. С помощью начальной функции $q_0(x + \tau)$ и $p_0(x + \tau)$ построим оператора Дирака $L(\tau, 0)$. Решая прямую задачу, найдём спектральные данные $\{\lambda_n(\tau), \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\}$, оператора $L(\tau, 0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $(q(x, t), p(x, t), \mu(x, t))$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ решение задачи (1)-(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $L(\tau, t)$ не зависят от параметров $\tau \in \mathbb{R}$, и t т.е. $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют соответственно первой и второй системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) (p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) g_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$. Последовательности $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n \in \mathbb{Z}$, участвующие в уравнении (6) определяются по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{2\xi_n(\tau, t)} \left\{ q_t(\tau, t) + \mu_t(\tau, t) + \frac{1}{2} \right\}.$$

Теорема 2. Если функции $q_0(\tau)$ и $p_0(\tau)$ удовлетворяют условиям

$$q_0(\tau + \pi) = q_0(\tau) \in C^2(\mathbb{R}), p_0(\tau + \pi) = p_0(\tau) \in C^2(\mathbb{R}),$$

а $\alpha(t) \in (t \geq 0)$ - непрерывная ограниченная функция, то существуют однозначно определяемые решения $(q(\tau, t), p(\tau, t), \mu(\tau, t))$, $\tau \in \mathbb{R}, t > 0$ задачи (1)-(3), которые определяются, соответственно, суммой рядов:

$$\begin{aligned} q(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \\ p(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \\ \mu(\tau, t) &= \mu_0(t) + \int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s, t) h_k(\xi(s, t)) \right)^2 ds + \\ &+ \int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(s, t) \right) \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Отметим, что задача Коши в классе периодических бесконечнозонных функций для нелинейного уравнения Шредингера и уравнения типа синус-Гордона изучались в работах [3]-[4].

Литература

1. Ji Jie, Zhang Jian-Bing, Zhang Da-Jun. Soliton solutions for a negative order AKNS equation hierarchy. Communications in Theoretical Physics. 52:3 (2009), pp. 395-397.
2. А.Б.Хасанов, Х.Н.Нормуродов. Интегрирования нелинейного уравнения Шредингера отрицательного порядка в классе периодических бесконечнозонных функций. Доклады Академии наук Республики Узбекистан (ДАН РУз), No 1 (2024).
3. А.Б.Хасанов, У.Б.Муминов. Задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами. ДАН РУз, №3 (2022), стр. 27-32.
4. А.Б.Хасанов, Х.Н.Нормуродов, У.О.Худёров. Интегрирования нелинейного уравнения типа синус-Гордона в классе периодических бесконечнозонных функций. ДАН РУз, №4 (2022), стр. 21-26.

ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М.В. Шамолин

zaitseva@cs.msu.ru

УДК 517,531.01

В работе предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем.

Ключевые слова: динамическая система с диссипацией, интегрируемость, тензорный инвариант.

Как известно [1–3], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4–6]).

В качестве примеров тензорных инвариантов приведем, прежде всего, скалярные инварианты – это первые интегралы системы. Инвариантные векторные поля – поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (поиск которых, в основном, и проведен в данной работе) порождают интегральные инварианты системы. При этом, очевидно, само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m помимо упомянутого тривиального инварианта надо знать еще $m - 1$ независимый тензорный инвариант.

Как показано ранее, задача о движении $(n+1)$ -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее $(n + 1)$ -мерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к n -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из функций, имеющих существенно особые точки, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n -мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n + 1)$ -мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n -мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т. д.

Важные случаи интегрируемых систем с n степенями свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах автора [5, 7]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм для однородных систем на касательных расслоениях к гладким конечномерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, конечномерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение строится усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

Литература

1. *H. Poincaré* Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912, 340 pp.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР, 1953. Т. 93. №5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74, вып. 1. С. 117–148.

4. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53, вып. 3. С. 209–210.

5. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН, 2018. Т. 479. №3. С. 270–276.

6. Шамолин М.В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2021. Т. 501. №1. С. 89–94.

7. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2014. Т. 457. №5. С. 542–545.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В $F(R)$ ГРАВИТАЦИИ

М.В. Шубина

yurova-m@rambler.ru

Введение.

В настоящем докладе представлены точные аналитические решения вакуумных уравнений гравитационного поля для модифицированной теории гравитации, а именно для $F(R)$ гравитации. Как известно, искривлённое пространство-время описывается в Общей Теории Относительности (ОТО) уравнениями Эйнштейна-Гильберта, которые являются системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$. Несмотря на то, что в настоящее время ОТО является лучшей фундаментальной теорией, описывающей гравитационное взаимодействие, есть основания полагать, что эта теория может быть неполной. ОТО основана на гравитационном действии с Лагранжевой плотностью $\sqrt{-g}R$, где R -скалярная кривизна ($g = \det g_{\mu\nu}$). Одной из простейших модификаций теории гравитации Эйнштейна является теория с лагранжианом как функцией от скалярной кривизны, то есть $F(R)$; различные формы этой функции появились в литературе более 10 лет назад и среди них есть вполне жизнеспособные. За более чем 100 лет с создания ОТО было получено множество интересных точных решений уравнений Эйнштейна-Гильберта; многие из них имели фундаментальное значение при формировании современных представлений о Вселенной и ее эволюции. Однако, если мы будем рассматривать модифицированные теории гравитации, то число полученных точных решений невелико.

В докладе мы кратко представим уравнения теории и приведем основные полученные решения для функции $F(R)$ и получающейся метрики пространства-времени. Мы также вкратце дадим космологическую интерпретацию одному из полученных решений. Все результаты, представленные в докладе, опубликованы в работах [1], [2] и [3].

Рассматриваемая модель.

Действие: $S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} F(R)$. Уравнения поля:

$$F_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]F_R(R) = 0, \quad F_R(R) \equiv \frac{dF(R)}{dR}. \quad (1)$$

Случай двух переменных.

Метрический интервал: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -4f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta - g_{ab} dx^a dx^b$. $g_{ab} = g_{ab}(\zeta, \eta)$, $a, b = 1, 2$, сигнатура $(+ - - -)$;

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \psi & \psi\omega \\ \psi\omega & \psi\omega^2 + \sigma_\alpha^2 \alpha^2 \psi^{-1} \end{pmatrix}, \quad \sigma_\alpha^2 = \pm 1. \quad (2)$$

Уравнения поля:

$$\left(\alpha F_R M_{,\zeta} M^{-1} \right)_{,\eta} + \left(\alpha F_R M_{,\eta} M^{-1} \right)_{,\zeta} = 0, \quad M = \alpha^{-1} g$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha F_R)_{,\zeta\eta} - \alpha f(F_R R - F) &= 0 \tag{3} \\
 \alpha F_R f R + \alpha F_{R,\zeta\eta} - 2F_R \alpha_{,\zeta\eta} - \frac{1}{2}(\alpha_{,\eta} F_{R,\zeta} + \alpha_{,\zeta} F_{R,\eta}) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\ln f)_{,\zeta} &= \frac{\ln(\alpha F_R)_{,\zeta\zeta}}{\ln(\alpha F_R)_{,\zeta}} - \frac{\text{Tr}(g_{,\zeta}(g^{-1})_{,\zeta}) - 4(\ln(F_R)_{,\zeta})^2}{4 \ln(\alpha F_R)_{,\zeta}} \\
 (\ln f)_{,\eta} &= \frac{\ln(\alpha F_R)_{,\eta\eta}}{\ln(\alpha F_R)_{,\eta}} - \frac{\text{Tr}(g_{,\eta}(g^{-1})_{,\eta}) - 4(\ln(F_R)_{,\eta})^2}{4 \ln(\alpha F_R)_{,\eta}}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Точные решения.

Нами были решены точно уравнения (3)-(4) для функции $F(R)$ и компонент метрики f и g_{ab} в трех случаях:

1. Все функции представляются как произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной ζ или η .

Мы рассматриваем 2 типа метрики. Беря $-4f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = f(dt^2 - dz^2)$, для $g_{\mu\nu} = \text{diag}(f, -f, -1, -\alpha^2)$ получаем $F(R) \sim \sqrt{|R|}$, а для $g_{\mu\nu} = \text{diag}(f, -f, -|\alpha|, -|\alpha|)$ получаем $f(R) \sim |R|^\kappa$, $\kappa \in [\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}]$ и $f(R) \sim \frac{1}{R}$. Явный вид различных решений для функций $f(t, x)$, $\alpha(t, x)$ и $R(t, z)$ представлен в докладе.

2. Все функции зависят от переменной “бегущей волны” $\varphi \simeq \zeta + \lambda\eta$.

3. Все функции зависят от переменной $\varphi = \ln(-\sigma_\alpha^2 \zeta \eta)$.

В этих двух случаях мы рассматриваем $F(R) \sim R^n$, где степень $n \neq 1$ может принимать практически любые действительные значения. Также мы накладываем на функции анзац: $\alpha(\zeta, \eta) = F_R^{\frac{2n-1}{n-2}}$, $n \neq 2$. Это позволяет точно решить (3)-(4) и найти интервал в виде:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -4f(\varphi) d\zeta d\eta - \frac{\omega_0}{\Psi_0} w^{\frac{2n-1}{3(n-1)}} \tilde{\psi}(\Upsilon) (dx^1)^2 - \\
 &- 2w^{\frac{2n-1}{3(n-1)}} \tilde{\psi}(\Upsilon) \left(\tilde{\omega}(\Upsilon) + \frac{\tilde{\omega}_0 \omega_0}{\Psi_0} \right) dx^1 dx^2 \\
 &- \frac{\Psi_0}{\omega_0} w^{\frac{2n-1}{3(n-1)}} \left[\tilde{\psi}(\Upsilon) \left(\tilde{\omega}(\Upsilon) + \frac{\tilde{\omega}_0 \omega_0}{\Psi_0} \right)^2 + \sigma_\alpha \tilde{\psi}^{-1}(\Upsilon) \right] (dx^2)^2, \tag{5}
 \end{aligned}$$

где $w = F_R^{\frac{3(n-1)}{n-2}}$, $\tilde{\psi} \sim \psi$, $\tilde{\omega} \sim \omega$, $\Upsilon = \Psi_0 \int \frac{d\varphi}{w} + \tilde{\varphi}_0$ и $\int \frac{dw}{\sqrt{w^{\frac{8n^2-14n+5}{3(n-1)^2}} + C_0}} \sim \varphi + \varphi_0$. Полученные

решения являются новыми. Их явный вид достаточно громоздкий и будет представлен в докладе.

Случай одной переменной.

Метрика Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера: $ds^2 = -dt^2 + (a(t))^2 \sum_{i=1,2,3} (dx^i)^2$. Уравнение

Фридмана: $18H(\ddot{H} + 4H\dot{H})F_{RR} - 3(\dot{H} + H^2)F_R + \frac{1}{2}F = 0$, где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ -параметр Хаббла; скалярная кривизна $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$. Так как в этом уравнении есть $\frac{d}{dt}$, $\frac{d}{dR}$ и $\frac{dR}{dt} \neq 0$, проинтегрировать это уравнение в общем виде нельзя. Нами был предложен анзац $\frac{1}{\sqrt{H^2}} \frac{dH^2}{dt} = \Phi(H^2)$, позволивший записать уравнение Фридмана как

$$F_{xx} - \left(\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x + 4} + \frac{\Phi + 2x}{2\Phi x} \right) F_x + \frac{\Phi_x + 4}{2\Phi x} F = 0, \quad x = H^2 \tag{6}$$

и получить совокупность точных решений, часть из которых являются новыми решениями. Одно из таких решений было проанализировано нами как пригодное для описания космологической инфляции.

Литература

1. M. Shubina Exact solutions of four-dimensional metric $f(R)$ gravity depending on two variables, Gravitation and Cosmology, 27, 396 (2021) [10.1134/s0202289321040125](https://doi.org/10.1134/s0202289321040125)
 2. M. Shubina Exact analytical vacuum solutions of R^n -gravity model depending on two variables, Annals of Physics, 451, 169245 (2023) [10.1016/j.aop.2023.169245](https://doi.org/10.1016/j.aop.2023.169245)

3. M. Shubina Some exact solutions of Friedmann cosmological equation, Annals of Physics, 462, 169613 (2024) [10.1016/j.aop.2024.169613](https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169613)

THE TIME-OPTIMAL PROBLEM FOR A FOURTH ORDER PARABOLIC EQUATION IN AN ONE-DIMENSIONAL DOMAIN

F.N. Dekhkonov

f.n.dehqonov@mail.ru

UDC 517.977

In this paper, we consider a boundary control problem for a fourth-order parabolic equation in a bounded one-dimensional domain. The problem given by the method of separation of variables is reduced to the Volterra integral equation of the first kind. The existence of the control function was proved by the Laplace transform method and the estimate of the minimum time to reach the given average temperature in the rod was found.

Keywords: initial-boundary problem, minimal time, integral equation, admissible control, Laplace transform.

Introduction. Consider the fourth order parabolic equation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T := (0, l) \times (0, \infty), \quad (1)$$

with boundary conditions

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0, \quad (3)$$

and initial condition

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $\mu(t) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ is an *admissible control*, if this function satisfies the conditions

$$\mu(0) = 0, \quad |\mu(t)| \leq M, \quad t \geq 0.$$

Assume that the *weight function* $\rho(x) \in W_2^1([0, l])$ satisfies the conditions

$$\rho(x) \geq 0, \quad \rho'(x) \leq 0, \quad \int_0^l \rho(x) dx = 1, \quad 0 \leq x \leq l.$$

It is well known that some fourth-order parabolic equations have been introduced to describe the epitaxial growth of nanoscale thin films, and thus have been of increasing interest in materials science in recent years [1].

Time-Optimal Problem. Let $\theta > 0$ be a given constant. Problem consists looking for the minimal value of $T > 0$ so that for $t > 0$ the solution $u(x, t)$ of the problem (1)-(4) with control function $\mu(t)$ exists and for some $T_1 > T$ satisfies the equation

$$\int_0^l \rho(x) u(x, t) dx = \theta, \quad T \leq t \leq T_1.$$

The optimal control problem for the second order parabolic type equations was studied in [2-3]. The boundary control problem for a second order parabolic type equation with a piecewise smooth boundary in an n -dimensional domain was studied by Albeverio and Alimov [4] and an estimate for the minimum time required to reach a given average temperature was found. Control problems for the second-order parabolic equation in the three-dimensional domain are studied in [5]. Control problems for second-order parabolic equations in bounded two-dimensional domains are studied in works [6-7].

In [8], Guo considered the null-boundary control problem for a fourth-order parabolic equation in a one-dimensional bounded domain. This problem uses the method of reducing the control problem to well-posed problems proposed by Guo and Littman. Control problems related to the fourth order parabolic equation were studied in works [9-10].

We consider

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) = \lambda X(x), & 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0, & X''(0) = X''(l) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Then we have

$$\lambda_k = \frac{k^4 \pi^4}{l^4}, \quad X_k(x) = \sin \frac{k \pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Set

$$\beta_k = \frac{\pi^3 k^3}{l^3} \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

where ρ_k is the Fourier coefficient of the function $\rho(x)$.

Theorem 1. *Let*

$$0 < \theta < \frac{\beta_1 M}{\lambda_1}.$$

Set

$$T_0 = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{\theta \lambda_1}{\beta_1 M} \right).$$

Then a solution T_{min} of the Problem exists and the estimate $T_{min} \leq T_0$ is valid.

References

1. King B.B., Stein O., Winkler M. A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth. *J. Math. Anal. Appl.* 2003; 286: pp. 459-490.
2. Fattorini H.O. Time-optimal control of solutions of operational differential equations. *SIAM J. Control* 1965; 2: pp. 49-65.
3. Egorov Yu.V. Optimal control in Banach spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 1967; 150: pp. 241-244.
4. Albeverio S., Alimov Sh.A. On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process. *Appl. Math. Opt.* 2008; 57(1): pp. 58-68.
5. Dekhkonov F.N. On the control problem associated with the heating process. *Mathematical notes of NEFU* 2022; 29(4): pp. 62-71.
6. Fayazova Z.K. Boundary control of the heat transfer process in the space. *Izv. Vyssh. Uchebe. Zaved. Mat.* 2019; 12: pp. 82-90.
7. Dekhkonov F.N. On a time-optimal control of thermal processes in a boundary value problem. *Lobachevskii. J. Math.* 2022; 43(1): pp. 192-198.
8. Guo Y. J. L. Null boundary controllability for a fourth order parabolic equation. *Taiwanese J. Math.* 2002; 6: pp. 421-431.
9. Xu R., Chen T., Liu C., Ding Y. Global well-posedness and global attractor of fourth order semilinear parabolic equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 2015; 38: pp. 1515-1529.
10. Chen Y. Global dynamical behavior of solutions for finite degenerate fourth-order parabolic equations with mean curvature nonlinearity. *Communications in Analysis and Mechanics* 2023; 15: pp. 658-694.

Секция 4

Анализ и спектральная теория операторов

ВЗАИМОСВЯЗЬ КЛАССИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Р. Алимов, И.Г. Царьков

alexey.alimov-msu@yandex.ru, tsar@mech.math.msu.su

УДК 517.982.256, 517.982.252

Изучаются различные обобщения на случай несимметричных пространств таких классических понятий теории приближений – аппроксимативная компактность, непрерывность метрической функции и метрической проекции. Изучаются взаимосвязи между этими понятиями.

Ключевые слова: несимметричная норма, аппроксимативно компактное множество, OR-устойчивость, π -солнце, CLUR-пространство.

По определению *несимметричная норма* $\|\cdot\|$ на линейном действительном пространстве X удовлетворяет аксиомам: 1) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$ для всех $\alpha \geq 0$, $x \in X$; 2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in X$; 3) $\|x\| \geq 0$ для всех $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Если $\|\cdot\|$ – несимметричная норма, то функционал $\|x\|_{\text{sym}} = \max\{\|x\|, \|-x\|\}$, $x \in X$, называемый *нормой симметризации*, является нормой. Несимметрично нормированное пространство $X = (X, \|\cdot\|)$ называется *симметризуемым*, если несимметричная норма $\|\cdot\|$ эквивалентна норме симметризации $\|\cdot\|_{\text{sym}}$, т.е. найдется число $K \geq 1$ такое, что $K^{-1}\|x\|_{\text{sym}} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\text{sym}}$ для всех $x \in X$.

Ниже $S(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| = r\}$ – сфера с центром x и радиусом r , $S = S(0, 1)$ – единичная сфера. Для $\emptyset \neq M \subset X$ *функция расстояния* от точки $x \in X$ до множества $M \subset X$ определяется формулой $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|y - x\|$. Множество ближайших точек для точки $x \in X$ из множества M определяется следующим образом: $P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|y - x\|\}$. Топология τ несимметричного пространства $X = (X, \|\cdot\|)$ задается предбазой из открытых шаров $\mathring{B}(x, r)$. В общем случае такая топология удовлетворяет лишь аксиоме отделимости T_1 . Класс несимметричных пространств, являющийся важным и полезным расширением класса линейных нормированных пространств, имеет многочисленные приложения в задачах теории аппроксимации, вариационного исчисления, теоретической информатики и математической экономики.

Алимов Алексей Ростиславович, д.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Царьков Игорь Германович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

В нормированном пространстве (или более общо – симметризуемом несимметричном пространстве) класс (CLUR) определяется следующим образом: $X \in (\text{CLUR})$, если из соотношений $x, y_n \in S$, $\|x + y_n\|/2 \rightarrow 1$ следует, что (y_n) имеет сходящуюся подпоследовательность. Симметризуемое рефлексивное (CLUR)-пространство является пространством Ефимова–Стечкина. Класс (CLUR) включает в себя равномерно выпуклые пространства, локально равномерно выпуклые нормированные пространства, а также все конечномерные несимметричные пространства.

В случае нормированных пространств Ф. Дойч и Дж. Ламберт [1] показали, что если X – линейное нормированное пространство из класса (CLUR), $M \subset X$ – множество существования, $x \in X$, $y \in P_M x$, $z \in (x, y)$, то: 1) z – точка аппроксимативной компактности для M ; 2) множество $P_M x$ компактно. Напомним, что множество M называется чебышёвским, если множество $P_M x$ состоит из одной точки для любого $x \in X$. Е. В. Ошман и независимо Б. Панда и О. Капур (см. [1]) показали, что в нормированных (CLUR)-пространствах класс чебышёвских множеств с непрерывной метрической проекцией совпадает с классом аппроксимативно компактных чебышёвских множеств. В работе [2] получен несимметричный аналог этого результата.

Напомним, что метрическая проекция P_M называется *ORL-непрерывной* (outer radially lower continuous) в точке x (см., например, [3]), если из условий $y \in P_M x$, $(x_n) \subset \{y + \lambda(x - y) \mid \lambda \geq 1\}$, $x_n \rightarrow x$ следует, что $\rho(y, P_M x_n) \rightarrow 0$. Отметим следующий классический результат для линейно нормированных CLUR-пространств (Ф. Дойч, Дж. Ламберт [1]).

Теорема А. Пусть $X \in (\text{CLUR})$, $M \subset X$ – множество существования, P_M ORL-непрерывна. Тогда M аппроксимативно компактно.

Ниже мы обобщаем этот результат на случай несимметричных пространств, рассматривая при этом не обязательно замкнутые множества.

В геометрической теории приближений важную роль играют понятия δ - и γ -солнц (см., например, [3]). К примеру, на настоящий момент не известна характеристика пространств, в которых чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является солнцем (это верно, к примеру, в пространствах $C(Q)$). Однако хорошо известно, что чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией является δ -солнцем (см., например, [3, теорема 6.5]). Последнее означает по определению, что $\frac{\rho(x_n, M) - \rho(x, M)}{\|x_n - x\|} \rightarrow 1$ для любой точки $x \notin M$ и любой последовательности $x_n \rightarrow x$. В последнее время свойства типа δ -солнечности показали свою важность в ряде задач \min - и \max -аппроксимации (см., например, [4], [5]).

Рассмотрим следующее свойство, расширяющее понятие δ -солнечности множества и являющееся удобным для приложений. Точка x называется *точкой π -солнечности* для множества M , если найдутся точка y из замыкания \bar{M} множества M и последовательность (x_n) , $x \in (y, x_n)$, $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(x_n, M) - \|y - x\|}{\|x - x_n\|} = 1 \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(x_n, \bar{M}) - \|y - x\|}{\|x - x_n\|} \right).$$

Множество $M \subset X$ называется *π -солнцем*, если любая точка x является точкой π -солнечности для множества M .

Пусть X – симметризуемое несимметричное пространство, $\emptyset \neq M \subset X$. Множество M назовем *OR-устойчивым* в точке x , если найдутся точка $y \in P_{\bar{M}} x$ и последовательность (x_n) , $x \in (y, x_n)$, $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, такие $\rho(y, P_{\bar{M}} x_n) \rightarrow 0$. (Здесь “OR” – сокращение от англ. outer radially.) Множество $\emptyset \neq M \subset X$ называется *строго OR-устойчивым* в точке x , если $P_{\bar{M}} x \neq \emptyset$ и для любой точки $y \in P_{\bar{M}} x$ найдется последовательность (x_n) , $x \in (y, x_n)$, $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, такая, что $\rho(y, P_{\bar{M}} x_n) \rightarrow 0$.

В следующем результате мы обобщаем и расширяем теорему А на случай несимметричных пространств и с заменой ORL-непрерывности на OR-устойчивость.

Теорема 1. Пусть $X \in (\text{CLUR})$ – симметризуемое несимметричное пространство, $M \subset X$ – множество существования, x – точка аппроксимативной компактности для множества M и $P_M x = \{y\}$. Тогда M (строго) OR-устойчиво в точке x .

Известен следующий классический результат [1].

Теорема В. Пусть $X \in (\text{CLUR})$, $M \subset X$ – чебышёвское множество. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) M аппроксимативно компактно;

2) метрическая проекция P_M ORL-непрерывна;

3) метрическая проекция P_M непрерывна.

Следующая теорема расширяет и обобщает теорему В.

Теорема 2. Пусть $X \in (\text{CLUR})$ – симметризуемое несимметричное пространство (в частности, линейное нормированное пространство), $M \subset X$ – множество существования, $x \in X$ и $P_M x = \{y\}$. Тогда следующие условия равносильны:

1) x – точка аппроксимативной компактности для множества M ;

2) M (строго) OR-устойчиво в точке x ;

3) x – точка π -солнечности для M .

Литература

1. F. Deutsch, J. M. Lambert, On continuity of metric projections // J. Approx. Theory **29**(2) (1980), 116–131.

2. A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, Connectedness and approximative properties of sets in asymmetric spaces // Filomat **38**(9) (2024).

3. A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, Geometric approximation theory (Springer, Cham, 2021).

4. A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, Max-solar properties of sets in normed and asymmetrically normed spaces // J. Convex Anal. **30**(1) (2023), 159–174

5. I. G. Tsar'kov, Estimates of the Chebyshev radius in terms of the MAX-metric function and the MAX-projection operator // Russ. J. Math. Physics **30**(1) (2023), 128–134.

О РАСШИРЕНИЯХ С ВЫХОДОМ ИЗ ПРОСТРАНСТВА, АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА И РЕГУЛЯРИЗОВАННОМ СЛЕДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Н.М. Асланова

nigar.aslanova@azmiu.edu.az

Изучаются спектральные вопросы для дифференциального уравнения четвертого порядка с операторным коэффициентом, когда граничные условия в одном конце интервала содержат спектральный параметр и неограниченный оператор. Установлено одно тождество для характеристического детерминанта, связывающее его с нормировочными множителями, которое применяется для вычисления регуляризованного следа.

Ключевые слова: дифференциально-операторное уравнение, спектр, регуляризованный след.

Рассматриваем следующую спектральную задачу

$$y^{IV}(t) + Ay(t) + q(t)y(t) = \lambda y(t), \quad (1)$$

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad (2)$$

$$-y'''(1) = \lambda Q_1 y(1), \quad (3)$$

$$y''(1) = Q_2 y'(1), \quad (4)$$

в пространстве $L_2(H, (0, 1))$, где H – абстрактное сепарабельное гильбертово пространство. Коэффициенты уравнения: A – неограниченный самосопряженный оператор, $A^{-1} \in \sigma_\infty$, а $q(t)$ – ограниченный в $L_2(H, (0, 1))$ самосопряженный оператор. Коэффициенты Q_1, Q_2 граничных условий – также самосопряженные, неограниченные, положительно определенные операторы. Очевидно, что невозможно определить самосопряженный оператор связанный с этой задачей оставаясь в пространстве $L_2(H, (0, 1))$. Поэтому наша цель определить минимальный

оператор с выходом из пространства, дать там описание максимального оператора и самосопряженных расширений в терминах граничных условий. И, наконец, для оператора соответствующего спектральной задаче (1)–(4) найти асимптотику собственных значений и вывести формулу регуляризованного следа.

Вводим прямое произведение $H = L_2(H, (0, 1)) \oplus H_Q^2$ со скалярным произведением его элементов $Y = (y(t), y_1, y_2)$, $Z = (z(t), z_1, z_2)$

$$(Y, Z)_H = (y(t), z(t))_{L_2(H, (0, 1))} + (Q_1^{-1}y_1, z_1) + (Q_2^{-1}y_2, z_2).$$

Пусть оператор L'_0 имеет область определения

$$D(L'_0) = \{Y/Y = (y(t), Q_1y(1), Q_2y'(1)), y(t) \in C_0^\infty(H_\infty, (0, 1]), y(1) \in D(Q_1),$$

$$y'(1) \in D(Q_2), y''(1), y'''(1) y(1) \in H\},$$

где $H_\infty = \bigcap_{j=1}^\infty (D(A^j))$, и действует как $L'_0(Y) = (ly, -y'''(1), y''t(1))$.

Замыкание L'_0 в H называем минимальным оператором. Изучаются области определения максимального оператора, самосопряженных расширений и другие спектральные вопросы. Установлено одно отношение связывающее характеристический детерминант и нормирующие множители, которое применяем к вычислению регуляризованного следа. Ранее нами были исследованы асимптотики спектра и регуляризованные следы для дифференциального уравнения (1) с вхождением спектрального параметра лишь в одно краевое условие и без неограниченных операторов Q_1, Q_2 [1,2].

Литература

1. *Aslanova Nigar M., Bayramoglu Mamed, Aslanov Khalig M.* Eigenvalue problem associated with the fourth order operator differential equation. Rocky mountain journal of mathematics, vol.48, issue 6, pp. 287-299, DOI: [10.7153/oam-2018-12-19](https://doi.org/10.7153/oam-2018-12-19), 2018.
2. *Aslanova Nigar M., Bayramoglu Mamed, Aslanov Khalig M.* Some spectral properties of fourth order differential operator equation. Operators and matrices. vol.12, issue 1, pp. 1763-1779, DOI: [10.1216/RMJ-2018-48-6-1763](https://doi.org/10.1216/RMJ-2018-48-6-1763), 2018.

МЕТОДЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова

anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, kostinalubov@bk.ru, nat-uskova@mail.ru

УДК 517.9

В работе вводится дифференциальный оператор в пространстве медленно меняющихся на бесконечности функций. Показано, что он эквивалентен (то есть имеет совпадающие свойства обратимости) некоторому ограниченному разностному оператору и узловому оператору.

Ключевые слова: состояние обратимости, эквивалентные операторы.

Баскаков Анатолий Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, ВГУ, факультет прикладной математики и механики (Воронеж, Россия)

Гаркавенко Галина Валерьевна, к.ф.-м.н., доцент, ВГУ, факультет прикладной математики и механики (Воронеж, Россия)

Костина Любовь Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, ВГУ, факультет прикладной математики и механики (Воронеж, Россия)

Ускова Наталья Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, ВГТУ, кафедра высшей математики и физико-математического моделирования (Воронеж, Россия)

Пусть \mathcal{X} — комплексное банахово пространство и $\text{End } \mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в \mathcal{X} . Через $C_b = C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ обозначено банахово пространство непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций со значениями в \mathcal{X} и $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$. В C_b определим группу операторов $S : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_b$ сдвигов функций $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$. Введем также следующие замкнутые подпространства функций из C_b : $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $C_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ — подпространства равномерно непрерывных, исчезающих на бесконечности и медленно меняющихся на бесконечности функций соответственно. Функция $x \in C_{b,u}$ принадлежит C_{sl} , если $S(u)x - x \in C_0$ для любого $u \in \mathbb{R}$. Наряду с пространствами функций введем также пространства ассоциированных с ними последовательностей (см. [1], [2]): $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $c_0 = c_0(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $c_{sl} = c_{sl}(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, при этом $x \in c_{sl}$, если $S(\alpha)x - x \in c_0$, где $(S(\alpha)x)(n) = x(n + \alpha)$, $n, \alpha \in \mathbb{Z}$.

Пусть J — некоторое подмножество из \mathbb{R} , $\Delta_J = \{(t, s) \in J^2, s \leq t\} \subset \mathbb{R}^2$. Отображение $\mathcal{U} : \Delta_J \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ называется семейством эволюционных операторов на J , если:

- 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$, где I — тождественный оператор;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $\tau \leq s \leq t$, $\tau, s, t \in J$;
- 3) отображение $\mathcal{U} : \Delta_J \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ сильно непрерывно;
- 4) существуют постоянная $M \geq 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq Me^{\alpha(t-s)}$ для всех $t, s \in J$ и $s \leq t$.

По заданному семейству эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_J \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, согласно подходу [1], построим линейный оператор $L_u : D(L_u) \subset C_{sl} \rightarrow C_{sl}$. Функция $x \in C_{sl}$ включена в $D(L_u)$, если существует функция $f \in C_{sl}$ такая, что для всех $t \geq s$, $t, s \in \mathbb{R}$, имеет место равенство

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)x(\tau) d\tau,$$

при этом полагается $L_u x = f$. Если семейство $\mathcal{U} : \Delta_J \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ решает абстрактную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in J, \quad x(s) = x_0 \in D(A(s)),$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $t \in J$, — семейство линейных замкнутых операторов, то оператор L_u называется дифференциальным оператором и обозначается $L_u = -d/dt + A(t)$.

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — банаховы пространства и $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — замкнутый линейный оператор, имеющий плотную в \mathcal{X} область определения $D(A)$. Так как далее мы рассматриваем только замкнутые операторы, то термин замкнутый будет опускаться. В $D(A)$ вводится норма графика $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}$.

Определение 1. [1, 3] Рассмотрим следующие условия:

- 1) $\text{Ker } A = \{0\}$ (оператор A инъективен);
- 2) $1 \leq n \leq \dim \text{Ker } A \leq \infty$;
- 3) $\text{Ker } A$ — дополняемое подпространство либо в $D(A)$, либо в \mathcal{X} ;
- 4) $\text{Im } A = \overline{\text{Im } A}$ (оператор A нормально разрешим), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \text{Ker } A} \frac{\|Ax\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } A)},$$

где $\text{dist}(x, \text{Ker } A) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } A} \|x - x_0\|$;

5) оператор A равномерно инъективен (корректен), т. е. $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$ (в этом случае $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$);

6) $\text{Im } A$ — замкнутое, дополняемое в \mathcal{Y} подпространство и, следовательно, $\gamma(A) > 0$;

7) $\text{Im } A$ — замкнутое подпространство из \mathcal{Y} коразмерности $1 \leq m = \text{codim Im } A \leq \infty$, где $\text{codim Im } A = \dim \mathcal{Y} / \text{Im } A$;

8) $\text{Im } A = \mathcal{Y}$, т. е. оператор A сюръективен;

9) оператор A непрерывно обратим.

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $S_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 9$, то будем говорить, что оператор A находится в состоянии S_0 . Множество состояний оператора A обозначим символом $St_{inv}(A)$. Также через $St_{ker}(A)$ обозначим множество состояний обратимости по ядру, $St_{inv}(A)$ — по образу.

Определение 2. Два линейных оператора $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1$ и $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{Y}_2$ называются эквивалентными, если $St_{inv}(A_1) = St_{inv}(A_2)$.

Метод эквивалентных операторов состоит в следующем. Изучаемому оператору A_1 ставится в соответствие эквивалентный ему оператор A_2 , для которого проще вычислить $St_{inv}(A_2)$.

Пусть $U : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — ограниченная функция. Обозначим через $\mathcal{D} \in \text{End}(c_{sl}, \mathcal{X})$ разностный оператор, действующий по формуле

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in c_{sl}.$$

Теорема 1. Имеет место равенство $St_{inv}(L_u) = St_{inv}(\mathcal{D})$.

Определение 3. [1] Пусть J — подмножество \mathbb{R} . Семейство $\mathcal{U} : \Delta_J \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\Omega \subset J$, если существует ограниченная сильно непрерывная проекторозначная функция $P : \Omega \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ и постоянные $M_0 \geq 1$, $\gamma > 0$, такие что выполнены условия:

- 1) $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s)$, $t \geq s$, $t, s \in \Omega$;
- 2) $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leq M_0 e^{-\gamma(t-s)}$, $t \geq s$, $t, s \in \Omega$;
- 3) для $s \leq t$, $s, t \in \Omega$, сужение $\mathcal{U}_{t,s} : X(s) \rightarrow X(t)$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на область значений $X'(s) = \text{Im } Q(s)$, где $Q(s) = I - P(s)$ есть изоморфизм подпространств $X'(s)$ и $X'(t) = \text{Im } Q(t)$ (полагается оператор $\mathcal{U}(s, t) \in \text{End } \mathcal{X}$ равным $\mathcal{U}_{t,s}^{-1}$ на $X'(t)$ и нулю на $X(t) = \text{Im } P(t)$);
- 4) $\|\mathcal{U}(s, t)Q(t)\| \leq M_0 e^{\gamma(s-t)}$, $t \geq s$, $t, s \in \Omega$.

Пара $P(t)$, $Q(t)$ называется расщепляющей парой для семейства \mathcal{U} .

Условие 1. Пусть $J \subset \mathbb{R}$. Существуют числа $a, b \in J$, $a \leq b$, такие, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_J \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ допускают экспоненциальную дихотомию на множествах

$$J_{-,a} = \{t \in J : t \leq a\}, \quad J_{b,+} = \{t \in J : t \geq b\}$$

с расщепляющими парами проекторозначных функций $P_-, Q_- : J_{-,a} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, $P_+, Q_+ : J_{b,+} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$.

Определение 4. Узловым оператором (при выполнении условия 1) называется оператор

$$N_{b,a} : \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b), \quad N_{b,a}x = Q_+(b)\mathcal{U}(b, a)x, \quad x \in \text{Im } Q_-(a).$$

Теорема 2. Пусть для семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ выполнено условие 1. Тогда $St_{inv}(L_u) = St_{inv}(N_{b,a})$.

Таким образом, имеется три пары эквивалентных операторов: L_u и \mathcal{D} , L_u и $N_{b,a}$, \mathcal{D} и $N_{b,a}$. Самым простым для исследования является оператор $N_{b,a}$.

Отметим, что аналогичные результаты, касающиеся сведения исследования состояния обратимости дифференциального оператора L_u к состоянию обратимости некоторого разностного оператора, но в других функциональных пространствах, например, в $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$, приведены в [1].

Литература

1. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН. 2013. Т. 68, No 1(409). С. 78–128.
2. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений. Матем. заметки. 2012. Т. 92, No 5. С. 643–661.
3. Баскаков А.Г., Диденко В.Б. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов. Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, No 1. С. 3–16.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В.В. Белокуров, А.В. Васильев, А.С. Иванов, Д.В. Сальников, В.В. Чистяков,
Е.Т. Шавгулидзе

vbelokurov@yandex.ru

УДК 530.145.85, 004.942, 004.852

Как известно, аналитическое вычисление функциональных интегралов возможно лишь в некоторых точно решаемых моделях. В общем случае применяются различные приближённые методы расчётов, например, численный метод Монте–Карло, использующий решёточные приближения. В последнее время предпринимаются попытки для решения этой задачи применить машинное обучение. В нашей работе мы вычислили функциональные интегралы с помощью нейронных сетей в некоторых моделях квантовой теории поля и сравнили результаты обоих подходов.

Ключевые слова: функциональный интеграл, квантовая теория поля на решётке, метод Монте–Карло, нейронные сети.

Проблема вычисления наблюдаемых величин в квантовой механике (КМ) и квантовой теории поля (КТП) является актуальной задачей современной теоретической физики. Существует несколько подходов для описания моделей КМ и КТП. Одним из таких подходов является формализм функциональных интегралов [1], [2]. С помощью функциональных интегралов удается формально записать аналитические выражения для наблюдаемых величин, однако выполнить аналитические вычисления удается только в исключительных случаях. В общем случае используются пертурбативные и численные непертурбативные приближенные методы. Одним из непертурбативных методов вычисления функциональных интегралов является метод Монте–Карло для функциональных интегралов (МКФИ) [3]. В методе МКФИ исходный функциональный интеграл аппроксимируется конечномерным кратным интегралом в Евклидовом пространстве-времени, затем, для вычисления физических величин, выполняется процедура предельного перехода к непрерывному пространству-времени.

Работа посвящена применению методов машинного обучения для вычисления функциональных интегралов методом МКФИ. В качестве одного из примеров рассматривается модель релятивистской квантовой механики [4] с гамильтонианом

$$H(\hat{p}, \hat{x}) = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2} + V(\hat{x}). \quad (1)$$

Для вычисления среднего значения оператора \hat{F} методом МКФИ производится аппроксимация кратным интегралом

$$\langle F(x) \rangle = \int F(x) \frac{\exp(-S(x))}{Z} d^N x \approx \frac{\sum_{i=1}^M F(X_i)}{M}. \quad (2)$$

где $\{X_i\}$ — набор траекторий (выборка размера M), имеющих распределение с плотностью вероятности

$$P(x) = \frac{1}{Z} \exp(-S(x)), \quad (3)$$

Белокуров Владимир Викторович, д.ф.-м.н., профессор, декан физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Васильев Артём Викторович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

Иванов Александр Сергеевич, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет

Сальников Дмитрий Владимирович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

Чистяков В.В., студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

Шавгулидзе Евгений Тенгизович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

где $S(x)$ — некоторый функционал на \mathbb{R}^N , определяемый гамильтонианом модели (1). В случае одномерной релятивистской квантовой механики он равен.

$$S(x) = \sum_{i=1}^N \left\{ \ln \left(\frac{y_i}{K_1(m\tau y_i)} \right) + \tau V(x_i) \right\}, \quad y_i = \sqrt{1 + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\tau^2}} \quad (4)$$

Ошибка вычисления является стохастической и может регулироваться увеличением числа траекторий — числа M . Генерирование выборки может быть выполнено с помощью алгоритма Метрополиса [3].

В данной работе производится вычисление двухточечной корреляционной функции $G(s) = \langle x_i x_{i+s} \rangle$ в моделях релятивистской квантовой механики.

Для генерации выборки $\{X_i\}$ можно использовать также алгоритмы машинного обучения, схожие с теми, что применяются для генерации изображений [5]. А именно, используется алгоритм нормализующего потока (normalizing flow) [6]. В рамках этого алгоритма строится отображение (N — число узлов решётки $N \sim 10^1 - 10^2$)

$$g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (5)$$

такое, что если $z \sim \mathbb{N}^N(0, 1)$, то $x = g(z)$, $x \sim P(x)$.

Для построения отображения $g(z)$ используются нейронные сети. В простейшем случае g можно представить в виде композиции аффинных преобразований.

$$g = A_n \circ A_{n-1} \circ \dots \circ A_1. \quad (6)$$

Коэффициенты которых аппроксимируются с помощью нейронных сетей. Таким образом, каждое из преобразований A_i , а вместе с ним и g зависит от некоторого числа параметров (весов) w

$$g = g(z|w), \quad w \in \mathbb{R}^K, \quad K \sim 10^5 - 10^6. \quad (7)$$

Пусть P_g -плотность распределения вероятности на образе отображения g . Для нахождения параметров w требуется, чтобы распределение P_g как можно меньше отличалось от целевого распределения P . Мы ставим задачу минимизации следующей функции

$$\hat{L}[w] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\ln P_g(x_i) + S(x_i)] \approx D_{KL}(P_g|P) - \ln Z, \quad (8)$$

где D_{KL} — дивергенция Кульбака–Лейблера [5]. Оптимизация $\hat{L}[w]$ производится с помощью встроенного алгоритма Adam библиотеки pytorch. Результаты вычислений двухточечной функции Грина, проведённых с помощью метода МКФИ и описанной выше генеративной модели искусственного интеллекта согласуются между собой в ряде рассмотренных моделей.

Литература

1. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. Под ред. В.С. Барашенкова.— Мир, 1968.
2. Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T. Path integrals // Moscow State University, 1990.
3. Creutz M., Freedman B.A. A statistical approach to quantum mechanics // Ann. Phys. 1981. 132. 427.
4. Ivanov A. S., Novoselov A. A., Pavlovsky O. V. Relativistic path integral monte carlo: Relativistic oscillator problem // IJMP C. 2016. 27, 11. 1650133–1–1650133–14.
5. Albergo M. S., Kanwar G., Shanahan P. E. Flow-based generative models for Markov chain Monte Carlo in lattice field theory // Phys. Rev. D. 2019. 100, 034515
6. Papamakarios G. , Nalisnick E., Rezende D. J., Mohamed S., Lakshminarayanan B. Normalizing Flows for Probabilistic Modeling and Inference // Journal of Machine Learning Research, 22(57):1-64, 2021

**ФЕЙНМАНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ И
КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ**

В.В. Белокуров, Е.Т. Шавгулидзе
vvelokurov@yandex.ru, shavgulidze@bk.ru

УДК 517.9

Приводится серия примеров нахождения регуляризованных следов дифференциальных операторов с использованием функциональных интегралов. Описаны методы нахождения интегралов Шварца в SYK теории и дилатонной гравитационной модели.

Ключевые слова: интегралы Фейнмана, регуляризованные следы, интегралы Шварца.

Функциональные интегралы, в частности, интегралы Фейнмана, стали применяться в решении широкого класса задач современной математики и теоретической физики. В докладе приводится серия примеров способа нахождения функциональных интегралов для вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов. Приведем одну из формул для f -регуляризованного следа оператора \hat{H} :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(f) - \lambda_n - c_f) = \\ & = \lim_{t \rightarrow +0} \int_{\Omega} \int_{q+\zeta([0,t]) \subset \Omega} \left[\int_0^t f(\zeta(\tau) + q) d\tau - c_f \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -i \int_0^t H(\zeta(\tau) + q, p(\tau)) d\tau \right\} \Phi_{t,q,q}^{\Omega}(dp, d\zeta) dq \end{aligned}$$

Здесь $H(q, p)$ является символом дифференциального оператора $\hat{H} = H(q, i \frac{\partial}{\partial q})$, а $\Phi_{t,q,q}^{\Omega}(dp, d\zeta)$ – обобщенная мера Фейнмана.

Также описываются методы нахождения шварцовских функциональных интегралов вида

$$\int F(\varphi) \exp \left\{ \int S_{\varphi}(t) dt \right\} d\varphi$$

на группе диффеоморфизмов, где $S_{\varphi}(t) = \frac{\varphi'''(t)}{\varphi'(t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \right)^2$ является шварцианом от диффеоморфизма φ .

Интегралы Шварца появляются в SYK моделях, а также при описаниях поведения черных дыр в теории гравитации. Примером такого вида интеграла является

$$\int \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left(\int_{S^1} S_{\varphi}(t) dt + 2\pi^2 \int_{S^1} (\varphi'(t))^2 dt \right) \right\} d\varphi = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3} e^{\frac{2\pi^2}{\sigma^2}}$$

который удается явно найти с использованием преобразований, связанных с группой гладких диффеоморфизмов единичной окружности.

Литература

1. *Садовничий В.А.* Теория операторов. // Москва, 1971.
2. *Садовничий В.А., Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Представления регуляризованных следов операторов с помощью функциональных интегралов // ДАН, 2012, том 446, № 3, с. 265-268.
3. *Садовничий В.А., Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Гамильтоновы функциональные интегралы, представляющие регуляризованные следы дифференциальных операторов высших порядков // ДАН, 2014, том. 456, № 1, с. 23-26.

Белокуров Владимир Викторович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет (Москва, Россия)

Шавгулидзе Евгений Тенгизович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

4. Садовничий В.А., Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Представления регуляризованных определителей экспонент дифференциальных операторов с помощью функциональных интегралов // ДАН, 2016, том. 466, № 3, с. 272-275.
5. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. Exact solution of the Schwarzian theory // Physical Review D, 2017, издательство American Physical Society (United States), том 96, с. 101701(R).
6. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. Unusual view of the Schwarzian theory // в журнале Modern Physics Letters A, 2018, издательство World Scientific Publishing Co (Singapore), том 33, с. 1850221-1-1850221-7.
7. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. Correlation functions in the Schwarzian theory // в журнале Journal of High Energy Physics, 2018, издательство IOP Publishing ([Bristol, UK], England), том 11, № 36, с. 1-27.
8. Белокуров В.В., Шавгулидзе Е.Т. Полярное разложение меры Винера: Шварциановская теория в сравнении с конформной квантовой механикой // в журнале Теоретическая и математическая физика, 2019, издательство МИАН (Москва), том 200, № 3, с. 465-477.
9. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. Schwarzian functional integrals calculus // в журнале Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2020, издательство IOP Publishing ([Bristol, UK], England), том 53, № 48, с. 485201-485201.
10. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. Path integrals in quadratic gravity // в журнале Journal of High Energy Physics, 2022, издательство IOP Publishing ([Bristol, UK], England), том 2022, № 2, с. 1-18.
11. Belokurov V.V., Shavgulidze E.T. An approach to quantum 2D gravity // в журнале Physics Letters B, 2023, издательство Elsevier BV (Netherlands), том 836, с. 137633.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.А. Бутерин
buterinsa@sgu.ru

УДК 517.984

Исследуется обратная задача типа Штурма – Лиувилля на конечном интервале с постоянным запаздыванием и потенциалом из W_2^{-1} .

Ключевые слова: обратная спектральная задача, равномерная устойчивость, обобщенная функция, запаздывание, нелокальная квазипроизводная.

Рассмотрим функционально-дифференциальное выражение

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x-a), \quad 0 < x < \pi, \quad a \in (0, \pi),$$

с комплексным потенциалом $q \in W_2^{-1}[0, \pi]$. Последнее означает, что $q = \sigma'$ в смысле распределений с некоторой $\sigma \in L_2(0, \pi)$. Пусть $\sigma(x) = 0$ п.в. на $(0, a)$. Выражение ℓ естественным образом определяется для всех $y \in W_2^1[-a, \pi]$.

На таких y рассмотрим две краевые задачи $B_j(q)$, $j = 0, 1$, вида

$$\ell y = \lambda y, \quad y(0) = y^{[j]}(\pi) = 0, \tag{1}$$

где $y^{[0]}(x) := y(x)$, $y^{[1]}(x) := y'(x) - \sigma(x)y(x-a)$ и $y(x) = 0$ при $x < 0$. Корректность правого условия при $j = 1$ обеспечивается тем, что для всякого решения y уравнения в (1) автоматически выполняется $y^{[1]} \in AC[0, \pi]$.

Отметим, что при $a = 0$ выражение $y^{[1]}$ совпадает с квазипроизводной, введенной в [1] для сингулярного выражения Штурма – Лиувилля.

Теорема 1. *Спектр $\{\lambda_{n,j}\}$ задачи $B_j(q)$, $j = 0, 1$, имеет вид*

$$\lambda_{n,j} = \left(n - \frac{j}{2} + \varkappa_{n,j} \right)^2, \quad \{\varkappa_{n,j}\} \in l_2, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Задача 1. Заданы спектры $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$, найти потенциал q .

Обратные задачи типа Штурма–Лиувилля с запаздыванием и обычным, т.е. не обобщенным, потенциалом изучались в [2–7] и других работах (см. краткий обзор в [7]). В частности, в [2] получена единственность решения обратной задачи для аналитических $q(x)$. Единственность при $a \geq \pi/2$ получается сравнительно легко и для $q(x) \in L(0, \pi)$. В [3] она доказывается для таких $q(x)$, но при $a \in [2\pi/5, \pi/2)$. Однако в [4–6] установлено, что при $a \in (0, 2\pi/5)$ решение, вообще говоря, неединственно, причем в [5] соответствующий контрпример для $a \in (\pi/3, 2\pi/5)$ построен в $W_2^1[0, \pi]$.

Поэтому в теоремах 2–4 ниже предполагается, что $a \in [2\pi/5, \pi)$.

Теорема 2. Задание $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$ однозначно определяет q .

Теорема 3. Произвольные последовательности комплексных чисел $\{\lambda_{n,0}\}$ and $\{\lambda_{n,1}\}$ вида (2) являются спектрами задач $B_0(q)$ и $B_1(q)$, соответственно, с некоторым потенциалом $q \in W_2^{-1}[0, \pi]$, эквивалентным нулю на $(0, a)$, тогда и только тогда, когда типы целых функций

$$f_0(z) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n,0} - z^2}{n^2} - \frac{\sin z\pi}{z}, \quad f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n,1} - z^2}{(n - 1/2)^2} - \cos z\pi$$

при порядке 1 не превосходят $\pi - a$.

Пусть $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\varkappa}_{n,j}$ для $B_j(\tilde{q})$ имеют тот же смысл, что и σ , $\varkappa_{n,j}$ – для $B_j(q)$.

Теорема 4. Для всякого $r > 0$ найдется такое C_r , что

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{L_2(a,\pi)} \leq C_r \left(\|\{\varkappa_{n,0} - \tilde{\varkappa}_{n,0}\}\|_{l_2} + \|\{\varkappa_{n,1} - \tilde{\varkappa}_{n,1}\}\|_{l_2} \right),$$

коль скоро $\|\{\varkappa_{n,j}\}\|_{l_2} \leq r$ и $\|\{\tilde{\varkappa}_{n,j}\}\|_{l_2} \leq r$ при $j = 0, 1$.

Теорема 4 дает равномерную устойчивость решения обратной задачи. Другими словами, задача 1 является Липшиц-непрерывной в каждом шаре конечного радиуса. Равномерная устойчивость классической обратной задачи Штурма–Лиувилля, т.е. при $a = 0$, впервые была получена в [8] в самосопряженном случае, но сразу в непрерывной шкале пространств $W_2^\alpha[0, \pi]$ при $\alpha > -1$. Случай $\alpha = -1$ был охвачен в [9] другим методом. При этом локальный случай $a = 0$, в отличие от теоремы 4, всегда требует наличия специального зазора между собственными значениями краевых задач при разных j . Кроме того, для доказательства теоремы 4 используется иной подход, основанный на равномерной устойчивости восстановления характеристических функций задач $B_j(q)$ по их нулям [10].

Литература

1. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами, Матем. заметки, **66:6** (1999), 897–912; Engl. transl. in Math. Notes **66** (1999) no.6., 741–753.
2. Pikula M. Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra, Mat. Vestnik **43** (1991) no.3-4, 159–171.
3. Bondarenko N., Yurko V. An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument, Appl. Math. Lett. **83** (2018) 140–144.
4. Djurić N., Buterin S. On an open question in recovering Sturm–Liouville-type operators with delay, Appl. Math. Lett. **113** (2021) 106862.
5. Djurić N., Buterin S. On non-uniqueness of recovering Sturm–Liouville operators with delay, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **102** (2021) 105900.
6. Djurić N., Buterin S. Iso-bispectral potentials for Sturm–Liouville-type operators with small delay, Nonlin. Analysis: Real World Appl. **63** (2022) 103390.
7. Buterin S.A., Malyugina M.A., Shieh C.-T. An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays, Appl. Math. Comput. **411** (2021) 126475.
8. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость, Функц. анализ и его приложения, **44:4** (2010), 34–53; Engl. transl. in Funct. Anal. Appl. **44** (2010) no.4, 270–285.
9. Hryniv R.O. Analyticity and uniform stability in the inverse singular Sturm–Liouville spectral problem, Inverse Problems **27** (2011) 065011.

10. Бутерин С.А. О равномерной устойчивости восстановления функций типа синуса с асимптотически отделенными нулями, Матем. заметки, **111:3** (2022), 339–353; Engl. transl. in Math. Notes **111** (2022) no.3, 343–355.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ГРАНД ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА И ГРАНД КЛАССОВ ХАРДИ

М.И. Исмаилов

miqdad-ismailov@rambler.ru

УДК 517.51

В докладе введены подпространства гранд пространства Лебега и гранд классов Харди с определенными свойствами коэффициентов Фурье по системе экспонент. Устанавливается базисность системы экспонент в подпространствах гранд пространства Лебега, непрерывных по сдвигу, и доказана формула Коши в гранд классах Харди.

Ключевые слова: система экспонент, гранд пространство Лебега, гранд классы Харди.

Пусть $L_p(-\pi, \pi)$, $p > 1$, — гранд пространство Лебега ([1]). Обозначим через l_p — гранд пространство последовательностей скаляров $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\|\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{l_p} = \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \frac{1}{\varepsilon^{p(\varepsilon)}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^{p'(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p'(\varepsilon)}} < +\infty, \quad p(\varepsilon) = p - \varepsilon, \quad p'(\varepsilon) = \frac{p(\varepsilon)}{p(\varepsilon) - 1}.$$

Пусть $\hat{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — последовательность коэффициентов Фурье $f \in L_p(-\pi, \pi)$ по системе $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$: $f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим линейное пространство $L_{p,\nu}(-\pi, \pi) = \{f \in L_p(-\pi, \pi) : \hat{f} \in l_\nu\}$, $\nu > 1$, с обычными линейными действиями. Легко показывается, что $L_{p,\nu}(-\pi, \pi)$ становится банаховым пространством относительно нормы $\|f\|_{L_{p,\nu}} = \|f\|_{L_p} + \|\hat{f}\|_{l_\nu}$.

Пусть $G_p(-\pi, \pi)$ — замыкание в $L_p(-\pi, \pi)$ множества $C_0^\infty[-\pi, \pi]$ бесконечно дифференцируемых, финитных на $[-\pi, \pi]$ функций. Рассмотрим подпространство $G_{p,\nu}(-\pi, \pi)$ функций $f \in L_{p,\nu}(-\pi, \pi)$, таких, что $f \in G_p(-\pi, \pi)$.

Справедлива

Теорема 1. Система $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует базис в $G_{p,\nu}(-\pi, \pi)$.

Пусть H_p^+ , $p > 1$, — класс Харди ([2]) аналитических в $\omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f , удовлетворяющих условию $\|f\|_{H_p^+} = \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_p < +\infty$, $f_r(t) = f(re^{it})$. Введем гранд-пространство Харди $H_{p,\nu}^+$, $p > 1$, функций $f \in H_p^+$ таких, что $\|f\|_{H_{p,\nu}^+} = \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_{p,\nu} < +\infty$. Очевидно, что каждая функция $f \in H_{p,\nu}^+$ имеет при $r \rightarrow 1$ почти всюду на $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ некасательные граничные значения f^+ .

Имеет место следующая

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

i) если $f \in H_{p,\nu}^+$, то имеет место формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^+(\xi)}{\xi - z} dz, \quad z \in \omega. \quad (1)$$

ii) если $f \in L_{p,\nu}(-\pi, \pi)$, то функция f , определенная по формуле Коши (1), принадлежит классу $H_{p,\nu}^+$.

Отметим, что эти результаты в случае пространства $L_{p,\nu}(-\pi, \pi)$ были получены в [3].

Литература

1. R.E. Castillo, H. Rafeiro An Introductory Course in Lebesgue Spaces, Springer Int. Publ. Switzerland, 2016.
2. M.I. Ismailov “On the Solvability of Riemann Problems in Grand Hardy Classes”, Mathematical Notes, v.108, № 2 (2020), p. 55–69.
3. A. Huseynli, A. Mirzabalayeva Spaces: Cauchy Singular Integral, Hardy Classes and Riemann-Hilbert Problem in this Framework. Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA), vol. 16, №. 1 (2019), 83-91.

ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ И ОДНОЛИСТНОГО ПОКРЫТИЯ НА КЛАССАХ ОГРАНИЧЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

О.С. Кудрявцева, А.П. Солодов

kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

УДК 517.54

Найдены точные области однолиственности и однолистного покрытия на классах голоморфных отображений круга в себя с отталкивающей граничной неподвижной точкой в зависимости от расположения притягивающей неподвижной точки и значения угловой производной в отталкивающей неподвижной точке.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолиственности, область однолистного покрытия.

В работе изучается задача об областях однолиственности и однолистного покрытия на классах ограниченных голоморфных в круге функций с заданными неподвижными точками.

Пусть $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ — класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ в себя, которые оставляют неподвижной граничную точку $z = 1$ (неподвижность понимается в смысле углового предела) и имеют ограничение на значение угловой производной: $f'(1) = \alpha$, $\alpha > 1$. В [1] показано, что ни при каком $\alpha > 1$ на классе $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ нет непустых областей однолиственности. Поскольку любая функция из $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ наряду с отталкивающей неподвижной точкой обязательно имеет притягивающую неподвижную точку (см. [2]), то класс $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ естественно представить в виде объединения непересекающихся подклассов, выделяемых условием расположения притягивающей неподвижной точки q (внутри или на границе круга \mathbb{D}): $\mathcal{B}_\alpha\{1\} = \bigcup_{q \in \overline{\mathbb{D}}} \mathcal{B}_\alpha[q, 1]$.

Существование непустых областей однолиственности на указанных подклассах класса $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$ при некоторых значениях α было установлено в работе [3]. Далее для простоты формулировок будем полагать $q = 0$ (случай внутренней притягивающей неподвижной точки) и $q = -1$ (случай граничной притягивающей неподвижной точки).

Точная область однолиственности на классе $\mathcal{B}_\alpha[0, 1]$ при $\alpha \in (1, 4)$ найдена в работе [4], а на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ при $\alpha \in (1, 4)$ — в работе [5].

Теорема 1 ([4]). Пусть $\alpha \in (1, 4)$. Если $f \in \mathcal{B}_\alpha[0, 1]$, то f однолиственна в области

$$\mathcal{D}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - 2z + |z|^2|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}.$$

Работа А.П. Солодова выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”

Кудрявцева Ольга Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, Волгоградский государственный технический университет (Волгоград, Россия)

Солодов Алексей Петрович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Какова бы ни была область \mathcal{V} , $\mathcal{D}(\alpha) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{D}(\alpha)$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[0, 1]$, не однолистная в области \mathcal{V} .

Теорема 2 ([5]). Пусть $\alpha \in (1, 4)$. Если $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, то f однолистка в области

$$\mathcal{U}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область \mathcal{V} , $\mathcal{U}(\alpha) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}(\alpha)$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, не однолистная в области \mathcal{V} .

Тем самым теоремы 1 и 2 дают полный ответ на вопрос о точной области однолистности на подклассах $\mathcal{B}_\alpha\{1\}$, $\alpha \in (1, 4)$, с фиксированным расположением притягивающей неподвижной точки. Оказалось, что структура областей однолистности играет ключевую роль в поиске точных областей однолистного покрытия. Имеют место следующие результаты.

Теорема 3 ([6]). Пусть $f \in \mathcal{B}_\alpha[0, 1]$, $\alpha \in (1, 2)$. Тогда существует функция, обратная к f и конформно отображающая область

$$\mathcal{W}(\alpha) = \left\{ w \in \mathbb{D} : \frac{|1 - w|}{1 - |w|} < \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha - 1}} \right\}$$

на некоторую область $\mathcal{X} \subset \mathbb{D}$.

Какова бы ни была область \mathcal{V} , $\mathcal{W}(\alpha) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}(\alpha)$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[0, 1]$, не имеющая обратной в области \mathcal{V} .

Наконец, при $\alpha \geq 2$ на классе $\mathcal{B}_\alpha[0, 1]$ нет непустых областей однолистного покрытия.

Теорема 4. Пусть $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, $\alpha \in (1, 2)$. Тогда существует функция, обратная к f и конформно отображающая область

$$\mathcal{Y}(\alpha) = \left\{ w \in \mathbb{D} : \frac{|1 - w^2|}{1 - |w|^2} < \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha - 1}} \right\}$$

на некоторую область $\mathcal{X} \subset \mathbb{D}$.

Какова бы ни была область \mathcal{V} , $\mathcal{Y}(\alpha) \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathcal{V} \neq \mathcal{Y}(\alpha)$, найдется функция $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, не имеющая обратной в области \mathcal{V} .

Наконец, при $\alpha \geq 2$ на классе $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ нет непустых областей однолистного покрытия.

Литература

1. Кудрявцева О. С., Солодов А. П. Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210, № 7. С. 120–144.
2. Валирон Ж. Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957.
3. Горяйнов В. В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.
4. Солодов А. П. Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, № 5. С. 190–218.
5. Кудрявцева О. С., Солодов А. П. Область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с двумя граничными неподвижными точками // УМН. 2023. Т. 78, № 6, С. 185–186.
6. Кудрявцева О. С., Солодов А. П. Точная область однолистного покрытия на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Матем. сб. 2024. Т. 215, № 2, С. 48–72.

**ОБ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В РЯД
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ**

А.Ф. Кужаев

arsenkuzh@outlook.com

УДК 517.5

В работе анонсируется результат об оценках на коэффициенты ряда экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями. Предполагается, что данным рядом представляется целая функция, до которой продолжается функция из замыкания линейной оболочки системы экспоненциальных мономов в одном весовом пространстве абсолютно интегрируемых функций на всей числовой прямой.

Ключевые слова: целая функция, экспоненциальный моном, ряд экспонент.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k . Считаем, что $|\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. По данной последовательности строится система функций — экспоненциальных мономов:

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Введём ряд геометрических характеристик последовательности Λ . Символом $n(r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0, r)$, и пусть

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}.$$

Величина $\bar{n}(\Lambda)$ называется верхней плотностью последовательности Λ .

Следуя работе [1], будем говорить, что последовательность Λ является *почти вещественной*, если $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ ($k \geq 1$), $\operatorname{Im} \lambda_k / \operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Положим еще

$$m(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|},$$

$$\sigma_{\Lambda}(r) = \max \left\{ \sum_{\substack{|\lambda_k| < r, \\ \operatorname{Re} \lambda_k > 0}} \operatorname{Re} \frac{n_k}{\lambda_k}, \sum_{\substack{|\lambda_k| < r, \\ \operatorname{Re} \lambda_k < 0}} \operatorname{Re} \frac{n_k}{\lambda_k} \right\}.$$

Помимо указанных выше характеристик, широкое применение находит своё применение индекс конденсации А.С. Кривошеева S_{Λ} последовательности Λ , введенный в работе [2]:

$$S_{\Lambda} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \left| \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta \lambda_m), k \neq m} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta \lambda_k} \right)^{n_k} \right|.$$

Теперь введём в рассмотрение функциональное пространство. Пусть $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda, \rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси \mathbb{R} таких, что $\omega(0) = 0, \omega(t) \leq \rho|t|, t \leq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_{\Lambda}(t))}{t^2} dt < +\infty$$

Кужаев Арсен Фанилевич, к.ф.-м.н., ст. преп., Уфимский университет науки и технологий, кафедра математического анализа; Уфимский государственный нефтяной технический университет, кафедра информационных технологий и прикладной математики (Уфа, Россия)

Рассматривается весовое пространство интегрируемых функций на вещественной прямой:

$$L_p^\omega = \left\{ f : \|f\|_{p,\mathbb{R}}^\omega := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-\omega(t)}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

Символом $W^p(\Lambda, \omega)$ обозначим подпространство, которое является замыканием системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве L_p^ω .

Один из основных результатов работы [3], можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема А ([3], Theorem 1). Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ почти вещественная, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\sigma_\Lambda(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow +\infty$, $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda, \rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ продолжается до целой функции F , для которой имеет место представление в виде ряда экспоненциальных мономов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t) dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1,$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$ при $t \leq 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ образуют семейство ядер биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов $\mathcal{E}(\Lambda)$. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Из данной теоремы следует, что есть необходимость в получении оценок на коэффициенты полученного ряда экспоненциальных мономов. Данные оценки можно использовать, например, при оценке типа и порядка целой функции, до которой продолжаются функции из подпространства $W^p(\Lambda, \omega)$. Результаты этого характера можно найти в работах А.Ф. Леонтьева (см., например, [4] (гл. III, §3, теорема 3.3.2)). Результаты из работ А.Ф. Леонтьева сформулированы для случая рядов экспонент, то есть частным случаем рядом вида (1), в которых $n_k = 1, k \in \mathbb{N}$. Данные результаты допускают обобщение на случай рядов экспоненциальных мономов, и одним из утверждений, необходимых для получения данных обобщающих результатов, является следующая теорема, представляющая и самостоятельный интерес.

Теорема 1 (ср. с Lemma 7, [3]). Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, кроме того, $\omega \in \Omega_{\Lambda, \rho}$, $\omega(t) \geq t^2$ при $t > 0$, и

$$\beta_k = \exp(((1 - C) B |\lambda_k| \sigma_\Lambda(|\lambda_k|) + C_1 |\lambda_k|)), \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geq 1,$$

$C_1, C, B > 0$ — некоторые константы.

Тогда функции $H_{\omega,k,j}(t)$ допускают оценки

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leq D_1 \beta_k e^{-\omega(t)}, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geq 1.$$

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leq D_2 \beta_k e^{-2\rho|t|}, \quad t < 0, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geq 1.$$

Литература

1. Кривошеева О. А. Кривошеев А. С. Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29. — №4. — С. 82–139.
2. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. — 2004. — Т. 68. — С. 71–136.
3. Kuzhaev A. F., Krivosheeva O. A. On the Representation by Series of Exponential Monomials with Almost Real Exponents // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — V. 44. — №5. — P. 1892–1907.
4. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент — М.: Наука, 1976. — 536 с.

ОПЕРАТОРЫ БУШМАНА – ЭРДЕЙИ В ФОРМЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

О.Ю. Лукинова, А.М. Кудоси

lukinova@bsu.edu.ru, qudosiajmal@gmail.com

УДК 517.9

Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи определены в виде степенных рядов. В этой форме рассмотрены их основные свойства и применения.

Ключевые слова: операторы преобразования, операторы Бушмана–Эрдейи.

Операторы Бушмана–Эрдейи возникли как интегральные операторы со специальными функциями Лежандра в ядрах, первоначально рассматривались вопросы их ограниченности в классических пространствах функций и приложения к интегральным и дифференциальным уравнениям [1]. Затем С.М. Ситником была установлена важная роль операторов Бушмана–Эрдейи в теории операторов преобразования для сингулярных дифференциальных операторов Бесселя [2]–[3], подробное изучение этих операторов и их многочисленных приложений было продолжено затем в [4]–[6] и ряде других работ (см. указанные ссылки).

Мы рассматриваем представления операторов Бушмана–Эрдейи на аналитических вблизи нуля функциях в виде степенных рядов

$$Af = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k. \quad (1)$$

Коэффициенты рядов a_k представляются в виде отношения гамма-функций, поэтому введённые операторы (1) относятся к известному классу операторов Гельфонда–Леонтьева, см. [1].

Получены результаты о действии указанных операторов в пространствах аналитических функций, теоремы искажения, изучены свойства (1) как операторов преобразования, рассмотрены некоторые приложения к решению дифференциальных уравнений с сингулярными операторами Бесселя.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости. Препринт. Институт автоматизации и процессов управления ДВО АН СССР. Владивосток, 1990, 44 с.
3. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи, Доклады Академии Наук СССР, **320**, № 6, 1326–1330 (1991).
4. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. Современная математика. Фундаментальные направления. **64**, № 2, 211–426 (2018).
5. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019.
6. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press, 2020.

Лукинова Оксана Юрьевна, аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования (Белгород, Россия)

Кудоси Абдул Мохаммад, аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования (Белгород, Россия)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА, ДВОЙСТВЕННОГО К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА – КИПРИЯНОВА

Л.Н. Ляхов, В.А. Калитвин, М.Г. Лапшина
levnlya@mail.ru, kalitvin@gmail.com, marina.lapsh@ya.ru

УДК 517.954

Преобразование Радона – Киприянова (K_γ) введено в 1998 г. И.А. Киприяновым и Л.Н. Ляховым. При решении теоретических и прикладных задач возникает необходимость ввести двойственное (сопряженное) к нему преобразование ($K_\gamma^\#$). В работе доказаны теоремы об ограниченности двойственного преобразования в соответствующем подпространстве Л. Шварца основных функций и $K_\gamma^\#$ -преобразовании свертки функции g с $K_\gamma[f]$ -преобразованием (функции g и f принадлежат соответствующим пространствам основных функций).

Ключевые слова: преобразование Радона, преобразование Радона–Киприянова, обобщенный сдвиг Пуассона, обобщенный сдвиг смешанного типа, обобщенная свертка.

Многочисленные прикладные задачи, порожденные сферической симметрией аргумента соответствующих функций, среди которых особое значение имеют задачи компьютерной томографии, приводят к преобразованию Радона специального вида, введенного в работе [1]:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle) x_1^\gamma dx, \gamma > 0,$$

где $\langle x, \theta \rangle$ – скалярное произведение n -мерных векторов, θ – единичный вектор нормали к плоскости $\langle x, \theta \rangle = p$ (при этом $|p|$ – расстояние от начала координат до плоскости $\langle x, \theta \rangle = p$), а символ $\mathcal{P}_{x_1}^\gamma$ ($\gamma > 0$) обозначает действие оператора Пуассона [2] по переменной x_1 .

Позднее в работах Л.Н. Ляхова это интегральное преобразование получило название *преобразования Радона – Киприянова*.

Произведем вращение $f(x_1, x') \rightarrow f(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$ посредством введения осей координат

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad -\infty < z_1 < +\infty \\ z_2 = x_1 \sin \alpha, \quad \quad \quad \quad \quad 0 < z_2 < +\infty \end{array} \right\}.$$

Пусть $\tilde{f}(z) = f(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$, $z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_{n+1}^+ = \{z: z_2 > 0\}$.

Тогда K_γ -преобразование сводится к *специальному весовому преобразованию Радона* в \mathbb{R}_{n+1}^+ (см. [1], [2]):

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\{p = \langle z, \theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z)$$

в виде интеграла по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle = \langle z, \Theta \rangle\}^+$, определенную неравенством $z_2 > 0$, которая параллельна весовой оси координат z_2 с единичным вектором нормали $\tilde{\theta} = (\theta_1, 0, \theta') = \Theta \in \mathbb{R}_{n+1}^+$. Для удобства полуплоскость интегрирования обозначим символом Θ_\perp^+ , т.е. $\Theta_\perp^+ = \{z: \langle \Theta, z \rangle = p, z_2 > 0\}$. Обратим внимание на то, что $(z_1, z_2, x') \in \Theta_\perp^+$ при всех $z_2 \geq 0$, если только точка $(z_1, x') \in \Theta^\perp \cap \{z: z_2 = 0\}$. При фиксированном векторе Θ примем обозначение

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p).$$

Следуя [3], запишем преобразование Радона – Киприянова в виде интеграла по полуплоскости Θ_\perp^+ в \mathbb{R}_{n+1}^+ :

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z).$$

Ляхов Лев Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ВГУ (Воронеж, Россия); ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского (Липецк, Россия); ЕГУ им. И.А. Бунина (Елец, Россия)

Калитвин Владимир Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, РАНХиГС; ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского (Липецк, Россия)

Лапшина Марина Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского (Липецк, Россия)

Двойственное преобразование в R_1

Через $S_{ev} = S_{ev}^+(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пространства Л. Шварца, пробных функций, четных по Киприянову (см. [4], с.21) по переменной x_1 .

Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Введем линейную форму в \mathbb{R}_1 :

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_1^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp.$$

Положив

$$y = p\Theta + z \in \mathbb{R}_{n+1}^+ = \{y = (z_1, z_2, x') : z_2 > 0\},$$

получим

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma,\theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx',$$

с двойственным оператором $K_{\gamma,\theta}^\# g(x) = \mathcal{P}_{x_1}^\gamma (g(\theta, \langle \theta, x \rangle))$.

Теорема 1.

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx',$$

где $\mathcal{K}_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_{\gamma,\theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx$.

Отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}_\gamma^\#$ получен дополнительным интегрированием функции $K_{\gamma,\theta}^\# g(x)$ по полусфере $S_1^+(n)$, поэтому не зависит от вектора нормали к плоскости.

О преобразованиях Фурье – Бесселя и Фурье

Смешанное преобразование Фурье – Бесселя (введено в [4]) с преобразованием Ганкеля по первой переменной (введено в [5]) определено формулой

$$F_B[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{R_n^+} f(x) j_\nu(x_1 \xi_1) e^{-i\langle x', \xi' \rangle} x_1^\gamma dx, \quad \gamma = 2\nu + 1 > 0,$$

где $j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(t)}{t^\nu}$, J_ν – функция Бесселя первого рода, $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Пространство основных функций S_{ev} инвариантно относительно преобразования F_B и обратимо [4]. Обратное преобразование определено равенством

$$F_B^{-1} [\hat{f}] (x) = (2\pi)^{1-n} 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu + 1) F_B[\hat{f}](-x) = f(x).$$

В этих исследованиях используется представление j-функции Бесселя интегралом Пуассона [5].

Преобразование Фурье в направлении вектора нормали

Пусть $Z_n^+ = Z_n^+(S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1)$ – пространство основных функций Л.Шварца, заданных на единичном цилиндре $S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_{n+1}$. Очевидно, что функция $K_\gamma[f](\xi, p)$ определена на цилиндре Z_n^+ и является четной в следующем смысле:

$$K_\gamma[f](-\xi, -p) = K_\gamma[f](\xi, p).$$

Известны следующие равенства:

$$F_{(p \rightarrow s)} [K_{\gamma,\theta}[f](p)] (s) = F_B[f](s\theta) = F_B[f](\xi),$$

$$K_{\gamma,\theta}[f](p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1} [F_B[f](s\theta)] (p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1} [F_B[f](\xi)] (p), \quad \text{где } s\theta = \xi, \quad |\theta| = 1.$$

K_γ -преобразования обобщенной свертки

Обобщенной сверткой (сверткой Пуассона) функций называется выражение

$$(f * g)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} T_{x_1}^{y_1} f(x_1, x' - y') g(y) y_1^\gamma dy_1 dy',$$

где обобщенный сдвиг Пуассона определен формулой

$$T_{x_1}^{y_1} f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos \alpha}, x'\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha.$$

Если $f, g \in S_{ev}$, то $K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[u](\xi, t) K_\gamma[v](\xi; p-t) dt$, где $(u * v)_\gamma$ — обобщенная свертка функций u и v , порожденная обобщенным смешанным сдвигом Пуассона.

Лемма 1. Для любой функции $\omega \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ справедлива формула

$$\widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1) \omega(p\theta).$$

Теорема 2. Если $g \in \mathbb{Z}_n^+$, то

$$F_{(p \rightarrow s)} \left[\mathcal{K}^\# g \right] (s\theta) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1) |\xi|^{1-n} \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \widehat{g} \left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right].$$

Теорема 3. Если $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, то

$$K_\gamma^\# K_\gamma[f](x) = |S_1(n-1)| \left(\frac{1}{|x|} * f \right)_\gamma,$$

где $|S_1(n-1)|$ — площадь единичной сферы в евклидовом пространстве \mathbb{R}_{n-1} .

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье–Бесселя и Радона // ДАН. — 1998. — 360. — № 2. — С. 157–160.
2. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова–Радона // Тр. МИАН. — 2005. — Т. 248. — С. 153–163.
3. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии — М.: Мир. — 1990. — С. 279.
4. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи — М.: Наука. — 1997. — С. 199.
5. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. — УМН. — 1951. — Т.6. — № 2. — С. 102–143.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ С ПРОПУСКАМИ ДЛИНЫ $2N$ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНУЛЛИ И ЭЙЛЕРА

К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова

mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru

УДК 517.927.25, 511.176

В работе средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, порождённых симметрическим дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и самосопряжёнными граничными условиями в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[0, \pi]$, найдены лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины $2n$ для многочленов Бернулли и Эйлера. Эти соотношения таковы, что из них следуют известные и некоторые новые рекуррентные соотношения с пропусками для соответствующих чисел Бернулли и Эйлера.

Ключевые слова: функция Грина, многочлены, числа Бернулли и Эйлера и рекуррентные соотношения с пропусками для них.

Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из равенств

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t| < 2\pi$, а второе - при $|t| < \pi$, а символами B_n и E_n - числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами $B_n = B_n(0)$ и $E_n = 2^n E_n(1/2)$ ($n = 0, 1, \dots$).

Рекуррентные соотношения с пропусками для чисел B_n и E_n изучаются с середины XIX века по настоящее время (см. [1] — [3]), и, напротив, соответствующие соотношения для многочленов Бернулли и Эйлера в математической литературе крайне мало изучены. Этой теме посвящены наши недавние работы [4] и [5], содержащие соотношения с пропусками длины 4 и 8 соответственно, и, кроме того, нам известна работа [6], содержащая рекуррентные соотношения с пропусками длины 4 и 6 для этих многочленов.

Нами предложен метод, основанный на спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, позволяющий получить рекуррентных соотношений с пропусками длины $2n$ для многочленов Бернулли и Эйлера. Сформулируем основной результат этой работы.

Пусть $n \geq 2$ - фиксированное натуральное число и $\varepsilon = e^{i\pi/n}$. Мощность множества всевозможных отображений множества $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ на множество $\{0, 1\}$ равна 2^{n-1} . Элементы этого множества занумеруем символами m_s и определим числа α_s , полагая

$$\alpha_s = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{m_s(j)} \varepsilon^j, \quad s = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$$

(случай $n = 1$ мы также включаем в рассмотрение, полагая, что сумма по пустому множеству равно 0, т.е. $\alpha_1 = 0$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При $n = 1, 2, \dots$ и $m = 0, 1, \dots$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{[m/(2n)]} 2^{m-2nk} C_{m+n}^{2nk+n} B_{m-2nk}(z) \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (1 + \alpha_s)^{2nk+n-1} = \\ & = \left(1 + \frac{m}{n}\right) \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (2z - 1 + \alpha_s)^{m+n-1} \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20261).
 Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия)
 Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия)

и

$$2^{m+n-1}E_m(z) + n \sum_{k=1}^{[m/(2n)]} 2^{m-2nk} C_m^{2nk} E_{m-2nk}(z) \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1 + \alpha_s)^{2nk-1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (2z - 1 + \alpha_s)^m,$$

где $[a]$ - целая часть числа a и $\nu(s) = 0$, если количество слагаемых со знаком плюс в числе α_s чётное, и $\nu(s) = 1$ в противном случае при $n \geq 2$, и, кроме того, $\nu(1) = 0$ при $n = 1$.

Из этой теоремы немедленно следуют новые и, по-видимому, представляющие самостоятельный интерес представления в терминах введённых выше чисел α_s для многочленов $B_m(z)$ и $E_m(z)$ при $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$ и $n = 1, 2, \dots$

$$B_m(z) = \frac{-i^{n+1}m!}{2^{m+n-1}(n+m-1)!} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (2z - 1 + \alpha_s)^{m+n-1},$$

$$E_m(z) = \frac{1}{2^{m+n-1}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (2z - 1 + \alpha_s)^m,$$

и чисел Бернулли B_{2n} и Эйлера E_{2n-2}

$$B_{2n} = \frac{1}{2^{3n-2}(2^{2n}-1)} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1 + \alpha_s)^{2n}, \quad E_{2n-2} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} \alpha_s^{2n-2}.$$

Кроме того, из теорем 1 следуют многочисленные рекуррентные соотношения с пропусками длины $2n$ для чисел Бернулли и Эйлера, некоторые из которых новы, а другие - хотя бы в неявном виде были известны.

Литература

1. *Ramanujan S.* Some properties of Bernoulli's numbers // J. Indian Math. Soc. — 1911. — № 3. — P. 219–234.
2. *Lehmer D.H.* Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler // Ann. of Math. — 1935. — Vol. 36, № 3. — P. 637–649.
3. *Merca M.* On lacunary recurrences with gaps of length four and eight for the Bernoulli numbers // Bull. Korean Math. Soc. — 2019. — Vol. 56, № 2. — P. 491–499.
4. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины четыре для многочленов Бернулли и Эйлера // Проблемы математического анализа. — 2023. — № 122. — С. 87–94.
5. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками длины восемь для многочленов Бернулли и Эйлера // Математические заметки. — 2024. — Т. 115, № 2. — С. 312–317.
6. *ZHI-Hong Sun* Recurrence formulas with gaps for Bernoulli and Euler polynomials // *arXiv:1403.0435v1 [math.NT]* 3 Mar 2014

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЕМЕЙСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ СДВИГАМИ СПЛАЙНОВ

Е.В. Мищенко

e.mishchenko@g.nsu.ru

УДК 517.518.34, 517.537.3

Доказана устойчивость двух семейств, образованных целочисленными сдвигами, соответственно B -сплайнов $Q_m(x)$ и экспоненциальных сплайнов $U_{m,p}(x)$ для любых целых m и вещественных p . Получены нижние и верхние границы Рисса.

Ключевые слова: E -сплайны, B -сплайны, базис Рисса, границы Рисса.

Согласно определению [1], для установления устойчивости семейства целочисленных сдвигов вида $\{\varphi(x - n), n \in Z\}$ для некоторой функции $\varphi(x)$ из гильбертова пространства H с нормой $\|\cdot\|_H$, необходимо доказать существование двух положительных конечных констант A и B , называемых нижней и верхней границами Рисса, таких что для любой числовой последовательности $\{c_n\}_{n \in Z} \in l_2$ выполнены неравенства:

$$A \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi(x - n) \right\|_H^2 \leq B \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Заметим, что если линейная оболочка множества $\{\varphi(\cdot - n), n \in Z\}$ устойчива и вдобавок плотна в H , то $\{\varphi(\cdot - n), n \in Z\}$ образует безусловный базис (или базис Рисса) в H .

В работе установлены значения границ Рисса для семейств, образованных целочисленными сдвигами для случаев B -сплайнов $Q_m(x)$ – m -кратных свёрток характеристической функции $\chi_{[0,1)}(x)$ единичного отрезка $[0, 1)$:

$$\chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для $m > 1$

$$Q_m(x) = (Q_{m-1} * \chi_{[0,1)})(x) = \int_0^1 Q_{m-1}(x - y) dy.$$

и экспоненциальных сплайнов $U_{m,p}$, заданных рекуррентными формулами при помощи свёрток характеристической функции с функцией $\varphi_p(x)$

$$U_{1,p}(x) = \varphi_p(x) = \begin{cases} \frac{pe^{px}}{e^p - 1}, & \text{if } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

для $m > 0$

$$U_{m+1,p}(x) = (U_{m,p} * \chi_{[0,1)})(x),$$

где m – любое натуральное число, p – любое из R . При доказательстве использованы свойства тригонометрических полиномов, полученные автором при исследовании ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\xi/2 + \pi k)}{\xi/2 + \pi k} \right)^{2m}$$

и элегантное неравенство

$$\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\sinh^2 p} \leq \sup_{p \in R} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\sinh^2 p} \right) = \frac{1}{3} = \inf_{\xi \in R} \left(\frac{1}{\sin^2 \xi} - \frac{1}{\xi^2} \right) \leq \frac{1}{\sin^2 \xi} - \frac{1}{\xi^2},$$

Работа выполнена в рамках государственного задания в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Мищенко Евгения Васильевна, к.ф.-м.н., инженер-исследователь, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория вычислительных проблем задач математической физики (Новосибирск, Россия)

установленное для любых $p, \xi \in (-\infty, \infty)$.

Теорема. Система целочисленных сдвигов $\{U_{m,p}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где $U_{m,p}(x)$ – экспоненциальный сплайн порядка m , устойчива для любых $m \in \mathbb{N}$ и $p \in (-\infty, \infty)$. Верхняя и нижняя границы Рисса $2\pi A_{m,p}$, $2\pi B_{m,p}$ для этих семейств удовлетворяют неравенствам

$$\frac{2^{2m+3}}{\pi^{2(m+1)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}} \leq 2\pi A_{m,p} < 2\pi B_{m,p} = 1.$$

Левое неравенство обращается в равенство при $p = 0$; в этом случае $U_{m,0} = Q_m$.

Литература

1. Ch. Chui. An Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego, 1992.

О ПОЛУГРУППАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ДИСКРЕТНЫМИ ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ ПОЛИНОМАМИ СОБОЛЕВА

Б.П. Осиленкер

b_osilenker@mail.ru

Рассмотрим линейное пространство со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)d\mu(x) + A_1 f(1)g(1) + B_1 f(-1)g(-1) + A_2 f'(1)g'(1) + B_2 f'(-1)g'(-1), \quad (1)$$

где μ -абсолютно непрерывна и функция $\omega = \frac{d\mu(x)}{dx}$ положительна и непрерывна на $(-1, 1)$, A_1, A_2, B_1, B_2 – неотрицательные числа. Пространство Соболева S со скалярным произведением (1) называется дискретным пространством Соболева.

В случае $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ получаем классическое скалярное произведение в $L^2_\mu(-1, 1)$, а при $A_1 > 0, A_2 = 0, B_1 > 0, B_2 = 0$ нагруженное скалярное произведение.

Обозначим через $q_n(x) \equiv q_n(x; A_1, A_2, B_1, B_2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots; x \in [-1, 1]$) систему полиномов n -ой степени с положительным старшим коэффициентом, ортонормированных по отношению к скалярному произведению (1):

$$\langle q_n, q_m \rangle = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, \dots)$$

Полиномы $q_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) называются дискретными ортонормированными полиномами Соболева.

Ортонормированные полиномы $q_n(x)$ для всех $n = 0, 1, \dots; x \in [-1, 1]$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(x^3 - 3x)q_n(x) = \alpha_{n+3}q_{n+3}(x) + \beta_{n+2}q_{n+2}(x) + \gamma_{n+1}q_{n+1}(x) + \delta_n q_n(x) + \gamma_n q_{n-1}(x) + \beta_n q_{n-2}(x) + \alpha_n q_{n-3}(x) \quad (q_{-3}(x) \equiv 0, q_{-2}(x) \equiv 0).$$

Обозначим через \mathfrak{R} множество функций, определенных на промежутке $[-1, 1]$:

$$\mathfrak{R}_p = \left\{ f, \int_{-1}^1 |f(x)|^p d\mu(x) < \infty; f(\pm 1), f'(\pm 1), \text{ существуют} \right\} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Пусть $\mathfrak{E} \equiv \{T(\xi); \xi > 0\}$ — компактная самосопряженная полугруппа линейных ограниченных операторов, преобразующих пространство S в себя:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, q_k \rangle q_k(x) \rightarrow T(\xi)f \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_n \xi} \langle f, q_k \rangle q_k(x), \quad \xi > 0, \quad (2)$$

где $f \in \mathfrak{R}_p, 1 \leq p < \infty, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — возрастающая последовательность, $\lambda_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$.

Последовательность $\{\lambda_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ называется выпуклой (вогнутой), если $\Delta^2 \lambda_n = \lambda_n - 2\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \geq 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots (\Delta^2 \lambda_n \leq 0)$ и кусочно-выпуклой, если вторая разность $\Delta^2 \lambda_n$ имеет конечное число смены знаков.

Теорема. Пусть ортонормированная система полиномов $\{q_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет следующим условиям:

A) существует непрерывная функция $h(x)$ такая, что

$$|q_n(x)| \leq h(x) \quad (x \in (-1, 1), n = 0, 1, 2, \dots);$$

B) для рекуррентных коэффициентов выполняется оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|\alpha_k - \alpha_{k+1}| + |\beta_k - \beta_{k+1}| + |\gamma_k - \gamma_{k+1}| + |\delta_k - \delta_{k+1}|) \leq C < \infty.$$

Если выпуклая последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$e^{-\lambda_n \xi} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \quad (n \rightarrow \infty, \xi > 0),$$

то справедливы следующие утверждения:

1. ряд (2) функции $f \in L^p_\nu(-1, 1) (1 \leq p < \infty)$ сходится всюду к функции $F(x)$ из $L^p_\nu(-1, 1)$, где $d\nu(x) = h(x)d\mu(x)$;

2. положим

$$T_* f(x) = \sup_{\xi > 0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_n \xi} \langle f, q_k \rangle q_k(x) \right| \quad (x \in (-1, 1)),$$

справедлива оценка

$$\|T_* f\|_{L^p_\nu(K)} \leq C_p \|f\|_{L^p_\nu(-1, 1)}, \quad (3)$$

где K — произвольное компактное подмножество из $(-1, 1)$, постоянная $C_p > 0$ не зависит от функции $f \in L^p_\nu(-1, 1)$;

3. если мера ν удовлетворяет условию удвоения, то имеет место двухвесовая оценка (3).

Утверждения Теоремы имеют место и для кусочно-выпуклой последовательности если потребовать дополнительно: существует постоянная $C > 0$, и такая, что выполняется: $n\Delta(e^{-\lambda_n \xi}) \leq C(n \in \mathbb{Z}_+, \xi > 0)$.

Условиям Теоремы, наложенным на систему полиномов $\{q_n(x)\}$ удовлетворяют, например, нагруженные полиномы Якоби, дискретные полиномы Гегенбауэра-Соболева.

Условия, наложенные на последовательность $\{\lambda_n\}$, выполняются, например, для последовательностей:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_n = (n + 1)^\alpha, \quad \ln^\alpha(n + 1) \quad (\alpha > 0).$$

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА
ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ, ВОЗМУЩЕННОГО ДЕЛЬТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

А.С. Печенцов

pechentsovas@rambler.ru

УДК 517.927.25

Пусть \mathcal{H} – оператор Штурма – Лиувилля в $L_2[0, +\infty)$ порождённый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + a\delta(x-b),$$

и краевым условием $y(0) = 0$, где δ – дельта функция Дирака, $a > 0, b > 0$ и вещественнозначная функция $q(x) \in C[0, +\infty)$ монотонно стремится к $+\infty$, при $x \rightarrow +\infty$. Исследуется распределение спектра и найдена зависимость асимптотики собственных значений λ_n от параметров a, b .

Ключевые слова: дискретный спектр, самосопряжённый оператор, асимптотика собственных значений.

В $L_2[0, +\infty)$ рассматривается оператор \mathcal{H} , порождаемый выражением

$$l_{a,b} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + a\delta(x-b),$$

и краевым условием $y(0) = 0$, где $\delta(x)$ – Дельта-функция Дирака, a, b – положительные числа и вещественнозначная функция (потенциал) $q(x) \in C[0, +\infty)$ монотонно стремится к $+\infty$, при $x \rightarrow +\infty$.

Следуя работам [1],[2] зададим оператор \mathcal{H} , положив $\mathcal{H}y = l_{a,b}[y]$ с областью определения

$$D(\mathcal{H}) := \{y \in L^2[0, +\infty), y(x) \in AC[0, +\infty), y'(x) \in AC([0, +\infty) \setminus \{b\}), \\ y'(b+) - y'(b-) = ay(b), y(0) = 0, \}$$

Оператор \mathcal{H} является самосопряжённым полуограниченным снизу с дискретным спектром $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ [3]. Невозмущённый оператор \mathcal{H}_0 , соответствующий значению $a = 0$, обладает дискретным спектром $\{\lambda_n^0\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_{n+1}^0 > \lambda_n^0, n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_n^0 \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$. Собственная функция $\phi_n(x)$ соответствующая собственному значению λ_n^0 имеет n положительных нулей [4]. Доказаны теоремы.

Теорема 1. Пусть $q \in D^{(3)}[0, +\infty)$, причём $q'(x) > 0, q''(x) \geq 0$ при $x > 0$ и $\frac{q^{(k)}(x)}{q^{(k-1)}(x)} = O(\frac{1}{x}), x \rightarrow \infty, k = 1, 2, 3$. Тогда собственные значения λ_n оператора \mathcal{H} удовлетворяют неравенствам $\lambda_0^0 < \lambda_0 < \lambda_1^0, \lambda_n^0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}^0, n = 1, 2, 3, \dots$

Теорема 2. Если $q(x) = cx^k, k \geq 1, c > 0$, то собственные значения λ_n оператора \mathcal{H} при $n \rightarrow +\infty$ имеют асимптотику

$$\lambda_n = \alpha(k)n^{\frac{2k}{k+2}} \left(1 - \frac{k}{2(k+2)n} - \frac{2ka}{\pi(k+2)\sqrt{\alpha(k)}} \frac{\sin(\int_0^b (\lambda_n - q(t))^{\frac{1}{2}} dt) \sin(\lambda_n^{\frac{1}{2}} b)}{n^{\frac{2k+2}{k+2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{2k+2}{k+2}}}\right) \right),$$

где $\alpha(k) = \left(\frac{\pi k c^{\frac{1}{k}} \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{k})} \right)^{\frac{2k}{k+2}}$, $\Gamma(z)$ -Гамма-функция Эйлера.

Следствие 1 [5]. Если $q(x) = x$, то

$$\lambda_n^0 = \left(\frac{3}{2} \pi n \right)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{6n} + \left(\frac{5}{108\pi^2} - \frac{1}{144} \right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

и справедлива асимптотика

$$\lambda_n = \left(\frac{3}{2}\pi n\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{a \sin^2 \left\{ b \left(\frac{3}{2}\pi n\right)^{\frac{1}{3}} \right\}}{\left(\frac{3}{2}\pi n\right)^{\frac{4}{3}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Следствие 2 [6]. Если $q(x) = \frac{x^2-2}{4}$, то $\lambda_n^0 = 2n - 1, n = 1, 2, \dots$ и справедлива асимптотика

$$\lambda_n = 2n - 1 + \sqrt{2}a\pi^{-\frac{3}{2}} \frac{\sin^2(b\sqrt{2n})}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Литература

1. Савчук А. М., Шкаликос А. А. Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами. Матем. заметки. 1999. Том. 66, № 6, стр. 897–912.
2. Савчук А. М., Шкаликос А. А. Операторы Штурма – Лиувилля с потенциалами-распределениями. Труды московского математического общества. 2003. Том. 64, стр. 159–212
3. Albeverio S., Kostenko A., Malamud M. Spectral theory of semibounded Sturm–Liouville operators with local interactions on a discrete set. J. Math. Phys., 51:10 (2010), 102102, 24 pp.
4. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Москва, Изд-во физико-математической литературы, т. 1, 1960, 278 с.
5. Печенцов А. С. Распределение спектра одного сингулярного положительного оператора Штурма – Лиувилля, возмущенного δ – функцией Дирака. Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, №8, с.1058–1063.
6. Печенцов А. С. Распределение спектра оператора Вебера, возмущенного δ -функцией Дирака.// Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №8, с.1032–1038.

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЗЯДЫКА О РАВЕНСТВЕ ТРЁХ ПЛОЩАДЕЙ И.С. Пилипенко

УДК 517.54

Аналитические функции являются одним из основных понятий в математическом анализе и имеют широкое применение в различных областях науки и техники. Классическая теорема В. К. Дзядыка [1] позволяет дать новое геометрическое определение аналитических функций. Теорема получила дальнейшее развитие и уточнение в работах других математиков [2]-[4]. Данное исследование также посвящено усилению упомянутой теоремы.

Теорема В.К. Дзядыка. Пусть в некоторой области Ω заданы две действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, непрерывные вместе со своими частными производными. Тогда для того, чтобы функция $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической или сопряженной к аналитической в области Ω , необходимо и достаточно, чтобы все три поверхности

$$z = u(x, y), \quad z = v(x, y), \quad z = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

имели над произвольной областью $A \subset \Omega$ равные площади.

Для всякой функции $f = C^1(\Omega)$ и компактного множества $A \subset \Omega$ символом $S(f, A)$ обозначим площадь поверхности графика f , расположенной над A . Обозначим также

$$f_1 = u, \quad f_2 = v, \quad f_3 = \varphi(u, v),$$

где $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ — заданная функция, для которой выполняются условия

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = 1 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0.$$

В [4, часть 5, гл. 4] рассмотрена следующая проблема.

Проблема 1. Пусть \mathbf{A} — некоторая совокупность компактных подмножеств Ω и $u, v \in C^1(\Omega)$. Пусть также

$$S(f_1, A) = S(f_2, A) = S(f_3, A) \text{ для любого } A \in \mathbf{A}.$$

Каким условиям должна удовлетворять \mathbf{A} , чтобы можно было утверждать, что хотя бы одна из функций $u + iv$, $u - iv$ аналитической в Ω ?

В данной работе рассмотрен случай, когда \mathbf{A} является совокупностью всех замкнутых единичных квадратов и всех замкнутых единичных полукругов, лежащих в открытом круге (открытый круг обозначим как $B_R = \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$). Приведённая ниже теорема 1 является главным итогом работы.

Теорема 1. Пусть $R > \frac{\sqrt{65}}{8}$, и u и v — вещественнозначные функции класса $C^1(B_R)$. Тогда для того, чтобы одна из функций $u + iv$, $u - iv$ была аналитической в B_R , необходимо и достаточно, чтобы

- 1) площади поверхностей графиков функций u , v , $\sqrt{u^2 + v^2}$, расположенных над любым замкнутым единичным квадратом $K \subset B_R$ были равны,
- 2) площади поверхностей графиков функций u , v , $\sqrt{u^2 + v^2}$, расположенных над любым замкнутым единичным полукругом $D \subset B_R$ были равны.

Вопрос о точности значения радиуса в теореме остаётся открытым.

Литература

1. Дзядык В.К. Геометрическое определение аналитических функций / В.К. Дзядык // УМК. — 1960. — Т. 15. — Вып. 1(91). — С. 191–194.
2. Goodman A. On the criterium of analytical function / A. Goodman // Amer. Math. Monthly. — 1964. — V. 71. — P. 265–267.
3. Трохимчук Ю.Ю. Об одном критерии аналитичности функции / Ю.Ю. Трохимчук // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, — № 10. — С. 1410–1418.
4. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V.V. Volchkov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, — 2003. — 454 p.

О ПРЕДЕЛАХ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ГАРМОНИЧЕСКИМ АНАЛИЗОМ ФУРЬЕ – БЕССЕЛЯ

С.С. Платонов

ssplatonov@yandex.ru

В различных разделах классического гармонического анализа изучаются задачи о пределах интегралов

$$\int_0^{\infty} f(\lambda t) g(t) dt \tag{1}$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$ или $\lambda \rightarrow +0$ при различных условиях на функции f и g .

В качестве примеров приведем следующую теорему (см. [1, Th. 1.1.2]).

Теорема 1. *Предположим, что $f \in L_\infty([0, +\infty))$, т. е. f ограничена в существенном на $[0, +\infty)$. Для того, существовал предел интеграла (1) при $\lambda \rightarrow +\infty$ для любой функции $g \in L_1([0, +\infty))$, необходимо и достаточно чтобы существовал предел*

$$f_\infty = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \int_0^R f(t) dt. \quad (2)$$

Более того, при этом справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f(\lambda t) g(t) dt = f_\infty \int_0^\infty g(t) dt. \quad (3)$$

Другие условия на функции f и g при которых справедливо равенство (3) см. в [1, Th. 1.1.4] и [2, Ch. II, §9]. Отметим, что в книге С. Бохнера [2] формула (3) называется формулой Винера, так как в статье Н. Винера [3] эта формула доказана для некоторых специальных случаев функций f и g .

Мы будем рассматривать функции на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Всюду далее α — вещественное число большее чем $-\frac{1}{2}$. Для любого $1 \leq p < +\infty$, через $L_{p,\alpha}$ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых функций $f(t)$ на \mathbb{R}_+ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль) таких, что конечна следующая норма

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_0^\infty |f(t)| t^{2\alpha+1} dt \right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ обозначим через $L_{\infty,\alpha} = L_\infty$ банахово пространство, состоящее из всех измеримых функций $f(x)$, которые существенно ограничены на \mathbb{R}_+ . Норма в пространстве $L_{\infty,\alpha}$ определяется формулой

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \|f\|_\infty := \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)|.$$

Функциональные пространства $L_{p,\alpha}$ играют важную роль в гармоническом анализе Фурье–Бесселя, который связан с интегральными преобразованиями Фурье–Бесселя (Ганкеля) (см. [4–7]).

Для любых функций f, g таких, что $fg \in L_{1,\alpha}$, пусть

$$\langle f, g \rangle_\alpha := \int_0^\infty f(t)g(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (4)$$

Для любого числа $a > 0$, пусть $\Gamma^a : f(t) \mapsto f(at)$ — оператор сжатия. Тогда

$$\langle \Gamma^a f, g \rangle_\alpha = \int_0^\infty f(at)g(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (5)$$

Также справедливо равенство

$$\langle \Gamma^a f, g \rangle_\alpha = a^{-2\alpha-2} \langle f, \Gamma^{1/a} g \rangle_\alpha. \quad (6)$$

Для любой функции $f \in L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}_+)$ введем обозначения

$$\mathfrak{M}_{\alpha,\infty}(f) := (2\alpha + 2) \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2\alpha-2} \int_0^R f(t) t^{2\alpha+1} dt \quad (7)$$

$$\mathfrak{M}_{\alpha,0}(f) := (2\alpha + 2) \lim_{r \rightarrow +0} r^{-2\alpha-2} \int_0^r f(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (8)$$

Следующие теоремы являются аналогами теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Для того, чтобы предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle \Gamma^\lambda f, g \rangle_\alpha$$

существовал для любой функции $g \in L_{1,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел (7). Более того, при этом справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle \Gamma^\lambda f, g \rangle_\alpha = \mathfrak{M}_{\alpha,\infty}(f) \int_0^\infty g(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Для того, чтобы предел $\langle \Gamma^\lambda f, g \rangle_\alpha$ существовал при $\lambda \rightarrow +0$ для любой функции $g \in L_{1,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел (8). Более того, при этом справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \langle \Gamma^\lambda f, g \rangle_\alpha = \mathfrak{M}_{\alpha,0}(f) \int_0^\infty g(t) t^{2\alpha+1} dt. \quad (10)$$

Приведем пример использования теоремы 2. Пусть $j_\alpha(t)$ — нормализованная функция Бесселя первого рода, то есть $j_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) t^{-\alpha} J_\alpha(t)$, где $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя первого рода и $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Справедлива следующая асимптотическая формула для $j_\alpha(t)$ при $t \rightarrow \infty$ (см., например, [8, Ch. 7, Sect. 7.13.1])

$$j_\alpha(t) = \frac{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} t^{-\alpha-1/2} \left(\cos \left(t - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{t} \right) \right). \quad (11)$$

Из (11) вытекает, что $(j_{\alpha+1}(t))^2 = O(t^{-2\alpha-3})$ при $t \rightarrow +\infty$, следовательно

$$(j_{\alpha+1}(t))^2 \in L_{1,\alpha}. \quad (12)$$

Справедлива следующая формула (она вытекает, например, из [9, формула 6.574.2]):

$$\int_0^\infty (j_{\alpha+1}(t))^2 t^{2\alpha+1} dt = 2^{2\alpha+1} (\alpha+1) (\Gamma(\alpha+1))^2. \quad (13)$$

Используя теорему 2 и равенства (12) и (13), получим следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ и предположим, что существует предел (7). Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f(\lambda t) (j_{\alpha+1}(t))^2 t^{2\alpha+1} dt = 2^{2\alpha+1} (\alpha+1) (\Gamma(\alpha+1))^2 \mathfrak{M}_{\alpha,\infty}(f). \quad (14)$$

Отметим также, что если использовать равенство (8), то из (14) получается равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-2\alpha-2} \int_0^\infty f(t) (j_{\alpha+1}(t/\lambda))^2 t^{2\alpha+1} dt = 2^{2\alpha+1} (\alpha+1) (\Gamma(\alpha+1))^2 \mathfrak{M}_{\alpha,\infty}(f).$$

Литература

1. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier analysis and approximation of functions. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.
2. Bochner S. Lectures on Fourier integrals. — Princeton: Princeton University Press, 1959.
3. Wiener N. On a theorem of Bochner and Hardy // Journal of the London Math. Soc., **2** (1927), 118-123.

4. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Успехи мат. наук. **6:2** (1951), 102-143.
5. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические граничные задачи. — М. Наука, 1997.
6. Tritéche K. Generalized harmonic analysis and wavelet packets. — Amsterdam: Gordon and Breach, 2001.
7. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой// Изв. РАН. Сер. матем., **71:5** (2007), 149–196.
8. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. Higher Transcendental Functions, Vol. II. — McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. Наука, 1971.

ПРИЗНАКИ ПЛОСКОСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ И ПРЯМОЛИНЕЙНОСТИ ЛИНИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.В. Поликанова

Anirix1@yandex.ru

УДК 514.172

Приводятся некоторые признаки вмести́мости прямой в k -мерную плоскость и прямолинейности, а также плоскостности m -мерной поверхности в n -мерном евклидовом пространстве E^n .

Ключевые слова: прямолинейность кривой, плоскостность поверхности, симплекс, барицентр.

Плоскостность — это степень приближения формы поверхности к плоскости, а *прямолинейность* — степень приближения кривой к прямой. Данные термины используются преимущественно в инженерной практике с точки зрения оценки отклонения поверхности изделия от идеальных форм, для чего разработаны методы тестирования, система допусков, специальные инструменты. Важность такой оценки обусловлена необходимостью правильного функционирования машин и оборудования либо эстетическими соображениями. В математике плоскостность и прямолинейность понимаются чаще как отсутствие кривизны.

Мы под плоскостностью поверхности понимаем вмести́мость поверхности в плоскость той же размерности, т.е. поверхность представляет собой невырожденную (по размерности) часть плоскости. Также и кривая называется прямолинейной, если представляет собой связное подмножество прямой линии.

Автор выявил ряд дифференциальных признаков того, что гладкая кривая класса C^{k+1} в n -мерном евклидовом пространстве E^n является k -плоской, т.е. содержится в плоскости размерности $k < n$ [1]:

Теорема 1. *Гладкая кривая класса C^{k+1} в E^n является k -плоской, если выполнено любое из следующих условий:*

- 1) *все точки линии являются точками уплощения порядка k ,*
- 2) *касательная прямая во всех точках линии параллельна фиксированной k -мерной плоскости,*
- 3) *во всех точках линии существуют соприкасающиеся плоскости k -ого порядка, и все они параллельны фиксированной прямой,*
- 4) *линия обладает свойством аффинной эквивалентности дуг, и содержит точку уплощения k -ого порядка.*

В [2] автор приводит признаки прямолинейности кривой в E^n , не предполагающие её гладкости:

Теорема 2. Кривая в \mathbb{E}^n прямолинейна, если выполнено любое из двух условий:

- 1) всякие 2 ориентированные дуги с общим (нефиксированным) началом подобны,
- 2) все дуги с фиксированным началом O подобны, а в точке O существует полукасательная, если точка O краевая, или касательная, если точка O — внутренняя точка кривой.

Результат основывается на теореме [2]:

Теорема 3. Если все дуги кривой в \mathbb{E}^n , имеющие общее начало O , подобны, то кривая содержится в своей контингенции в точке O .

Новый результат о плоскостности m -мерной поверхности и, как частный случай ($m = 1$), прямолинейности кривой в \mathbb{E}^n обосновывается тем обстоятельством, что она представляет собой выпуклое m -мерное множество:

Теорема 4. Пусть P — m -мерная поверхность, являющаяся замкнутым множеством в \mathbb{E}^n , k — фиксированное целое число, $1 \leq k \leq m$. Если барицентр всякого k -мерного симплекса с вершинами в P также принадлежит P , то поверхность P является m -мерным выпуклым множеством, а следовательно, плоскостна.

Доказательство опирается на критерий выпуклости замкнутого множества в аффинном n -мерном пространстве и две леммы.

Теорема 5. (Критерий выпуклости замкнутого множества [3]). Замкнутое множество $X \subset \mathbb{E}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда всякий отрезок с концами в X содержит по крайней мере ещё одну точку этого множества.

Лемма 1. Если всякая хорда m -мерной поверхности, являющейся замкнутым множеством в \mathbb{E}^n , содержит ещё какую-либо точку поверхности, отличную от своих концов, то поверхность является m -мерной плоскостью или её выпуклым подмножеством с непустой внутренностью относительно этой плоскости.

Лемма 2. Пусть имеется последовательность симплексов $S_i = S(x_0, x_1, x_{2i}, \dots, x_{ki})$, вершины которых x_j сходятся к x_1 при $i \rightarrow \infty$ для каждого $j = 2, \dots, k$. Тогда барицентры этих симплексов сходятся к точке отрезка $[x_0, x_1]$, делящей его в отношении $(k+1) : 1$, считая от точки x_0 .

Следствием леммы 1 является новый признак прямолинейности кривой:

Теорема 6. Кривая в \mathbb{E}^n прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда пересекает стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке.

Литература

1. И.В. Поликанова Некоторые свойства линий с аффинно-эквивалентными дугами // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию: сб. ст. - Вып.2. / главный ред. Е.Д. Родионов. — Изд-во Алт. ун-та. — Барнаул — 2016 — с. 55-61.

2. И.В. Поликанова Кривые, у которых дуги с фиксированным началом подобны // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023 — т. 11 — с. 26-40. DOI: [10.26907/0021-3446-2023-11-26-40](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-11-26-40)

3. И.В. Поликанова Критерии прямолинейности кривой // Материалы Международной конференции «Классическая и современная геометрия», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Левона Сергеевича Атанасяна (15 июля 1921 г.-5 июля 1998 г. Москва, 1-4 ноября 2021 г. Часть 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 220, ВИНТИ РАН, М. — 2023. — с. 86-98.

**ОБ ОБРАЗЕ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ
УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

Д.А. Полякова
forsites1@mail.ru

Пусть ω — весовая функция, $\varphi_\omega^*(y) := \{xy - \omega(e^x) : x \geq 0\}$, $y \in (0, \infty)$. Пространством ультрадифференцируемых функций (УДФ) Берлинга нормального типа $p \in (0, \infty)$, задаваемым весом ω , называется пространство

$$\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall r \in (0, p), \quad \forall l \in (0, \infty) \right. \\ \left. |f|_{\omega, r, l} := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leq l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp r \varphi_\omega^*(j/r)} < \infty \right\}.$$

В $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$ будем рассматривать операторы свертки T_μ . Символами операторов T_μ служат целые функции μ , удовлетворяющие условию:

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty) \exists l \in (0, \infty) : \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp \{ \varepsilon \omega(z) + l |\operatorname{Im} z| \}} < \infty.$$

В качестве частных случаев операторы T_μ включают в себя дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные и интегро-дифференциальные операторы.

Ранее в [1] были установлены необходимые и достаточные условия на символ μ , при которых T_μ сюръективен, т. е. при которых выполняется равенство $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) = \mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$. В настоящей работе для несюръективного оператора T_μ исследуется задача о том, при каких условиях имеет место вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$, где σ — некоторая другая весовая функция, $q \in (0, \infty)$.

Центральными результатами работы являются две следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \leq q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ , действующий в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$. Для того чтобы имело место вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(A) \quad \forall r \in (0, p) \quad \forall \delta \in (0, \infty) \quad \exists s \in (0, q) \quad \exists R_0 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ с } |x| \geq R_0 \\ \exists w \in \mathbb{C} : |w - x| \leq \delta \sigma(x) \text{ и } |\mu(w)| \geq \exp \{ r \omega(w) - s \sigma(w) \}.$$

Теорема 2. Пусть ω, σ — весовые функции; $p, q \in (0, \infty)$; $p\omega \leq q\sigma$; T_μ — оператор свертки с символом μ , действующий в $\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})$. Если для целой функции μ выполнено условие

(B) $\forall r \in (0, p) \quad \exists s \in (0, q) \quad \forall \delta \in (0, \infty) \quad \exists R_0 > 0$: каждую точку $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq R_0$ и $|y| \leq \delta \sigma(x)$ можно погрузить внутрь окружности S_z с $\operatorname{diam} S_z \leq \delta \sigma(x)$, для всех точек ζ которой справедлива оценка

$$|\mu(\zeta)| \geq \exp \{ r \omega(\zeta) - s \sigma(\zeta) \},$$

то имеет место вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$.

Нетрудно видеть, что в случае $\sigma = \omega$, $p = q$ условия (A) и (B) теорем 1 и 2 совпадают с соответствующими условиями критерия сюръективности оператора T_μ из [1] и, значит, эквивалентны.

Следует заметить также, что результаты, установленные в теоремах 1 и 2 для операторов свертки в пространствах УДФ нормального типа, коренным образом отличаются от полученных в [2] аналогичных результатов для пространств $\mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(\mathbb{R})$ УДФ Берлинга максимального типа. Именно, в [2] было показано, что вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^\infty(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$ имеет место тогда и только тогда, когда оператор T_μ сюръективен на $\mathcal{E}_{(\sigma)}^\infty(\mathbb{R})$. В настоящей работе строится пример весов ω и σ , чисел p и q и целой функции $\mu(z)$ таких, что вложение $T_\mu(\mathcal{E}_{(\omega)}^p(\mathbb{R})) \supset \mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$ выполнено, но оператор T_μ не является сюръективным на $\mathcal{E}_{(\sigma)}^q(\mathbb{R})$.

Литература

1. Абанин А.В., Абанина Д.А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавказ. мат. ж. — 2010. — Т. 12, № 3. — С. 3–21.
2. Bonet H., Galbis A. The range of non-surjective convolution operators on Beurling spaces // Glasgow Math. J. — 1996. — V. 38 — P. 125–135.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ГЛАДКОСТИ

К.В. Руновский

k_runov@mail.ru

УДК 517.51

Для норм образов операторов теории приближений и гладкости в L_p -пространствах периодических функций получена универсальная оценка в терминах их наилучших приближений тригонометрическими полиномами. Теперь многие как известные ранее, так и принципиально новые результаты теории приближений могут быть получены на основе единого подхода.

Ключевые слова: оператор мультипликаторного типа, наилучшее приближение, обобщенный модуль гладкости, обобщенная производная.

Операторы теории гладкости и приближений периодических функций тригонометрическими полиномами, в частности, средние Фурье, разности и производные, в т.ч. и обобщенные, являются линейными операторами мультипликаторного типа $A_\sigma(\psi) : e^{ikx} \rightarrow \psi(k/\sigma)e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma > 0$, где $\psi(-t) = \overline{\psi(t)}$. Если генератор ψ удовлетворяет естественным условиям гладкости и $\psi(t) = 0$ при $|t| \leq a$ для некоторого $a \geq 0$, то для $f \in L_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, и $\sigma > 0$ справедлива оценка:

$$\|A_\sigma(\psi)f\|_p \leq c \int_a^{+\infty} \left(\frac{|\operatorname{Im} \psi(t)|}{t-a} + |\psi'(t)| + (t-a)|\psi''(t)| \right) E_{t\sigma}(f)_p dt + c(a) \int_a^{2a} \frac{|\operatorname{Re} \psi(t)|}{t-a} E_{t\sigma}(f)_p dt,$$

где $E_\tau(f)_p$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше $\tau \geq 0$, $c > 0$ – абсолютная константа, $c(a) > 0$ зависит только от a . В аналогичной оценке для $1 < p < +\infty$ отсутствует второй интеграл, в первом же интеграле остается только второе слагаемое ([1], [2]).

Полученные универсальные оценки позволили дать простые единообразные доказательства многих известных результатов и получить целый ряд новых. В частности, для введенного и изученного в [3] обобщенного модуля гладкости

$$\omega_\theta(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^{(\theta)} f\|_p, \quad \Delta_h^{(\theta)} f(x) = A_{h^{-1}}(\theta)(f; x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta^\wedge(k) f(x + kh),$$

где θ^\wedge – набор коэффициентов Фурье, при условии, что $\operatorname{Re} \theta(2t) = O(\operatorname{Re} \theta(t))$, $\operatorname{Im} \theta(2t) = O(\operatorname{Im} \theta(t))$ в окрестности нуля, и для $1 \leq p \leq +\infty$ доказана обратная оценка типа Бернштейна

$$\omega_\theta(f, \delta)_p \leq C \int_0^1 \left(|\operatorname{Re} \theta'(t)| + \frac{|\operatorname{Im} \theta(t)|}{t} \right) E_{t\delta^{-1}} dt, \quad f \in L_p, \quad \delta > 0,$$

где $c > 0$ не зависит от f и δ .

Другой пример. Доказано, что наилучшее приближение на классе гладких в смысле обобщенной производной, порожденной генератором e^{t^r} , $r > 0$, функций имеет естественный порядок e^{-n^r} для всех $1 \leq p \leq +\infty$ и $r > 0$. Ранее, в случаях $p = 1, +\infty$ этот результат был известен только для $r > 1$ [4]. Более того, установлено, что при $p = 1, +\infty$ частичные суммы ряда Фурье обеспечивают наилучший порядок приближения на классе гладких в смысле обобщенной производной, порожденной произвольным генератором λ , функций, тогда и только тогда, когда функция λ'/λ ограничена [5].

Литература

1. *Руновский К.В.* Обобщенная гладкость и приближение периодических функций в пространствах L_p , $1 < p < +\infty$ // Матем. заметки, 106 (2), 2019, 436-449.
2. *Руновский К.В.* Операторы мультипликаторного типа и приближение периодических функций одной переменной тригонометрическими полиномами // Матем. сб., 212 (2), 2021, 106-137.
3. *Руновский К.В.* Приближение тригонометрическими полиномами, К-функционалы и обобщенные модули гладкости // Матем. сб., 208 (2), 2017, 70-87.
4. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наукова думка, 1987.
5. *Лактионова Н.В., Руновский К.В.* Приближение периодических функций высокой обобщенной гладкости суммами Фурье // Матем. заметки, 115 (2), 2024, 304-307.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев, Н.Ф. Валеев

info@rector.msu.ru, sultanaevyt@gmail.com, valeevnf@yandex.ru

УДК 517.9

Рассматривается обратная оптимизационная спектральная задача: для заданного матричного потенциала $Q_0(x)$ требуется найти ближайшую к нему матричную функцию $\hat{Q}(x)$ такую, чтобы k -ое собственное значение матричного оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом $\hat{Q}(x)$ совпадало с заданным значением λ^* .

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спектральная теория, оптимизация, обратная спектральная задача.

Пусть $L_n^2(0, 1) = L^2(0, 1) \times \dots \times L^2(0, 1)$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций со скалярным произведением:

$$(\vec{y}, \vec{v}) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n y_k(x) \bar{v}_k(x) dx,$$

$\mathcal{M}_n^2(0, 1)$ — гильбертово пространство всех $n \times n$ матриц с элементами – функциями из $L^2(0, 1)$ с нормой

$$\|Q\|_{\mathcal{M}_n^2}^2 = \int_0^1 \text{tr} (Q^*(x)Q(x)) dx.$$

Исследование Я.Т. Султанаев поддержано Российским научным фондом (Соглашение № 22-21-00580).

Садовничий Виктор Антонович, д.ф.-м.н., академик РАН, профессор, ректор МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, БГПУ имени М. Акмуллы (Уфа, Россия); Московский математический центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия)

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия)

В пространстве $L_n^2(0, 1)$ рассматривается дифференциальный оператор $\mathcal{L}[Q]$ порожденный дифференциальным выражением

$$l(\vec{y}) \equiv -\frac{d^2}{dx^2}\vec{y}(x) + V(x)\vec{y}(x), \quad 0 < x < 1$$

и самосопряженными граничными условиями

$$\vec{y}(0) - h\vec{y}'(0) = 0, \quad \vec{y}(1) + H\vec{y}'(1) = 0,$$

где $Q(x) \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ — эрмитова матрица, h, H — самосопряженные матрицы. Пусть $\lambda_1(Q) \leq \lambda_2(Q) \leq \dots \leq \lambda_k(Q) \leq \dots$ — собственные значения оператора $\mathcal{L}[Q]$.

В работе исследуется следующая оптимизационная обратная спектральная задача

(\mathcal{P}^0) Пусть заданы $\lambda^* \in \mathbb{R}$, $Q_0 \in L^2(0, 1)$. Требуется найти потенциал $\hat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ такой, что k -ое собственное значение $\lambda_k(\hat{Q})$ оператора $L[\hat{Q}]$ совпадает с заданным значением λ^* и

$$\|Q_0 - \hat{Q}\|_{\mathcal{M}_n^2} = \inf\{\|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2} : \lambda^* = \lambda_k(Q), Q \in \mathcal{M}_n^2\}. \quad (1)$$

Интерес к таким постановкам вызван прежде всего прикладными задачами, в которых требуется построить линейную колебательную систему с заданными собственными частотами колебаний и наиболее близкой к некоторой эталонной системе, а также задачами идентификации колебательной системы по измеренной части спектра (см. [1]-[2]).

Отметим, что оптимизационные обратные спектральные задачи тесно связаны с нелинейными операторами математической физики (см., например, [3]-[4]) с различными экстремальными свойствами собственных значений и собственных функций (см., например, [5]-[7]) и библиографию к ним).

Особенностью рассматриваемой в данной работе оптимизационной обратной спектральной задачи является вырожденность собственных значений векторного оператора Штурма – Лиувилля. До этого оптимизационные обратные спектральные задачи рассматривались только для простых собственных значений. Векторный оператор Штурма-Лиувилля является модельным для рассматриваемой задачи оператором с кратными собственными значениями.

Доклад основан на результатах работ [8], [9], где установлен вид критического уравнения для оптимизационной обратной спектральной задачи для вырожденных собственных значений.

Основные результаты работы сформулированы в следующих утверждениях.

Теорема 1. Пусть заданы $\lambda^* \in \mathbb{R}$, k — порядковый номер собственного значения оператора $L[Q]$ и $Q_0 \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$. Тогда найдется потенциал $\hat{Q} \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)$ такой, что k -ое собственное значение $\lambda_k(\hat{Q})$ оператора $L[\hat{Q}]$ совпадает с заданным значением λ^* и

$$\|Q_0 - \hat{Q}\|_{L^2} = \inf\{\|Q_0 - Q\|_{\mathcal{M}_n^2} : \lambda^* = \lambda_k(Q), Q \in \mathcal{M}_n^2(0, 1)\}. \quad (2)$$

Собственные значения рассматриваемой краевой задачи могут быть вырожденными, с кратностью p , $1 \leq p \leq n$. Соответственно, в этом случае оптимальный потенциал устроен иначе, чем в случае простого собственного значения (случай простых с.з. см. в [3]-[4]).

Теорема 2. Пусть $\lambda_k(Q_0) \leq \lambda^*$ и \hat{Q} — решение задачи (\mathcal{P}^0). Если $\lambda_k(\hat{Q})$ — собственное значение кратности p , то тогда справедливо представление

$$\hat{Q}(x) = Q_0(x) + \sum_{k,j=1}^p \alpha_{k,j} \vec{u}_k(x) \otimes \vec{u}_j(x), \quad (3)$$

где $\{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^p$ — ортонормированная система собственных функций оператора $\mathcal{L}[\hat{Q}]$, соответствующая k -тому собственному значению равному λ_1^* , $\mathcal{A} = (\alpha_{k,j})_{k,j=1}^p$ — невырожденная эрмитова матрица.

Следствие 1. Пусть $\lambda_1(Q_0) \leq \lambda^*$. Тогда решение оптимизационной обратной спектральной задачи (\mathcal{P}^0) для первого собственного значения $\lambda_1(Q)$ единственно.

Кроме сформулированных выше утверждений в докладе также будет обсуждаться связь рассматриваемой оптимизационной обратной спектральной задачи с системами нелинейных уравнений Шредингера и некоторыми обратными спектральными задачами с неполными данными для скалярного оператора Штурма-Лиувилля.

Литература

1. *Chu, M. and Golub, G.H.* Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications (Vol. 13). Oxford University Press, 2005
2. *V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, N. F. Valeev.* Multiparameter inverse spectral problems and their applications // Doklady Mathematics, 79:3 (2009), 457-460.
3. *Yavdat Ilyasov, Nur Valeev* Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, Physica D: Nonlinear Phenomena, 426 (2021)
4. *Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev* On nonlinear boundary value problem corresponding to N -dimensional inverse spectral problem, J. Diff. Eq., 266 (2019), No. 8, 4533–4543.
5. *Yuzhou Tian; Qiaoling Wei; Meirong Zhang* On the polynomial integrability of the critical systems for optimal eigenvalue gaps J. Math. Phys. 64, 092701 (2023)
6. *S.Guo, G. Meng, P. Yan, and M. Zhang* Optimal maximal gaps of Dirichlet eigenvalues of Sturm–Liouville operators J. Math. Phys. 63, 072701 (2022)
7. *J. Pöschel, and E. Trubowitz* Inverse spectral theory, volume 130 of Pure and Applied Mathematics, 1987.
8. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Валеев Н.Ф.* Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма–Лиувилля. Дифференциальные уравнения, 58:12, с. 1707-1711 (2022)
9. *V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, N. F. Valeev.* Optimization Spectral Problem for the Sturm–Liouville Operator in a Vector Function Space Doklady Mathematics, 2023, Vol. 108, No. 2, pp. 406–410.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ СУММИРОВАНИЯ ВТОРОЙ ПОПРАВКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.А. Садовничий, З.Ю. Фазуллин
rector@rector.msu.ru, fazullinzu@mail.ru

УДК 517.984.5

В изучении формул регуляризованных следов возмущений двумерных дифференциальных операторов центральным моментом является исследование суммируемости второй поправки теории возмущений. В работе предложен один способ суммирования второй поправки теории возмущений на основе асимптотических оценок и его приложения к модельным двумерным дифференциальным операторам математической физики.

Ключевые слова: самосопряженный оператор, возмущения, дискретный спектр, резольвента, проектор.

Рассмотрим самосопряженный полуограниченный снизу оператор L_0 с дискретным спектром в сепарабельном гильбертовом пространстве H , пусть оператор V его L_0 -компактное возмущение, так что возмущенный оператор $L = L_0 + V$ замкнут в области определения оператора L_0 и имеет дискретный спектр. Пусть $\sigma(L_0) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ спектр оператора L_0 пронумерованный в порядке роста без учета их кратностей: $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, P_k -проектор, соответствующий собственному значению λ_k , $\nu_k = \dim \text{Ran} P_k$. Обозначим через $\sigma(L) = \left\{ \mu_k^{(i)}, i = \overline{1, \nu_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ спектр оператора L , причем: $\left| \mu_k^{(i)} \right| \leq \left| \mu_{k+1}^{(i)} \right|$, $\left| \mu_k^{(i)} \right| \leq \left| \mu_k^{(i+1)} \right|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке НОМЦ ПФО (соглашение № 075-02-2024-1444).

Садовничий Виктор Антонович, д.ф.-м.н., академик РАН, профессор, ректор МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Фазуллин Зиганур Юсупович, д.ф.-м.н., профессор, Уфимский государственный университет науки и технологий (Уфа, Россия)

Обозначим через α_k вторую поправку теории возмущений:

$$\alpha_k = \sum_{m \neq k} \frac{a_{km}}{\lambda_m - \lambda_k}, \quad a_{km} = Sp P_k V P_m V.$$

Теорема 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо следующее тождество

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{1}{2\lambda_n} \left\{ \sum_{k=1}^n Sp \left[P_k V^2 - (P_k V)^2 \right] + 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{m=n+1}^{\infty} \left[\frac{2(\lambda_n - \lambda_k)}{\lambda_m - \lambda_k} - 1 \right] a_{km} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, пусть $\Gamma_n = \{z | z = r_n \exp i\varphi, \quad r_n = (\lambda_n + \lambda_{n+1}) 2^{-1}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ контур на комплексной плоскости, который содержит одинаковое количество собственных значений операторов L_0 и L с учетом их алгебраической кратности. Тогда, применяя оператор $Sp \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} z(*) dz \right)$ к резольвентному тождеству

$$\begin{aligned} R(z) - R_0(z) + R_0(z) V R_0(z) = (R_0(z) V)^2 R_0(z) - (R_0(z) V)^3 R(z), \\ R_0(z) = (L_0 - zI)^{-1}, \quad R(z) = (L - zI)^{-1}. \end{aligned}$$

получим, что

$$\sum_{k=1}^n \left[\sum_{s=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_k^{(s)}) + Sp P_k V \right] = \sum_{k=1}^n \alpha_k + \beta_n, \quad (2)$$

где

$$\beta_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} z Sp \left((R_0(z) V)^3 R(z) \right) dz.$$

Из формул (1) и (2) заключаем, что справедлива

Теорема 2. [1] Пусть при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k = o(\lambda_n), \quad \sum_{k=1}^n \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{km} = o(\lambda_n), \quad \beta_n = o(1)$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{s=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_k^{(s)}) + Sp P_k V \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\lambda_n} \sum_{k=1}^n Sp \left[P_k V^2 - (P_k V)^2 \right].$$

На основе этой методики нами получены классические формулы следов Гельфанда-Левитана для возмущений оператором умножения на функцию оператора Лапласа-Бельтрами на сфере S^2 [2,3], двумерного гармонического осциллятора [4], двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле [5], двумерного гармонического осциллятора в полосе [6].

Литература

1. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г. Спектр и формула следа для ограниченных возмущений дифференциальных операторов // ДАН РАН, **483**:1 (2018), 19-21.
2. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю. Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами // Дифференц. уравнения, **37**:3 (2001), 402-409.
3. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Атнагулов А.И. Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формулы следов // Уфимск. матем. журн., **8**:3 (2016), 22-40.
4. Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Матем. сборник, **192**:2 (2001), 109-138.
5. Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю. Спектр и формула следов для двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле // Дифференц. уравнения, **45**:4 (2009), 549-563.

6. Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г. Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе // Дифференц. уравнения, **55:5** (2019), 691-701.

О ДЗЕТА ФУНКЦИЯХ ПО В.А. САДОВНИЧЕМОУ, ПОСТРОЕННЫМ ПО НУЛЯМ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

С.М. Ситник
sitnik@bsu.edu.ru

УДК 517.9

В тезисах рассматривается обобщённая дзета-функция Римана, введённая в соответствии с определением В.А. Садовниченко по нулям функций Бесселя. Рассмотрены некоторые приложения к рядам Релея, неравенствам для специальных функций.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряды Релея, функции Бесселя.

Определение 1. Дзета-функцией, ассоциированной с нулями функции Бесселя J_ν , называется ряд [1]

$$S_{2(n+1), \nu} = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{\nu, m}^{-2(n+1)}, \tag{1}$$

где $\gamma_{\nu, m}$ — положительные нули функции Бесселя J_ν , занумерованные в порядке возрастания. Введём величины

$$a_i = (-1)^i \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} \frac{\Gamma(\nu + k + 1 - i)}{\Gamma(\nu + 2 + i)} \frac{C_{k-i-1}^i}{2^{2i+1}},$$

$$b_j = (-1)^j \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + k + 1)} \frac{\Gamma(\nu + k + 1 - j)}{\Gamma(\nu + 1 + j)} \frac{C_{k-j}^j}{2^{2j}},$$

$$c_n = 2 S_{2(n+1), \nu}.$$

Теорема 1. *Справедливы рекуррентные соотношения:*

$$c_n = a_n - \sum_{j=1}^m b_j c_{n-j}, \tag{2}$$

$$m = \min \left(n, \left[\frac{k-1}{2} \right] \right) \geq 1.$$

В частности, несколько первых соотношений имеют вид:

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = a_1 - b_1 c_0, \quad k \geq 3,$$

$$c_2 = a_2 - b_1 c_1 - b_2 c_0, \quad k \geq 5, \tag{3}$$

$$c_3 = a_3 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_0, \quad k \geq 7.$$

Отметим, что величина c_n , определяемая формулами (2), не зависит от параметра k , хотя величина a_i и b_j зависят от k . Поэтому (2) задают семейство рекуррентных формул, зависящих от параметра k .

Приведённые формулы (3) позволяют вычислить первые значения дзета-функции, которые известны [2]. Отметим, что значение $S_{8, \nu}$ было получено Кэли при помощи специального приёма.

Ситник Сергей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования (Белгород, Россия)

Из теоремы 1 эта и в принципе любое другое число последующих формул выводятся рекуррентно.

Следствие 1. *Справедливы формулы для дзета-функции:*

$$S_{2,\nu} = \frac{1}{4(\nu+1)},$$

$$S_{4,\nu} = \frac{1}{16(\nu+1)^2(\nu+2)},$$

$$S_{6,\nu} = \frac{1}{32(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)},$$

$$S_{8,\nu} = \frac{5\nu+11}{256(\nu+1)^4(\nu+2)^2(\nu+3)(\nu+4)}.$$

Теорема 2. *Дзета-функции корней удовлетворяют линейной системе с определителем Ганкеля [1] при значениях*

$$L = \left[\frac{k-1}{2} \right], \quad M = \left[\frac{k}{2} \right].$$

Следующий результат развивает интересный технический приём из классической работы [3] по теории преобразования Радона.

Теорема 3. *Пусть $|x| < \gamma_{\nu,1}$. Тогда при любом натуральном n справедливо неравенство*

$$J_\nu(x) \leq \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \exp \left(- \sum_{j=1}^n \frac{S_{2j,\nu}}{j} x^{2j} \right). \quad (4)$$

В частности, получаем при $|x| < \gamma_{\nu,1}$

$$J_\nu(x) \leq \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \exp \left(- \frac{x^2}{4(\nu+1)} \right), \quad (5)$$

$$J_\nu(x) \leq \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \exp \left(- \frac{x^2}{4(\nu+1)} - \frac{x^4}{32(\nu+1)^2(\nu+2)} \right). \quad (6)$$

Неравенство (5) получено в [3] при $\nu = n$. На этом пути, используя теорему 3, можно получить любое число всё более точных неравенств, как только вычислены соответствующие значения для дзета-функций. Предложенный метод применим и к отношениям функций Бесселя.

Отметим, что подобные формулы для рядов типа Релея и неравенства для функций Бесселя и их отношений были также получены в [4]-[5].

Литература

1. Садовничий В.А. Теория операторов. Изд-во МГУ, 1986, 368 с.
2. Ватсон Г.Н. Теория бesselевых функций. Ч.1. — М.: Иностранная литература, 1949.
3. Logan B.F. The Uncertainty Principle in Reconstructing Functions from Projections // Duke Math. J., vol.42, No. 4, P. 661 – 706.
4. Ситник С.М. Неравенства для функций Бесселя. Доклады РАН. 1995, т. 340, №1, С. 29–32.
5. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., I-IV, 2014–2018.

О ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ХАРДИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

В.Д. Степанов, Е.П. Ушакова
stepanov@mi-ras.ru, elenau@inbox.ru

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+^n := (0, \infty)^n$ функций n -мерный прямоугольный оператор Харди задан формулой

$$I_n f(x_1, \dots, x_n) := \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \quad x_1, \dots, x_n > 0.$$

Пусть $0 < p, q \leq \infty, 1 \leq p \leq \infty$ и $v, w \geq 0$ весовые функции на \mathbb{R}_+^n . Весовое пространство Лебега $L_v^p(\mathbb{R}_+^n)$ состоит из всех измеримых на \mathbb{R}_+^n функций f таких, что $\|f\|_{p,v}^p := \int_{\mathbb{R}_+^n} |f|^p v < \infty$. В докладе рассматривается задача о характеристизации интегрального неравенства

$$\|I_n f\|_{q,w} \leq C_n \|f\|_{p,v}, \quad f \in L_v^p(\mathbb{R}_+^n),$$

и свойствах оператора Харди (1). Константа $C_n > 0$ наименьшая и не зависит от f .

Характеризация неравенства (2) эквивалентна задаче об ограниченности оператора (1) в весовых пространствах Лебега. Случай $n = 1$ полностью изучен (см., например, [1]). Многомерные неравенства (2) изучались, например, в [2] с ограничением на весовые функции.

Для случая $n = 2$ в [3,4,5] получены новые результаты. Для их формулировки обозначим $p' := p/(p - 1)$ и $\sigma := v^{1-p'}$, а также $\alpha(p, q) := p^2(q - 1)/(q - p)$,

$$\beta(p, q, c) := \max \left\{ \frac{3^{3q+1}}{4} \left(\frac{p'}{q} \right)^{\frac{1}{r}}, \frac{3^{\frac{q}{p}+2q}}{2^{\frac{q}{p}}}, \frac{3^{2q-\frac{q}{p}+2-c}}{4c} \left[\frac{2 \cdot 3^{3c}}{1-c} - 3^{c-2} \right] \right\},$$

где $1/r := 1/q - 1/p$ и $0 < q/p \leq c < 1$. Положим

$$\begin{aligned} A_1 &:= \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} A_1[(s,t); \sigma, w] := \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} [I_2^* w(s,t)]^{\frac{1}{q}} [I_2 \sigma(s,t)]^{\frac{1}{p'}}, \\ A_2 &:= \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} A_2[(s,t); \sigma, w] := \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} \left(\int_0^s \int_0^t (I_2 \sigma)^{qw} \right)^{\frac{1}{q}} [I_2 \sigma(s,t)]^{-\frac{1}{p}}, \\ A_3 &:= \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} A_3[(s,t); \sigma, w] := \sup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2} \left(\int_s^\infty \int_t^\infty (I_2^* w)^{p' \sigma} \right)^{\frac{1}{p'}} [I_2^* w(s,t)]^{-\frac{1}{q}}, \\ B &:= \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} d_y [I_2 \sigma(x,y)]^{\frac{r}{p'}} d_x \left(- [I_2^* w(x,y)]^{\frac{r}{q}} \right) \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} C_{t,s} &:= 3^{3q} \left[2^{q3-q} \max \left\{ t, 2q(q')^{\frac{q}{p'}} \right\} \left(\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1} \right)^{\frac{q}{p}} + 3^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{3^{q-1}}{3^{q-1}-1} \right)^{\frac{1}{q'}} \right], \\ C_{t,s} &:= 3^{3q} \left[2^{q3-q} \max \left\{ t, 2q(p')^{q-1} \left(\frac{q}{r} \right)^{\frac{q}{r}} \right\} \left(\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1} \right)^{\frac{q}{p}} + 3 s^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{3^{q-1}}{3^{q-1}-1} \right)^{\frac{1}{q'}} \right]. \end{aligned}$$

Теорема 1. [3] Пусть $1 < p < q < \infty$ и $n = 2$. Неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда $A_1 < \infty$, при этом $c := \alpha(p, q)$ и $\alpha^* := \alpha(q', p')$

$$A_1 \leq C_2 \leq C_{\alpha, \alpha^*} A_1.$$

Степанов Владимир Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, Математический институт РАН им. В.А. Стеклова (Москва, Россия); Вычислительный центр ДВО РАН (Хабаровск, Россия)

Ушакова Елена Павловна, д.ф.-м.н., в.н.с., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Россия)

Напомним, что в случае $p \leq q$ наилучшая константа C_2 двумерного неравенства (2) эквивалентна $\sum_{i=1}^3 A_i$ (см. [6, Theorem 1A]). Однако, для $p < q$ имеют место неравенства

$$A_1 \leq C_2 \leq \mathbb{C}_{1,1} [A_1 + A_2 + A_3] \leq \mathbb{C}_{1,1} [1 + \alpha(p, q)^{\frac{1}{q}} + \alpha(q', p')^{\frac{1}{p'}}] A_1.$$

При этом, $\lim_{p \rightarrow q-0} [\alpha(p, q) + \alpha(q', p')] = \infty$.

Результат в случае $q < p$ формулирует следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $1 < q < p < \infty$, $n = 2$ и вес v удовлетворяет условию:

$$\text{существует } \gamma \in [q/p, 1) \text{ такое, что } \frac{\partial^2 ([I_2 \sigma(x, y)]^\gamma)}{\partial x \partial y} \geq 0 \text{ для п.в. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Кроме этого, пусть для веса w выполнено условие:

$$\text{существует } \gamma^* \in [p'/q', 1) \text{ такое, что } \frac{\partial^2 ([I_2^* w(x, y)]^{\gamma^*})}{\partial x \partial y} \geq 0 \text{ для п.в. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Тогда неравенство (2) выполнено тогда и только тогда, когда $B < \infty$, при этом

$$2^{-\frac{1}{p'}} \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'}{r}\right)^{\frac{1}{p'}} B \leq C_2 \leq \mathbf{C}_{\beta, \beta^*} B,$$

где $\beta := \beta(p, q, \gamma)$ и $\beta^* := \beta(q', p', \gamma^*)$.

Замечание 3. Оценка снизу в (5) справедлива без требований (3) и (4) на веса v и w .

Имеют место также альтернативные достаточные условия выполнения неравенства (2) без дополнительных ограничений на v и w .

Теорема 4. Пусть $1 < q < p < \infty$. Неравенство (2) выполнено, если

$$B_v := \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} \sigma(u, z) \left(\int_u^\infty \int_z^\infty (I_2 \sigma)^{q-1} w \right)^{\frac{r}{q}} du dz \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

причем $C_2 \lesssim B_v$.

В работах [5, 7] исследовался вопрос о компактности оператора (1). Для формулировки полученных результатов предположим, что $1 < p, q < \infty$ и I_2 ограничен из $L_v^p(\mathbb{R}_+^2)$ в $L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$.

Пусть $a, b, c, d \in (0, \infty)$ такие, что $a < c$ и $b < d$. Обозначим

$$\Omega_0 := \Omega_0(a, b) := \{(0, a) \times (0, \infty)\} \cup \{[a, \infty) \times (0, b)\},$$

$$\Omega_\infty := \Omega_\infty(a, b, c, d) := \{[a, \infty) \times (d, \infty)\} \cup \{(c, \infty) \times [b, d]\}.$$

Для критерия компактности $I_2: L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ нам понадобятся следующие условия:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty}} \left[\sup_{(u, z) \in \Omega_0} A_1[(u, z); \sigma, w] + \sup_{(u, z) \in \Omega_\infty} A_1[(u, z); \sigma, w] \right] = 0,$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty}} \left[\sup_{(u, z) \in \Omega_0} A_2[(u, z); \sigma, w] + \sup_{(u, z) \in \Omega_\infty} A_2[(u, z); \sigma \chi_{\Omega_\infty}, w \chi_{\Omega_\infty}] \right] = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0, b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty}} \left[\sup_{(u, z) \in \Omega_0} A_3[(u, z); \sigma \chi_{\Omega_0}, w \chi_{\Omega_0}] + \sup_{(u, z) \in \Omega_\infty} A_3[(u, z); \sigma, w] \right] = 0. \tag{2}$$

Теорема 5. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Если $p < q$, то $I_2: L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен тогда и только тогда, когда $A_1 < \infty$ и выполнено (7).

В случае $p = q$ оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^p(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если и только если $\sum_{i=1,2,3} A_i < \infty$ и выполнены условия (7)–(9).

Для $q < p$ достаточное условие и необходимое условие компактности $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ представлены в следующей теореме.

Теорема 6. Пусть $1 < q < p < \infty$. Оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если выполнено (6). Если $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, то $B < \infty$.

Замечание 7. С условиями (3) и (4) на весовые функции v и w , соответственно, оператор $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$ компактен, если и только если $B < \infty$.

В качестве приложения полученных результатов об ограниченности и компактности оператора Харди I_2 вида (1) в работе [8] установлены верхние и нижние оценки на аппроксимативные числа $I_2 : L_v^p(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_w^q(\mathbb{R}_+^2)$. Поведение аппроксимативных чисел характеризует скорость, с которой I_2 может быть приближен конечномерными операторами.

Литература

1. Прохоров В.Д., Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Интегральные операторы Харди-Стеклова // Совр. пробл. матем. 2016. Т. 22. 186 с.
2. Persson L.-E., Ushakova E.P. Some multi-dimensional Hardy type integral inequalities // J. Math. Inequal. 2007. V. 1. N 3. 301–319.
3. Stepanov V.D., Ushakova E.P. On weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator — extension of the E. Sawyer theorem // Math. Ineq. & Appl. 2021. V. 24. N 3. P. 617–634.
4. Stepanov V.D., Ushakova E.P. Weighted Hardy inequality with two-dimensional rectangular operator: the case $q < p$ // Math. Ineq. & Appl. 2023. V. 26. N 1. P. 267–288.
5. Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Об ограниченности и компактности двумерного прямоугольного оператора Харди // Докл. РАН. Матем. информ. проц. упр. 2022. Т. 506:1, 68–72.
6. Sawyer E. Weighted inequalities for two-dimensional Hardy operator // Studia Math. 1985. V. 82. N 1. P. 1–16.
7. Stepanov V.D., Ushakova E.P. Compactness of the two-dimensional rectangular Hardy operator // Math. Ineq. & Appl. 2022. V. 25. N 2. P. 535–549.
8. Степанов В.Д., Ушакова Е.П. Об аппроксимативных числах двумерного прямоугольного оператора Харди // Матем. зам. 2024. Т. 115:3.

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Н. Усмонов, М.Б. Холикова

n.usmonov@tgfeu.tj

УДК 517.55

В статье исследуется задача сопряжения обобщенных аналитических функций в сингулярном случае. Установлено, что число решений задачи в классе функций, ограниченных на контуре, не изменяется от наличия нулей у коэффициента задачи и уменьшается на суммарный порядок всех нулей.

Ключевые слова: обобщенно аналитические функции, сингулярные случаи, интерполяционный многочлен, однородная и неоднородная задача, голоморфная функция.

Усмонов Нурулло, д.ф.-м.н., профессор, Государственный финансово-экономический университет Таджикистана, кафедра высшей математики (Душанбе, Таджикистан)

Холикова Мастона Бобоназаровна, к.ф.-м.н., доцент, Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни (Душанбе, Таджикистан)

Рассмотрим обобщенную систему Коши – Римана

$$\partial_{\bar{z}}W = A(z)W + B(z)\bar{W}, \tag{1}$$

где $W = U + iV, \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$,

$A(z), B(z)$ – заданный на всей плоскости E и $A(z), B(z) \in L_p, p > 2$, то есть, если E_1 круг $|z| \leq 1$, то $A(z), B(z)$ и

$$|z|^{-2}A\left(\frac{1}{z}\right), |z|^{-2}B\left(\frac{1}{z}\right) \in L_p\{E_1\}, p > 2.$$

Эти условия выполняются, например, если $A(z), B(z)$ измеримы и ограничены и в окрестности бесконечно удаленной точки допускается оценка

$$|A(z)|, |B(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\varepsilon}}, M, \varepsilon > 0.$$

Функция $W(z)$ называется регулярным решением уравнение (1), если она непрерывна, имеет обобщенную производную Соболева $\partial_{\bar{z}}W$ и почти всюду удовлетворяет (1).

Требуется найти решения $W^+(z), W^-(z)$, регулярные в D^+ и D^- и непрерывные вплоть до контура, где они сопряжены условием

$$W^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} a(t)W^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} b(t)\overline{W^-(t)} + c(t), W^-(\infty) = 0. \tag{2}$$

Как показал И.Н.Векуа [1] всякое решение уравнение (1) допускает представление

$$W(z) = \phi(z)exp\omega(z), \tag{3}$$

где $\phi(z)$ - голоморфная функция и

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_E B(\zeta) \cdot \frac{W(\zeta)}{W(\zeta)} \cdot \frac{ds}{\zeta - z}, \tag{4}$$

$$\zeta = \xi + i\eta, ds = d\xi \cdot d\eta.$$

Введем следующие обозначения: $\sum_{r=1}^R d_r = d, \sum_{m=1}^M q_m = q$.

Переходим непосредственно к исследованию задачи (2). Предположим, что функция $c(t)$ в окрестности точек $t = \eta_r$ имеет производные порядков $d_r - 1$, удовлетворяющие условию Гельдера. Построим интерполяционный многочлен $T(t)$ степени $d - 1$ так, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

$$c^{(\nu)}(\eta_r) = T^{(\nu)}(\eta_r), (r = 1, 2, \dots, R, \nu = 0, 1, \dots, d_r - 1). \tag{5}$$

Такой многочлен определяется единственным образом и в дальнейшем понадобится для представления (2) к задаче коэффициенты, которой не обращается в нуль.

Вычитываем из обеих частей (2) полином $T(t)$, получим

$$W^+(z) - T(t) = \frac{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} a(t)W^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} b(t)\overline{W^-(t)} + c(t) - T(t).$$

или

$$W^+(z) - T(t) = \frac{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} a(t)W^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} b(t)\overline{W^-(t)} + \prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r} c_1(t). \tag{6}$$

Разделив краевое условие (6) на $\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}$, получим

$$\frac{W^+(z) - T(t)}{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}} = \frac{a(t)}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} W^-(t) + \frac{b(t)}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} \overline{W^-(t)} + c_1(t)$$

или

$$W_1^+(t) = \frac{a(t)}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} W^-(t) + \frac{b(t)}{\prod_{m=1}^M (t - \xi_m)^{q_m}} \overline{W^-(t)} + c_1(t), \quad (7)$$

где

$$W_1^+(t) = \frac{W^+(z) - T(t)}{\prod_{r=1}^R (t - \eta_r)^{d_r}}.$$

Полагая в (7)

$$W^-(z) = \prod_{m=1}^M (z - \xi_m)^{q_m} z^{-m} W_1^-(z),$$

$$\overline{W^-(z)} = \prod_{m=1}^M (\overline{z - \xi_m})^{q_m} \overline{z^{-m} W_1^-(z)} = \prod_{m=1}^M (z - \xi_m)^{q_m} \overline{z^{-m}} \exp\left(-2i \sum_{m=1}^M \theta_m q_m\right),$$

где $\theta_m = \arg(t - \xi_m)$, преобразуем краевое условие (7) в виде

$$W_1^+(t) = a(t)t^{-m} W_1^-(t) + b(t) \overline{t^{-m}} \exp\left(-2i \sum_{m=1}^M \theta_m q_m\right) + c_1(t).$$

Всякое решение уравнения (1) допускает представление вида

$$W(z) = \phi(z) \exp \omega(z), \quad (8)$$

где $\phi(z)$ — голоморфная функция и

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_E B(\zeta) \cdot \frac{W(\zeta)}{W(\zeta)} \cdot \frac{ds}{\zeta - z},$$

$\zeta = \xi + i\eta, ds = d\xi \cdot d\eta$. Функция $\omega(z)$ непрерывная на всей плоскости и $\omega(\infty) = 0$. В формуле (8) $\phi(z)$ явно выражается через $W(z)$. Имеет место и обратное утверждение: $W(z)$ выражается через $\phi(z)$ по формуле

$$W(z) = \phi(z) R \left[\frac{\overline{\phi(z)}}{\phi(z)} \right],$$

где R — оператор обращения интегрального уравнения

$$V(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{A(\zeta)V(\zeta) + B(\zeta) \cdot \frac{\overline{\phi(\zeta)}}{\phi(\zeta)} \cdot \overline{V(\zeta)}}{\zeta - z} ds.$$

Через l обозначим число решений однородной задачи. Через p обозначим число условий разрешимости неоднородной задачи. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $a(t)$ непрерывна, $\text{Ind } a(t) \cdot t^{-m} = \varkappa - m$, $\varkappa = \text{Ind } \Gamma a(t)$, $b(t)$ — ограничена и измерима, $c(t) \in L_p, p > 1$. И пусть

$$\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < \frac{2}{1 + s_p},$$

где s_p — норма в L_p сингулярного оператора $s_\mu = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau$.

Тогда: при $\varkappa - m \geq 0$, $l = 2(\varkappa - m)$, $p = 0$; при $\varkappa - m < 0$, $l = 0$, $p = 2|\varkappa - m|$.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. Москва, 1959. — 632с.
2. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и ее применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе. Издательство Тадж.ССР, 1963. — 184с.
3. Михайлов Л.Г., Усмонов Н. Сингулярные краевые задачи сопряжения. ДАН России. — 2002. — т. 387. — №3. С. 309-313.
4. Холикова М.Б., Усмонов М.А. Общая краевая задача сопряжения с производными первого порядка в сингулярном случае. Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук — 2019. — №1(174). — С. 27-34.

ПОВЫШЕННАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ p -ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.Г. Чечкина

checkkina@gmail.com

УДК 517.518

Доказана повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области для неоднородного p -эллиптического уравнения.

Ключевые слова: задача Зарембы, оценки Мейерса, p -емкость, теоремы вложения, повышенная суммируемость.

Исследуются интегральные свойства обобщённых решений неоднородного p -эллиптического уравнения, где $p > 1$, решений задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$ (подробнее см. [1]). Обозначим $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, пусть $W_p^1(D, F)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F , по норме пространства $W_p^1(D)$. Априори для функций $v \in W_p^1(D, F)$ предполагается выполненным неравенство Фридрихса–Мазы

$$\int_D |v|^p dx \leq C \int_D |\nabla v|^p dx.$$

Предположим, что матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ с измеримыми компонентами является симметрической и равномерно положительно определённой. Обозначим собственные значения матрицы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Пусть выполнено соотношение

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \leq \left(\frac{p + 2\sqrt{p-1}}{p-2} \right)^2,$$

где $\lambda_{max} = \max_j \sup_D \{\lambda_j(x)\}$, $\lambda_{min} = \min_j \inf_D \{\lambda_j(x)\}$.

Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы для p -эллиптического уравнения вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} A \nabla u) = \operatorname{div} f & \text{в } D, \\ u = 0 & \text{на } F, \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0 & \text{на } G, \end{cases} \quad (1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ — внешняя кономальная производная функции u , а $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in L_{p'}(D)$, $p' = p/(p-1)$.

Для формулировки результата нам потребуется понятие ёмкости. Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ ёмкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < n$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^q dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Величина показателя q связана со значением показателя p из (1), размерностью пространства n и определяется следующим образом: если $p \in (1, n/(n-1)]$, то $q = (p+1)/2$, а если $p \in (n/(n-1), n]$, где $n > 2$, то $q = np/(n+p)$.

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый шар радиуса r с центром в точке x_0 . Сформулируем ограничение на множество F .

А. Если $1 < p \leq n$, то предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leq r_0$ справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-q}, \tag{2}$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r .

В. Если $p > n$, то предполагается, что множество F не пусто: $F \neq \emptyset$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если $f \in L_{p'+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, $p' = p/(p-1)$, то существует положительная постоянная $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ такая, что для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{p'(1+\delta/p)} dx,$$

в которой константа C при $1 < p \leq n$ зависит только от p , δ_0 , n , величины c_0 из (2) и области D . При $p > n$ зависимость C от c_0 отсутствует.

Литература

1. Чечкина А.Г. О задаче Зарембы для p -эллиптического уравнения // Математический сборник, **214**:9 (2023), 144-160 (*Chechkina A. G. On the Zaremba problem for the p -elliptic equation // Sbornik: Mathematics, **214**:9 (2023), 1321–1336).*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УНИТАРНОГО ГИЛЬБЕРТОВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И КАНОНИЧЕСКОЕ БОЗОННОЕ КВАНТОВАНИЕ ВЕЙЛЯ – СМОЛЯНОВА

Н.Н. Шамаров

nshamarov@yandex.ru

УДК 517

Вторичное квантование в представлении из [1] опирается на унитарное преобразование Фурье цилиндрических мер [2], при отождествлении их с подходящими их обобщенными плотностями, а скалярное произведение плотностей задано интегрированием по бесконечномерному аналогу меры Лебега. Существует собственный ортонормированный базис этого преобразования Фурье.

Ключевые слова: обобщенные меры, обобщенные плотности цилиндрических мер, гильбертовы преобразования Фурье, обобщенная единица на ℓ_2 , бесконечные тензорные произведения.

Шамаров Николай Николаевич, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Бесконечномерный аналог преобразования Фурье впервые (правда, под именем преобразования Лапласа) был введен в работе Андрея Николаевича Колмогорова [3], представленной Жаком Адамаром. При этом преобразованию подвергалась вероятностная борелевская мера F на произвольном сепарабельном банаховом вещественном пространстве E , а результатом преобразования была комплекснозначная функция H на сопряженном к E пространстве, такая, которая вещественно-линейному функционалу f сопоставляла усреднение по мере F той комплексной ограниченной функции (унитарного характера) на E , которая задается формулой $x \rightarrow \exp(if(x))$.

Эта формула по построению задает непрерывную цилиндрическую функцию, где под цилиндрической функцией на E понимается композиция $\Phi(P(x))$ непрерывного линейного оператора на E с конечномерным образом $P(E)$ и некоторой функции Φ , определенной на этом конечномерном образе; соответственно, цилиндрическим борелевским подмножеством в E называется то, чья индикаторная функция является цилиндрической борелевской. Поэтому довольно быстро было понято, что счетная аддитивность преобразуемой меры излишня, и достаточно от меры требовать, чтобы она была цилиндрической; даже требовать конечность вариации от цилиндрической меры при этом определении, вообще говоря, необязательно. Если при этом банахово пространство E является гильбертовым, то есть, являющимся изоморфной копией своего сопряженного, то преобразование Фурье цилиндрической меры, заданной на борелевских цилиндрических подмножествах в E , можно считать функцией снова на E (однако уже обычной функцией точки, а не функцией множества); эта функция на E и называется тогда гильбертовым преобразованием Фурье цилиндрической меры.

Таким образом, преобразование Фурье переводит цилиндрические меры на сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве E в функции на том же E . Если бы удалось некоторым цилиндрическим мерам на таком E (например, таким мерам, бесконечно-дифференцируемым по Фомину и достаточно быстро убывающим на бесконечности, то есть, имеющим бесконечно-дифференцируемое по Фреше преобразование Фурье) линейно сопоставить непрерывные функции, играющие роль плотностей этих мер, то можно было бы считать преобразование Фурье преобразующим функции на E снова в функции на E и искать собственные функции такого преобразования.

Оказывается, в классе цилиндрических мер, близких к гауссовским, можно данную программу реализовать, — обходя таким образом условия “no-go”-теорем Бенткуса [4] и Угланова [5] 1973 года. При этом непрерывную плотность p цилиндрической меры F можно сделать интегрируемой по бесконечномерному (обобщенному) аналогу интеграла Лебега, где под обобщенной мерой понимается линейный функционал на пространстве функций (обычно являющийся непрерывным в подходящей топологии). Один из таких аналогов описывается чрезвычайно прямым способом: именно, каждое сужение $p|_K$ плотности p на конечномерное подпространство K в E нужно проинтегрировать по стандартной лебеговой мере этого (евклидова) подпространства, и для полученной таким образом числовой функции $I(p, K)$ на направленном по расширению семействе конечномерных подпространств взять предел (по указанной направленности). Обозначим этот предел через $I(p, E)$ и назовем его интегралом по канонической обобщенной мере Лебега гильбертова пространства E от функции p , и, если удобна дифференциальная запись, положим $I(p, E) = \int p(x)dx$ (где \int символизирует интеграл по обобщенной мере Лебега – бесконечномерному объему (dx) в E , или, по аналогии с конечномерным случаем, “обобщенную единицу”).

Эрмитовыми плотностями назовем плотности p вида $p(x) = t(x)v(x)$, где t – цилиндрический многочлен на E , (x, x) – скалярное произведение в E , π – площадь круга единичного радиуса и $v(x) = \exp(-\pi(x, x))$ – гауссов вакуум того фоковского представления бесконечномерных канонических бозонных коммутационных соотношений комплексификации вещественного пространства E , которое построено в работе [1].

Теорема 1. Для любой эрмитовой плотности $p = tv$ и любой борелевской ограниченной цилиндрической функции φ интеграл $I(\varphi p, E)$ равен интегралу от φt по централизованной гауссовской цилиндрической мере G , чей корреляционный оператор является умножением на $1/(2\pi)$.

При этом интеграл можно вычислять как предел по n последовательности $I(p, Kn)$ по любой расширяющейся последовательности конечномерных подпространств Kn с n плотным в E

объединением.

Теорема 2. В терминах теоремы 1 значение в точке y гильбертова преобразования Фурье цилиндрической меры $t(x)G(dx)$ совпадает с обобщенным интегралом $\int \exp(i(x, y) - \pi(x, x))t(x)dx$. При этом пространство D всех комплексных эрмитовых плотностей инвариантно относительно интегрального оператора J , переводящего каждую эрмитову плотность p в функцию $y \rightarrow (\int \exp(2\pi i(x, y))p(x)dx)$, четвертая степень оператора J является тождественным оператором на D , а сам оператор J сохраняет гильбертову норму на D , задаваемую скалярным произведением вещественных эрмитовых плотностей p и q вида $(p, q) = \int p(x/\sqrt{2})q(x/\sqrt{2})dx$. Далее, комплексное гильбертово пространство Z , получаемое пополнением пространства D по указанной норме, изоморфно фоковскому с вакуумом v , продолжение оператора J до унитарного на Z имеет в D вещественный собственный ортонормированный базис, и обратный к J оператор отличается лишь знаком в экспоненте, то есть, задается на плотности p формулой $y \rightarrow (\int \exp(-2\pi i(x, y))p(x)dx)$.

Замечание 1. В [1] описана однопараметрическая серия пространств типа Z и соответствующих унитарных операторов типа преобразования Фурье, отвечающих различным единицам измерения приведенной константы Планка \hbar . Стандартное пространство Фока, описанное функциями Березина, отвечает единичной величине этой константы.

Литература

1. O.G. Smolyanov, N.N. Shamarov. Schroedinger Quantization of Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems with a Nonquadratic Hamiltonian Function. // Doklady Mathematics, 2020, Vol. 101, No. 3, pp. 227–230.
2. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. (любое издание)
3. Kolmogoroff A. La transformation de Laplace dans les espaces lineaires. – C. R. Acad. Sci. Paris. 1935 T. 200 P. 1717–1718.
4. A. V. Uglanov Usp. Mat. Nauk 28 (4), 227–228 (1973).
5. V. Yu. Bentkus Mat. Zametki 14 (4), 465–468 (1973)

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ И ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА В НЕГИЛЬБЕРТОВОМ СЛУЧАЕ

И.А. Шейпак

iasheip@yandex.ru

УДК 512.56

Показано, что задача о наилучших оценках производных в пространствах Соболева $W_p^n[0; 1]$ тесно связана с наилучшими приближениями сплайнов специального вида многочленами степени не выше $n - 1$ в пространстве $L_{p'}[0; 1]$. На основе этого подхода получены точные константы вложения для $p = \infty$, $k = 0$ и $k = n - 1$.

Ключевые слова: точные константы вложения, пространства Соболева, аппроксимация многочленами.

Рассматривается пространство Соболева $\mathring{W}_p^n[0; 1]$, состоящее из вещественных функций y , обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка $n - 1$, таких, что $y^{(n)} \in L_p[0; 1]$ ($1 \leq p \leq \infty$ и выполняются краевые условия $y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$)).

Для произвольной точки $a \in (0; 1)$ изучаются величины $A_{n,k,p}(a)$, наименьшими возможными в неравенствах

$$y^{(k)}(a) \leq A_{n,k,p}(a) \|y^{(n)}\|_{L_p[0;1]}, \quad y \in \mathring{W}_p^n[0; 1], \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 20-11-20261).

Шейпак Игорь Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Также целью является получение точных констант вложения пространства $\dot{W}_p^n[0; 1]$ в пространство $\dot{W}_\infty^k[0; 1]$

$$\Lambda_{n,k,\infty} := \max_{a \in [0;1]} A_{n,k,p}(a).$$

Определим \mathcal{P}_m — пространство вещественных многочленов

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j x^j, \quad x, c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq m \right\}$$

степени не выше m . Также рассмотрим сплайны вида

$$\frac{(x-a)_-^{n-k-1}}{(n-k-1)!} := \begin{cases} \frac{(x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}, & x \in [0; a] \\ 0, & x \in (a; 1] \end{cases}$$

Теорема 1. Для величин $A_{n,k,p}(a)$ справедливо равенство

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| \frac{(x-a)_-^{n-k-1}}{(n-k-1)!} - u \right\|_{L_p[0;1]}.$$

Заметим, что случай $p = 2$ изучен в [1] при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Далее нас интересует случай $p = \infty$. На основании результатов о наилучшем приближении многочленами характеристической функции в $L_1[0; 1]$ (см. [2]) доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если $k = n-1$ четно, то точка $a = 1/2$ является точкой глобального максимума функции $A_{n,n-1,\infty}$. Если $k = n-1$ нечетно, то точка $a = 1/2$ является точкой локального минимума функции $A_{n,n-1,\infty}$.

При четном n точками глобального максимума функции $A_{n,n-1,\infty}$ являются точки $\sin^2 \frac{\pi n}{4(n+1)}$ и $\sin^2 \frac{\pi(n+2)}{4(n+1)}$ (ближайшие к $1/2$ точки из множества $\left\{ a_j = \sin^2 \frac{\pi j}{2(n+1)} \right\}_{j=1}^n$). Таким образом,

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ нечетно,}$$

$$\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} \sin \frac{\pi n}{2(n+1)}, \quad \text{если } n \text{ четно.}$$

Свойства функций $A_{n,0,\infty}$ ($k = 0$) можно описать в терминах ядра Пеано (см.[3]).

Теорема 3.

$$A_{n,0,\infty}(a) = \frac{V_n(2a-1)}{2^n}, \quad a \in [0; 1],$$

где $V_n(t) = \frac{2\sqrt{2}(n+1)}{\pi n!} \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1/2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^n}{1+(t+ix\sqrt{1-t^2})^{2(n+1)}} dx$ — ядро Пеано.

Теорема 4.

$$\Lambda_{n,0,\infty} = A_{n,0,\infty}(1/2) = \frac{V_n(0)}{2^n} = \frac{n+1}{\pi n! 2^{2(n-1)}} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}} dx.$$

Литература

1. Гарманова Т. А., Шейнак И. А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. — 2021. — Т. 55, вып. 1. — С. 43–55.
2. Дейкалова М. В. Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки алгебраическими многочленами // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 4. — С. 144–155.
3. Fiedler H., Jukart W. B. Best L_1 -Approximation by Polynomials // Journal of Approximation Theory. — 1983. — V. 37. — P. 260–292.

ABOUT ONE ISSUE OF SOLVABILITY OF TWO CLASSES OF FOURTH-ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.R. Aliev

alievaraz@yahoo.com, alievaraz@asoiv.edu.az

In this paper, sufficient conditions for the “smoothly” regular solvability of two classes of fourth-order operator-differential equations, the main part of which have multiple characteristics, are found. These solvability conditions are expressed under certain conditions on the operator coefficients of the equations under study. At the same time, we find the exact values of the norms of intermediate derivatives operators in a Sobolev-type space and indicate their connection with the conditions of “smoothly” regular solvability.

Keywords: Sobolev-type space, operator-differential equation, “smoothly” regular solvability.

Let A be a self-adjoint positive-definite operator in a separable Hilbert space H . Denote by H_θ the scale of Hilbert spaces generated by the operator A , i.e.

$$H_\theta = \text{Dom}(A^\theta), \theta \geq 0, (x, y)_\theta = (A^\theta x, A^\theta y), x, y \in \text{Dom}(A^\theta).$$

Consider a fourth-order operator-differential equation of the form

$$\left(-\frac{d}{dt} + A\right)^k \left(\frac{d}{dt} + A\right)^{4-k} u(t) + \sum_{j=1}^3 A_j u^{(4-j)}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

where $A_j, j = 1, 2, 3$, are linear, generally speaking, unbounded operators in $H, f(t) \in W_2^1(\mathbb{R}; H), u(t) \in W_2^5(\mathbb{R}; H), k = 1$ or $k = 3$. Here by $W_2^m(\mathbb{R}; H)$, for integers $m \geq 1$, we mean the Hilbert space (see [1])

$$W_2^m(\mathbb{R}; H) = \left\{ u(t) : \frac{d^m u(t)}{dt^m} \in L_2(\mathbb{R}; H), A^m u(t) \in L_2(\mathbb{R}; H) \right\}$$

with the norm

$$\|u\|_{W_2^m(\mathbb{R}; H)} = \left(\left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_{L_2(\mathbb{R}; H)}^2 + \|A^m u\|_{L_2(\mathbb{R}; H)}^2 \right)^{1/2},$$

where $L_2(\mathbb{R}; H)$ denotes the Hilbert space of vector-functions $f(t)$, defined in \mathbb{R} , with values in H , and for which

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}; H)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

The derivatives are understood in the sense of the theory of distributions.

Definition. *If for any $f(t) \in W_2^1(\mathbb{R}; H)$ there is a vector-function $u(t) \in W_2^5(\mathbb{R}; H)$ satisfying equation (1) for all $t \in \mathbb{R}$ and the inequality*

$$\|u\|_{W_2^5(\mathbb{R}; H)} \leq \text{const} \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}; H)},$$

then equation (1) will be called "smoothly"regularly solvable.

In this work, we find sufficient conditions imposed on the operator coefficients of equation (1), which ensure its "smoothly"regular solvability. At the same time, we find the exact values of the norms of intermediate derivatives operators in a Sobolev-type space and indicate their connection with the conditions for the "smoothly"regular solvability of equation (1).

Aliev Araz Rafiq, Doctor of Science in Physico-mathematical Sciences, Professor, Department of General and Applied Mathematics, Faculty of Information Technologies and Control, Azerbaijan State Oil and Industry University (Baku, Azerbaijan)

Note that the issues on solvability of operator-differential equations with a multiple characteristic have been considered relatively little, although from the application point of view such equations are also of interest and occur, in particular, in problems on the stability of plates made of plastic material (see, for example, [2]).

Traditionally, $L(X, Y)$ is understood as the set of linear bounded operators operating from a Hilbert space X to another Hilbert space Y .

Let us formulate the following main theorem of this work.

Theorem. *Let A be a self-adjoint positive-definite operator in H and the operators*

$$A_j \in L(H_j, H) \cap L(H_{j+1}, H_1), \quad j = 1, 2, 3,$$

and the following inequality holds

$$\sum_{j=1}^3 \max \left\{ \left\| A_{4-j} A^{-(4-j)} \right\|_{H \rightarrow H}, \left\| A A_{4-j} A^{-(5-j)} \right\|_{H \rightarrow H} \right\} n_j < 1,$$

where

$$n_j = \frac{1}{16} j^{j/2} (4-j)^{(4-j)/2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Then equation (1) is "smoothly" regularly solvable.

Note that the numbers n_j , $j = 1, 2, 3$, appearing in the Theorem are exact values of the norms of the operators

$$A^{4-j} \frac{d^j}{dt^j} : W_2^5(\mathbb{R}; H) \rightarrow W_2^1(\mathbb{R}; H), \quad j = 1, 2, 3.$$

References

1. Lions J.L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Dunod, Paris, 1968; Mir, Moscow, 1971; Springer, Berlin, 1972.
2. Tetters G.A. Complex Loading and Stability of the Covers from Polymeric Materials. Zinatne Press, Riga, Latvia, 1969 (in Russian).

Секция 5

Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Е.В. Булинская

ekaterina.bulinskaya@math.msu.ru

УДК 519.21

Для принятия решений в условиях неопределенности необходим выбор соответствующей математической модели. Часто используемые модели входа-выхода при соответствующей интерпретации могут описывать функционирование систем из различных областей. В докладе будут исследованы оптимизация изучаемых моделей, их устойчивость и предельное поведение.

Ключевые слова: модели входа-выхода, оптимизация, устойчивость, предельное поведение..

Известно, что еще в начале 20-го века теория вероятностей считалась частью физики. Она стала рассматриваться как строгая математическая наука только после выхода в 1933 году книги А.Н. Колмогорова [1], где была сформулирована аксиоматика теории вероятностей. Однако теория вероятностей возникла еще в 17 веке и широко использовалась для решения задач, возникающих в различных приложениях. Для того чтобы приступить к решению какой-то практической задачи, прежде всего необходимо построить соответствующую математическую модель изучаемого процесса или явления. Существует много моделей, с большей или меньшей точностью, описывающих данную систему. Это связано с тем, что обычно построение математической модели происходит в несколько этапов, начиная с принимаемых предположений, которые приходится уточнять, пока не будет достигнута требуемая точность.

Важен также и тот факт, что одна и та же математическая модель может возникать в различных приложениях. В докладе речь пойдет о таких приложениях как финансы, страхование, теория запасов и водохранилищ, телекоммуникационные сети, динамика популяций, теория очередей, теория надежности, медицина и другие. Наиболее распространены так называемые модели входа-выхода (input-output models), см. напр. [2], задаваемые с помощью набора $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$, где T — горизонт планирования, $Z = \{Z(t), t \in [0, T]\}$ — входящий процесс,

Булинская Екатерина Вадимовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

$Y = \{Y(t), t \in [0, T]\}$ — выходящий процесс, $U = \{U(t), t \in [0, T]\}$ — управление, Ψ — функционал, который дает возможность найти состояние системы $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ в виде $X = \Psi(Z, Y, U)$, так как он характеризует структуру рассматриваемой системы и способ ее функционирования, $\mathcal{L}_T(U) = \mathcal{L}(T, Z, Y, U, X)$ — это целевая функция, оценивающая качество функционирования системы (обычно не все аргументы указываются в записи). В докладе будет объяснено, как различная интерпретация указанных элементов позволяет переходить от одной области приложений к другой. Таким образом, результаты, доказанные для одного раздела знаний, могут использоваться и в других.

Одна из основных задач при исследовании моделей прикладной теории вероятностей — нахождение оптимального управления, которое обеспечивает достижение экстремума целевой функции. Страхование — это важная и старейшая область прикладных исследований. Первые результаты по разделению и регулированию рисков были получены в 3-2 тысячелетиях до нашей эры. Однако математическая теория страхования (или актуарная математика) возникла в 17 веке и прошла 4 этапа [2,3], о которых будет рассказано в докладе. При выборе целевой функции имеются два основных подхода (стоимостной и надежностный), т.е. оцениваются либо понесенные компанией убытки, либо вероятность ее разорения на горизонте планирования, которые надо минимизировать. Если речь идет о полученном компанией доходе или времени безотказной работы, то желательно их максимизировать [4]. В последние десятилетия стали популярны и другие подходы, например, многокритериальная оптимизация [5] и поиск условных экстремумов.

В качестве управления может рассматриваться выбор начального капитала и принципа подсчета страховой премии, применение сострахования или перестрахования, использование банковских займов и инвестиций, стратегия выплаты дивидендов [6-11]. Отметим, что для того, чтобы использовать на практике полученные оптимальные управления, необходимо убедиться, что предлагаемая математическая модель устойчива, т.е. малые флуктуации параметров или возмущения распределений, фигурирующих в построенной модели, приводят к малым изменениям целевой функции. Существует целый ряд методов исследования устойчивости [12,13]. Основное внимание будет уделено использованию вероятностных метрик. Большой интерес также представляет изучение предельного поведения капитала страховой компании при неограниченном росте горизонта планирования [14].

Решение сформулированных проблем будет продемонстрировано на нескольких моделях страхования с дискретным временем. Одна из них — это модель с банковскими займами и непропорциональным перестрахованием с уровнем собственного удержания a . Предполагается, что требования, поступающие в страховую компанию, образуют последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{X_i, i \geq 1\}$. Здесь X_i это размер требования в i -ый период (год, месяц или день, в зависимости от целей исследования). Пусть $F(x)$ — функция распределения случайных величин $X_i, i \geq 1$, имеющая плотность $\varphi(x)$ и конечное математическое ожидание. Непосредственный страховщик выплачивает $\min(X_i, a)$, а остальное возмещение платит перестраховщик. Если заем берется в начале периода (до поступления требования), то ставка равна b_1 , если же приходится брать срочный заем после поступления требования на выплату возмещения, то ставка равна b_2 и $b_2 > b_1$. Цель компании — так выбрать размеры займов, чтобы минимизировать математическое ожидание дополнительных выплат, связанных с займами.

Пусть $f_n(x)$ — минимальные ожидаемые издержки за первые n периодов, α — дисконтирующий множитель для будущих издержек, а M — страховая премия, получаемая компанией каждый период. Тогда, положив $f_0(x) = 0$, для $n \geq 1$ методом динамического программирования выводим рекуррентное соотношение

$$f_n(x) = -b_1x + \min_{y \geq x} G_n(y), \quad G_n(y) = G_1(y) + \alpha E f_{n-1}(y + M - \min(X, a)).$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $F(M) < 1 - \frac{b_1}{b_2} < F(a)$, тогда существует возрастающая последовательность критических уровней $\{y_n\}_{n \geq 1}$ такая, что для всех $x \geq 0$

$$f_n(x) = -b_1x + \begin{cases} G_n(y_n), & \text{если } x \leq y_n, \\ G_n(x), & \text{если } x > y_n. \end{cases}$$

Последовательность $\{y_n\}_{n \geq 1}$ ограничена числом \bar{y} , удовлетворяющим уравнению $H(\bar{y}) = 0$, где $H(y) = G'_1(y) - b_1\alpha$.

Далее устанавливается устойчивость данной модели, а также доказывается, что для капитала компании выполняются усиленный закон больших чисел и центральная предельная теорема.

Литература

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ НКТП СССР, Ленинград, 1936.
2. Bulinskaya E. New research directions in modern actuarial sciences. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol. 208, 2017, pp. 349–408.
3. Bernstein P.L. Against the Gods: the Remarkable Story of Risk, John Wiley & Sons, 1996.
4. Bulinskaya E.V. Cost approach versus reliability. Proceedings of International Conference DCCN-2017, Technosphaera, Moscow, 2017, pp. 382–389.
5. Ehrgott M. Multicriteria Optimization. Second edition. Springer. Berlin, Heidelberg, New York. 2005.
6. Luesamai A. Lower and Upper Bounds of the Ultimate Ruin Probability in a Discrete Time Risk Model with Proportional Reinsurance and Investment. The Journal of Risk Management and Insurance. 2021. Vol. 25, (1), pp. 1–10.
7. Bata K., Shmidli H. Optimal capital injections and dividends with tax in a risk model in discrete time. European Actuarial Journal. 2020. Vol. 10, pp. 235–259.
8. Bulinskaya E. Asymptotic analysis and optimization of some insurance models. Applied Stochastic Models in Business and Industry, Vol. 34, No. 6, 2018, pp. 762–773.
9. Bulinskaya E. New dividend strategies. Dimotikalis, Y. et al. (eds.) Applied Modeling Techniques and Data Analysis 2, chapter 3, ISTE Ltd., London, 2021, pp. 39–52.
10. Bulinskaya E. Asymptotic analysis of insurance models with bank loans. New perspectives on stochastic modeling and data analysis. Bozeman J.-R., Girardin V., Skiadas Ch. (eds.) ISAST, Athens, Greece, 2014, pp. 255–270.
11. Bulinskaya E., Gusak J., Muromskaya A. Discrete-time insurance model with capital injections and reinsurance. Methodology and Computing in Applied Probability, Vol. 17, 2015, pp. 899–914.
12. Fabozzi F.J., Klebanov L.B., Rachev S.N. Robust and Non-Robust Models in Statistics, NOVA Science Publishers, Inc., 2009.
13. Saltelli A. et al. Global Sensitivity Analysis. The Premier, John Wiley & Sons, 2008.
14. Булинская Е.В. Модели страхования с дискретным временем. Вестник Московского Университета, серия 1, Математика, Механика, с. 42–52.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ И ДОКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЯХ

Е.Вл. Булинская

bulinskaya@yandex.ru

УДК 519.21

Для стохастической модели каталитического (неоднородного в пространстве) ветвящегося случайного блуждания в критическом и докритическом случаях исследуется максимальное отклонение популяции от начала координат за всю историю ее существования. Показано, что асимптотическое поведение хвостов распределения упомянутого отклонения будет существенно иным по сравнению с известными результатами для некаталитического, т.е. однородного в пространстве, ветвящегося случайного блуждания.

Ключевые слова: каталитическое ветвящееся случайное блуждание, критический режим, докритический режим, максимальное отклонение, тяжелые хвосты.

Математические модели таких явлений, как освоение популяцией территории обитания, распространение пожара, заражение новых областей во время эпидемии и т.п., уже давно предлагались различными учеными. Достаточно упомянуть статью [1] и книгу [2]. Вероятностной моделью, сочетающей как размножение частиц (бактерий, особей, генов и т.п.), так и случайное перемещение их в пространстве, служит ветвящееся случайное блуждание (ВСБ), см., например, монографию [3]. Вопросам распространения в пространстве популяции частиц в ВСБ посвящены многие работы, например, статьи [4]–[7].

Среди разнообразных моделей ВСБ особое место занимает каталитическое ветвящееся случайное блуждание (КВСБ), или ВСБ в неоднородной среде, в котором частицы могут перемещаться по всему пространству (осуществлять случайное блуждание), а производить потомство – только в конечном множестве точек, в которых находятся “катализаторы”, см., например, [8] и [9]. Задачи скорости распространения популяции КВСБ с точки зрения ограниченности некоторых моментов численностей частиц и с точки зрения сходимости максимума частиц почти наверное были поставлены и решены при определенных условиях соответственно в работах [10] и [11]. В частности, одним из принципиальных условий было предположение о надкритичности режима КВСБ, который гарантировал как глобальное, так и локальное выживание популяции частиц с положительной вероятностью (см., например, [12]). В таком случае максимум M_t популяции в момент t растет, когда $t \rightarrow \infty$, и интерес представляет скорость этого роста. В зависимости от различных условий на “тяжесть” хвостов распределения скачка блуждания в статьях [13]–[15] было исследовано асимптотическое поведение M_t как в одномерной постановке задачи, так и в случае произвольной размерности решетки \mathbb{Z}^d .

Теперь наша цель – изучить распространение популяции, когда КВСБ является критическим или докритическим. Тогда даже если популяция не вырождается глобально, то она вырождается локально и, кажется, что вопрос об освоении популяцией территории обитания с течением времени становится бессмысленным. Однако мы модифицируем постановку задачи и введем новую случайную величину $M := \max\{M_t : t \geq 0\}$ – максимальное отклонение популяции от начала координат за всю историю ее существования. Таким образом, новая задача состоит в том, чтобы выяснить, как максимально далеко смогли зайти частицы прежде, чем популяция частиц выродилась.

Сформулируем некоторые из полученных нами результатов.

Теорема 1. Пусть в критическом КВСБ по \mathbb{Z} случайное число потомков, производимых в каждом источнике ветвления, имеет конечный второй момент, а случайное блуждание является простым и симметричным. Тогда

$$P(M > x) \sim \frac{C_1}{\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где C_1 – некоторая положительная постоянная.

Результат теоремы 1 является аналогом основного результата статьи [16], полученного для модели критического ВСБ (без катализаторов) по \mathbb{Z} . Однако в последней модели скорость убывания вероятности $P(M > x)$ имеет порядок $1/x^2$ при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, частицы в критическом КВСБ успевают значительно дальше уйти от множества катализаторов, прежде чем вернуться в это множество (и, возможно, там погибнуть), по сравнению с моделью ВСБ, в которой частицы могут погибнуть в любой точке.

Теорема 2. Пусть в докритическом КВСБ по \mathbb{Z} случайное блуждание является простым и симметричным. Тогда

$$P(M > x) \sim \frac{C_2}{x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где C_2 – некоторая положительная постоянная.

Результат теоремы 2 является аналогом основного результата статьи [17], посвященной докритическому ВСБ по \mathbb{Z} . Однако в последнем случае вероятность $P(M > x)$ убывает экспоненциально быстро, что принципиально отличается от утверждения теоремы 2. Это отличие опять же связано с возможной гибелью частиц в каждой точке решетки в модели ВСБ.

Таким образом, нами обнаружены новые эффекты влияния неоднородной среды, в которой происходит ветвление частиц в КВСБ, на то, как далеко успеет зайти популяция до своего вы-

рождения. Действительно, в случае однородной среды в ВСБ хвосты распределения максимального отклонения M убывают значительно быстрее и даже являются “легкими” в докритическом случае, в то время как согласно нашим новым результатам хвосты распределения M являются “тяжелыми” и даже правильно меняющимися с индексом $-1/2$ и -1 соответственно в критическом и докритическом КВСБ.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Вестник МГУ, Серия А Математика и механика, 1937, **1**(6), 1–16.
2. Haccou P., Jagers P., Vatutin V.A. Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations. Cambridge University Press, 2007.
3. Shi Z. Branching random walks. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XLII-2012. Lecture Notes in Math., 2015, **2151**.
4. Bezborodov V., Gantert N. The maximal displacement of radially symmetric branching random walk in \mathbb{R}^d . arXiv:2309.14738 [math.PR], 2023, 1–54.
5. Neuman E., Zheng X. On the maximal displacement of near-critical branching random walks. Probab. Theory Relat. Fields, 2021, **180**, 199–232.
6. Chen X., He H. Lower deviation and moderate deviation probabilities for maximum of a branching random walk. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 2020, **56**(4), 2507–2539.
7. Dyszewski P., Gantert N., Hofelsauer Th. The maximum of a branching random walk with stretched exponential tails. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 2023, **59**(2), 539–562.
8. Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math., 1998, **326**, 975–980.
9. Ватутин В.А., Топчий В.А., Ху Ю. Ветвящееся случайное блуждание по решетке \mathbb{Z}^4 с ветвлением лишь в начале координат. Теория вероятн. и ее примен., 2011, **56**(2), 224–247.
10. Молчанов С.А., Яровая Е.Б. Ветвящиеся процессы с решетчатой пространственной динамикой и конечным множеством центров генерации частиц, Докл. РАН, 2012, **446**(3), 259–262.
11. Carmona Ph., Hu Y. The spread of a catalytic branching random walk. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 2014, **50**(2), 327–351.
12. Булинская Е.Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов. Теория вероятн. и ее примен., 2014, **59**(4), 639–666.
13. Bulinskaya E.Vl. Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice. Stoch. Proc. Appl., 2018, **128**(7), 2325–2340.
14. Bulinskaya E.Vl. Maximum of Catalytic Branching Random Walk with Regularly Varying Tails. J. Theoret. Probab., 2021, **34**(1), 141–161.
15. Bulinskaya E.Vl. Catalytic branching random walk with semi-exponential increments. Math. Popul. Studies, 2021, **28**(3), 123–153.
16. Lalley S.P., Shao Y. On the maximal displacement of critical branching random walk. Probab. Theory Relat. Fields, 2015, **162**(1), 71–96.
17. Neuman E., Zheng X. On the maximal displacement of subcritical branching random walks. Probab. Theory Relat. Fields, 2017, **167**(4), 1137–1164.

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ВЫБОРА ЗНАЧИМЫХ ФАКТОРОВ

А.В.Булинский

alexander.bulinski@math.msu.ru

УДК 519.23

Рассматриваются различные методы выбора значимых факторов, влияющих на изучаемый случайный отклик. Показано, что широко применяемые субоптимальные алгоритмы, основанные на понятиях теории информации, необязательно идентифицируют набор (в определенном смысле) значимых факторов. Исследуется также устойчивость статистических выводов, играющая важную роль для разнообразных приложений.

Ключевые слова: выбор значимых факторов, субоптимальные алгоритмы, асимптотическое поведение статистических оценок.

Отбор значимых признаков (факторов), влияющих на изучаемую переменную (отклик) – важная область современной математической статистики и машинного обучения. Она представляет не только теоретический интерес, но и допускает обширные приложения в медицине, биологии, финансах и других областях, см., например, [1], [2]. Интерес автора к этому научному направлению связан с участием в исследованиях, которые проводились в МГУ под руководством академика РАН В.А.Садовниченко и академика РАН В.А.Ткачука, см. [3]. Основная проблема заключается в идентификации набора признаков, имеющих существенное влияние на изучаемый отклик Y . А именно, среди компонент вектора переменных $X = (X_1, \dots, X_p)$ ищется набор

$$X_S := (X_{i_1}, \dots, X_{i_r}), \text{ где } S = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, p\}, \quad (1)$$

такой, что X_S содержит факторы, оказывающие (в определенном смысле) заметное влияние на поведение Y . Также нетривиальной проблемой является изучение характера связей между Y и X_S .

В первой части доклада рассматриваются информационные методы поиска значимых факторов. Если ставится задача найти набор из r факторов ($r < p$), который является “наиболее информативным” для описания Y , то выбирается X_{S_0} так, чтобы

$$I(X_{S_0}; Y) = \max_{S \subset \{1, \dots, p\}, |S|=r} I(X_S; Y), \quad (2)$$

где взаимная информация $I(U, V)$ случайных векторов U и V служит мерой их зависимости. Не предполагается, что S_0 – единственное множество, фигурирующее в (2). Нахождение такого S_0 было названо в [4] “схемой максимальной зависимости” (“Max-Dependency scheme”).

Максимизация функции, заданной на всех подмножествах множества $\{1, \dots, p\}$, имеющих мощность r , практически нереализуема при весьма больших p и умеренно больших r . Поэтому неудивительно, что возник целый ряд субоптимальных процедур анализа данных.

В этой связи укажем на важную область исследований в современной генетике GWAS (Genome-Wide Association Studies), в которой изучается, какие “поломки в геноме человека”, содержащем более трех миллиардов нуклеотидных оснований, провоцируют сложные заболевания (гипертензия, инфаркт миокарда и другие), см., например, [5]. Для сложных заболеваний одиночная поломка молекулы ДНК не представляет опасности, в то время как определенные множественные повреждения могут увеличить риск сложного заболевания. Это явление в генетике называется эпистазом. В статистической литературе обычно говорят о взаимодействии факторов.

Нас будет интересовать последовательный отбор факторов, когда на каждом шаге t добавляется один фактор к уже построенному набору на шагах $1, \dots, t-1$. Наряду с обзором мы приводим новые результаты [6].

Сложности выбора значимых факторов обусловлены также тем, что совместное распределение (X, Y) , вообще говоря, неизвестно. Таким образом, естественно применять аналог (2), где

вместо $I(X_S; Y)$ используется статистическая оценка $\widehat{I}_n(X_S; Y)$, построенная по наблюдениям $(X^{(j)}, Y^{(j)})$, $j = 1, \dots, n$. Обычно предполагается, что $(X^{(j)}, Y^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, имеющих такое же распределение, как (X, Y) . Таким образом, предварительно находятся статистические оценки интересующих характеристик, а затем решается задача типа (2), используя эти оценки.

Для дискретных случайных векторов U, V мы применяем статистические оценки взаимной информации $\widehat{I}_n(U, V)$, построенные с помощью частотных оценок используемых вероятностей на основе массива наблюдений $\{(X^j, Y^j), j = 1, \dots, n\}$.

Нам потребуется оценивать сверху интегралы вида $Eg(F(Z))$, где действительная функция g не убывает на $[0, 1]$, F – функция распределения дискретной случайной величины Z .

Лемма 1. Пусть функция $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает, а дискретная случайная величина Z принимает значение x_i с вероятностью p_i , где $i = 1, \dots, v$. Тогда

$$Eg(F(Z)) \leq \int_0^1 g(\min\{u + a, 1\})du, \tag{3}$$

где F – функция распределения Z и $a := \max_{i=1, \dots, v} p_i$.

Рассмотрим модель (отражающую явление эпистаза) взаимодействия факторов X_T , введенную в разделе 4 статьи [6], где множество $T \subset \{1, \dots, p\}$ и его мощность $|T| = r < p$. Пусть на первом шаге выбирается точка j_1 , которая обеспечивает максимум величин $\widehat{I}_n(X_j; Y)$ по всем $j \in \{1, \dots, p\}$ (если таких точек несколько, то с равной вероятностью выбирается любая из них). Обозначим $P(n)$ вероятность того, что j_1 принадлежит множеству T , когда для ее построения использовались векторы $(X^{(j)}, Y^{(j)})$, $j = 1, \dots, n$.

Теорема 1. В рамках упомянутой модели взаимодействия факторов при $p \geq 2r - 1$ справедливо соотношение:

$$P(n) \leq \frac{1}{k + 1} + \frac{1}{p - r + 1} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \tag{4}$$

где $r = |T|$ и $k = [(p - r)/(r - 1)]$, а $[\cdot]$ обозначает целую часть числа.

Тем самым уточняется результат работы [6].

Во второй части доклада представлены новые результаты, относящиеся к развитию метода MDR-EFE (multifactor dimensionality reduction - error function estimation) для идентификации значимых факторов, влияющих на небинарный случайный отклик. Этот метод инициирован статьями [3], [7]. Доказаны асимптотические результаты, описывающие поведение статистических оценок функционала ошибки прогноза изучаемого отклика при росте числа наблюдений. Для этого предложена регуляризация оценок, позволяющая установить не только центральную предельную теорему для введенных статистик, но и выявить скорость сходимости их моментов к моментам предельного гауссовского распределения. Впервые для рассматриваемого метода MDR-EFE показано, что при определенных условиях процедура последовательного отбора факторов на основе статистических оценок упомянутого функционала ошибки дает случайный набор факторов, который с вероятностью, стремящейся к единице (когда число наблюдений неограниченно растет), совпадает с “оракульным”. Так называют набор, который получился бы на основе данного алгоритма при последовательном выборе с использованием известного совместного распределения вектора факторов и отклика.

В третьей части доклада излагаются различные подходы к описанию устойчивости процедур отбора значимых факторов. В частности, рассматривается предложенное в [8] новое понимание монотонности мер устойчивости, вводимых с помощью определенной матрицы частот из работы [9]. Обсуждаются также некоторые дальнейшие направления исследований.

Литература

1. Stańczyk U., Zielosko B., Jain L.C. (Eds.) Advances in Feature Selection for Data and Pattern Recognition. Cham: Springer, 2018.
2. Pradip D., Chandrashekhara A. A comprehensive survey on feature selection in the various fields of machine learning. Applied Intelligence, 2023, v. 52, 4543-4581.
3. Bulinski A., Butkovskiy O., Sadovnichiy V., Shashkin A., Yaskov P., Balatskiy A., Samokhodskaya L., Tkachuk V. Statistical Methods of SNP Data Analysis and Applications. Open J. of Statistics, 2012, v. 2, 73-87.

4. Peng H., Long F., Ding C. Feature selection based on mutual information: criteria of max-dependency, max-relevance, and min-redundancy. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence. 2005, v. 27, 1226-1238.
5. Tsunoda T., Tanaka T., Nakamura Y.(Eds.). Genome-Wide Association Studies. Springer, Singapore, 2019.
6. Булинский А.В. О выборе значимых признаков, основанном на теории информации. Теория вероятн. и ее примен. 2023, т. 68, 483-508.
7. Bulinski A., Rakitko A. MDR method for nonbinary response variable. J. of Multivar. Analysis, 2015, v. 135, 25-42.
8. Булинский А.В. Свойства мер устойчивости отбора признаков. Теория вероятн. и ее примен. 2024, т. 69, 33-45.
9. Nogueira S., Sechidis K., Brown G. On the stability of featureselection algorithms. J. Mach. Learn. Res., 2018, v. 18, 1-54.

О ВОЗВРАТНОСТНЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

А.Ю. Веретенников

ayu@iitp.ru

УДК 519.217.4

Излагаются результаты о положительной возвратности для решений стохастических дифференциальных уравнений с переключениями.

Ключевые слова: диффузия с переключением; положительная возвратность; возвратность второго порядка.

В последние декады активно развивается теория стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с переключениями, см. [1]. Такие уравнения можно считать “промежуточными” между “простыми” СДУ Ито и СДУ со скачками общего вида. Установление условий эргодичности таких процессов имеет практические приложения, см. [2]. В [3,4] установлены достаточные условия простой и, соответственно, экспоненциальной возвратности и эргодичности.

В работах [5,6] найдены достаточные условия для положительной возвратности, чего достаточно для существования конечной инвариантной меры. В препринте [7] (принят к печати в журнале Moscow Mathematical Journal) установлены условия возвратности второго порядка, гарантирующие лучшую скорость сходимости к инвариантной мере. Здесь излагаются результаты работ [5,6,7].

Добавим, что в препринте [8] показано, что при выполнении условий, близких к “обратным” к использованным в [4], процесс оказывается транзиентным с не менее, чем линейной скоростью ухода на бесконечность.

Итак, рассматриваются СДУ в \mathbb{R}^d вида

$$dX_t = b(X_t, Z_t) dt + dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x, \quad Z_0 = z, \quad (1)$$

с непрерывной компонентой X_t и дискретной Z_t . Здесь W_t – стандартный d -мерный винеровский процесс, функция $b(x, z)$ борелевская и ограниченная, Z_t – скачкообразный марковский процесс с фазовым пространством $S = \{0, 1\}$ и с постоянными интенсивностями переходов λ_{01} (из 0 в 1) и λ_{10} (из 1 в 0); траектории Z_t в каждой точке t непрерывны справа и имеют пределы слева. Процессы Z и W независимы. Уравнение (1) имеет поттраекторно единственное сильное решение. Положим $b(x, 0) =: b_-(x)$, $b(x, 1) =: b_+(x)$.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Веретенников Александр Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, ИПФИ РАН, лаборатория Теория передачи информации и управления, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Теорема 1. ([5,6]) Пусть снос $b = (b_+, b_-)$ ограничен и измерим в смысле Бореля, и пусть найдутся $r_-, r_+, M > 0$ такие, что

$$0 < \lambda_{01} \wedge \lambda_{10} \leq \lambda_{01} \vee \lambda_{10} < \infty, \tag{2}$$

$$xb_-(x) \leq -r_-, \quad xb_+(x) \leq +r_+, \quad \forall |x| \geq M, \tag{3}$$

и

$$2r_- > d \quad \& \quad \frac{(2r_- - d)}{\lambda_{01}} > \frac{(2r_+ + d)}{\lambda_{10}}. \tag{4}$$

Тогда процесс (X, Z) положительно возвратен; более того, найдется $C > 0$ такое, что для всех достаточно больших M_1 и для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $z = 0, 1$

$$E_{x,z} \tau_{M_1} \leq C(x^2 + 1), \tag{5}$$

где

$$\tau_{M_1} := \inf(t \geq 0 : |X_t| \leq M_1).$$

Также, процесс (X_t, Z_t) имеет единственную инвариантную меру и для любых x, z имеет место сходимость к ней по метрике полной вариации при $t \rightarrow \infty$.

Для возвратности второго порядка (которая означает конечность и оценку для второго момента случайной величины τ_{M_1} при некотором M_1) предположим немного больше:

$$\frac{(6r_- - (3d + 12))}{\lambda_{01}} > \frac{(6r_+ + (3d + 12))}{\lambda_{10}}. \tag{6}$$

Также, предположим дополнительно следующее:

$$xb_-(x) \geq -R_-, \quad xb_+(x) \geq +R_+, \quad \forall |x| \geq M, \tag{7}$$

NB: Разумеется, считаем, что $R_+ \leq r_+, R_- \geq r_-$.

Теорема 2. ([7]) Пусть выполнены условия (2), (3), (6), (7). Тогда найдется $C > 0$ такое, что для любого достаточно большого M_1 и всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $z = 0, 1$

$$E_{x,z} \tau_{M_1}^2 \leq C(x^6 + 1). \tag{8}$$

Литература

1. X. Mao and C. Yuan Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperial College Press, London, 2006. [10.1142/p473](#)
2. F. Campillo, E. Pardoux Numerical methods in ergodic optimal stochastic control and application. In: I. Karatzas and D. Ocone, eds., Applied Stochastic Analysis, Proceedings of a US-French Workshop, Rutgers University, New Brunswick, NJ, April 29-May 2, 1991, volume 177 of Lecture notes in Control and Information Sciences, pages 59-73. Berlin, 1992, Springer-Verlag.
3. J. Shao, C. Yuan Stability of regime-switching processes under perturbation of transition rate matrices. Nonlinear Anal. Hybrid Syst 33, 211–226 (2019). [10.1016/j.nahs.2019.02.009](#)
4. B. Cloez, M. Hairer Exponential ergodicity for Markov processes with random switching. Bernoulli 21(1), 505–536 (2015). [10.3150/13-BEJ577](#)
5. A. Veretennikov On Positive Recurrence of One-Dimensional Diffusions with Independent Switching. In: Shiryayev A.N., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds) Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. ICSM-5 2020. Springer Proc. in Maths. & Stats., vo.1 371, 242 - 252 (2021). Springer, Cham. [10.1007/978-3-030-83266-7_18](#).
6. A. Veretennikov Positive recurrence of a solution of an SDE with variable switching intensities. Stoch PDE: Anal. Comp., 10, 1165-1179 (2022). [10.1007/s40072-022-00265-7](#)
7. A.Yu. Veretennikov On higher order moments and recurrence of an SDE with switching, arXiv:2212.13921; [10.48550/arXiv.2212.13921](#)
8. K. Mosievich On sufficient conditions of transience for a stochastic differential equation with switching, arXiv:2208.01737; [10.48550/arXiv.2208.01737](#)

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИЗМЕРИТЬ СЛУЧАЙНОСТЬ ДВОИЧНОЙ ЦЕПОЧКИ

О.П. Виноградов

ovinogradov@mail.ru

УДК 519.21

Каждой конечной двоичной цепочке (c_1, \dots, c_n) из нулей и единиц будет поставлено число $M(c_1, \dots, c_n)$, которое будет называться мерой случайности этой цепочки. Чем больше эта мера, тем «случайнее» будет цепочка. Дан способ, дающий возможность указывать цепочки с наибольшей мерой.

Ключевые слова: двоичные последовательности, мера случайности последовательности.

1. Введение. Настоящая работа возникла под влиянием доклада академика А. Н. Ширяева «Случайность в вероятности» [1].

На одной стороне правильной монеты написан нуль, а на другой единица. При бросании этой монеты n раз получим цепочку длины n из нулей и единиц. В работе [2] А. Н. Колмогоров и В. А. Успенский пишут: «Если кто-либо скажет нам, что он подбросил «честную» монету двадцать раз и, обозначив герб единицей, а решетку нулем, получил такой результат 1000101110111010000 (I) или такой 01111011001101110001 (II), мы вряд ли будем удивлены. Однако, если нам скажут, что результат бросаний был таков: 00000000000000000000 (III) — мы будем поражены или вообще не поверим или же усомнимся в корректности эксперимента. Возникает вопрос, почему, по-видимому, цепочки (I) и (II) воспринимаются как случайные, а цепочка (III) — как неслучайна? Но что означают слова «воспринимается как случайная»? Классическая теория вероятностей не дает ответа на этот важный вопрос. Можем ли мы отличить случайные цепочки от неслучайных? Правильный ответ может быть получен на основе алгоритмических представлений.

В настоящей работе предлагается подход, основанный на результатах А. Д. Соловьева [3]. А именно, для любого n и любой цепочки (c_1, \dots, c_n) из нулей и единиц по некоторому правилу будет поставлено число $M(c_1, \dots, c_n)$, которой будет называться *мерой случайности* этой цепочки, причем

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1} - 2} \leq M(c_1, \dots, c_n) \leq 1.$$

Чем больше эта мера тем «случайнее» будет цепочка. Дан способ, дающий возможность указывать цепочки с наибольшей мерой.

2. Основные результаты. Фиксируем цепочку длины n из нулей и единиц (c_1, \dots, c_n) . На одной стороне правильной монеты напишем нуль, а на другой единицу. Будем бросать эту монету до тех пор, пока впервые не появится строчка (c_1, \dots, c_n) . Пусть $\xi(c_1, \dots, c_n)$ — число бросаний. Из работы [3] нам понадобится явное выражение для $M\xi(c_1, \dots, c_n)$. А. Д. Соловьев вводит следующее определение.

Определение 1. Число d называется *периодом цепочки*, если $c_i = c_{i+d}$ ($i = 1, \dots, n - d$).

Заметим, что период d может быть равен любому из чисел $1, 2, \dots, n - 1$.

Пусть наша фиксированная цепочка имеет периоды d_1, d_2, \dots, d_s . А. Д. Соловьев получил из явного выражения для производящей функции случайной величины $\xi(c_1, \dots, c_n)$ формулу

$$M\xi(c_1, \dots, c_n) = 2^n (1 + 2^{-d_1} + \dots + 2^{-d_s}). \quad (1)$$

Из (1) вытекает, что, если у цепочки нет периодов, то

$$M\xi(c_1, \dots, c_n) = 2^n.$$

Из (1) также вытекает, что для цепочек, состоящих из одних нулей или из одних единиц

$$M\xi(c_1, \dots, c_n) = 2^n (1 + 2^{-1} + \dots + 2^{-n+1}) = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 = 2^{n+1} - 2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-01-00000).

Виноградов Олег Павлович, д.ф.-м.н, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия).

Таким образом, эти «почти неслучайные» цепочки наступят «позже», чем любые другие цепочки и минимальное значение $M\xi(c_1, \dots, c_n)$ достигается на цепочках без периодов (в каком-то смысле наиболее случайных). Грубо говоря, чем последовательность «случайней», тем скорее она наступает.

Замечание. Заметим, что в работе А. Д. Соловьева $n = m + 1$ и он рассматривал случайную величину $\nu = \xi(c_1, \dots, c_n) - n + 1$.

Определение 2. Мерой случайности цепочки (c_1, \dots, c_n) назовем число

$$M(c_1, \dots, c_n) = \frac{2^n}{M\xi(c_1, \dots, c_n)}.$$

Примеры. Если $d = 1$, то $c_1 = c_2, c_2 = c_3, \dots, c_{n-1} = c_n$. Таких цепочек две $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$. В этом случае

$$M(c_1, \dots, c_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1} - 2}.$$

Если периодов нет, то $M(c_1, \dots, c_n) = 1$.

Заметим, что относительно трех цепочек из работы [2], упомянутых во введении, можно заметить, что они имеют разную меру. У цепочки 1000101110111010000 нет периодов, и она имеет наибольшую меру равную единице. У цепочки 01111011001101110001 имеется только один период равный 18 и у нее мера меньше, чем у первой и равна

$$\frac{2^{18}}{1 + 2^{18}}.$$

Цепочка 00000000000000000000 имеет наименьшую меру среди всех цепочек длины 20 и равна

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{21} - 2}.$$

Обозначим через a_n число цепочек без периода среди цепочек длины n и множество цепочек без периодов через $A(n)$. Тогда $|A(n)| = a_n$. В Онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей [4] приведена литература, в которой показано, что

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 2,$$

$$a_{2n} = 2a_{2n-1} - a_n,$$

$$a_{2n+1} = 2a_{2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^n} = 0, 267786840217889112376671403584302552555 \dots$$

Исходя из этих рекуррентных соотношений, выпишем значения a_n для некоторых значений n : $a_{10} = 284, a_{20} = 281076, a_{26} = 17973080$.

Отметим «недостатки» множества $A(n)$. Во-первых, такое «не очень случайное» множество как, например, $(00000 \dots 001)$ принадлежит множеству $A(n)$. Во-вторых, иногда изменением лишь одного члена можно перевести цепочку из множества $A(n)$ в множество с минимальной мерой. Например, последовательность из n нулей имеет минимальную «меру случайности», а последовательность из $(n - 1)$ нулей и единицей на конце — максимальную.

Для исправления этих «недостатков» можно исключить из множества $A(n)$ те цепочки, у которых частота единиц находится вне некоторой ε -окрестности 0, 5.

В $A(n)$ будут находиться и «нехорошие» цепочки типа, например, (в случае четности n), начинающиеся с подряд идущими $n/2$ нулями и оканчивающиеся $n/2$ единицами.

Чтобы попытаться исключить такого типа цепочки, состоящие из большого числа подряд идущих одинаковых цифр, рассмотрим случайную цепочку длины n , а именно, бросим правильную монету n раз. Введем случайные величины $\eta_k, 1 \leq k \leq n - 1$. Случайная величина η_k равна единице, если на k -м и $(k + 1)$ -м местах будут стоять разные цифры и равна нулю, если — одинаковые.

Нам понадобится следующая

Теорема 1. *Случайные величины η_k , $1 \leq k \leq n-1$, попарно независимы.*

Так как $P(\eta_i = 0) = P(\eta_i = 1) = 0,5$, то используя теорему, получаем

$$MS_n = \frac{n-1}{2}, \quad DS_n = \frac{n-1}{4}.$$

Исключим те цепочки, у которых значение суммы $\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k$ находится «далеко» от $\frac{n-1}{2}$, используя, например, правило 3σ .

В качестве примера рассмотрим цепочку 10001011101111010000 из работы [2]. Как было указано выше, она принадлежит множеству $A(20)$, частота единиц равна в точности равна 0,5 и сумма $\sum_{k=1}^{19} \eta_k = 9$, которое «близко» к числу $\frac{20-1}{2} = 9,5$.

Поэтому по нашим критериям эта цепочка «хорошая».

Литература

1. [https://www.mathnet.ru/PresentFiles/21897/bsk\\$. \\$2018\\$. \\$10\\$. \\$17\\$. \\$shiryayev\\$. \\$an\\$. \\$ran\ discretionary\{-}\{-}\{domness\\$. \\$in\\$. \\$probability\\$. \\$slides.pdf](https://www.mathnet.ru/PresentFiles/21897/bsk$. 2018. 10. 17. $shiryayev$. an. $ran\ discretionary\{-}\{-}\{domness$. in. $probability$. $slides.pdf)
2. Колмогоров А. Н., Успенский В. А. Алгоритмы и случайность // Теория вероятностей и ее применения. 1987. **32**, N 3. 425–455.
3. Соловьев А. Д. Одно комбинаторное тождество и его применение к задаче о первом наступлении редкого события // Теория вероятностей и ее применение. 1966. **11**, N 2. 313–320.
4. [https://oeis.org/search?q=2%2C4%2C6%2C12%2C20%2C40%2C74%2C148%2C284\ discretionary\{-}\{-}\{&language=russian&go=%D0%9F%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0%BA\\$](https://oeis.org/search?q=2%2C4%2C6%2C12%2C20%2C40%2C74%2C148%2C284\ discretionary\{-}\{-}\{&language=russian&go=%D0%9F%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0%BA$)

О ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В МОДЕЛИ С ИНВЕСТИЦИЯМИ И АППРОКСИМАЦИЕЙ КЛАССИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

Т.В. Жмыхова

Изучалась платежеспособность страховых компаний, оперирующих на полном биномиальном финансовом рынке. В качестве основного показателя платежеспособности была выбрана вероятность неразорения. Для исследований применялся способ разложения плотностей по ортогональным полиномам.

Ключевые слова: полный биномиальный финансовый рынок, страховая компания, вероятность неразорения, полиномы Лагерра.

Постановка задачи. Рассмотрим финансовый (B, S) -рынок, состоящий из двух активов — безрискового (банковского счета), цена которого описывается уравнением:

$$\Delta B_n = rB_{n-1}, \quad B_0 > 0, \quad (1)$$

где $r (r > 0)$ — процентная ставка банка, B_0 — сумма на депозите в начальный момент времени, и рискованного актива (акций), цена которого описывается уравнением:

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \quad S_0 > 0, \quad n \leq N, \quad (2)$$

где доходность $\rho = \{\rho_n\}_{n \leq N}$ — бернуллиевская последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких что

$$\rho_n = \begin{cases} b, & \text{с вероятностью } p, \\ a, & \text{с вероятностью } q = 1 - p, \end{cases}$$

причем потребуем выполнение условия, обеспечивающего положительность цены акции, а именно $-1 < a < r < b$.

Пусть $X_x(t)$ — капитал страховой компании (далее СК) в момент t , $X(0) = x$, который она размещает на (B, S) — рынке, цены активов которого описываются уравнениями (1) и (2), тогда капитал компании описывается уравнением [1]

$$X_{n+1}^\pi = X_n^\pi(1 + r + \alpha(\rho_{n+1} - r)) + c - \eta_{n+1}. \quad (3)$$

Тут СК выбирает стратегию с постоянной долей рискового актива в портфеле, то есть $\alpha_n = \alpha = const$ ($0 < \alpha < 1$), величина которой составляет величину $\alpha_n = \frac{\gamma_n \cdot S_n}{X_n^\pi}$.

Теорема. Пусть $\varphi(x)$ — вероятность неразорения СК на бесконечном промежутке времени $[0; +\infty)$, такая что

$$\varphi(x) = P\{X_x(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\},$$

и является решением уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_\infty(x) = \varphi_1(x) + p \int_0^{x(1+r+\alpha(b-r))+c} \varphi_\infty(x(1+r+a\alpha(b-r)) + c - y) dG(y) \\ + q \int_0^{x(1+r+\alpha(a-r))+c} \varphi_\infty(x(1+r+a\alpha(a-r)) + c - y) dG(y) \end{aligned} \quad (4)$$

тогда, в случае если динамика капитала СК описывается уравнением (3), и вероятность неразорения является решением уравнения (4) на бесконечном интервале времени $t \in [0; \infty)$ в случае неизвестной функции распределения величин страховых исков имеет вид:

$$\varphi_\infty(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s e^{-\frac{x}{2}} L_s(x), \quad (5)$$

где $L_s = \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l \Gamma(s+1) x^l}{l!(p-l)! \Gamma(l+1)}$, выписаны в явном виде.

Результат, представленный в данной работе, является продолжением цикла работ [2-3], где для аппроксимации исследуемого объекта также использовались классические полиномы Лагерра, но с инвестициями на неполный финансовый рынок.

Литература

1. Мельников А.В. Риск-менеджмент: Стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. — М.: Анкил, 2001. — 112с.
2. Жмылова Т.В., Чудина Е.Ю. Вероятность разорения страховой компании, оперирующей на биномиальном финансовом рынке, определяемая на основе полиномов Лагерра. // Проблемы искусственного интеллекта, 2022. — № 4 (27). — С.16-23.
3. Жмылова Т.В., Чудина Е.Ю. Вероятность разорения страховой компании на биномиальном финансовом рынке, определяемая на основе полиномов Лагерра, в случае неизвестного распределения величины страховых исков. // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки Донецк: ДонГУ, 2023. — № 2. — С.41-47.

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ МАРТИНГАЛОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А.В. Зорин

andrei.zorine@itmm.unn.ru

УДК 519.21

В докладе рассматривается применение методов теории мартингалов для изучения времени достижения нулевого значения очередью в системе массового обслуживания с циклическим управлением конфликтными потоками с групповым поступлением требований. Приведены формулы для условных математических ожиданиях времени достижения нулевого значения.

Ключевые слова: циклическое обслуживание конфликтных потоков, время возвращения в ноль, мартингал.

Пусть задано натуральное число m — число входных потоков и конечное множество $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$ так называемых «состояний обслуживающего устройства», неотрицательные постоянные $T_1, T_2, \dots, T_{2m}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и набор $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ неотрицательных чисел. Пусть также даны m распределений вероятностей $\{g_j(b); b = 1, 2, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ на множестве натуральных чисел. Рассматривается случайная последовательность $\{(\tau_i, \Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \dots, \kappa_{m,i}); i = 0, 1, \dots\}$ со значениями в множестве $\mathbb{R} \times \Gamma \times \{0, 1, \dots\}^m$, в которой элементы определены следующими функциональными соотношениями или условными распределениями. Пусть $r \oplus 1 = r + 1$ для $r = 1, 2, \dots, 2m - 1$; $(2m) \oplus 1 = 1$. Пусть отображение $u(\cdot): \Gamma \rightarrow \Gamma$ задано равенством $u(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(r \oplus 1)}$, а отображение $v(\cdot): \Gamma \rightarrow \{T_1, T_2, \dots, T_{2m}\}$ определено равенством $v(\Gamma^{(r)}) = T_{r \oplus 1}$. Тогда имеют место рекуррентные по $i = 0, 1, \dots$ соотношения $\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i)$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + v(\Gamma_i)$. Определим вспомогательные векторные случайные последовательности $\{(\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \dots, \eta_{m,i}); i = 0, 1, \dots\}$ и $\{(\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \dots, \xi_{m,i}); i = 0, 1, \dots\}$ следующим свойством условных распределений. Пусть при данных $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$ и целых неотрицательных числах $w_j^{(s)}, y_j^{(s)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$ и $s = 0, 1, \dots, i + 1$) условная вероятность события $\prod_{j=1}^m \{\eta_{j,i} = w_j^{(i)}, \xi_{j,i} = y_j^{(i)}\}$ при условии $\{\Gamma_0 = \Gamma^{(r)}\} \cap \left(\bigcap_{s=1, \dots, i-1} \bigcap_{j=1, \dots, m} \{\eta_{j,s} = w_j^{(s)}, \xi_{j,s} = y_j^{(s)}\} \right)$ равна $\prod_{j=1}^m \varphi_j(w_j^{(i)}; T_{r \oplus (i+1)})$, если $y_j^{(i)} = 0$ при $r \oplus (i + 1) \neq 2j - 1$ и $y_j^{(i)} = \ell_j$ при $r \oplus (i + 1) = 2j - 1$, а в остальных случаях эта условная вероятность полагается равной нулю. Здесь вероятности $\varphi_j(b; t)$ определяются из разложений $\sum_{b=0}^{\infty} z^b \varphi_j(b; t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\}$, $f_j(z) = \sum_{b=1}^{\infty} z^b g_j(b)$, $|z| \leq 1$, $t > 0$. Тогда $\kappa_{j,i+1} = \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $i = 0, 1, \dots$.

Данного рода последовательности возникают, в частности, при моделировании управляющих систем массового обслуживания конфликтных транспортных потоков [1], входные потоки которых есть пуассоновские потоки групп с интенсивностями λ_j и распределением $\{g_j(b); b = 1, 2, \dots\}$ размера группы j -го потока.

Многомерная случайная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \dots, \kappa_{m,i}); i = 0, 1, \dots\}$ является однородной цепью Маркова. Обозначим $\bar{\lambda}_j = \lambda_j f_j'(1)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Необходимое и достаточное условие существования стационарного распределения имеет вид: $\max\{\bar{\lambda}_1 T - \ell_1, \bar{\lambda}_2 T - \ell_2, \dots, \bar{\lambda}_m T - \ell_m\} < 0$, где $T = T_1 + T_2 + \dots + T_{2m}$. Всюду далее будем предполагать условие стационарности выполненным. Кроме того, каждая из случайных последовательностей $\{(\Gamma_i, \kappa_{j,i}); i = 0, 1, \dots\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ также являются однородными цепями Маркова, при выполнении условия стационарности — положительно возвратными.

Введем поток сигма-алгебр $\mathfrak{F}_i = \sigma\{\Gamma_0, \kappa_{1,0}, \eta_{1,0}, \eta_{1,1}, \dots, \eta_{1,i-1}\}$. Пусть \mathfrak{s} — момент остановки (относительно потока $\{\mathfrak{F}_i; i = 0, 1, \dots\}$), такой что $\kappa_{j,\mathfrak{s}} = 0$. Введем случайный момент $\nu(\mathfrak{s})$ следующим образом: $\nu(\mathfrak{s}) = \infty$, если $\kappa_{j,i} > 0$ для всех $i \geq \mathfrak{s} + 1$, а в противном случае $\nu(\mathfrak{s}) = \min\{i \geq 1: \kappa_{j,i+\mathfrak{s}} = 0\}$. Тогда условное среднее для суммы $T_{r \oplus 1} + \dots + T_{r \oplus \nu(0)}$ случайного числа

слагаемых, при условии $\kappa_{j,0} = x$, $\Gamma_0 = \Gamma^{(r)}$, характеризует период занятости рассматриваемой системы массового обслуживания.

Применяемый ниже мартингалльный метод впервые применялся в работах [2,3] для изучения однолинейных систем типа $M/G/1$. Имеют место следующие утверждения. Не уменьшая общности, будем везде далее полагать $j = 1$.

Теорема 1. При $|z| < 1$, последовательность $M_0(z) = z^{\kappa_{1,0}}$,

$$M_i(z) = z^{\kappa_{1,i}} \prod_{k=0}^{i-1} \sum_{r=1}^{2m} I(\Gamma_k = \Gamma^{(r)}) \exp\{\lambda_1 T_{r \oplus 1}(1 - f_1(z))\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

является мартингалом относительно потока $\{\mathfrak{F}_i; i = 0, 1, \dots\}$.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{s} – момент остановки относительно $\{\mathfrak{F}_i; i = 0, 1, \dots\}$. Тогда

$$\sum_{r=1}^{2m} \mathbb{E} \left(I(\Gamma_{\mathfrak{s}} = \Gamma^{(r)}) z^{\xi_{1,\mathfrak{s}} + \xi_{1,\mathfrak{s}+1} + \dots + \xi_{1,t(\mathfrak{s})-2} + \kappa_{1,t(\mathfrak{s})-1} + \eta_{1,t(\mathfrak{s})-1} \times \right. \\ \left. \times \exp\{\lambda_1(T_{r \oplus 1} + T_{r \oplus 2} + \dots + T_{r \oplus \nu(\mathfrak{s})})(1 - f_1(z))\} \middle| \mathfrak{F}_{\mathfrak{s}} \right) = z^{\kappa_{1,\mathfrak{s}}}.$$

Для дальнейшего нам понадобится обозначение $\mathcal{T}(r) = T_{r+1} + T_{r+2} + \dots + T_{2m}$ при $r = 1, 2, \dots, 2m - 1$, $\mathcal{T}(2m) = 0$.

Теорема 3. Пусть $x = 1, 2, \dots$. Пусть, далее, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\ell_1-1}$ – нули уравнения $z^{\ell_1} = q(z; T)$, лежащие в круге $|z| < 1$ и $\beta_{\ell_1} = 1$. Введем многочлен

$$L_{x,r}(z) = \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \times \dots \times (z - \beta_{\ell_1-1})}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \times \dots \times (1 - \beta_{\ell_1-1})} + \\ + \sum_{j=1}^{\ell_1-1} (\beta_j)^{x-1} \exp\{\lambda_1(T_1 + \mathcal{T}(r))(f_1(\beta_j) - 1)\} \frac{z-1}{\beta_j-1} \prod_{k \neq j} \frac{z - \beta_k}{\beta_j - \beta_k}.$$

Тогда $\mathbb{E}(\kappa_{1,\nu(0)-1} + \eta_{1,\nu(0)-1} \mid \{\kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}\}) = 1 + L'_{x,r}(1)$,

$$\mathbb{E} \left(\left[\frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \middle| \{\kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}\} \right) = \frac{x + \bar{\lambda}_1(T_1 + \mathcal{T}(r)) - 1 - L'_{x,r}(1)}{\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T},$$

а среднее время до разгрузки очереди O_1 при условии $\{\kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}\}$ равно

$$\mathbb{E}(T_{r \oplus 1} + \dots + T_{r \oplus \nu(0)} \mid \kappa_{1,0} = x, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}) = \\ = T_1 + \mathcal{T}(r) + T \cdot \frac{x + \bar{\lambda}_1(T_1 + \mathcal{T}(r)) - 1 - L'_{x,r}(1)}{\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T}.$$

Теорема 4. Пусть при $r < 2m$ определен полином

$$L_{0,r}(z) = (1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \times \dots \times (z - \beta_{\ell_1-1})}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \times \dots \times (1 - \beta_{\ell_1-1})} + \\ + \sum_{j=1}^{\ell_1-1} (\beta_j)^{-1} (1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1} f_1(\beta_j)}) \exp\{\lambda_1(T_1 + \mathcal{T}(r))(f_1(\beta_j) - 1)\} \frac{z-1}{\beta_j-1} \prod_{k \neq j} \frac{z - \beta_k}{\beta_j - \beta_k}.$$

Тогда имеют место соотношения

$$\mathbb{E} \left(I(\{\nu(0) > 1\}) \left[\frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \middle| \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right) = (\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T)^{-1} \times \\ \times (\bar{\lambda}_1 T_{r+1} e^{-\lambda_1 T_{r+1}} + \bar{\lambda}_1(T_1 + \mathcal{T}(r))(1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) - (1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) - L'_{0,r}(1)), \\ \mathbb{E}(T_{r \oplus 1} + \dots + T_{r \oplus \nu(0)} \mid \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)}) = T_{r+1} e^{-\lambda_1 T_{r+1}} + \\ + (T_1 + \mathcal{T}(r))(1 - e^{-\lambda_1 T_{r+1}}) + \mathbb{E} \left(I(\{\nu(0) > 1\}) \left[\frac{\nu(0) - 1}{2m} \right] \middle| \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(r)} \right).$$

Теорема 5. Пусть

$$L_{0,2m}(z) = \left(1 - \sum_{b=0}^{\ell_1} \varphi_1(b; T_1)\right) \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \times \dots \times (z - \beta_{\ell_1-1})}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) \times \dots \times (1 - \beta_{\ell_1-1})} + \\ + \sum_{j=1}^{\ell_1-1} (\beta_j)^{-1} \left(\exp\{\lambda_1 T_1 (f_1(\beta_j) - 1)\} - \sum_{b=0}^{\ell_1} \varphi_1(b; T_1) (\beta_j)^b\right) \frac{z - 1}{\beta_j - 1} \prod_{k \neq j} \frac{z - \beta_k}{\beta_j - \beta_k}.$$

Имеют место равенства

$$\mathbb{E}\left(I(\{\nu(0) > 1\}) \left[\frac{\nu(0) - 1}{2m}\right] \middle| \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(2m)}\right) = (\ell_1 - \bar{\lambda}_1 T)^{-1} \times \\ \times \left(\bar{\lambda}_1 T_1 - \sum_{b=0}^{\ell_1} b \varphi_1(b; T_1) - L_{0,2m}(1) - L'_{0,2m}(1)\right), \\ \mathbb{E}(T_{r \oplus 1} + \dots + T_{r \oplus \nu(0)} \mid \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(2m)}) = \\ = T_1 + T \cdot \mathbb{E}\left(I(\{\nu(0) > 1\}) \left[\frac{\nu(0) - 1}{2m}\right] \middle| \kappa_{1,0} = 0, \Gamma_0 = \Gamma^{(2m)}\right).$$

Литература

1. Зорин А.В. Кибернетическая модель циклического управления конфликтными потоками с последствием // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. — Т. 156, № 3, 2014. — 66–75.
2. Baccelli F., Makowski A.M. Direct martingale argument for stability: the M/G/1 case // Systems & Control Letters. 1985. № 6, 181–186.
3. Baccelli F., Makowski A.M. Dynamic, transient and stationary behavior of the M/GI/1 queue via martingales // The Annals of Probability. 1989. V. 17. № 4, 1691–1699.

СОЗДАНИЕ КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ, СТРОИТЕЛЬСТВЕ И РЕКОНСТРУКЦИИ ОБЪЕКТОВ, ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРЕЧНЯ ТРЕБОВАНИЙ ПОЖАРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Н.С. Изупов

test.ntc@sibpsa.ru

Концептуальная модель, решающая важную проблему выбора оптимальных решений при проектировании и реконструкции объектов, основанная на ключевых параметрах, характеризующих пожарную безопасность. Рассмотрены инструменты и методы, применение которых обеспечит достижение цели.

Ключевые слова: пожарная безопасность, математическая модель, логика, оптимизация, теория графов, машинное обучение, имитационная модель.

Пожарная безопасность — состояние защищенности личности, имущества, общества и государства от пожаров [1]. Эта защищенность достигается через реализацию мероприятий, соблюдение норм и правил, направленных на предотвращение пожаров, обеспечение безопасности людей и имущества, а также готовность к эффективным действиям в случае возникновения пожара.

В настоящее время реализации многих мер пожарной безопасности без математических методов просто невозможно. В качестве демонстрации ниже приведены некоторые примеры.

Системы обнаружения пожара используют математические методы обработки данных, поступающих с датчиков пожарной сигнализации. Датчики дифференциального типа основаны на дифференциальных уравнениях, они делают выводы об угрозе исходя из скорости изменения температуры.

Математическое моделирование используется для имитации процессов различной природы. Например, на картинке ниже приведен процесса развития пожара.

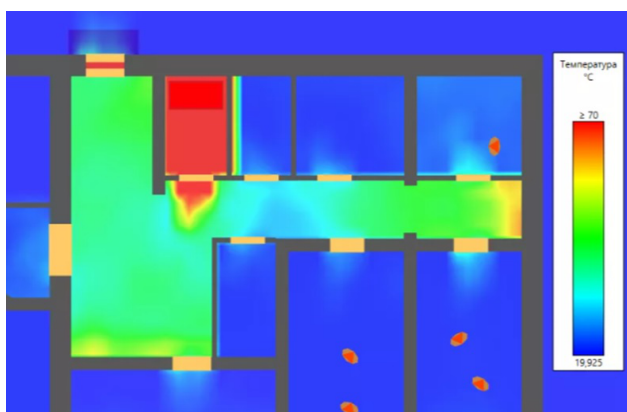


Рис. 1: Пример процесса моделирования развития пожара в здании

Математика в качестве инструмента позволяет моделировать любое явление, поддающееся формализации. Проводится моделирование различных чрезвычайных ситуаций, что помогает давать прогноз последствиям и расчет ресурсов для их ликвидации.

Еще одной задачей — является задача выбора оптимальных решений. В качестве примера можно привести нахождение мест оптимального размещения пожарных подразделений, которое основывается на скорости прибытия пожарных подразделений и берет в расчет ключевые показатели, такие как загруженность дорог и характеристики дорожных покрытий.

Статистический анализ применяется для обработки исторических данных о пожарах и выявления закономерностей, тенденций. Этот анализ может помочь понять факторы, способствующие возникновению, частоте, периодичности и серьезности пожаров. Статистические методы, такие как регрессионный анализ, анализ временных рядов и пространственный анализ, используются для прогнозирования и оценки пожарного риска.

Дистанционное зондирование для обнаружения и мониторинга различных ЧС, например лесных пожаров. Географические информационные системы (ГИС) в значительной степени полагаются на математические принципы пространственного анализа и картографирования территорий.

Оптимизация различных процессов также не может быть выполнена без использования математических методов. При выполнении исследований затрагивает математику и именно поэтому математика выполняет функцию связующего звена.

Создание концептуальной модели

Концепция системы поддержки принятия решений и оптимизации процесса формирования требований пожарной безопасности на этапе проектирования, строительства и реконструкции объектов, целью создания которой будет формирования перечня требований и необходимых мероприятий для конкретного объекта.

1. Определение элементов, оказывающих влияние на пожарную безопасность

На законодательном уровне определены классификационные характеристики объектов, определяющие их пожарную опасность [2]:

1) класс функциональной пожарной опасности здания (далее — КФПО) — это характеристика, показывающая назначение здания. Всего насчитывается пять классов: здания для постоянного проживания и временного пребывания людей, здания зрелищных и культурно-просветительных учреждений, здания, предназначенные для обслуживания населения, здания образовательных организаций, производственные и складские здания. В свою очередь каждый такой класс делится на подклассы и в общей численности получается 21 варианта объекта. Каждому варианту предъявляются собственные требования пожарной безопасности.

2) степень огнестойкости здания (далее — СО) — это классификационная характеристика зданий, определяемая пределами огнестойкости конструкций, применяемых для строительства. Предел огнестойкости — это время, в течение которого строительные конструкции (и их элементы) способны сопротивляться воздействию огня. Чем выше это время, тем дольше происходит снижение характеристик строительных конструкций до предельных (потеря целостности, потеря несущей способности, потеря теплоизолирующей способности и т. д.).

3) класс конструктивной пожарной опасности (далее — ККПО) — классификационная характеристика зданий, сооружений и пожарных отсеков, определяемая степенью участия строительных конструкций в развитии пожара и образовании опасных факторов пожара.

4) категория по пожарной и взрывопожарной опасности (далее — КВиВПО) — характеристика объекта, которая определяет возможность возникновения взрыва, развития пожара или развития пожара и последующего взрыва.

К тому же из правил пожарной безопасности, предъявляемых к зданиям и сооружениям можно выделить еще ряд характеристик определяющих пожарную опасность объектов, но они не являются основными идентификационными характеристиками пожарной опасности, так как оказывают менее явные воздействия. Это такие характеристики, как количество людей, находящихся на объекте, этажность, высота, количество и качество подъездов (дорог) к зданию, и прочие характеристики (финальное количество которых будет формироваться вследствие будущих исследований).

2. Определение связей и их характеристик

Необходимость определения взаимосвязей и возможность влияния на конечное состояние пожарной опасности от различных сочетаний характеристик, требует исследования. Например, при рассмотрении статистики пожаров, установлено, что объекты с массовым пребыванием людей более опасны, при возникновении пожара. Но если такие объекты в добавок имеют более одного этажа, то это делает их еще более опасными. Таким образом сочетание функциональной пожарной опасности, подразумевающей массовое пребывание людей и этажность объекта несет дополнительную угрозу. Для определения структуры и отражение каждой из связи необходимо применить системный подход, установить наиболее опасные сочетания, а также взаимоисключающие или взаимно снижающие воздействия.

Результатом должна служить онтологическая модель предметной области с детальным описанием элементов и их связей.

3. Определение методов, применение которых обеспечит достижение цели

Для создания модели, которая анализирует множество различных критериев, устанавливает связи и взаимные исключения, и в итоге находит наилучший вариант решения, нам могут понадобиться следующие приемы:

Методы оптимизации, которые позволяют учитывать несколько критериев одновременно. Вместо поиска единственного оптимального решения, эта методология стремится найти набор решений, составляющих так называемое множество. Методы оптимизации с учетом ограничений, позволяют учитывать различные ограничения и ограничения в модели, что может быть важно при анализе различных сценариев.

Теория графов используется для представления связей между различными элементами модели в виде графа. Это может помочь в идентификации взаимосвязей и взаимных исключений между различными параметрами.

Логика и булева алгебра, позволяет формализовать взаимные исключения и логические связи между различными переменными или событиями. Это может быть полезно при построении

правил или условий для выбора оптимального сценария.

Методы машинного обучения, позволяют автоматически выявлять закономерности и связи в данных, что может быть полезно для определения оптимального сценария на основе имеющихся данных.

Симуляционное моделирование, позволяет проводить эксперименты с различными сценариями виртуально, что может помочь оценить их эффективность и выбрать наилучший сценарий.

Комбинация этих математических приемов может помочь в построении модели, способной анализировать множество критериев, устанавливать связи и взаимные исключения, и в итоге находить наилучший сценарий.



Рис. 2: Поле доступных решений



Рис. 3: Примерная схема концептуальной модели поддержки принятия решений

Результат обработки запроса включает требуемые характеристики для объекта на основании требований законодательства, на максимально приближенные к желанию заказчика.

Результат (набор параметров):

Заключение

Предстоит много работы для формирования достойной модели, которая оптимизирует процесс инженерных изысканий и формирует перечень требований необходимых для выполнения проектирования или реконструкции объекта. Важность такой модели обусловлена не только повышением эффективности на этапе получения технических требований и условий для выполнения проектирования, но и повышением уровня безопасности, исключая человеческий фактор.

Литература

1. Российская Федерация. Законы. О пожарной безопасности (с изменениями и дополнениями): Федеральный закон от 18.11.1994 г. № 69-ФЗ // справочно-правовая система «КонсультантПлюс»: сайт. —

| Группа параметров А | Требуемое значение параметра |
|--|---|
| x_1 – КФПО | Офисное здание |
| x_2 – СО | Не ниже П |
| x_3 – ККПО | Не ниже С1 |
| x_4 – КВПиПО | недопустимо |
| Группа параметров Б | Требуемое значение параметра |
| y_1 – этажность | До 9 |
| y_2 – высота здания | До 28 |
| y_3 – объем здания | До 25 000 м ³ |
| y_4 – площадь пожарных отсеков | До 2500 м ² |
| Группа параметров В | Требуемое значение параметра |
| f_1 – количество человек | До 750 человек |
| f_2 – наличие маломобильных групп населения | До 5 % от общего |
| f_3 – количество койко-мест | недопустимо |
| f_4 – нахождение людей в ночное время на объекте | недопустимо |
| | Требуемое значение параметра |
| j_1 – перечень необходимых мер пожарной безопасности | Декларация пожарной безопасности |
| j_2 – оснащение объекта средствами пожаротушения | Огнетушитель порошковый, требуемое количество 235 шт. |

URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_5438/ (дата обращения 22.01.2024). Режим доступа свободный.

2. Российская Федерация. Законы. Технический регламент о требованиях пожарной безопасности (с изменениями и дополнениями): Федеральный закон от 22.07.2008 г. №123-ФЗ // справочно-правовая система «КонсультантПлюс»: сайт. — URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_78699/ (дата обращения 01.02.2024). Режим доступа свободный.

3. Анохин П.К. Принципиальные вопросы теории функциональных систем // Философские аспекты теории функциональных систем. — М.: Наука, 1978. — С. 49-106.

4. Садовский В.Н. Основания общей теории систем: логико-методологический анализ. М.: «Наука», 1974, — 281 с.

5. Рапопорт А.Н. Автоматные модели поисковой оптимизации и управления: Монография; Предисл. Ю.И. Неймарка; М-во общ. и проф. образования Рос. Федерации. Вят. гос. техн. ун-т. — Киров, 1999. — 131 с.

6. Месарович М., Такагара Я. Общая теория систем: математические основы. Пер. с англ. Э.Л. Напельбаума; под ред. В. С. Емельянова. — М.: «Мир», 1978

7. Жирков А.М., Подпригора Г.М., Цуцунава М.Р. Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие. — СПб.: Лань КИТ, 2016. — 192 с.

8. Шваб К., Дэвис Н. Четвертая промышленная революция. Технологии четвертой промышленной революции — М.: Эксмо, 2018. — 320 с.

9. Каплан Р.С., Нортон Д.П. Сбалансированная система показателей. От стратегии к действию. М.: Олимп-Бизнес, 2016. — 320 с.

10. Системы поддержки принятия решений: учебник и практикум для вузов // В.Г. Халин [и др.]; под редакцией В.Г. Халина, Г.В. Черновой. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 494 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИ ПОИСКЕ АЛМАЗОНОСНЫХ ПОРОД

Р.И. Касимова

fizza@mail.ru

Статистическая обработка результатов исследования, корреляционный и регрессивный анализы, проверка гипотез о сходстве выборок по параметрическим критериям, анализ групп, кластерный анализ были использованы при изучении минералов шпинелидов из Архангельской алмазоносной провинции. С помощью кластерного анализа была предпринята попытка провести корректную генетическую привязку отдельно взятых зерен минерала, так как во многих случаях возникает трудность установления парагенезиса изучаемых зерен шпинелидов. На основании обработки обширного литературного материала по известному составу шпинелидов из глубинных пород кимберлитов и полученных групп была составлена классификация составов шпинелидов по глубинным ассоциациям пород.

Ключевые слова: шпинелиды, кимберлиты, кластерный анализ, лампроиты, Архангельская алмазоносная провинция.

Проблема типоморфизма минералов-спутников алмаза, в частности, шпинелидов приобрело в середине 20 века особую актуальность в связи с решением ряда вопросов, связанных с уточнением генезиса как алмазоносных, так и хромитовых, медно-никелевых и других месторождений полезных ископаемых и до сих пор занимает мысли ученых и поисковиков. Важным прикладным аспектом использования типоморфизма шпинелидов из алмазных месторождений является совершенствование шлихо-минералогических методов поиска месторождений, разработка минералогических критериев алмазоносности пород, установления генетической принадлежности россыпей и шлиховых ореолов к коренным источникам. Эффективность практического применения типоморфизма шпинелидов существенно зависит от степени изученности особенностей морфологии, состава, кристаллической структуры этих минералов, их физических свойств и разработки экспресс-методов анализа для определения типоморфных признаков.

Практический интерес связанный с поисками кимберлитовых трубок с ценной промышленной минерализацией, а также нового генетического типа алмазных месторождений — лампроитов не ослабевает до настоящего времени. И поиски алмазоносных диатрем проводятся комплексом геолого-геофизических и минералогических методов. Среди последних применяются и шлихо-минералогические методы. Основным минералом тяжелой фракции в диатремах Архангельской Алмазоносной провинции являются шпинелиды, а в случае Якутских кимберлитовых трубок являются гранаты и ильменит. Широкая распространенность шпинелидов определяет специфику шлихо-минералогических методов при проведении поисковых и геолого-разведочных работ на территории ААП. При этом часть шпинелидов в шлиховых пробах генетически связана с комплексами щелочных ультраосновных пород и карбонатитов, другая — с массивами ультрабазитов, третья — с интересующими диатремами, что требует разработки методов для уточнения генетической принадлежности этого минерала.

И для обработки известных литературных более 30000 результатов и полученных данных больше 15000 анализов были использованы методы математики это статистическая обработка результатов исследования, корреляционный и регрессивный анализы, проверка гипотез о сходстве выборок по параметрическим критериям, анализ групп, кластерный анализ.

Была предпринята попытка с помощью кластерного анализа провести корректную генетическую привязку отдельно взятых зерен минерала, так как во многих случаях возникает трудность установления парагенезиса изучаемых зерен шпинелидов. На основании обработки обширного литературного материала по известному составу шпинелидов из глубинных пород кимберлитов и полученных кластерных групп была составлена классификация составов шпинелидов по глубинным ассоциациям пород.

Разработанная на основе кластерного анализа классификация шпинелидов позволяет на основе типохимизма их состава установить парагенезисы этого минерала, в том числе алмазоносные.

Были получены XXI кластерных групп. Каждая группа была привязана к определенному генетическому типу пород. На основе этого была построена диаграмма составов шпинелидов по генетическим типам пород на основе кластерных групп. Так кластерные группы I, X, XI — были отнесены к дунитам; II, IV — были привязаны к гарцбургитам; III, V, VIII — это лерцолиты; VI — вебстериты; VII — пироксениты; IX — алькремиты; XII — верлиты; XIII — гранат-пироксен-шпинелидовые сростки; XIV — катаклазированные лерцолиты; XV — зональные гранаты; XVI — шпинелиды некимберлитового генезиса (из диатрем Пионерская, 840,772); XVII, XVIII, XIX — шпинелиды некимберлитового генезиса (из диатремы 772); XX — шпинелиды некимберлитового генезиса (из диатремы Пионерская); XXI — шпинелиды некимберлитового генезиса (из диатремы Архангельская). На треугольной диаграмме с координатами Al_2O_3 и $Fe_2O_3 + TiO_2$ в основании равностороннего треугольника, и Cr_2O_3 в вершине. Ближе к вершине располагаются точки составов из зерен минерала I, II, IV, X, XI кластерных групп, то есть из дунит-гарцбургитового парагенезиса. Вдоль ребра Al_2O_3 и Cr_2O_3 кластерные группы, включающие в себя составы зерен минералов из лерцолитов, вебстеритов, пироксенитов, и у основания алькремитов. А со стороны ребра треугольника $Fe_2O_3 + TiO_2$ и Cr_2O_3 расположены кластерные группы составов зерен минерала шпинелида гранат-клинопироксен-шпинелидовых сростков и из некимберлитового генезиса. Это также подтверждает полученные данные по спектрам инфракрасной спектроскопии. Выделяются две группы зерен шпинелидов, отличающиеся по характеру изоморфных замещений. Первую группу образуют шпинелиды с изоморфизмом хрома и алюминия. Вторая группа представлена зернами шпинелидов с преобладанием изо- и гетеровалентных замещений хрома(III) и железа(III) и двух атомов хрома (III) на титан(IV) и железо (II) с резко подчиненными замещениями хрома(III) с алюминием (III), то есть имеются два тренда кристаллизации шпинелидов. Это наблюдается и на треугольной диаграмме, на которую нанесены все двадцать одна кластерные группы. И однозначно два типа тренда кристаллизации подтверждаются.

Тренд I изменения составов характерен для шпинелидов из ксенолитов глубинных ультраосновных пород магнезиальной серии. По особенностям состава минерала-хозяина можно выделить следующие парагенезисы глубинных пород: потенциально-алмазоносных дунитов (кимберлитовая трубка Ломоносовская), дунитов (кимберлитовые трубки Ломоносовская и Пионерская), гарцбургитов (кимберлитовые трубки Ломоносовская, Пионерская и Архангельская), потенциально-алмазоносных гарцбургитов (Ломоносовская), лерцолитов (Ломоносовская, Пионерская и Архангельская), пироксенитов (Архангельская и Пионерская), алькремитов (из кимберлитовой трубки Архангельская).

Тренд II изменения составов шпинелидов характерен для высококальциевых ультраосновных пород лампроитовой серии, а также для шпинелидов из гранат-клинопироксен-шпинелидовых сростков, ранее обнаруженных в кимберлитах Мало-Ботуобинского района Якутской Алмазоносной провинции. При этом шпинелиды из диатрем Архангельской Алмазоносной провинции образуют более широкую область составов. Шпинелиды с изоморфизмом I типа, в основном, встречены в пробах диатремы Архангельская, второй тип характерен для шпинелидов из диатрем Ломоносовская и Пионерская, что тоже подтверждается проверкой гипотез о сходстве выборок по параметрическим критериям и корреляционным и регрессионным анализом, с помощью построения гистограмм максимумов полосы поглощения инфракрасного спектров каждого зерна минерала шпинелида.

При подсчете парных коэффициентов корреляции между оксидами были получены результаты, свидетельствующие об обратной зависимости между определенными элементами и прямой линейной зависимостью между другими, что также подтвердил вывод о преобладании двух типов изоморфных замещений в шпинелидах.

Известные максимы «Единство в разнообразии» Бахауллы и «Природа подчиняется единому закону» Абдул-Баха подтверждается как обсуждаемыми исследованиями минерала-спутника алмаза шпинелида так и других минералов-спутников алмаза из всех алмазоносных месторождений мира и этот вывод сделать помогла математика.

О РОСТЕ ЭНТРОПИИ ОСТАТКОВ ОТ ДЕЛЕНИЯ НА m СВЕРТОК ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Е. Кондратенко, Д.А. Чернышова

ae_cond@mech.math.msu.su, daria.chernyshova@math.msu.ru

УДК 517.926, 517.962.26, 517.982.43, 519.21, 519.72

В докладе рассказывается о росте энтропии остатков от деления на натуральное число m сверток одинаково распределенных биномиальных случайных величин и стремлении к максимально возможному значению с ростом числа слагаемых.

Ключевые слова: свертка, дробная часть, равномерное распределение, биномиальное распределение, распределение Бернулли, энтропия.

Благодаря центральной предельной теореме хорошо известно, что сумма независимых одинаково распределенных случайных величин при соответствующей нормировке сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине (однако свертка нормальной случайной величины с произвольной, вообще говоря, не является нормальной). Возникает естественный вопрос о сходимости дробной части свертки одинаково распределенных случайных величин к равномерному распределению, то есть о росте энтропии дробной части свертки и ее максимизации. Пока получен ответ в следующих случаях.

Утверждение 1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины с параметром $\frac{1-s}{2}$, $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Тогда остатки от деления свертки этих случайных величин на m стремятся при $n \rightarrow \infty$ к равномерному распределению на $\{0, 1, \dots, m-1\}$.

То есть для $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$:

$$P(\{\eta_n\}_m = r) \rightarrow \frac{1}{m}, n \rightarrow \infty$$

Утверждение 2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные биномиальные случайные величины с параметрами $t, \frac{1+s}{2}$, $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда остатки от деления свертки этих случайных величин на m стремятся при $n \rightarrow \infty$ к равномерному распределению на $\{0, 1, \dots, m-1\}$. То есть для $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$:

$$P(\{\eta_n\}_m = r) \rightarrow \frac{1}{m}, n \rightarrow \infty$$

Таким образом, в частном случае показано, что дробные части сверток сходятся по распределению к равномерным случайным величинам, их энтропии возрастают и максимизируются с ростом числа слагаемых.

Литература

1. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Об информационном свойстве свертки с равномерным распределением // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. Материалы XIV Международной конференции (г. Махачкала, 16–19 сентября 2021 г.). — Махачкала, издательство ДГУ. — 2021. — С. 135-138.

2. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки — 2022. — № 1. — С. 7-11.

3. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. О сохранении информационного свойства свертки в неканоническом случае // Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы III

Кондратенко Александр Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Чернышова Дарья Андреевна, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Всероссийской конференции (г. Махачкала, 7-9 февраля 2022 г.). — Махачкала, издательство ДГУ. — 2022 — С. 105–108.

4. Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2022. — № 1. — С. 45–52.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЗДЕЛЕНИЯ СМЕСЕЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В.Ю. Королев

pochta@mail.ru, email@yahoo.com

УДК 519.246.2

Описан метод статистической реконструкции неизвестных коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений, основанный на разделении смесей распределений вероятностей. Метод может быть использован для повышения точности интеллектуальных алгоритмов прогнозирования временных рядов за счет более полного использования информации о статистических закономерностях эволюции наблюдаемого процесса. С этой целью на этапе обучения прогнозирующего алгоритма признаковое пространство обогащается эмпирическими оценками распределений коэффициентов стохастического дифференциального уравнения, описывающего исследуемый случайный процесс. Приведены примеры.

Ключевые слова: временной ряд; стохастическое дифференциальное уравнение; смесь нормальных распределений; статистическое разделение смеси; прогнозирование.

Доклад посвящен описанию метода статистической реконструкции неизвестных коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений, основанный на оценивании параметров смешанных вероятностных моделей (разделении смесей распределений вероятностей). Метод может быть использован для повышения точности интеллектуальных алгоритмов прогнозирования временных рядов за счет более полного использования информации о статистических закономерностях эволюции наблюдаемого процесса. С этой целью на этапе обучения прогнозирующего алгоритма признаковое пространство обогащается эмпирическими оценками распределений коэффициентов стохастического дифференциального уравнения, описывающего исследуемый случайный процесс.

Известно очень много подходов к расширению признакового пространства на этапе обучения интеллектуальных алгоритмов. Целью такого расширения является более полное использование исходной информации. Однако в большинстве случаев рекомендации носят искусственный (субъективный) характер. В данной заметке предлагается такой подход, который опирается на использование дополнительной *объективной* информации о статистических закономерностях эволюции наблюдаемого процесса. Использование дополнительной статистической информации по сути накладывает дополнительные условия на область поиска и потому позволяет сузить множество рассматриваемых вариантов и сделать обучение направленным, заранее исключая невозможные или маловероятные варианты, и стало быть, сделать его более эффективным, а прогнозы — более точными.

Во многих областях прикладной математики рассматриваются случайные процессы $X(t)$, задаваемые стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW, \quad (1)$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ — случайны и, вообще говоря, неизвестны. В частности, уравнения вида (1) широко используются в задаче ассимиляции данных при анализе разномасштабной изменчивости геофизических переменных [1]. В финансовой математике популярны специальные версии уравнения (1) с конкретными видами зависимости a и b от $X(t)$ и других случайных процессов, например, модели Леланда, Барлса–Сонера, Хестона, Кокса–Ингерсолла–Росса, Халла–Уайта и другие так называемые модели стохастической волатильности (см. также [2]).

При отсутствии априорной информации о структуре процесса $X(t)$ для успешного изучения и прогнозирования его эволюции первостепенную важность приобретает задача определения коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$, т.е. задача статистической реконструкции этих коэффициентов. Различным аспектам решения этой задачи посвящены многие десятки работ. Однако в большинстве исследований, посвященных этой задаче, коэффициенты стохастического дифференциального уравнения (1) трактуются как *известные* функции от времени и самого процесса, зависящие от неизвестных числовых параметров. Структура коэффициентов, т.е. их функциональная зависимость от процесса $X(t)$ и других (внешних) процессов, определяются предположениями, вытекающими из условий, типичных для соответствующей области приложения. Другими словами, при решении тех или иных прикладных задач используются “готовые” модели.

Однако в большинстве реальных открытых несбалансированных систем эти условия часто либо трудно проверить, либо не выполнены вообще, из-за чего “готовые” модели иногда дают неадекватные результаты. В рамках описываемого подхода предлагается в некотором смысле обратная последовательность действий при решении прикладной задачи: сначала на основании накопленных данных эмпирически реконструируется модель типа (1), которая затем должна быть исследована методами конкретной прикладной области.

При предлагаемом подходе коэффициенты уравнения (1) трактуются как *неизвестные случайные процессы*. В силу случайности этих функциональных коэффициентов задача их реконструкции допускает как минимум две разные формулировки: 1) можно пытаться найти (случайные же) приближения к значениям самих функций $a(t)$ и $b(t)$, т.е. найти их *точечные аппроксимации* и 2) можно пытаться найти (статистически оценить) *распределения* случайных величин $a(t)$ и $b(t)$. Во втором случае, зная какие-либо свойства этих коэффициентов, например, структуру их функциональной зависимости от исходного процесса $X(t)$ (скажем, как в моделях Леланда, Барлса–Сонера, Хестона, Кокса–Ингерсолла–Росса или Беляева и др.), можно найти оценки числовых параметров, входящих в эти модели.

Сначала рассмотрим вторую задачу. Пусть $n \geq 1$ и $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ — моменты времени, в которые наблюдается процесс $X(t)$. Для простоты предположим, что $t_i - t_{i-1} = 1$ для любого $i \geq 1$. Обозначим $X_i = X(t_i)$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, анализируется временной ряд X_1, \dots, X_n . Поскольку приращения винеровского процесса имеют нормальные распределения, из вида уравнения (1) вытекает, что распределение приращения $X_i - X_{i-1}$ процесса $X(t)$ можно аппроксимировать распределением вида

$$P(X_i - X_{i-1} < x) \approx E\Phi\left(\frac{x - A_i}{B_i}\right), \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения, $A_i \in \mathbb{R}$ и $B_i > 0$ — случайные величины. В свою очередь, для распределений случайных величин A_i и B_i , по отношению к которым берется математическое ожидание в (2), можно использовать дискретную аппроксимацию. Тогда вместо (2) для распределения приращения $X_i - X_{i-1}$ можно применить приближение вида конечной смеси нормальных распределений

$$P(X_i - X_{i-1} < x) \approx \sum_{k=1}^K p_k \Phi\left(\frac{x - a_k}{b_k}\right), \quad (3)$$

где $K \in \mathbb{N}$, $p_k \geq 0$, $k = 1, \dots, K$, $p_1 + \dots + p_K = 1$. Очевидно, параметры p_k , a_k и b_k зависят также от i и изменяются при переходе от t_i к t_{i+1} .

Параметры p_k , a_k и b_k находятся как решения задачи статистического разделения смеси (3), например, с помощью EM-алгоритма [3]. Статистические закономерности поведения рассматриваемых процессов $X(t)$, $a(t)$, $b(t)$ изменяются во времени, вообще говоря, нерегулярным образом,

результатом чего является отсутствие универсального смешивающего закона. Таким образом, чтобы изучить динамику изменения статистических закономерностей в поведении исследуемого процесса, задача статистического разделения конечных смесей нормальных законов должна быть последовательно решена на интервалах времени, постоянно сдвигающихся в направлении “астрономического” времени. Тем самым параметры смесей (параметры сдвига (дрейфа) a_k , масштаба (диффузии) b_k и веса компонент p_k) оцениваются как функции времени.

Первая из упомянутых выше задач может быть решена путем использования оценок *распределений* коэффициентов уравнения (1), полученных в результате решения второй задачи, для построения оценок *самих* коэффициентов. В качестве таких оценок берутся математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение оцененного распределения:

$$a(t) \approx \bar{a}(t) = \sum_{k=1}^K p_k a_k, \quad b^2(t) \approx \bar{b}^2(t) = \sum_{k=1}^K p_k (b_k^2 + a_k^2) - (a(t))^2.$$

Здесь t — время (положение окна), параметры a_k , b_k , p_k также зависят от положения окна. Такие оценки дают наилучший (минимизирующий среднеквадратический риск) прогноз значения случайных коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$.

Полученные приближения процессов $a(t)$, $b(t)$ и их распределений дают возможность дальнейшей реконструкции их функциональной зависимости от $X(t)$ и других факторов и/или могут быть использованы для расширения признакового пространства на этапе обучения прогнозирующих алгоритмов без привлечения дополнительной информации.

Литература

1. Belyaev K., Kuleshov A., Tuchkova N. Tanajura C.A.S. An optimal data assimilation method and its application to the numerical simulation of the ocean dynamics // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2017. **24**. N 1. P. 1–14.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.
3. Королев В.Ю. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. М.: Изд-во Московского университета, 2011.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МЕТОДОВ ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКИ, ДОПУСКАЮЩИХ ПОСТРОЕНИЕ НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКИ РИСКА

А.А. Кудрявцев, О.В. Шестаков

aakudryavtsev@cs.msu.ru, oshestakov@cs.msu.ru

УДК 519.2

Рассматривается модель сигнала, загрязненного аддитивным гауссовским шумом, и обсуждается общая постановка задачи пороговой обработки, допускающей построение несмещенной оценки риска. Приводятся условия, при которых оценка риска является асимптотически нормальной и сильно состоятельной.

Ключевые слова: вейвлеты, пороговая обработка, адаптивный порог, несмещенная оценка риска.

Кудрявцев Алексей Андреевич к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Шестаков Олег Владимирович, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Одна из основных задач анализа и обработки сигналов – подавление шума. Традиционные методы используют преобразование Фурье для разделения сигнала на высокочастотные и низкочастотные компоненты с последующим удалением высокочастотных компонент, что приводит к подавлению большей части шума. Однако при этом также удаляется полезная информация, которая содержится в высокочастотной компоненте, и зачастую сигнал оказывается сильно сглаженным. Вейвлет-разложение обладает свойством частотно-временной локализации и тем самым позволяет анализировать эволюцию частотного спектра во времени.

Для функции сигнала $f \in L^2(\mathbf{R})$ вейвлет-разложение представляет собой ряд вида

$$f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

где функции $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ описывают сдвиг и растяжение (сжатие) выбранной вейвлет-функции ψ . Индекс j в этом разложении называется масштабом, а индекс k – сдвигом.

При передаче по каналу связи функции сигнала заданы в дискретных отсчетах и, как правило, загрязнены шумом. Во многих случаях можно считать, что это аддитивный белый гауссовский шум, т. е. загрязненный сигнал описывается следующей моделью:

$$X_i = f_i + z_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где f_i – чистые значения функции сигнала, а $z_i \sim N(0, \sigma^2)$ независимы. Дискретное вейвлет-преобразование представляет собой умножение вектора значений функции f на ортогональную матрицу W , определяемую вейвлет-функцией ψ . Поскольку матрица W ортогональна, дискретные вейвлет-коэффициенты имеют вид

$$Y_{j,k} = \mu_{j,k} + \epsilon_{j,k}, \quad j = 0, \dots, J-1, \quad k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

где $\epsilon_{j,k} \sim N(0, \sigma^2)$ также независимы.

Для подавления шума к вейвлет-коэффициентам применяется функция пороговой обработки, смысл которой заключается в обнулении достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом. Наиболее распространены функция жесткой пороговой обработки $\rho_H(y, T) = y \mathbf{1}(|y| > T)$ и функция мягкой пороговой обработки $\text{sgn}(y)(|y| - T)_+$ с некоторым порогом T [1]. При этом каждая из них имеет свои недостатки. Функция ρ_H разрывна, что приводит к отсутствию устойчивости и появлению дополнительных артефактов, а функция ρ_S приводит к появлению дополнительного смещения в оценке функции сигнала. В ряде работ были предложены некоторые альтернативные функции пороговой обработки $\rho(y, T)$, которые, по сути, являются компромиссом между жесткой и мягкой пороговой обработкой [2,3]. Эти функции непрерывны, как и функция $\rho_S(y, T)$, но при этом $\rho(y, T) \rightarrow y$ при $|y| \rightarrow \infty$, т. е. для больших абсолютных значений коэффициентов они похожи на функцию жесткой пороговой обработки.

В связи с появлением разнообразных видов функций пороговой обработки имеет смысл рассмотреть некоторый общий класс таких функций. Пусть функция $h(y, T)$ обладает следующими свойствами: $h(-y, T) = -h(y, T)$ (нечетность), $0 \leq h(y, T) \leq T$ при $y \geq 0$ (ограниченность) и $h(T, T) = T$ (непрерывность пороговой функции). Тогда функция пороговой обработки определяется выражением

$$\rho_h(y, T) = \begin{cases} y - h(y, T) & \text{при } |y| > T, \\ 0 & \text{при } |y| \leq T. \end{cases}$$

Погрешность (или риск) пороговой обработки определяется следующим образом:

$$R_J(T) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{E} (\rho_h(Y_{j,k}, T) - \mu_{j,k})^2.$$

Методы выбора порогового значения T , как правило, ориентированы на минимизацию риска. Заметим, что в $R_J(T)$ присутствуют неизвестные величины $\mu_{j,k}$ и вычислить его значение на

практике нельзя. Один из подходов к вычислению порогового значения основан на минимизации несмещенной оценки риска, построенной по методу Стейна:

$$\widehat{R}_J(T) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} F(Y_{j,k}, T),$$

где $F(y, T) = (y^2 - \sigma^2)\mathbf{1}(|y| \leq T) + (h^2(y, T) + \sigma^2 - 2\sigma^2 h'_y(y, T))\mathbf{1}(|y| > T)$.

Порог T_S минимизирует эту оценку:

$$\widehat{R}_J(T_S) = \min_{T \in [0, T_U]} \widehat{R}_J(T).$$

Этот порог имитирует теоретический «идеальный» порог T_{Min} , минимизирующий теоретический риск:

$$R_J(T_{Min}) = \min_{T \in [0, T_U]} R_J(T).$$

Для регулярных по Липшицу функций сигнала f при некоторых дополнительных ограничениях на функцию справедливости $h(y, T)$ следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть f задана на некотором отрезке $[a, b]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 1/2$. Тогда равномерно по $x \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\widehat{R}_J(T_S) - R_J(T_{Min})}{\sigma^2 \sqrt{2^{J+1}}} < x \right) \rightarrow \Phi(x) \text{ при } J \rightarrow \infty,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Теорема 2. Пусть f задана на некотором отрезке $[a, b]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 1/2$. Тогда при любом $\lambda > 0$

$$\frac{\widehat{R}_J(T_S) - R_J(T_{Min})}{2^{J(1/2+\lambda)}} \rightarrow 0 \text{ п. в. при } J \rightarrow \infty.$$

Данные теоремы обосновывают использование величины $\widehat{R}_J(T_S)$ для оценивания погрешности и позволяют строить асимптотические доверительные интервалы для теоретического риска $R_J(T_{Min})$.

Литература

1. Donoho D., Johnstone I. M. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage // J. Amer. Stat. Assoc., 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.
2. Lin Y., Cai J. A New Threshold Function for Signal Denoising Based on Wavelet Transform // Proc. IEEE Int. Conf. Meas. Technol. Mechatronics Autom. – Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 200–203.
3. Zhao R.-M., Cui H.-M. Improved Threshold Denoising Method Based on Wavelet Transform // Proceedings of 2015 7th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC 2015). – Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. Art. 7409352.

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К КОМПЛЕКСИФИКАЦИИ МАКСИМУМ-УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А.В. Лебедев, А.А. Голдаева
avlebed@yandex.ru, gold_ann@list.ru

УДК 519.21

По аналогии с обобщением устойчивых распределений на область комплексных индексов устойчивости α с помощью представления стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере производится комплексификация максимум-устойчивого распределения Фреше. Рассматривается два подхода: с фиксированным и случайными углами поворота. Получены максимум-полуустойчивые и максимум-устойчивые распределения на первой четверти комплексной плоскости. Начато изучение их свойств, найдены различные характеристики.

Ключевые слова: максимум-устойчивые распределения, максимум-полуустойчивые распределения, комплексные числа, теория экстремумов .

1. Введение. Стохастическая теория экстремумов (extreme value theory) занимается изучением максимумов и минимумов (а также других порядковых статистик) систем случайных величин. Начало современного этапа развития этой теории обычно датируется 1943 годом с появления фундаментальной работы Б.В. Гнеденко [1], где была доказана знаменитая теорема об экстремальных типах. В качестве классических монографий по теме можно указать [2, 3].

Максимум-устойчивыми распределениями (распределениями экстремальных типов, распределениями экстремальных значений) называются распределения, обладающие следующим свойством: максимумы любого числа $n \geq 2$ независимых одинаково распределенных случайных величин с таким распределением имеют распределения того же типа (т.е. отличаются от исходного преобразованиями сдвига и масштаба).

Максимум-устойчивые распределения можно рассматривать как экстремальные аналоги устойчивых распределений. При этом индекс α для распределения Фреше $G(x) = \exp\{-cx^{-\alpha}\}$, $x > 0$, оказывается аналогом индекса устойчивости α для устойчивого распределения.

Настоящая работа мотивирована работой [4] и др. по обобщению устойчивых распределений на область комплексных индексов устойчивости α с помощью представления стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере, что можно интерпретировать как сумму по точкам пуассоновского потока. От суммы в свою очередь можно перейти к максимуму. При этом максимумы комплексных чисел понимаются покомпонентно. Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ будем иметь в виду, что

$$z_1 \vee z_2 = (x_1 \vee x_2) + i(y_1 \vee y_2),$$

а под неравенством $z_1 \leq z_2$ будем понимать систему неравенств $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$.

Далее будут рассмотрено два подхода, первый из которых дает максимум-полуустойчивые распределения и изложен в [5], а второй (новый) максимум-устойчивые.

Максимум-полуустойчивыми распределениями (при линейной нормировке) называют распределения F , для которых существует такое действительное число $r > 1$, что степень ф.р. $F^r(x)$ описывает распределение того же типа. Понятно, что если это верно для r , то верно и для r^2 , r^3 и т.д. Для определенности среди показателей $r > 1$ можно выбрать наименьший.

Перейдем к случаю комплексного α , полагая $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Следуя [4], обозначим

$$1/\alpha = a + bi, \quad \rho = 1/a, \quad \gamma = b/a.$$

Из условия $\operatorname{Re} \alpha > 0$ следует $a > 0$.

Под ф.р. $F_Z(z)$ комплексной случайной величины Z с комплексным аргументом $z = x + iy$ будем понимать

$$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z \leq z) = \mathbf{P}(\operatorname{Re} Z \leq x, \operatorname{Im} Z \leq y).$$

Лебедев Алексей Викторович, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Голдаева Анна Алексеевна, к.ф.-м.н., ст. преп., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

2. Первый подход. Рассмотрим поведение максимума в следующей модели.

Теорема 1. Пусть

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty} e^{-i\varphi} \tau_n^{-1/\alpha}, \tag{1}$$

где $\tau_n, n \geq 1$, – последовательность точек пуассоновского потока интенсивности $\lambda > 0$ на \mathbb{R}_+ , $\varphi \in \mathbb{R}$, тогда при сделанных предположениях верно

$$F_Z(z) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^{\infty} \mathbf{I} \left\{ \left\{ \frac{\cos(b \ln t + \varphi)}{t^a} > x \right\} \cup \left\{ -\frac{\sin(b \ln t + \varphi)}{t^a} > y \right\} \right\} dt \right\}. \tag{2}$$

Очевидно, если $x \leq 0$ или $y \leq 0$, интеграл в (2) расходится, что соответствует $F_Z(z) = 0$, таким образом, Z распределена в области $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$.

Следствие 1. Распределение Z из (1) является максимум-полуустойчивым с показателем $r = \exp\{2\pi/b\}$ и индексом α в том смысле, что

$$F_Z^r(z) = F_Z(r^{-1/\alpha} z)$$

для любого $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. Существуют константы $0 < C_1 < C_2 < 1$, зависящие от α , такие что

$$\exp\{-\lambda C_2 x^{-\rho}\} \leq F_X(x) \leq \exp\{-\lambda C_1 x^{-\rho}\}, \quad x > 0,$$

причем обе границы достигаются при сколь угодно больших значениях аргумента.

3. Второй подход. Модифицируем (1), заменив один угол φ на случайные углы φ_n , независимые и одинаково распределенные на $[0, 2\pi]$. Прежде всего понятно, что в этом случае множители τ_n^{-bi} не играют роли, и модель сводится к следующей (по распределению):

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi_n} \tau_n^{-a}, \tag{3}$$

при этом

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \varphi_n}{\tau_n^a}, \quad Y = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \varphi_n}{\tau_n^a}. \tag{4}$$

Теорема 3. Пусть Z описывается формулой (3), тогда

$$F_Z(z) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\rho+1}{2})}{\Gamma(\frac{\rho}{2} + 1)} \cdot x^{-\rho} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\rho+1}{2})}{\Gamma(\frac{\rho}{2} + 1)} \cdot y^{-\rho} - \frac{1}{\rho + 1} \cdot \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\rho+1}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\rho + 1}{2}, \frac{\rho + 3}{2}, \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{1}{\rho + 1} \cdot \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\rho+1}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\rho + 1}{2}, \frac{\rho + 3}{2}, \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \right) \right\}, \quad x, y > 0.$$

Следствие 2. Распределение Z из (3) является максимум-устойчивым с индексом ρ в том смысле, что

$$F_Z^c(z) = F_Z(c^{-1/\rho} z)$$

для любого $c > 0, z \in \mathbb{C}$.

Случайные величины X и Y из (4) в этом случае одинаково распределены и имеют распределение Фреше:

$$F_X(x) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\rho+1}{2})}{\Gamma(\frac{\rho}{2} + 1)} \cdot x^{-\rho} \right\}, \quad x > 0.$$

Исходя из совместной функции распределения, находится копула, коэффициент Бломквиста, коэффициент верхней хвостовой зависимости, функция зависимости. В частности, коэффициент верхней хвостовой зависимости описывается формулой

$$\lambda_U = \frac{1}{\rho + 1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\rho}{2} + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\rho+1}{2})} \cdot 2^{\frac{1-\rho}{2}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\rho+1}{2}, \frac{\rho+3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Литература

1. Gnedenko B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Ann. Math. 1943. 44, № 3. 423–453.
2. Галамбоши Я.И. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
3. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
4. Алексеев И.А. Об устойчивых случайных величинах с комплексным индексом устойчивости // Докл. РАН. Матем., информ., процессы упр. 2021. 501. 5–10.
5. Лебедев А.В. О комплексификации максимум-устойчивых распределений // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика, 2023, № 3, 3–6.
6. Nelsen R. An Introduction to Copulas. Springer, New York, 2006.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПАВОДКОВЫХ СИТУАЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Е.Н. Трофимец

trofimec.e@igps.ru

УДК 519.22

рассматривается применение метода регрессионного анализа для прогнозирования паводков. Построена и проанализирована двухфакторная линейная регрессионная модель в среде табличного процессора MS Excel для паводковой ситуации.

Ключевые слова: математическая статистика, регрессионный анализ, паводки.

Математическая статистика является одним из основных инструментов обработки эмпирических данных, собранных в процессе мониторинга чрезвычайных ситуаций. Методы математической статистики входят в состав комплекса математического обеспечения системы прогнозирования и оценки рисков возникновения паводковых ситуаций на основе текущих метеорологических данных и данных о гидрологической обстановке. Они дополняют специализированные гидрометеорологические модели, учитывающие как данные о водных объектах, так и метеорологические условия. Весь комплекс математического обеспечения реализован на программном уровне в геоинформационных системах (ГИС) [1-3].

Одним из основных методов прогнозирования паводковых ситуаций является метод регрессионного анализа, позволяющий выявлять зависимости между различными параметрами, такими как количество осадков, уровень рек, температура и определять их влияние на возникновение паводков.

Рассмотрим применение регрессионного анализа для построения краткосрочной модели паводковой ситуации, используя статистические данные о паводковых ситуациях на территории Санкт-Петербурга за промежуток времени с 2021 года по 2023 год.

В процессе разработки математической модели прогнозирования паводков использовались методы регрессионного анализа, критерии Стьюдента, Фишера для определения значимости коэффициентов и значимости самого уравнения в двухфакторной регрессионной модели.

Ключевые этапы процесса разработки регрессионной модели:

1. Определение уравнения множественной регрессии.

2. Определение в двухфакторном уравнении линейной регрессии степени стохастической взаимосвязи результативного признака и факторов.

3. Проверка общего качества уравнения регрессии при помощи критерия Фишера.

4. Проверка статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии при помощи критерия Стьюдента. Содержание выделенных этапов реализовывалось на рабочем листе MS Excel в режиме «Регрессия» с помощью надстройки «Пакет анализа» [4-8].

Результаты множественного регрессионного анализа представлены на рисунке 1. На основе статистических данных построена двухфакторная линейная регрессионная модель:

$$y_{\text{теор}} = 0,997x_1 + 1,263x_2 + 16,83$$

Значение множественного коэффициента детерминации показывает, что 95,2% общей вариации результативного признака объясняется вариацией факторных признаков x_1 и x_2 . Значит, выбранные факторы существенно влияют на повышение уровня воды, что подтверждает правильность их включения в разработанную регрессионную модель.

| G | H | I | J | K | L | M |
|----|-----------------------------------|---------------------|-------------|-------------------|-------------|---------------------|
| | <i>Регрессионная статистика</i> | | | | | |
| | Множественный | 0,97580769 | | | | |
| | R-квадрат | 0,95220065 | | | | |
| | Нормированный | 0,94992449 | | | | |
| | Стандартная ош | 11,7074121 | | | | |
| | Наблюдения | 45 | | | Фкр | |
| | | | | | 3,219942293 | |
| | <i>Дисперсионный анализ</i> | | | | | |
| | | <i>df</i> | <i>SS</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | <i>Значимость F</i> |
| | Регрессия | 2 | 114677,3331 | 57338,66653 | 418,3365157 | 1,85294E-28 |
| | Остаток | 42 | 5756,66695 | 137,0634988 | | |
| | Итого | 44 | 120434 | | | |
| | <i>Коэффициент стандартная ош</i> | | | | | |
| | | <i>t-статистика</i> | | <i>P-Значение</i> | | <i>Нижние 95%</i> |
| b | Y-пересечение | 16,8345612 | 8,788652037 | 1,915488416 | 0,06225525 | -0,901656489 |
| a1 | Переменная X 1 | 0,99698719 | 0,034617549 | 28,80005176 | 2,76169E-29 | 0,927126152 |
| a2 | Переменная X 2 | 1,26311757 | 0,274811745 | 4,596301261 | 3,9033E-05 | 0,708525023 |
| | | | <i>tкр</i> | | | |
| | | | 2,018081703 | | | |

Рис. 1: Результаты множественного регрессионного анализа

При анализе регрессионной модели в паводковых ситуациях важно учитывать временную динамику: сезонность, изменчивость погодных условий, пространственные различия в метеорологических условиях, состояние водохранилищ, степень урбанизации.

Полученная множественная регрессионная модель актуальна в паводковых ситуациях для прогнозирования уровня наводнений на основе метеорологических показателей, таких как количество выпавших осадков. Такие модели можно использовать для определения потенциальных рисков для окружающей среды и жизнедеятельности людей.

На основе анализа и моделирования эмпирических данных о паводковых ситуациях можно разрабатывать методики прогнозирования будущих наводнений в конкретной местности, что позволит оперативно силам и средствам МЧС принимать более эффективные меры по защите населения и территорий от паводков.

Литература

1. Бурцев А.А., Топольский Н.Г. Оценка опасности наводнений на основе данных мониторинга. // Пожары и чрезвычайные ситуации: предотвращение, ликвидация. 2016. №3, 15-19.
2. Топольский Н.Г., Гаврилов А.С. Космические и авиационные технологии мониторинга и прогнозирования чрезвычайных ситуаций // Технологии техносферной безопасности. 2014. №3 (55). С. 16.

3. Trofimets E., Kochina V., Zhebo S., Chashin A., Trofimets V. Processing of aerial photographs in geoinformation systems for constructing models of possible flooding zones in a flood-prone period // Journal of Physics: Conference Series, 2022, 2373(6), 062023.

4. Трофимец Е.Н., Трофимец В.Я. Компьютерное моделирование в математическом образовании инженеров // Сборник научных трудов III Всероссийской науч. конф. «Современные образовательные технологии в подготовке специалистов для минерально-сырьевого комплекса», 5-6 марта 2020 г. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский горный университет, 2020, 351-357.

5. Трофимец Е.Н. Прикладная математическая статистика в Excel // учебное пособие: Ярославль, 2013. Том Часть 2 Дисперсионный анализ. 128 с.

6. Трофимец Е.Н., Анашечкин А.Д. К вопросу построения краткосрочных моделей прогнозирования уровней воды на участках рек // Научно-аналитический журнал. Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России, 2019. №1, 36-43.

7. Selemeneva T.A. Application of mathematical methods in study of scientific and mathematical education efficiency in the higher education institutions of emergency situations ministry of russia // International Journal of Learning and Change. Том 10, №4, 346-358.

8. Селеменева Т.А. К оценке эффективности компетентностно-ориентированного обучения в ВУЗе // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Тенденции развития образования: педагог, образовательная организация, общество – 2018», 2018. «Издательский дом «Среда» (Чебоксары), 91-93.

ОБ УЛУЧШЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ СТАТИСТИК ПУТЕМ ИХ РАНДОМИЗАЦИИ

В.В. Ульянов

vulyanov@cs.msu.ru

УДК 519.23

Получены оценки точности аппроксимации в смысле полной вариации распределений для сумм целочисленных локально зависимых случайных величин суммами из целочисленных независимых случайных величин. Приближающие суммы состоят из пуассоновских слагаемых и слагаемых, имеющих либо биномиальное, либо отрицательное биномиальное распределение.

Ключевые слова: целочисленные локально зависимые случайные величины, полная вариация, биномиальное распределение, пуассоновское распределение.

Мы показываем, что внешняя рандомизация может улучшить скорость сходимости тестовых статистик к их предельным распределениям. Это позволяет делать более точные выводы в критериях согласия. Подход основан на многомерной центральной предельной теореме для взвешенных сумм. Мы применяем наш метод к семейству ранговых тестовых статистик и семейству тестовых статистик со степенными мерами расхождения и доказываем, что с высокой вероятностью относительно внешней рандомизации рандомизированные статистики сходятся со скоростью порядка $O(1/n)$ (с точностью до логарифмических множителей) к предельному распределению хи-квадрат в метрике Колмогорова.

Доклад основан на совместных результатах с Ж. Асылбековым, С. Айвазяном, Н. Пучкиным и В. Zubovым, см. [1–4].

Литература

1. Ayvazyan S. A., Ulyanov V. V. A multivariate CLT for weighted sums with rate of convergence of order $O(1/n)$ // Foundations of Modern Statistics. FMS 2019. / Ed. by V. V. Ulyanov. et al.— Vol. 425 of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — Springer, 2023. — P. 225–257.

2. Асылбеков Ж. А., Zubov В. Н., Ульянов В. В. Об аппроксимации некоторых статистик критериев согласия для случая дискретных трехмерных данных // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52, №4. — С. 728–744.

Ульянов Владимир Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

3. Puchkin N., Ulyanov V. Inference via randomized test statistics // ANnales de L'Institut Henri Poincare – Probabilites Et Statistiques. — 2023. — Vol. 59, no. 3. — P. 1508–1529.

4. Ulyanov V. V., Zubov V. N. Refinement on the convergence of one family of goodness-of-fit statistics to chi-squared distribution // Hiroshima Mathematical Journal. — 2009. — Vol. 39, no. 1. — P. 133–161.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ СУММЫ: ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Ю.С. Хохлов

yshkhokhlov@yandex.ru

УДК 519.224.3

В докладе рассматриваются две важные предельные теоремы, полученные в работах других авторов. Показано, что полученные предельные распределения (показательное и Миттаг–Леффлера) могут быть получены как решения некоторой характеристической задачи.

Ключевые слова: характеристика распределения Миттаг–Леффлера.

Геометрические случайные суммы уже давно появляются во многих как теоретических, так и прикладных задачах теории вероятностей и математической статистики. В одномерном случае известны следующие два результата.

Пусть мы имеем последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных неотрицательных случайных величин $(X_j, j \geq 1)$ и независимую от них случайную величину $N(p)$, которая имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1)$.

Теорема 1 (Реньи). Пусть имеет место следующая сходимость

$$p \cdot \sum_{j=1}^{N(p)} X_j \Rightarrow Y, \quad p \rightarrow 0, \quad (1)$$

где Y есть невырожденная случайная величина и \Rightarrow означает слабую сходимость распределений соответствующих случайных величин. Тогда Y имеет показательное распределение, преобразование Лапласа–Стилтьеса которого имеет вид:

$$\varphi_Y(t) = E(e^{-tY}) = \frac{\lambda}{\lambda + t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (2)$$

Теорема 2 (Коваленко). Пусть имеет место следующая сходимость

$$p^{1/\delta} \cdot \sum_{j=1}^{N(p)} X_j \Rightarrow Z, \quad p \rightarrow 0, \quad 0 < \delta \leq 1, \quad (3)$$

где Z есть невырожденная случайная величина и \Rightarrow означает слабую сходимость распределений соответствующих случайных величин. Тогда Z имеет распределение, преобразование Лапласа–Стилтьеса которого имеет вид:

$$\varphi_Z(t) = E(e^{-tZ}) = \frac{\lambda}{\lambda + t^{1/\delta}}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (4)$$

Распределение такого типа в настоящее время называют распределением Миттаг–Леффлера с параметрами (λ, δ) .

Недавно в работе [1] Клебанов Л.Б. доказал следующий результат.

Теорема 3. Пусть случайные величины Y_0, X_1, Y_1 независимы и неотрицательны, а ε_p есть независимая от них случайная величина, которая имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$. Соотношение $Y_0 \stackrel{d}{=} (1-p)X_1 + \varepsilon_1 Y_1$ имеет место тогда и только тогда, когда случайная величина Y_0 имеет показательное распределение.

В нашем докладе мы показываем, что аналогичный результат имеет место и для распределения Миттаг-Леффлера.

Теорема 4. Пусть случайные величины Y_0, X_1, Y_1 независимы и неотрицательны, а ε_p есть независимая от них случайная величина, которая имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0, 1)$. Соотношение $Y_0 \stackrel{d}{=} (1-p)^{1/\delta} X_1 + \varepsilon_1 Y_1$, $0 < \delta \leq 1$, имеет место тогда и только тогда, когда случайная величина Y_0 имеет распределение Миттаг-Леффлера с параметрами (λ, δ) .

В теоремах 3 и 4 обозначение $\stackrel{d}{=}$ означает, что величины справа и слева имеют одинаковые распределения.

Аналогичные результаты можно получить и в многомерном случае.

Это исследование было проведено в соответствии с научной программой Московского центра фундаментальной и прикладной математики и факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. Klebanov L.B. Some more Results on Characterization of the Exponential and Related Distributions. – Stats 2023, 6, 740-746.

О СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ПРАВИЛЬНЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ И КЛИКАМИ В ОБОБЩЕННЫХ ГРАФАХ КЕЛЛЕРА

К.Д. Царегородцев

kirill94_12@mail.ru

УДК 519.1

В докладе установлено взаимно-однозначное соответствие между правильными семействами функций k -значной логики и кликами в специально построенных графах. В случае $k = 2$ рассматриваемые графы известны под названием графов Келлера, а клики в них соответствуют замощениям пространства гиперкубами.

Ключевые слова: правильное семейство функций, клика, граф Келлера.

Правильные семейства булевых функций были введены В. Носовым [1] для построения больших параметрических классов латинских квадратов. Позднее исходная конструкция была обобщена на случай k -значных логик (см. обзор [2]). В работе [3] было установлено взаимно-однозначное соответствие между правильными семействами булевых функций и т.н. одностокowymi ориентациями булевых кубов. Тем самым было получено альтернативное описание объекта с более геометрической точки зрения. В работе [4] было показано, что одностокковые ориентации булевых кубов находятся в биективном соответствии с замощениями пространства гиперкубами, а именно: было показано, что каждой одностокковой ориентации можно однозначно сопоставить клику в некотором графе специального вида (т.н. графы Келлера, см. [5]). В настоящей работе мы обобщаем этот результат на k -значный случай. Показано, что правильные семейства функций k -значной логики находятся в биективном соответствии с кликами графов, построенных аналогично графам Келлера (и совпадающих с этими графами при $k = 2$). Таким образом, получено альтернативное “кликковое” описание правильных семейств, которое может быть использовано для подсчета числа правильных семейств размера n в k -значной логике с помощью подсчёта клик в соответствующем графе $G(k, n)$.

Введем ряд обозначений. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Положим $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Множество всех функций из E_k^n в E_k обозначим через P_k^n . Будем говорить, что на E_k^n задано семейство функций $F = (f_1, \dots, f_n)$ размера n , если заданы n функций $f_i \in P_k^n$, $1 \leq i \leq n$.

Определение 1. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Семейство функций $F_n = (f_1, \dots, f_n)$ на E_k^n называется правильным, если для любой пары наборов $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in E_k^n$, $s \neq t$, найдется индекс i , $1 \leq i \leq n$, такой что $s_i \neq t_i$, но $f_i(s) = f_i(t)$.

В работе [3] было показано, что каждому булеву правильному семейству ($k = 2$) можно поставить во взаимно-однозначно соответствие т.н. одностокую ориентацию булева куба.

Определение 2. Пусть $G = (V, E)$ — некоторый (простой неориентированный) граф. Клика на m вершинах в графе G — это подмножество вершин $V' \subseteq V$ размера m , такое что каждые две вершины $v, w \in V'$ соединены ребром в G : $\{v, w\} \in E$.

Рассмотрим следующее обобщение графов Келлера [5] на k -значный случай. Зададим множество вершин V и рёбер E графа $G(k, n)$ следующим образом: множество вершин графа — наборы чисел от 0 до $k^2 - 1$ длины n : $V = E_{k^2}^n$; ребро $\{v, w\} \in E$, тогда и только тогда, когда найдется координата i , $1 \leq i \leq n$, что выполнены два условия: $v_i \equiv w_i \pmod k$, $v_i \neq w_i$.

В работах [6,7] было получено число классов изоморфизма для замощений пространств размерности n гиперкубами, где $n = 2, 3, 4, 5$. Указанное число классов изоморфизмов замощений совпадает с числом булевых правильных семейств размера $n = 2, 3, 4, 5$. В [4] показано, что это совпадение не случайно, а именно: имеется биективное соответствие между одностокowymi ориентациями булевых кубов и замощениями пространства гиперкубами. Ниже мы рассмотрим обобщение указанного результата на случай k -значной логики.

Будем рассматривать правильные семейства размера n на E_k^n . Покажем, что они находятся во взаимно-однозначном соответствии с кликами в графе $G(k, n)$ размера k^n (по правильному семейству строится клика в графе $G(k, n)$, и наоборот, по каждой клике размера k^n в $G(k, n)$ задается правильное семейство на E_k^n).

Теорема 1. Каждой клике на k^n вершинах в графе $G(k, n)$ можно поставить в биективное соответствие некоторое правильное семейство F размера n на E_k^n .

Доказательство будет состоять из двух частей. Сначала рассмотрим вложение множества правильных семейств в множество клик графа $G(k, n)$, а затем покажем обратное: по каждой клике графа $G(k, n)$ построим некоторое правильное семейство F размера n на E_k^n .

Рассмотрим некоторое правильное семейство $F = (f_1, \dots, f_n)$ на E_k^n . Каждому набору $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_k^n$ поставим в соответствие набор из $E_{k^2}^n$ следующим образом. Для $a, b \in E_k$ определим число $\phi(a, b) = k \cdot a + b \in E_{k^2}$, тогда набору x ставится в соответствие вектор

$$x \rightarrow \Phi_F(x) = (\phi(x_1, f_1(x)), \dots, \phi(x_n, f_n(x))) \in E_{k^2}^n.$$

Повторим указанный процесс для каждого $x \in E_k^n$ и получим набор вершин в графе $G(k, n)$, построенный по семейству F . Полученное отображение Φ_F в множество вершин V инъективно для каждого фиксированного правильного семейства F : если $x \neq y$, то $\Phi_F(x) \neq \Phi_F(y)$. Это следует из свойства правильности: найдется индекс $1 \leq i \leq n$, что $x_i \neq y_i$, но $f_i(x) = f_i(y)$, а значит, $\phi(x_i, f_i(x)) = k \cdot x_i + f_i(x) \neq k \cdot y_i + f_i(y) = \phi(y_i, f_i(y))$. Заметим также, что для полученных элементов выполняется условие

$$\phi(x_i, f_i(x)) \neq \phi(y_i, f_i(y)), \quad \phi(x_i, f_i(x)) \equiv \phi(y_i, f_i(y)) \pmod k,$$

а значит, полученные вершины графа соединены ребром в $G(k, n)$. Таким образом, отображение Φ_F задает по правильному семейству F некоторый подграф графа $G(k, n)$ на k^n вершинах, причем любые две вершины в подграфе соединены ребром, а значит, составляют клику. Отображение $F \rightarrow \Phi_F$ также является инъективным (определяет различные клики при разных правильных семействах): если $F \neq G$, то существует $x \in E_k^n$, такой что $F(x) \neq G(x)$, но тогда $\Phi_F(x) \neq \Phi_G(x)$, и ни для какой точки $y \in E_k^n$ не может выполняться равенство $\Phi_F(x) = \Phi_G(y)$, а значит, точки $\Phi_F(x)$ нет в клике, задаваемой отображением Φ_G .

Рассмотрим теперь обратное отображение: каждому элементу $a \in E_{k^2}$ поставим в соответствие пару $\psi(a) = (a \operatorname{div} k, a \operatorname{mod} k)$, а каждому элементу $v = (v_1, \dots, v_n) \in E_{k^2}^n$ — пару векторов $(x, y) = \Psi(v) \in (E_k^n)^2$ вида $(x_i, y_i) = \psi(v_i)$, $1 \leq i \leq n$. Покажем, что при этом отображении клики перейдут в правильные семейства.

Во-первых, такое отображение на кликах инъективно: если $v \neq w$, $\Psi(v) = (x, \alpha)$, $\Psi(w) = (y, \beta)$, v и w соединены ребром в графе $G(k, n)$, то найдется индекс i , для которого $v_i \neq w_i$, но $v_i \equiv w_i \pmod k$, а значит, $x_i \neq y_i$. В силу того, что в каждой рассматриваемой клике k^n вершин, указанное отображение ставит ей в соответствие множество пар $\{(x, \alpha) \in (E_k^n)^2 \mid x \in E_k^n\}$, где первые элементы пар x пробегают все множество E_k^n .

Во-вторых, если мы интерпретируем второй элемент пары α как значение некоторого отображения $F \in P_k^n$ на элементе первой пары x (т.е. $(x, \alpha) = (x, F(x))$), то семейство F будет правильным, покажем это. Рассмотрим два неравных набора $x \neq y \in E_k^n$, а также их прообразы при отображении Ψ : $v = \Psi^{-1}(x, \alpha)$, $w = \Psi^{-1}(y, \beta)$. Для векторов v и w найдется индекс $1 \leq i \leq n$, для которого $v_i \neq w_i$, но $v_i \equiv w_i \pmod k$ (поскольку v и w соединены ребром в $G(k, n)$), а значит, $x_i \neq y_i$, но при этом $\alpha_i = \beta_i$, т.е. выполнено условие правильности. \square

Литература

1. Носов В. А. Построение классов латинских квадратов в булевой базе данных // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 4:3-4 (1999), 307-320.
2. Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E., Tsaregorodtsev K. D. Proper families of functions and their applications // Математические вопросы криптографии, 14:2 (2023), 43-58.
3. Царегородцев К. Д. О взаимно однозначном соответствии между правильными семействами булевых функций и рёберными ориентациями булевых кубов // Прикладная дискретная математика, 48 (2020), 16-21.
4. Borzechowski M., Doolittle J., Weber S. A Universal Construction for Unique Sink Orientations // arXiv preprint arXiv:2211.06072 (2022).
5. Corrádi K., Szabó S. A combinatorial approach for Keller's conjecture // Periodica Mathematica Hungarica, 21:2 (1990), 95-100.
6. Sikirić M. D., Itoh Y., Poyarkov A. Cube packings, second moment and holes // European Journal of Combinatorics, 28:3 (2007), 715-725.
7. Mathew K. A., Östergård P., Popa A. Enumerating cube tilings // Discrete & Computational Geometry, 50:4 (2013), 1112-1122.

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НЕТОЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, Ю.Н. Харченко

guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru, har@iam.dvo.ru

УДК 519.233

В работе решается задача оценки параметров дифференциальных уравнений по наблюдениям на коротких интервалах значений аргумента. По аналогии с линейным регрессионным анализом оцениваются значения функций и их производных. Подстановкой в дифференциальные уравнения полученных оценок определяются неизвестные параметры и доказывается их состоятельность при увеличении числа измерений на интервалах.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, линейный регрессионный анализ, теорема существования и единственности, теорема о неявной функции, метод моментов.

Цициашвили Гурами Шалвович, д.ф.-м.н., г.н.с., Институт прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, Россия)

Осипова Марина Анатольевна, к.ф.-м.н., н.с., Институт прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, Россия)

Харченко Юрий Николаевич, к.ф.-м.н., н.с., Институт прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, Россия)

В работе решается задача оценки параметров дифференциальных уравнений по неточным наблюдениям на коротких интервалах значений аргумента в окрестности выбранных реперных точек. С помощью теоремы существования решений дифференциальных уравнений в малой окрестности реперной точки и по аналогии с линейным регрессионным анализом оцениваются значения функций и их производных в малых окрестностях реперных точек. Определяются погрешности оценок и доказывается их состоятельность при увеличении числа измерений на интервалах в окрестностях реперных точек. По аналогии с методом моментов подстановкой в дифференциальные уравнения полученных оценок значений функций и их производных в реперных точках оцениваются неизвестные параметры. С помощью теоремы о неявной функции определяются погрешности полученных оценок коэффициентов дифференциальных уравнений.

Проводится вычислительный эксперимент для оценки параметров системы уравнений Лоренца [1], системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных колебаний консервативных механических систем [2], односолитонных решений уравнений Кортевега – де Фриза, Сайн – Гордона, Бюргерса, нелинейного уравнения Шредингера [3].

Литература

1. *Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A., Kharchenko Yu.N.* Estimating the Coefficients of a System of Ordinary Differential Equations Based on Inaccurate Observations // Mathematics 2022, 10(1), 502; DOI: [10.3390/math10030502](https://doi.org/10.3390/math10030502)
2. *Tsitsiashvili G.Sh., Gudimenko A.I., Osipova M.A.* Mathematical and Statistical Aspects of Estimating Small Oscillations Parameters in a Conservative Mechanical System Using Inaccurate Observations // Mathematics 2023, 11, 2643. DOI: [10.3390/math11122643](https://doi.org/10.3390/math11122643)
3. *Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A., Gudimenko A.I.* Fast method for estimating the parameters of partial differential equations from inaccurate observations // Mathematics 2023, 11, 4586. [10.3390/math11224586](https://doi.org/10.3390/math11224586)

ТЕОРЕМА ХАСЬМИНСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОВОРА С ЧАСТИЧНО ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ДИФФУЗИИ

Д.В. Шатилович

dmitriy.shatilovich@math.msu.ru

Доклад посвящен достаточным условиям существования вероятностного решения стационарного уравнения Колмогорова с вырожденной матрицей диффузии и разрывным коэффициентом сноса. Построены примеры, показывающие точность условий.

Ключевые слова: уравнение Колмогорова, инвариантная мера диффузионного процесса, функция Ляпунова.

Рассмотрим стационарное уравнение Колмогорова

$$\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \mu) - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} (b^i \mu) = 0.$$

Существованию вероятностного решения уравнения Колмогорова посвящена известная теорема Хасьминского. Классическим глобальным условием теоремы Хасьминского является существование функции Ляпунова. Однако без дополнительных локальных условий на коэффициенты уравнения наличие функции Ляпунова еще не гарантирует существование вероятностного решения, что будет показано на нескольких примерах в настоящем докладе.

Данная работа опубликована при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Шатилович Дмитрий Вячеславович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Представляет интерес обобщение теоремы Хасьминского на случай частично вырожденной матрицы A . Такие уравнения возникают при исследовании стохастических уравнений типа Ланжевена, когда по части переменных диффузионный процесс описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а по остальным переменным — стохастическими дифференциальными уравнениями.

Исследованию таких стохастических уравнений посвящены работы [1], [2]. Соответствующие параболические уравнения Колмогорова исследовались в статьях [3], [4]. В перечисленных выше работах отмечалось, что требования регулярности коэффициентов по переменным, по которым нет вырождения матрицы диффузии, можно ослабить. Естественно предположить, что в случае стационарного уравнения Колмогорова ситуация аналогична и в теореме Хасьминского по переменным, по которым нет вырождения, можно не требовать непрерывности коэффициентов уравнения. В докладе будет представлено обоснование этого предположения. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы обосновать регулярность проекции решения на координаты, по которым нет вырождения. Известно, что в случае невырожденной матрицы диффузии решение уравнения Колмогорова имеет регулярную плотность. В докладе будет показано, что схожее утверждение выполнено и в случае частичного вырождения для проекции меры на координаты, по которым диффузия не вырождается. Полученные результаты изложены в [5].

Литература

1. *Веретенников А.Ю.* О стохастических уравнениях с вырождающейся по части переменных диффузией. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, №1, С.189–196.
2. *Леваков А.А., Васьковский М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии. Дифференциальные уравнения. 2007. Т.43, №8, С.1029–1042.
3. *Guillin A., Wang F.-Y.* Degenerate Fokker–Planck equations: Bismut formula, gradient estimate and Harnack inequality. J. Diff. Eq. 2012. V. 253, №1. P.20–40.
4. *Delarue F., Menozzi S.* Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations. Journal of Functional Analysis. 2010. V. 259, №6, P.1577–1630.
5. *С.В. Шапошников, Д.В. Шатилович* Теорема Хасьминского для уравнения Колмогорова с частично вырожденной матрицей диффузии, Математические заметки, том 115, вып.3, 2024.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СОСТАВНЫХ ПРОЦЕССОВ КОКСА К ДИСПЕРСИОННО-СДВИГОВЫМ НОРМАЛЬНЫМ СМЕСЯМ

И.Г. Шевцова, В.Ю. Королев, В.А. Макаренко

ishevtsova@cs.msu.ru

В докладе приводятся оценки скорости сходимости в метрике Колмогорова смешанных пуассоновских случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными третьими моментами к дисперсионно-сдвиговым смесям нормальных законов.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, дисперсионно-сдвиговая нормальная смесь, смешанная пуассоновская случайная сумма, неравенство Берри–Эссеена.

Шевцова Ирина Геннадьевна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Королев Виктор Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Макаренко Владимир Александрович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Функция распределения F называется **дисперсионно-сдвиговой нормальной смесью**, если

$$F(x) = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x - \beta - \alpha u}{\sigma\sqrt{u}}\right) dG(u), \quad x \in \mathbb{R},$$

для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, \infty)$ и функции распределения G с $G(0) = 0$, где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная ф.р.:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В терминах случайных величин $X \sim F$, $Z \sim \Phi$, $U \stackrel{a.s.}{\geq} 0 \sim G$ это означает, что

$$X = \beta + \alpha U + \sigma\sqrt{U} \circ Z,$$

где символом “ \circ ” обозначается произведение независимых случайных величин.

Класс дисперсионно-сдвиговых нормальных смесей довольно широк. Он включает в себя обобщенные гиперболические распределения [1, 2, 3] (со смешивающим обобщенным обратным нормальным распределением U), в частности, симметричное и скошенное распределения Стьюдента, в том числе распределение Коши (со смешивающим обратным гамма распределением U), дисперсионное гамма распределение [4] (со смешивающим гамма распределением U), в том числе симметричное и скошенное распределения Лапласа (со смешивающим показательным распределением U), нормальное обратное нормальное распределение (со смешивающим обратным гауссовским распределением), в том числе — как предельный случай — распределение Леви, а также обобщенное дисперсионное гамма распределение (со смешивающим обобщенным гамма-распределением), скошенное экспоненциально-степенное распределение [5], скошенное двустороннее распределение Вейбулла (асимметричное распределение Вейбулла второго рода) [6], асимметричное распределение Линника третьего рода [7], M-асимметричное квази-степенное нормальное распределение [8].

Перечисленные распределения хорошо зарекомендовали себя при описании статистических закономерностей, возникающих в самых разнообразных областях от атмосферной турбулентности до финансового анализа. Теоретическое обоснование столь высокого согласия было дано в работе [9] в виде предельной теоремы для случайных сумм независимых случайных величин, чьи средние значения пропорциональны дисперсиям.

В данной работе мы доказываем оценки скорости сходимости в предельной теореме из [9] для смешанных пуассоновских случайных сумм (составных процессов Кокса, или трижды стохастических пуассоновских процессов) независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными третьими моментами. Наше доказательство основано на оценке точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм (составных пуассоновских процессов) типа неравенства Берри–Эссеена с центральными ляпуновскими дробями из [10], а итоговые результаты либо являются новыми, либо превосходит по точности известные.

Литература

1. Barndorff-Nielsen O. E. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size // Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A. — 1977. — Vol. 353. — P. 401–419.
2. Barndorff-Nielsen O. E. Hyperbolic distributions and distributions of hyperbolae // Scand. J. Statist. c 1978. — Vol. 5. — P. 151–157.
3. Barndorff-Nielsen O. E., Kent J., Sørensen M. Normal variance-mean mixtures and z- distributions // Int. Statist. Rev. — 1982. — Vol. 50, no. 2. — P. 145–159.
4. Zaks L. M., Korolev V. Y. Generalized variance-gamma distributions as limit laws for random sums // Inform. Appl. (in Russian). — 2013. — Т. 7, No 1. — С. 105–115.
5. Grigorieva M. E., Korolev V. Y. On convergence of the distributions of random sums to skew exponential power laws // Inform. Appl. (in Russian). — 2013. — Т. 7, No 4. — С. 66–74.
6. Korolev V. Y., Kurmangazieva L., Zeifman A. I. On asymmetric generalization of the Weibull distribution by scale-location mixing of normal laws // Journal of the Korean Statistical Society. — 2016. — Vol. 45, no. 2. — P. 238–249.
7. Korolev V. Y., Zeifman A. I., Korchagin A. Y. Asymmetric Linnik distributions as limit laws for random sums of independent random variables with finite variances // Inform. Appl. — 2016. — Т. 10, No 4. — С. 21–33.

8. Korolev V. Y., Zeifman A. I. Quasi-Exponentiated Normal Distributions: Mixture Representations and Asymmetrization // Mathematics. — 2023. — Vol. 32, no. 3. — P. 414–432.

9. Korolev V. Y. Generalized hyperbolic laws as limit distributions for random sums // Theory Probab. Appl. — 2013. — Vol. 58, no. 1. — P. 63–75.

10. Makarenko V. A., Shevtsova I. G. Delicate comparison of the central and non-central Lyapunov ratios with applications to the Berry–Esseen inequality for compound Poisson distributions // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 3. — P. 625.

О СТРУКТУРЕ СПЕКТРА ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕТВЯЩИХСЯ БЛУЖДЕНИЯХ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСТОЧНИКОВ ВЕТВЛЕНИЯ

Е.Б. Яровая

yarovaya@mech.math.msu.su

УДК 519.21

Доказана теорема о количестве собственных значений конечномерного самосопряженного возмущения $A + B$ самосопряженного оператора A в вещественном гильбертовом пространстве. Эти результаты применены к исследованию ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам в неоднородной ветвящейся среде.

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, неоднородная ветвящаяся среда, самосопряженные операторы, конечномерные возмущения.

Будем следовать обозначениям и определениям из [1,2,3,4]. Пусть \mathbb{Z}^d обозначает d -мерную целочисленную решетку, т.е. множество d -мерных векторов с целочисленными координатами. Все операторы далее рассматриваются в (вещественном) гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$ квадратично суммируемых функций $u(\cdot)$, определенных на \mathbb{Z}^d со стандартным скалярным произведением $\langle u, v \rangle := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u(z)v(z)$, и порождаемой им нормой $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Рассмотрим в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$ линейный оператор $(\mathcal{A}u)(z) := \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} a(z - z')u(z')$, предполагая, что он ограничен и самосопряжен, а его спектр принадлежит отрезку $[-\kappa(\mathcal{A}), 0]$, $\kappa(\mathcal{A}) > 0$. Условия в терминах функции $a(\cdot)$, обеспечивающие данные свойства оператора \mathcal{A} , сформулированы, например, в работах [1,2,3,4], но поскольку конкретный вид этих условий далее не используется, мы их не приводим. Обозначим через δ_z , $z \in \mathbb{Z}^d$, элемент пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$, определяемый равенством $\delta_z(x) := 1$ при $x = z$ и $\delta_z(x) := 0$ при $x \neq z$, а через Δ_z оператор ортогонального проектирования в $l_2(\mathbb{Z}^d)$ на линейную оболочку элемента δ_z : $\Delta_z u := \langle \delta_z, u \rangle \delta_z$.

В теории ветвящихся случайных блужданий с непрерывным временем самосопряженный оператор \mathcal{A} возникает как генератор симметричного случайного блуждания частиц по \mathbb{Z}^d , лежащего в основе процесса [4]. Однако анализ эволюционных операторов в теории ветвящихся случайных процессов не ограничивается рассмотрением только операторов вида \mathcal{A} . Предположение о возможном нарушении симметрии блуждания в конечном числе точек $y_i \in \mathbb{Z}^d$ приводит к появлению операторов вида $\mathcal{A} + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{y_i} \mathcal{A}$, где ζ_i — некоторые константы. Предположение о возможном ветвлении, т.е. разномножении и гибели частиц, в конечном числе точек \mathbb{Z}^d требует рассмотрения операторов еще более сложного вида, спектр которых уже может “заползать” на правую полуось вещественной оси, тем самым оказывая существенное влияние на свойства процесса. Одним из таких операторов является оператор вида

$$\mathcal{H} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{y_i} \mathcal{A} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_{z_i}, \tag{1}$$

где векторы $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$ попарно различны, а источники ветвления частиц расположены точках $\{z_i\}$ и имеют произвольные интенсивности $\beta_i \in \mathbb{R}$. Операторы вида (1) возникают в правых частях эволюционных уравнений для средних численностей частиц в произвольной точке \mathbb{Z} или средней численности всей популяции частиц, если процесс стартует с одной частицы в начальный момент времени $t = 0$. Наша цель — оценить количество изолированных положительных собственных значений оператора \mathcal{H} . Для достижения этой цели мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве \mathbb{E} , причем оператор B конечномерный. Пусть $d = \dim \mathbb{E}_B$ и оператор B имеет n строго положительных и $m = d - n$ строго отрицательных собственных значений. Тогда оператор $A + B$ имеет не более n собственных значений (с учетом кратности) в интервале $(\kappa^+(A), \infty)$ и не более m собственных значений (с учетом кратности) в интервале $(-\infty, \kappa^-(A))$, где

$$\kappa^+(A) = \sup_{x \in \mathbb{E}, x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}, \quad \kappa^-(A) = \inf_{x \in \mathbb{E}, x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

верхняя и нижняя границы квадратичной формы $\langle Ax, y \rangle$, соответственно.

Таким образом, число собственных значений операторов вида $\mathcal{A} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_{z_i}$, превышающих верхнюю границу спектра оператора \mathcal{A} , не превосходит числа положительных собственных значений оператора $\sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_{z_i}$, а число собственных значений — меньших нижней границы спектра оператора \mathcal{A} , не превосходит числа отрицательных собственных значений оператора $\sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_{z_i}$. Из-за наличия второй суммы в (1) оператор \mathcal{H} оказывается, вообще говоря, несамосопряженным, что приводит к невозможности непосредственного использования теоремы 1 для анализа его спектра. Однако, как оказывается, это препятствие не является непреодолимым. Следуя конструкциям из [5], представим оператор \mathcal{H} в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{A} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_{z_i}, \quad (2)$$

где $\mathcal{D} = I + \sum_{i=1}^k \zeta_i \Delta_{y_i}$. Если $\zeta_i > -1$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$, то оператор \mathcal{D} оказывается самосопряженным и положительно определенным, и в этом случае у него существует положительно определенный (обратимый) квадратный корень $\mathcal{D}^{1/2}$, коммутирующий с любым проектором Δ_z . Домножив тогда равенство (2) слева на $\mathcal{D}^{-1/2}$, а справа на $\mathcal{D}^{1/2}$, мы получим

$$\widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{D}^{-1/2} \mathcal{H} \mathcal{D}^{-1/2} = \mathcal{D}^{1/2} \mathcal{A} \mathcal{D}^{1/2} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_{z_i},$$

Таким образом, мы получили, что оператор \mathcal{H} подобен оператору $\widetilde{\mathcal{H}}$, и значит их спектры совпадают. Оператор же $\widetilde{\mathcal{H}}$ является самосопряженным конечномерным возмущением самосопряженного оператора $\mathcal{D}^{1/2} \mathcal{A} \mathcal{D}^{1/2}$, а потому к анализу его спектра можно привлечь теорему 1. Дальнейшее исследование спектра оператора $\widetilde{\mathcal{H}}$ очевидно, и потому опускается.

Литература

1. Антоненко Е. А., Яровая Е. Б. Расположение положительных собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании // Современные проблемы математики и механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2015. Т. 10 из сер. «Теория вероятностей и математическая статистика». С. 9–22.
2. Балашова Д. М. Ветвящиеся случайные блуждания со знакопеременными интенсивностями источников ветвления // <http://mi.mathnet.ru/fpm1867> *Фундамент. и прикл. матем.* 2020. Т. 23, № 1. С. 75–88. <http://mi.mathnet.ru/fpm1867>.
3. Antonenko E., Yarovaia E. [10.1007/978-3-319-31641-3_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-31641-3_3) On the number of positive eigenvalues of the evolutionary operator of branching random walk // Branching processes and their applications. Springer, [Cham], 2016. Vol. 219 of *Lect. Notes Stat.* P. 41–55.
4. Yarovaia E. Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails // [10.1007/s11009-016-9492-9](https://doi.org/10.1007/s11009-016-9492-9) *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 2017. Vol. 19, no. 4. P. 1151–1167.
5. Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий // [10.4213/mzm9485](https://doi.org/10.4213/mzm9485) *Матем. заметки.* 2012. Т. 92, № 1. С. 123–140.

THE RATES OF CONVERGENCE FOR POSITION-DEPENDENT CONTINUOUS-TIME RANDOM WALKS APPROXIMATIONS TO FRACTIONAL EVOLUTIONS

V.N. Kolokoltsov

v.n.kolokoltsov@gmail.com

Three directions of research will be presented: 1) Rates of convergence in the functional CLT with stable limits; 2) Domains and processes of quasi-attractions, which are approached by random walks for small, but not too small, discretising parameters; 3) Rates of convergence of CTRWs (continuous time random walks) to fractional evolutions.

Keywords: rates of convergence, domains of quasi-attraction, stable distributions, stable-like processes, continuous time random walks.

The convergence of continuous-time random walks (CTRW) to evolutions described by fractional differential equations was the fundamental discovery of the middle of the last century. This discovery created the main impetus to the revival of the interest in fractional calculus and in fact to its amazingly fruitful and deep development in the last decades. Remarkably enough, notwithstanding an ever increasing scope of both mathematical theory and numerous applications of CTRWs and their scaling limits in physics, finance and economics, no explicit convergence rates were obtained until recently. The authors's paper [1] seems to be the first shedding light on this problem. In this talk we present some ideas and results from [1] that were further enhanced and partially improved in [2], with related results obtained in [3] and applications of these ideas to numeric solutions of CTRWs being given in [4].

In fact we present a certain methodology allowing to prove a bunch of results under various assumptions. As an example, let us present a possible result in more detail. Assume that $\tau_i, i \in \mathbf{N}$, is a sequence of positive i.i.d. random variables having probability density $p(y)$ on \mathbf{R}_+ such that $p(0) = 0$, $p(x)$ is continuously differentiable, and $p(y) = y^{-1-\beta}$ for $y \geq B$ with some $\beta \in (0, 1)$ and $B > 0$ such that $\beta B^\beta > 1$.

Let

$$\Phi_t^h = \sum_{i=1}^{[t/h]} h^{1/\beta} \tau_i,$$

be the corresponding scaled random walk (where we set $\Phi_t^h = 0$ for $t < h$). We denote by $V_h^{[t/h]}$ the transition operators of the discrete Markov chain Φ_t^h .

The inverse process to the scaled random walk Φ_t^h is defined by the equation

$$N_K^h = \sup\{t : \Phi_t^h < K\}.$$

Suppose X_1^h, X_2^h, \dots is a sequence of i.i.d. random variables in \mathbf{R}^d , such that the distribution of each X_i^h is given by a probability measure $\mu_{space}^h(dx)$, that depends on h . The standard (scaled) *continuous time random walk* (CTRW) is a random process given by the random sum

$$\sum_{j=1}^{N_t^h/h} X_j^h.$$

In position dependent CTRW the jumps X_i^h are not independent, but each X_i^h depends on the position of the process before this jump. The natural general formulation can be given in terms of discrete Markov chains as follows.

Let $O_h^n(x)$ be a family (depending on a parameter $h > 0$) of discrete-time Markov chains in \mathbf{R}^d , independent of the sequence $\{\tau_i\}$. Let U_h be a transition operator of $O_h^1(x)$, so that

$$U_h f(x) = \mathbf{E}O_h^1(x) = \int f(y) \mu_{space}^h(x, dy), \tag{1}$$

Колокольцев Василий Никитич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

with some family of stochastic kernels $\mu_{space}^h(x, dy)$.

The discrete-time process

$$O_h^{N_t^h/h}(x), \tag{2}$$

with the transition operators $U_h^{N_t^h/h}$, is a generalized *scaled (position dependent) continuous time random walk* (CTRW) arising from transitions $\mu_{space}^h(x, dy)$ and the sequence of waiting times $\{\tau_i\}$. Thus it is a Markov chain, time-changed by the inverse process to the scaled random walk built on the sequence $\{\tau_i\}$.

Let us denote by

$$\sigma_y = \max\{t : \hat{\Sigma}_t^\beta \leq y\}$$

the inverse process to the stable subordinator $\hat{\Sigma}_t^\beta$.

It was discovered by physicists and applied to variety of models and then it has been proved rigorously by many authors under various assumptions that, if $(U_h - 1)/h$ converge to an operator L , which generates a Feller process $X_t(x)$ (x stands for the initial point of the process) with a Feller semigroup F_t , then the processes of CTRW $O_h^{N_t^h/h}(x)$ converge in distribution to the time-changed Markov process $X_t(x)$, that is, to the process $X_{\sigma_t}(x)$. Our result is the first one supplying the rates of convergence for this scaling limit.

Theorem 1. *Let $F_t = e^{tL}$ be a Feller semigroup in the Banach space $B = C_\infty(\mathbf{R}^d)$, generated by an operator L , having a core D , which is itself a Banach space with a norm $\|\cdot\|_D \geq \|\cdot\|_B$ such that $\|Lf\|_B \leq l\|f\|_D$ for a constant l and all $f \in D$. Let F_t be also a bounded semigroup in D such that*

$$\max_{s \in [0, t]} \|F_t\|_{D \rightarrow D} \leq e^{mt},$$

with a constant $m \geq 0$ (the growth rate of the semigroup).

Let U_h be a family of contractions in B , and let

$$\left\| \left(\frac{U_h - 1}{h} - L \right) f \right\|_B \leq \epsilon_h \|f\|_D, \tag{3}$$

$$\left\| \left(\frac{F_h - 1}{h} - L \right) f \right\|_B \leq \varkappa_h \|f\|_D, \tag{4}$$

with $\epsilon_h + \varkappa_h = h^\omega$ with some $\omega > 0$.

Then, if $m > 0$, then

$$\begin{aligned} \sup_x |\mathbf{E}f(O_h^{N_t^h/h}(x)) - \mathbf{E}f(X_{\sigma_t}(x))| &= \|\mathbf{E}U_h^{N_t^h/h} f - \mathbf{E}F_{\sigma_t} f\| \\ &\leq 4(1 + \max(1, m/\omega))(1 + t + t^{-1}) \ln(1/h)^{-1} \|f\|_D, \end{aligned} \tag{5}$$

for all $t > 0$, $f \in D$, and $h \leq h_0$ with sufficiently small h_0 (depending on β, B).

If $m = 0$, then the convergence rates on the r.h.s. of (5) can be improved to the power-type estimate

$$\sup_x |\mathbf{E}f(O_h^{N_t^h/h}(x)) - \mathbf{E}f(X_{\sigma_t}(x))| \leq C(\beta)(1 + t + t^{-1})h^{\varkappa(\beta)} \|f\|_D, \tag{6}$$

with some $C(\beta)$ and $\varkappa(\beta) \in (0, 1)$. For instance, if $\beta \geq (1 - \beta)/\beta$, then

$$\varkappa(\beta) = \min \left\{ \frac{\omega}{\beta + 1}, \frac{\beta(1 - \beta)^2}{1 + \beta + \beta^2} \right\}.$$

It is well known that the subordinated limiting evolution described by the operators $\mathbf{E}f(X_{\sigma_t}(x)) = \mathbf{E}F_{\sigma_t} f(x)$ solves fractional in time differential equations. Namely, under the conditions of Theorem 1, the function $f_t(x) = \mathbf{E}(F_{\sigma_t} f)(x)$ satisfies the equation

$$D_{0+\star}^\beta f_t(x) = Lf_t(x), \quad f_0(x) = f(x), \tag{7}$$

where D_{0+*}^β is the Caputo-Djrbashyan derivative of order β acting on the variable t , and the operator L acts on the variable x . Thus Theorem 1 provides the rates of convergence for the CTRW approximations of the solutions to fractional equations.

The most basic examples are supplied by operators L that are diffusion operators

$$L_{dif}f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(G(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} G_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{8}$$

with $G(x)$ a positive $d \times d$ -matrix, or the generators of stable-like processes

$$L_{st}^\beta f(x) = \int_{S^{d-1}} |(s, \nabla f(x))|^\beta \mu(x, s) ds, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{9}$$

with $\beta \in (0, 2)$, $\mu(x, s)$ an even in s positive function on $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$ and ds Lebesgue measure on the unit sphere S^{d-1} . In particular, if $\mu(x, s) = 1$ (that is, the spectral measure $\mu(x, s) ds$ is uniform), then $L_{st}^\beta = \sigma |\Delta|^\beta$ (with σ a constant depending on d) becomes a standard fractional Laplacian.

In both cases, if the coefficients are sufficiently smooth, one can take the space $D = C_\infty(\mathbf{R}^d) \cap C^4(\mathbf{R}^d)$, for which the assumptions of Theorem 1 hold with $\varkappa_h = \epsilon_h = h$.

References

1. V. N. Kolokoltsov. The Rates of Convergence for Functional Limit Theorems with Stable Subordinators and for CTRW Approximations to Fractional Evolutions. *Fractal Fract.* 2023, 7, 335.
2. V. N. Kolokoltsov. Domains of Quasi Attraction: Why Stable Processes Are Observed in Reality? *Fractal Fract.* 2023, 7, 752.
3. V. N. Kolokoltsov. Fractional Equations for the Scaling Limits of L'evy Walks With Position Depending Jump Distributions. *MDPI Mathematics* 2023, 11, 2566.
4. V. Kolokoltsov, F. Lin, A. Mijatovic. Monte Carlo estimation of the solution of fractional partial differential equations. *Fractional Calculus Applied Analysis* 24:1 (2021), 278-306.

OPTIMAL DISTRIBUTED SUBSAMPLING FOR BIG DATA ANALYSIS

A. Mingyao

myai@math.pku.edu.cn

Subsampling methods are effective techniques to reduce computational burden and maintain statistical inference efficiency for big data. In this talk, we will review different subsampling techniques for different models from linear model, to generalized linear model, and to estimation equations. If the data volume is so large that nonuniform subsampling probabilities cannot be calculated all at once, subsampling with replacement is infeasible to implement. This problem is solved by using a new subsampling without replacement, called Poisson subsampling. To deal with the situation that the full data are stored in different blocks or at multiple locations, a distributed subsampling framework is developed, in which statistics are computed simultaneously on smaller partitions of the full data. Finally, the proposed strategies are illustrated and evaluated through numerical experiments on both simulated and real data sets.

Секция 6

Дискретная математика, математическая кибернетика и теория интеллектуальных систем

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА АНТИЦЕПЕЙ В НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Т.В. Андреева, Ю. Лю

t-v-andreeva@mail.ru, yongqingliu@yandex.com

УДК 519.7

В работе получена нижняя оценка числа антицепей в некоторых частично упорядоченных множествах. Получена асимптотика сумм граничных функционалов. Основная теорема является обобщением полученных ранее результатов.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, антицепь, асимптотика.

В работе обобщаются результаты, полученные в [1]. При $b, c \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $E_{b,c} = \{e_1^-, \dots, e_c^-, n_1, \dots, n_b, e_1^+, \dots, e_c^+\}$. Элементы e_i^- будем называть отрицательными, элементы n_j — нейтральными, элементы e_k^+ — положительными. Определим на множестве $E_{b,c}$ отношение порядка: $e_i^- < n_j < e_k^+$ при любых $i, j \in \{1, \dots, c\}$, $k \in \{1, \dots, b\}$. Элементы одного знака будем считать несравнимыми.

Положим

$$r(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta = e_i^-; \\ 1, & \beta = n_j; \\ 2, & \beta = e_k^+. \end{cases}$$

Через $E_{b,c}^n$ обозначим n -ю декартову степень множества $E_{b,c}$. Пусть $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in E_{b,c}^n$. Скажем, что $\tilde{\beta} \leq \tilde{\gamma}$, если $\beta_i < \gamma_i$ или $\beta_i = \gamma_i$ для всех i . Определим функцию ранга $r(\tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^n r(\beta_i)$. Таким образом, множество $E_{b,c}^n$ является ранжированным частично упорядоченным.

При $0 \leq m \leq 2n$ через $F_{b,c}(n, m) = \{\tilde{\beta} \in E_{b,c}^n : r(\tilde{\beta}) = m\}$ обозначим m -й слой множества $E_{b,c}^n$ и положим $N_{b,c}(n, m) = |F_{b,c}(n, m)|$.

Андреева Татьяна Владимировна, к.ф.-м.н., старший преподаватель, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Лю Юнцин, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Антицепь в частично упорядоченом множестве — это подмножество, в котором нет пары сравнимых наборов. Число антицепей в частично упорядоченном множестве S обозначим $\Psi(S)$. Слой, очевидно, является антицепью, поэтому имеет место тривиальная нижняя оценка числа антицепей

$$2^{N_{b,c}(n,n)} \leq \Psi(E_{b,c}^n).$$

В работе [2] описан метод граничных функционалов, с помощью которого можно уточнить эту нижнюю оценку, а для множеств специального вида получить асимптотику числа антицепей.

Обозначим $X_n = F_{b,c}(n, n-1) \cup F_{b,c}(n, n+1)$, $Z_n = F_{b,c}(n, n)$. Для $A \subseteq X_n$ положим

$$\partial A = \{\tilde{\delta} \in Z_n : \exists \tilde{\beta} \in A \quad \tilde{\beta} \leq \tilde{\delta}\},$$

тогда

$$\Psi(X_n \cup Z_n) = \sum_{A \subseteq X_n} 2^{|Z_n \setminus \partial A|} = 2^{N_{b,c}(n,n)} \sum_{A \subseteq X_n} 2^{-|\partial A|}.$$

В [2] определены суммы граничных функционалов

$$\hat{\mu}_2(n) = \alpha_1^{(1),1} - \frac{1}{2} \alpha_1^{(1),2} + \alpha_2^{(1),1} - \alpha_1^{(2),1},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1),\nu} &= \sum_{\tilde{\beta} \in X_n} 2^{-\nu|\partial\{\tilde{\beta}\}|}, \quad \nu = 1, 2, \\ \alpha_2^{(1),1} &= \sum_{\substack{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in F_{b,c}(n, n-1): \\ \partial\{\tilde{\beta}\} \cap \partial\{\tilde{\gamma}\} \neq \emptyset}} 2^{-|\partial\{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}|} + \sum_{\substack{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in F_{b,c}(n, n+1): \\ \partial\{\tilde{\beta}\} \cap \partial\{\tilde{\gamma}\} \neq \emptyset}} 2^{-|\partial\{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\}|}, \\ \alpha_1^{(2),1} &= \sum_{\substack{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in X_n: \\ \partial\{\tilde{\beta}\} \cap \partial\{\tilde{\gamma}\} \neq \emptyset}} 2^{-|\partial\{\tilde{\beta}\}| - |\partial\{\tilde{\gamma}\}|}. \end{aligned}$$

Из [2] (теорема 5.3) следует, что

$$\sum_{A \subseteq X_n} 2^{-|\partial A|} \geq e^{\hat{\mu}_2(n)}.$$

Вычисление мощности слоя частично упорядоченного множества, а также вычисление сумм граничных функционалов может быть сведено к вычислению коэффициентов некоторых производящих функций.

В [3], [4] рассмотрена производящая функция вида

$$H_a(z) = (a + z + az^2)^n = \sum_{r=0}^{2n} H_a^{(r)} z^r.$$

В [3] описан метод вычисления коэффициентов функции $H_1(z)$, вычислены коэффициенты $H_1^{(n)}$ и $H_1^{(n-1)}$. В [4] результат обобщен для $a > 0$. Можно показать, что

$$N_{b,c}(n, n) = b^n H_{c/b}^{(n)},$$

$$\alpha_1^{(1),\nu} = \frac{2b^n}{2^{\nu(cn+b/2)}} H_{a(b,c,\nu)}^{(n-1)}, \quad \text{где} \quad a(b, c, \nu) = \frac{2^{\nu c} c}{2^{\nu b/2} b}.$$

Основным результатом этой работы является

Теорема 1. *При любых b, c и достаточно больших n*

$$2^{N_{b,c}(n,n)} e^{\hat{\mu}_2(n)} \leq \Psi(E_{b,c}^n),$$

где

$$N_{b,c}(n, n) = (2c + b)^n \sqrt{\frac{2c + b}{4c\pi n}} \cdot \left(1 - \frac{4c - b}{16c} \cdot \frac{1}{n} + \frac{(4c - 3b)^2}{512c^2} \cdot \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right),$$

$$\hat{\mu}_2(n) = \left(\frac{2^{c+1}c + 2^{b/2}b}{2^{c+b/2}} \right)^n \sqrt{\frac{2^{c+1}c + 2^{b/2}b}{2^{c+b}c\pi n}} \cdot \left(1 - \frac{3(2^{c+2}c + 2^{b/2}b)}{2^{c+4}c} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \\ + \frac{b^2c^2n^2}{2^{3c+2b}} \left(\frac{2^{2c+1}c + 2^{bb}}{2^{2c+b}} \right)^{n-2} \sqrt{\frac{2^{2c+1}c + 2^{bb}}{c\pi n}} \cdot \left(1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Литература

1. Андреева Т.В. Развитие метода граничных функционалов и его приложение к комбинаторным задачам // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 2004 – Вып. 13 – С. 145–222.
2. Сапоженко А.А. Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 152 с.
3. Андреева Т.В., Семенов Ю.С. О мощностях слоёв некоторых частично упорядоченных множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162, кн. 3. — С. 269–284.
4. Андреева Т.В. Асимптотика значений коэффициентов некоторых производящих функций // Материалы XIV Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” имени академика О.Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2022 г.) / Под редакцией В.В. Кочергина. М.: ИПМ им. Келдыша, 2022. — С. 145–147.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СЖАТИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЛЬМОВ

Д.Н. Бабин, Д.В. Пархоменко, И.В. Кириллов

d.n.babin@mail.ru, dcdenis@yandex.ru, kirillov.iw@gmail.com

УДК 512.56

Основным алгоритмом сжатия фильмов является поиск одинаковых с предыдущими кадрами прямоугольников на новых кадрах фильма, и запоминание ссылок на них. Для сжатия фильмов без потерь такой алгоритм не подходит. Для точного сжатия фильмов был разработан следующий алгоритм.

Ключевые слова: кодек H266, контур, текстура, JPEG, MPEG.

Пусть t -тый кадр K_t фильма F — это матрица размера $m \times n$, элемент которой обозначим через

$$k_{i,j}(t), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Рассмотрим F , как множество векторов вида

$$f_{i,j} = (k_{i,j}(1), k_{i,j}(2), \dots, k_{i,j}(L)),$$

здесь L число кадров в фильме. Пусть

$$W = \{f_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Нас интересует случай, когда во множестве W есть повторяющиеся элементы. В этом случае вся информация о фильме находится в двух матрицах: в матрице оригинальных траекторий S размера $s \times L$, где s — число оригинальных траекторий, и в матрице ссылок ID размера $m \times n$ ссылок на эти траектории. Матрицу ID можно сжать методом Хаффмана, закодировав номера частых траекторий короткими кодами, можно применить для этого арифметическое кодирование. Самый простой вариант сохранить эти матрицы в текстовом виде и сжать их стандартным архиватором RAR, в котором метод, аналогичный методу Хаффмана, заложен.

Бабин Дмитрий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Пархоменко Денис Владимирович, к.ф.-м.н., инженер, тех-компания Хуавей (Москва, Россия)

Кириллов Иван Владимирович, инженер, тех-компания Хуавей (Москва, Россия)

Метод был опробован на базе изображений DAVIS, <https://davischallenge.org/>. В среднем, получилось более чем в два раза точно сжать эти фильмы, а отдельные из них удалось сжать в пять раз.

Литература

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов. — 6-е изд. — М.: Высшая школа, 2010. — 384 с.

АВТОМАТ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ПЕАНО – ГИЛЬБЕРТА А.В. Власов, С.Б. Гашков

УДК 519.6-7

Ключевые слова: кривая Пеано- Гильберта, функция Кантора, конечный автомат.

Рассмотрим конечный автомат с 4-значным входом и двумя двоичными выходами со следующей диаграммой Функции f_1 и f_2 указаны на рис. 2. Начальное состояние произвольное. На

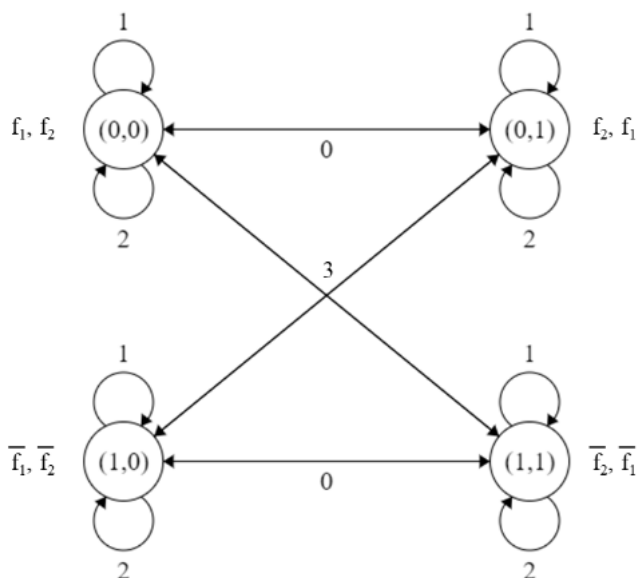


Рис. 1: Диаграмма автомата Гильберта.

каждом такте на вход подается символ из входного алфавита $\{0, 1, 2, 3\}$. На выходе появляется выходной символ $((\alpha, \beta) \in \{0, 1\}^2)$ и автомат переходит в новое состояние, на которое указывает стрелка диаграммы, помеченная поданным на вход символом и выходящая из вершины, изображающей предыдущее состояние (стрелки, направленные в обе стороны заменяют пары противоположно направленных стрелок). Выходные символы пишутся на ребрах диаграммы (они вычисляются по входному и текущему состоянию с помощью отображения $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}^2$,

Власов Андрей Владимирович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Гашков Сергей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| f_1 | 0 | 1 | 1 | 0 | . |
| f_2 | 0 | 0 | 1 | 1 | |

Рис. 2: Таблица отображения $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}^2$.

определяемого функциями $(g_1(x), g_2(x))$, $g_i : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}$, $i = 1, 2$; они выражаются через f_i так, как указано рядом с каждой вершиной; черта сверху — это отрицание: $\neg f(x) = 1 - f(x)$). После перехода в новое состояние выполняется следующий такт и т.д. Автомат определяет при любом n отображение $A^n \rightarrow B^n$, где A — входной алфавит, B — выходной алфавит. Если он работает бесконечно долго, то определяет отображение из множества «сверхслов» в алфавите $\{0, 1, 2, 3\}$ в множество пар сверхслов в алфавите $\{0, 1\}$.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----------|---|---|---|---|---|------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|-----------------|---|---|---|---|---|---|-----------|---|---|---|---|---|------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|-----------------|---|---|---|---|---|
| <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;">состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">вход</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">новое состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table> | состояние | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | вход | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | выход 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | новое состояние | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;">состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">вход</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">новое состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> </table> | состояние | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | вход | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | выход 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | выход 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | новое состояние | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| состояние | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| вход | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| новое состояние | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| состояние | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| вход | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| новое состояние | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Таблица 1: a=1

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----------|---|---|---|---|---|------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|-----------------|---|---|---|---|---|---|-----------|---|---|---|---|---|------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|-----------------|---|---|---|---|---|
| <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;">состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">вход</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">новое состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table> | состояние | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | вход | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | выход 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | новое состояние | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;">состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">вход</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">новое состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table> | состояние | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | вход | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | выход 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | новое состояние | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| состояние | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| вход | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| новое состояние | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| состояние | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| вход | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| новое состояние | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Таблица 2: a=2

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----------|---|---|---|---|---|------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|-----------------|---|---|---|---|---|---|-----------|---|---|---|---|---|------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|-----------------|---|---|---|---|---|
| <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;">состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">вход</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">новое состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> </table> | состояние | 0 | 3 | 2 | 3 | 2 | вход | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | выход 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | выход 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | новое состояние | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding-right: 10px;">состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">вход</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">выход 2</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding-right: 10px;">новое состояние</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table> | состояние | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | вход | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | выход 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | новое состояние | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 |
| состояние | 0 | 3 | 2 | 3 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| вход | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| новое состояние | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| состояние | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| вход | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| выход 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| новое состояние | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Таблица 3: a=3

Каждую точку из $[0; 1]$ записываем в виде бесконечной 4-ричной дроби $0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Точка может иметь две различные записи. Кривая лежит в квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$, каждая точка представляется парой чисел, их записываем в виде двоичных дробей.

Два сверхслова, задающие одно и то же число, назовем эквивалентными. Пары сверхслов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) эквивалентны, если x_1, y_1 эквивалентны и x_2, y_2 - эквивалентны.

Указанный автомат при любом начальном состоянии преобразует эквивалентные сверхслова в эквивалентные.

Для доказательства достаточно проверить, что он переводит сверхслова $a000\dots$ и $(a - 1)333\dots$ в эквивалентные сверхслова при $a \in \{1, 2, 3\}$. Результаты экспериментов с автоматом собраны в таблицах 1-3 (там начальное состояние $(0, 0)$).

Выходные функции выполняют биекцию между $\{0, 1, 2, 3\}$ и $\{0, 1\}^2$, поэтому автомат реализует биекцию между множеством сверхслов в этих алфавитах, а значит, реализует сюръективное отображение $P(x) = (P_0(x), P_1(x))$ из отрезка $[0; 1]$ в квадрат $[0; 1]^2$. Оно непрерывно, так как модуль непрерывности $\omega(P_i, x, \delta) = \max_{|h| \leq \delta} |f(x) - f(x + h)| \leq \sqrt{6\delta}$.

Можно проверить, что для любого $x = 0, 132^{a_1} 3132^{a_2} 31 \dots 132^{a_n} 3 \dots$ при условии $a_n \rightarrow \infty$, и $h = 2^{-2m-3}/3$, $m \rightarrow \infty$ верно, что $\omega(P_i, x, h)/\sqrt{h} \rightarrow \sqrt{6}$. В то же время $\min_{x \in [0, 1]} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \omega(P_i, x, \delta)/\sqrt{\delta} \geq 1/\sqrt{2}$.

Для любого x можно найти y , $0 < |y - x| < 2^{-n}$, такое, что $P_i(x) = P_i(y)$. Поэтому $P_i(x)$ нигде не дифференцируемы.

Для записи системы канонических уравнений автомата, заменим 4-значный вход на два дво-

ичных при помощи биекции $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1\}^2$. Получится следующая система уравнений (y и z — булевы значения двоичных входов, 4-значный вход вычисляется через них по формуле $2y + z$, состояние (q_2, q_1) кодируется битами q_1 и q_2):

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) \oplus y(t) \oplus \overline{z(t)} \\ q_2(t+1) = q_2(t) \oplus y(t)z(t) \\ f_1(t) = y(t) \oplus \overline{z}q_2(t) \oplus q_1(t)z(t) \\ f_2(t) = y(t) \oplus \overline{z}q_2(t) \oplus q_1(t)z(t) \\ q_1(1) = q_2(1) = 0. \end{cases}$$

Автомат реализует обратимое отображение бэровского пространства $\{0, 1, 2, 3\}^\infty$ в $\{0, 1\}^\infty \times \{0, 1\}^\infty$. Обратное отображение тоже можно задать конечным автоматом. Если у него входы f_1, f_2 , а выходы y, z , то его канонические уравнения можно получить из уравнений для исходного автомата, и система уравнений для «обратного» автомата принимает вид:

$$\begin{cases} z(t) = f_2(t) \oplus f_1(t) \\ y(t) = f_1(t)q_1(t) \oplus \overline{q_1(t)}f_2(t) \oplus q_2(t) \\ q_1(t+1) = (f_2(t) \oplus f_1(t))q_1(t) \oplus \overline{f_1(t)} \oplus q_1(t) \oplus q_2(t) \\ q_2(t+1) = q_2(t) + (f_1(t) \oplus q_2(t) \oplus \overline{q_1(t)})(f_2(t) \oplus f_1(t)) \\ q_1(1) = q_2(1) = 0. \end{cases}$$

Функции $P_i(x)$ рациональные числа переводят в рациональные, а иррациональные в иррациональные. Действительно, если на вход подана периодическая последовательность с периодом t , выходная последовательность будет периодической с периодом $t, 2t$ или $t/2$. Длина предпериода у входной последовательности такая же, как у выходной. При $t = 1$ автомат на выходе выдает последовательность с периодом 1, т.е. начиная с некоторого места константу. В частности, если $\text{ord}_p(4) = n$ то $P_i(q/p) = q'/(2^n - 1)$ или $P_i(q/p) = q'/(4^n - 1)$. Например, при $p = 2^n - 1$ или $P_i(q/p) = q'/p$, или $P_i(q/p) = q'/(p(p+2))$ Если же $p = 2^n + 1$, то $\text{ord}_p(4) = n$, и $P_i(q/p) = q'/(p-2)$ или $P_i(q/p) = q'/(p(p-2))$.

Автомат для стационарной почти всюду кривой Пеано

Рассмотрим автомат $\mathfrak{E}_{7,4}$ с 7-значным входом (из алфавита $\{0, 1, \dots, 6\}$) и 4-значным выходом (из $\{0, 1, \dots, 3\}$). Входы кодируем тройкой битов (x_2, x_1, x_0) так, что $X = 4x_2 + 2x_1 + x_0$. У автомата два состояния 0, 1, начальное 1, и формулы переходов $q(0) = 1, q(t+1) = q(t)(1 - x_0(t))$. Т.е. он находится в состоянии 1 пока на вход не получит нечетное число, на следующем такте $q(t+1) = 0$ и дальше состояние всегда нуль. Выходы Y кодируем в парами битов $(Y = (y_1, y_0))$, если $Y = 2y_1 + y_0$) и вычисляем на такте t по формулам

$$y_1(t) = (x_2(t) \oplus x_1(t)x_0(t))q(t), \quad y_0(t) = (x_1(t) \oplus x_0(t))q(t).$$

Соответствующая автоматной функции $\mathfrak{E}_{7,4}(x) = y = Y(1) \dots$ функция $C(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ переводит любую 7-ричную дробь $(0, x_1x_2 \dots)_7$ с четными цифрами в 4-ричную дробь $(0, y_1y_2 \dots)_4$, в которой $y_i = (x_i)/2$, в частности $C(0) = 0$, а $C(1) = C((0, 66 \dots)_7) = (0, 33 \dots)_4 = 1$. Если же в дроби встречается нечетная цифра впервые в позиции x_n , то $C((0, x_1 \dots x_n \dots)_7) = (0, y_1 \dots, y_n 00 \dots)_4$, где $y_i = (x_i)/2, i < n, y_n = (x_n + 1)/2$, т.е. на отрезках суммарной длины $\sum_{n=1}^\infty \frac{4^{n-1}3}{7^n} = \frac{3}{4} \frac{4}{7} \frac{1}{1-4/7} = 1$ функция $C(x)$ постоянна. При этом она неубывающая, растет на множестве меры нуль и удовлетворяет условию Гельдера $\omega(\delta) = O(\delta^{\log_7 4})$, и $C([0, 1]) = [0, 1]$, т.е. является 7-ричным вариантом «лестницы Кантора».

Пусть \mathfrak{F} — автомат из секции 1 (с 4 состояниями, 4-ричным входом и двумя двоичными выходами). Построим суперпозицию автоматов, подав выходы $\mathfrak{E}_{7,4}$ на входы \mathfrak{F} . Получим автомат с $2 \times 4 = 8$ состояниями, тремя двоичными входами и двумя двоичными выходами, реализующий автоматную функцию, отображающую 7-ричные сверхслова в упорядоченные пары двоичных сверхслов. Эта функция является суперпозицией автоматных функций, реализуемых автоматами $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$. Сопоставим ей отображение $CP : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$. Оно будет суперпозицией функции $C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и отображения $P : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ с модулем непрерывности $\omega(\delta) = O(\delta^{(\log_7 4)/2})$ и множеством значений $P(C[0, 1]) = P([0, 1]) = [0, 1]^2$, т.е. пеановским отображением. Почти всюду у него производная равна нулю.

Литература

1. Гашиков С.Б. О сложности приближенной реализации некоторых классических функций //Труды института математики СО РАН. 1994. Том 127. 14-33.
2. Besicovitch A.S., Schönberg J.J. On Jordan arcs and Lipschitz classes of functions//Acta Math. 1961. vol. 106. N 1-2. 113-136.
3. Щепин Е.В. О фрактальных кривых Пеано. 2004. Тр.МИАН, 247, 204-303.
4. Щепин Е.В., Мычка Е.Ю. О нижних оценках квадратно-линейного отношения плоских кривых Пеано// Матем.Заметки. 2021. Том 110. Вып. 2. 289-296.
5. Уоррен Г., мл. Алгоритмические трюки для программистов. М.: Изд. «Вильямс», 2004. Второе издание: М. — СПб.-К.: Изд. «Вильямс», 2014. English edition: Warren H.S., jr. Hackers delight. Addison Wesley, 2002.
6. Бауман К.Е. Коэффициент растяжения кривой Пеано–Гильберта // Матем.заметки. 2021. Том 110. Вып. 2. 289-296.
7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры из анализа. М.: Наука, 1970.

АВТОМАТНЫЕ СИСТЕМЫ

Н.Ю. Волков

volkov.nikolay.y@gmail.com

УДК 510.57

В работе предложено новое понятие — *автоматной системы*, обобщающее все известные в дискретной математике вычислительные модели. Показано, что каждая автоматная система является вычислительной системой и наоборот, каждая вычислительная система является автоматной системой.

Введено понятие *эквивалентности* для автоматных и вычислительных систем. Получен критерий эквивалентности автоматных систем.

Показано, что сложные автоматные системы, состоящие из конечного числа автоматов, сводятся к обычным автоматным системам (состоящим из одного автомата).

Ключевые слова: автоматные системы, вычислительные системы, парные функции, вычислимость, (сильная) эквивалентность автоматных и вычислительных систем.

В дискретной математике и теории алгоритмов известны ряд вычислителей, таких, как машины Тьюринга, счётчиковые машины, стековые машины, коллективы и независимые системы автоматов в лабиринтах и другие ([2,3,5]). Каждый из этих вычислителей представляет собой конечный автомат (или несколько автоматов) с внешней памятью. В данной работе все эти модели обобщаются при помощи понятия *автоматной системы*.

Определения

Автоматом называется набор $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0, Q_f)$, где A — входной, B — выходной алфавиты автомата, Q — множество его состояний, φ и ψ — функции переходов и выходов \mathcal{A} , соответственно, $Q_f \subset Q$ — множество его финальных состояний, $q_0 \in (Q \setminus Q_f)$ — начальное состояние \mathcal{A} . Допускается ситуация, когда множество финальных состояний автомата Q_f — пустое.

Пусть дано произвольное непустое множество X . Обозначим через $G(X)$ множество всех преобразований множества X , т.е. множество всех отображений множества X в себя. Пусть заданы всюду определённые функции $\beta : X \rightarrow A$ и $\gamma : B \rightarrow G(X)$. Функция β называется *функцией обзора* и позволяет автомату “видеть” элементы множества X , а функция γ называется *функцией действия* и позволяет автомату по каждому своему выходному символу $b(t)$ сделать определённое преобразование множества X .

Автоматной системой над множеством X называется $S = (\mathcal{A}, X, \beta, \gamma)$, где \mathcal{A} — автомат, X — множество параметров автоматной системы, β и γ — функции обзора и действия. Состояния автомата (элементы множества Q) называются также состояниями автоматной системы.

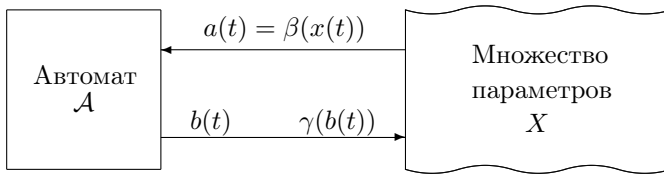
Автоматная система работает в дискретном (натуральном) времени. Значение текущего такта времени будем обозначать, как t , а значения входных и выходных символов автомата, состояния и параметра автоматной системы в момент времени t будем обозначать, как $a(t)$, $b(t)$, $q(t)$, $x(t)$, соответственно.

Пусть задано начальное значение параметра $x = x_0$. Функционирование автоматной системы задаётся следующими каноническими уравнениями:

$$\begin{aligned} q(1) &= q_0 \\ x(1) &= x_0 \\ a(t) &= \beta(x(t)), & t \in \mathbb{N} \\ b(t) &= \psi(q(t), a(t)), & t \in \mathbb{N}, \quad q \in (Q \setminus Q_f) \\ q(t+1) &= \varphi(q(t), a(t)), & t \in \mathbb{N}, \quad q \in (Q \setminus Q_f) \\ x(t+1) &= \gamma(b(t))(x(t)), & t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Если автоматная система не находится в финальном состоянии $q(t) \in Q_f$, она по значению параметра $x(t)$ и своему состоянию $q(t)$ меняет значение параметра на $x(t+1)$ и переходит в следующее состояние $q(t+1)$. Если же она находится в финальном состоянии, то она останавливается.

Схема работы автоматной системы изображена на рисунке.



При задании начального значения параметра x , автоматная система порождает траектории $(x(1), q(1)), (x(2), q(2)), \dots, (x(t), q(t)), \dots$.

В каждом своём нефинальном состоянии q , автоматная система S реализует (вычисляет за один такт) парную функцию (f_q, g_q) . Функция $f_q : X \rightarrow X$ описывает изменение параметра системы за один такт и называется результирующей. Функция $g_q : X \rightarrow \mathbb{N}$ описывает смену состояния автомата за один такт и называется переключательной. Они определяются формулами $f_{q(t)}(x(t)) = x(t+1)$ и $g_{q(t)}(x(t)) = \nu(q(t+1))$, где $\nu(q)$ — функция нумерации состояний автоматной системы.

Автоматную систему можно задать через её глобальную функцию переходов $\Phi(x(t), q(t)) = (x(t+1), q(t+1)) = (f_{q(t)}(x(t)), \nu^{-1}(g_{q(t)}(x(t))))$. Этот способ задания является традиционным для динамических систем ([4]), частным случаем которых являются автоматные системы.

Автоматная система вычисляет парную функцию, первая компонента которой по начальному значению параметра $x(1)$ вычисляет значение параметра x в такт остановки, а вторая компонента по начальному значению параметра x вычисляет номер состояния q в такт остановки. Если же автоматная система при данном значении $x = x(1)$, не останавливается, вычисляемая ей парная функция не определена на значении x .

Легко видеть, что при конечном множестве X автоматная система может быть смоделирована конечным автоматом. Содержательным случаем является случай бесконечного множества параметров X . В этом случае внешняя память существенно увеличивает вычислительные возможности автомата.

Рассмотрим две произвольные автоматные системы. Первую систему обозначим S , множество её параметров обозначим X , множество её состояний обозначим Q . Вторую автоматную систему обозначим S' , множество её параметров обозначим X' , множество её состояний обозначим Q' .

Системы S и S' называются эквивалентными (обозначаем $S \sim S'$), если:

- 1) существует биекция ξ_1 множества X на множество X' ;
- 2) существует биекция ξ_2 множества Q на множество Q' ;
- 3) для любого $x_0 \in X$, траектория системы S при начальном значении параметра x_0 и траектория системы S' при начальном значении параметра $\xi_1(x_0)$ эквивалентны. Здесь траектория

$(x(1), q(1)), \dots (x(t), q(t)), \dots$ системы S и траектория $(x'(1), q'(1)), \dots (x'(t), q'(t)), \dots$ системы S' называются эквивалентными, если $\forall t \in \mathbb{N}$, либо $(x'(t), q'(t)) = (\xi_1(x(t)), \xi_2(q(t)))$, либо обе эти траектории не имеют t -го элемента.

В случае, если $X = X'$ и $Q = Q'$, а биекции ξ_1 и ξ_2 есть тождественные функции, эквивалентные автоматные системы называются *сильно эквивалентными*. Совершенно аналогично, через эквивалентность (или совпадение) траекторий определяется эквивалентность (сильная) двух вычислительных систем, либо эквивалентность (сильная) автоматной системы вычислительной системе.

Утверждение 1. *Эквивалентные автоматные системы вычисляют слабо эквивалентные парные функции.*

Для каждого состояния q автоматной системы V определим множество $M_q = \{x \in X \mid \exists x_0 \in X, \text{ такое, что траектория } V, \text{ при начальном значении параметра } x_0 \text{ содержит элемент } (x, q)\}$. Множество M_q называется *множеством достижимости состояния* q . Состояния q , для которых $M_q \neq \emptyset$ — не пусто, называются *x -достижимыми* состояниями системы V . Те же состояния, для которых $M_q = \emptyset$, называются *x -недостижимыми*.

Пусть $n \geq 2$. *Сложной автоматной системой над множеством X* называется система $S = (A_1, \dots, A_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n, X)$, где каждый автомат A_i ($1 \leq i \leq n$) имеет свою функцию обзора $\beta_i : X \rightarrow A_i$ и свою функцию действия: $\gamma_i : B_i \rightarrow G(X)$. Здесь A_i — входной, а B_i — выходной алфавиты автомата A_i .

Фазовым пространством сложной автоматной системы является уже не X , как для обычных автоматных систем, а его булеан 2^X .

Вначале задаётся одно начальное значение параметра x . Далее, каждый автомат сложной автоматной системы меняет своё состояние и по-своему преобразует параметр x . В следующий такт система характеризуется множеством параметров из X , в которые её перевели разные автоматы системы. Т.к. далее каждый автомат A_j будет работать с целым множеством параметров из X , в дальнейшем его состояние будет множеством состояний Q_j .

Пусть в i -й такт система характеризуется подмножеством её параметров X_i . Тогда подмножество параметров X_{i+1} , характеризующее систему в такт $i+1$, вычисляется следующим образом. Пусть автомат A_j , находясь в состоянии $q_j^k \in Q_j$ в такт i переводит $x \in X_i$ в x_j^k . Тогда X_{i+1} есть объединение всех таких x_j^k по всем $x \in X_i$, по всем $q_j^k \in Q_j$ и по всем j в диапазоне от 1 до n . Остановка сложной автоматной системы происходит при остановке всех входящих в неё автоматов.

Основные результаты

Множество всех автоматных систем над множеством параметров X будем обозначать, как $\mathbb{S}(X)$.

Теорема 1. *Если множества параметров X и X' — равномощны, то*

$$\forall S \in \mathbb{S}(X) \exists S' \in \mathbb{S}(X') : S \sim S'.$$

Теорема 2. *Для любой автоматной системы S существует сильно эквивалентная ей вычислительная система V (над тем же множеством X) и наоборот, для любой вычислительной системы V существует сильно эквивалентная ей автоматная система S (над тем же множеством X).*

Таким образом, автоматная система и вычислительная система — это два разных языка для описания одной и той же сущности.

Пусть даны автоматная система $S = (A, X, \beta, \gamma)$ с множеством состояний Q и автоматная система $S' = (A', X', \beta', \gamma')$ с множеством состояний Q' .

Теорема 3. (Критерий эквивалентности автоматных систем) *$S \sim S'$ тогда и только тогда, когда выполнены три условия:*

- 1) *Существует биекция ξ_1 множества X на множество X' ;*
- 2) *Существует биекция ξ_2 множества Q на множество Q' ;*
- 3) *Для любого x -достижимого состояния q системы S , верно:*

3.1) если q — финальное, то и соответствующее ему состояние $\xi_2(q)$ системы S' — финальное,

3.2) если q — нефинальное, то парная функция (f_q, g_q) , реализуемая S в состоянии q и парная функция $(f_{q'}, g_{q'})$, реализуемая S' в состоянии $q' = \xi_2(q)$ — слабо M_q -эквивалентны, т.е. $(f_q, g_q) \approx_{M_q} (f_{q'}, g_{q'})$.

Здесь ξ_1 и ξ_2 — биекции из п. 1), 2) и слабая M_q -эквивалентность (f_q, g_q) и $(f_{q'}, g_{q'})$ имеет место относительно биекции ξ_1 между X и X' .

Из этого критерия следует (в переложении на язык вычислительных систем), что реально используемые части графов эквивалентных вычислительных систем — изоморфны. Т.е. соответствуют друг другу x -достижимые состояния и рёбра, по которым хотя бы при одном начальном значении параметра осуществляется хотя бы один переход. В целом же графы эквивалентных вычислительных систем V и V' могут быть не изоморфны за счёт x -недостижимых состояний и неиспользуемых рёбер.

Теорема 4. Для любой сложной автоматной системы S существует автоматная система S' (из одного автомата), сильно эквивалентная ей.

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. “Введение в теорию автоматов”, Наука, 1985.
2. Н.К. Верещагин, А. Шень. Вычислимые функции // Москва, МЦНМО 2002.
3. Джонс Хопкрофт, Раджив Мотвани, Дженеффри Ульям. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений // Москва, “Вильямс”, 2008.
4. А.Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем. // Москва, “Факториал” 1999.
5. Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш. Уичумлич “Коллективы автоматов в лабиринтах”, Дискретная математика, т. 15 вып. 3, 2003.

О ПОРОЖДЕНИИ N -КВАЗИГРУПП С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ

А.В. Галатенко, В.А. Носов, А.Е. Панкратьев, К.Д. Царегородцев
agalat@msu.ru, vnosov40@mail.ru, apankrat@intsys.msu.ru, kirill94_12@mail.ru

УДК 512.548.7

В докладе описывается порождение n -квазигрупп с помощью правильных семейств функций и приводятся оценки мощности порождаемых множеств.

Ключевые слова: n -квазигруппа, правильное семейство функций.

Введение

В последние годы возник значительный интерес к построению различных квазигрупповых примитивов на основе квазигрупп (см., например, обзор [1]). Появляются работы, связанные с использованием структур большей арности, прежде всего, 3-квазигрупп, как описывающие конкретные алгоритмы (см., например, [2]), так и вводящие новые перспективные преобразования (в качестве примера приведем перенос e - и d -преобразований строк, предложенных в работе [3], на случай n -квазигрупп [4]). Отметим, что в ряде криптоалгоритмов задействованы структуры большого размера (например, квазигруппы порядка 2^{64} в хэш-функции NaSHA [5]), в результате чего табличное задание становится невозможным; как следствие, становится актуальной задача

Галатенко Алексей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Носов Валентин Александрович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Панкратьев Антон Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Царегородцев Кирилл Денисович, специалист-исследователь, АО «НПК «Криптонит» (Москва, Россия)

эффективного по памяти порождения больших семейств n -квазигрупп. В докладе описывается возможный подход к решению этой проблемы, основанный на правильных семействах функций, а также приводятся оценки мощности порождаемых множеств.

Основные определения

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Конечной n -квазигруппой называется пара (Q, f) , где Q — конечное множество, а $f: Q^n \rightarrow Q$ является биекцией при произвольной фиксации любых $(n-1)$ переменных.

В дальнейшем все структуры будут предполагаться конечными, поэтому слово «конечный» будет опускаться.

Введем ряд обозначений. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Множество всех функций из E_k^m в E_k обозначим через P_k^m . Предположим, что $|Q| = k^m$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что $Q = E_k^m$, а операция f является вектор-функцией (f_1, \dots, f_m) , где $f_i \in P_k^{2^m}$, $i = 1, \dots, m$.

Определение 2. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Семейство $G = (g_1, \dots, g_m)$, $g_i \in P_k^m$, $i = 1, \dots, m$, называется правильным, если для любой пары $s = (s_1, \dots, s_m)$, $t = (t_1, \dots, t_m) \in E_k^m$, $s \neq t$, найдется индекс i , $1 \leq i \leq m$, такой что $s_i \neq t_i$, но $g_i(s) = g_i(t)$.

Значительное число примеров правильных семейств приведено в работе [6].

Порождение n -квазигрупп с помощью правильных семейств

Следующее утверждение является обобщением конструкции из работы [7].

Теорема 1 ([8]). Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 2$, $(E_k, h_1), \dots, (E_k, h_m)$ — $(n+1)$ -квазигруппы,

$$\begin{aligned} f_1 &= h_1(x_1^1, \dots, x_1^n, g_1(\pi_1(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, \pi_m(x_1^1, \dots, x_1^n))) \\ f_2 &= h_2(x_2^1, \dots, x_2^n, g_2(\pi_1(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, \pi_m(x_1^1, \dots, x_1^n))) \\ &\vdots \\ f_m &= h_m(x_m^1, \dots, x_m^n, g_m(\pi_1(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, \pi_m(x_1^1, \dots, x_1^n))) \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения (1) задают n -квазигрупповую операцию на множестве E_k^m для произвольных функций $\pi_1, \dots, \pi_m \in P_k^n$ тогда и только тогда, когда семейство (g_1, \dots, g_m) является правильным.

Для практических приложений наиболее важен случай $k = 2$. В этом случае известно, что число правильных семейств порядка m оценивается снизу величиной $m^{A \cdot 2^m}$, где A — некоторая положительная константа [9], то есть число квазигрупп, порождаемых правильными семействами булевых функций, достаточно велико. С другой стороны, доля n -квазигрупп, порождаемых булевыми правильными семействами, экспоненциально мала.

Теорема 2 ([8]). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда доля n -квазигрупп порядка 2^m , порождаемых правильными семействами булевых функций размера m , оценивается сверху величиной $2^{-2^{(m-1)^n(1+o(1))}}$ при $m \rightarrow \infty$.

Это утверждение является обоснованием актуальности задачи исследования правильных семейств функций в k -значных логиках при $k > 2$.

Следующая теорема устанавливает нижнюю оценку числа n -квазигрупп, заданных соотношениями (1) при фиксированных функциях h_i и фиксированном правильном семействе за счет вариации внутренних функций π_j .

Теорема 3 ([8]). Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 2$, $g_1, \dots, g_m: E_k^m \rightarrow E_k$, (g_1, \dots, g_m) — правильное семейство, мощность образа которого равна M . Тогда конструкция (1) порождает не менее M^{k^n} попарно различных n -квазигрупп. При этом $M \leq k^{m-1}$.

Мощность образа некоторых правильных семейств

Утверждение теоремы 3 означает, что для практических приложений наиболее интересны правильные семейства, обладающие большой мощностью образа. Рассмотрим два примера таких семейств для случая $k = 2$. Заметим, в обоих случаях используемые формулы оказываются весьма компактными.

Пример 1. Пусть

$$f_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{i-1} \oplus \bigoplus_{1 \leq s < t \leq m, s, t \neq i} x_s x_t, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где \oplus означает сложение по модулю 2. Правильность семейства установлена в [10].

Теорема 4 ([8]). Мощность образа семейства (2) равна 2^{m-1} .

Пример 2. Пусть

$$f_i = \bar{x}_{i+1} \cdot x_{i+2}, \quad (3)$$

где $n \geq 3$ нечетно, а индексы «закольцовываются» естественным образом. Правильность семейства установлена в [11].

Теорема 5 ([8]). Мощность образа семейства (3) равна L_m , где L_m — число Люка с индексом m .

Известно, что L_m выражается через числа Фибоначчи с помощью соотношения $L_m = Fib_{m-1} + Fib_{m+1}$. Как следствие, справедливо равенство $L_m = \lfloor \varphi^m \rfloor$, где φ — пропорция золотого сечения.

Заключение

В докладе представлена конструкция, позволяющая эффективно порождать большие семейства n -квазигрупп высокого порядка, и приведены оценки на мощность порождаемых множеств. Направления дальнейших исследований включают в себя обобщение оценки из теоремы 2 на случай произвольного k , а также поиск новых правильных семейств, обладающих большой мощностью образа.

Литература

1. Chauhan D., Gupta I., Verma R. Quasigroups and their applications in cryptography // Cryptologia, **45:3** (2021), 227–265.
2. Dömösi P., Horváth G. A novel cryptosystem based on abstract automata and Latin cubes // Stud. Sci. Math. Hung., **52:2** (2015), 221–232.
3. Markovski S., Gligoroski D., Bakeva V. Quasigroup String Processing: Part 1 // Proc. of Maced. Acad. of Sci. and Arts for Math. and Tech. Sci., **XX** (1999), 155–162.
4. Шучкин Н. А. Преобразования слов с помощью n -квазигрупповых операций // Материалы XXI Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», Тула, 2022, 119–122.
5. Markovski S., Mileva A. NaSHA — family of cryptographic hash functions // The First SHA-3 Candidate Conference, Leuven, 2009.
6. Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E., Tsaregorodtsev K. D. Proper families of functions and their applications // Матем. вопр. криптогр., **14:2** (2023), 43–58.
7. Плакшина И. А. Построение параметрического семейства многомерных латинских квадратов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения **18:2** (2014), 323–329.
8. Галатенко А. В., Носов В. А., Панкратьев А. Е., Царегородцев К. Д. О порождении n -квазигрупп с помощью правильных семейств функций // Дискрет. матем., **35:1** (2023), 35–53.
9. Царегородцев К. Д. О взаимно однозначном соответствии между правильными семействами булевых функций и рёберными ориентациями булевых кубов // ПДМ, **48** (2020), 16–21.
10. Царегородцев К. Д. О свойствах правильных семейств булевых функций // Дискрет. матем., **33:1** (2021), 91–102.
11. Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E. Generation of multivariate quadratic quasigroups by proper families of Boolean functions // J. Math. Sci., **262** (2022), 630–641.

ЛИНЕЙНЫЙ ПО ПОРЯДКУ АЛГОРИТМ УМНОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ДВУМЕРНОГО КЛЕТОЧНОГО АВТОМАТА С ЛОКАТОРАМИ

Э.Э. Гасанов

el_gasanol@mail.ru

УДК 519.713

Для умножения n -разрядных натуральных чисел предложен двумерный клеточный автомат с локаторами, который решает эту задачу за время $O(n)$.

Ключевые слова: умножение натуральных чисел, клеточные автоматы с локаторами.

Пусть a и b два натуральных числа, двоичная запись которых содержит по порядку n разрядов. Наиболее известный и быстрый алгоритм умножения таких чисел был предложен А.А.Карацубой [1], и он имеет сложность $O(n^{\log_2 3})$. В данной работе предлагается алгоритм решения этой задачи с помощью клеточных автоматов с локаторами за время $O(n)$.

Понятие клеточного автомата с локаторами введено в работе Э. Э. Гасанова [2]. В работе Г. В. Калачева [3] были выявлены некоторые неточности, приведенного в [2] определения. Точное формальное определение клеточного автомата с локаторами можно найти в работах Д. Э. Ибрагимовой [4] и Э. Э. Гасанова [5]. Здесь мы не будем приводить это определение, а дадим неформальное описание двумерного клеточного автомата с локаторами, с помощью которого задачу умножения чисел можно решить за линейное время.

Расположим в каждой клетке плоской решетки \mathbb{Z}^2 один и тот же автомат с восьмью локаторами. Понятие локатора определим чуть позже, сейчас важно, что каждый локатор в каждый момент принимает некоторое значение. Автомат имеет функцию перехода, которая по состоянию соседей автомата и по значениям локаторов в текущий момент определяет состояние автомата в следующий момент. Кроме того, у автомата есть функция вещания, которая по состояниям соседей автомата и по значениям локаторов вычисляет сигнал вещания, который передается в эфир. Сигналы вещания образуют конечную аддитивную коммутативную полугруппу, а эфир представляет собой потенциально бесконечный сумматор сигналов элементарных автоматов, где в качестве оператора суммы выступает определяющая операция данной полугруппы. Каждый локатор представляет собой некоторый телесный угол с вершиной в позиции автомата, а значением локатора в текущий момент является сумма сигналов вещания всех автоматов, попадающих в этот телесный угол. Отметим, что в область суммирования локатора не входит вершина телесного угла. т.е. мы сигнал вещания, посылаемый данным автоматом, не включаем в сумму. В нашем случае все 8 локаторов будут лучами, направления которых изображены на рисунке 1.

Определим задачу произведения чисел a и b для клеточного автомата с локаторами. В начальной конфигурации только 3 точки находятся не в состоянии покоя, а именно точка с координатами $(0, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать “начало координат”, точка с координатами $(a, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать “первый сомножитель”, а точка с координатами $(b, 0)$ находится в состоянии, которое можно назвать “второй сомножитель”. Клеточный автомат решает задачу умножения чисел, если в финальной конфигурации точка с координатами $(a \cdot b, 0)$ перейдет в состояние “результат умножения”.

Перед тем как переходить к описанию решения задачи умножения приведем решение двух вспомогательных задач.

Первая — это задача сложения чисел. В начальной конфигурации (изображена на рисунке 2, $t = 0$) три точки не в состоянии покоя: B — начало координат, E — суммируемые числа (слагаемые). В момент $t = 1$ слагаемые подают сигнал в эфир. В момент $t = 2$ слагаемое, которое услышит этот сигнал в правый локатор ($R2$), поймет, что оно левое, а второе слагаемое понимает, что оно правое. Левое слагаемое и начало координат подают сигнал в эфир. В момент $t = 3$ автомат, который услышит сигналы с локаторов $R3$ и $D2$, поймет, что он является проекцией левого слагаемого на ось ординат. Этот автомат и правое слагаемое подают сигнал в эфир. В момент $t = 4$ автомат, который услышит сигналы с локаторов $R4$ и $D3$, поймет, что он находится над правым слагаемым на расстоянии левого слагаемого. Этот автомат и правое слагаемое

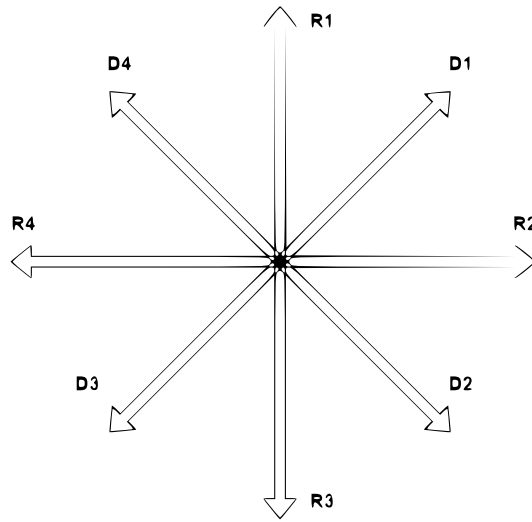


Рис. 1: Направления и названия локаторов

подают сигнал в эфир. В момент $t = 5$ автомат, который услышит сигналы с локаторов $R4$ и $D4$, поймет, что он является результатом сложения. Тем самым задача сложения двух натуральных чисел может быть решена двумерным клеточным автоматом с 8 локаторами за 5 тактов. Строгое описание этого клеточного автомата с локаторами можно найти в [5].

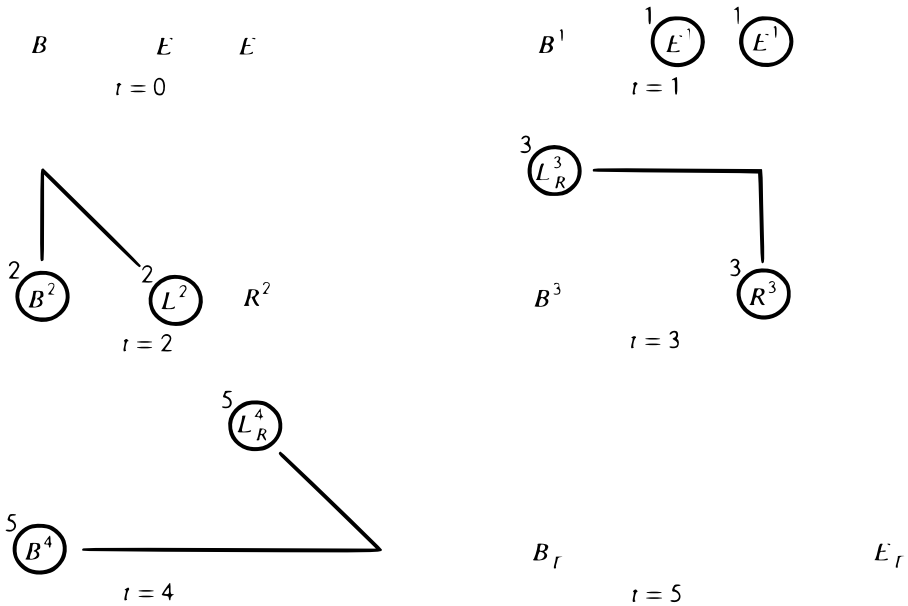


Рис. 2: Сложение чисел.

Вторая задача — это задача нахождения двоичного представления числа. В начальной конфигурации только два автомата находятся не в состоянии покоя: автомат с координатами $(0, 0)$ в состоянии B — начало координат, автомат с координатами $(a, 0)$ в состоянии E — число. Сигналы вещания будут двухкомпонентными, по первой компоненте полугрупповой операцией будет максимум, а по второй — сложение по модулю 2. В начальный момент начало координат и число подают сигнал $(1, 0)$ в эфир. Все автоматы, которые в следующий такт услышат эти сигналы в левый и правый локаторы, поймут, что они находятся между B и E и перейдут в состояние P . E тоже перейдет в состояние P . В следующий такт все автоматы в состоянии P подадут сигнал $(1, 1)$ в эфир. В результате на следующий такт начало координат получит в свой правый локатор

число 0 по второй компоненте, если число a четное, и 1 — если нечетное, т.е. начало координат узнает младший бит двоичного представления числа a . Далее каждый автомат в состоянии P , который по второй компоненте на правый локатор получит число 0, перейдет в состояние покоя. Тем самым число автоматов в состоянии P проредится вдвое. Далее автоматы в состоянии P опять подадут сигнал (1, 1) в эфир. И начало координат узнает вторую компоненту двоичного представления числа a . Процедура прекратится, когда автоматов в состоянии P не останется, т.е. начало координат получит сигнал 0 по первой компоненте на правый локатор. Строгое описание этого алгоритма можно найти в [6].

Теперь можем перейти к описанию алгоритма решения задачи умножения чисел a и b . Пусть $a < b$ и $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ — двоичное представление числа a , т.е. $a = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} a_i$. Тогда $ab = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} b a_i$. Клеточный автомат, который будет решать задачу умножения чисел a и b , будет одновременно выполнять 3 задачи. Чтобы выполнять эти три задачи параллельно состояние и сигналы вещания автомата будут многокомпонентными, и будут разделены на 3 группы.

С помощью первой группы компонент будет решаться задача вычисления чисел $2^{i-1}b$, $i = 2, 3, \dots, n$. Делать это будем с помощью алгоритма сложения чисел, описанного выше, т.е. сначала сложим два числа b за пять тактов, затем сложим два числа $2b$ за пять тактов и т.д., т.е. каждые пять тактов мы сможем получать числа $2^{i-1}b$, $i = 2, 3, \dots, n$.

С помощью второй группы компонент автомат будет находить двоичное представление числа a , т.е. будет получать числа a_1, a_2, \dots, a_n . Делать это будем как описано выше. Но будем притормаживать получение чисел a_2, a_3, \dots, a_n так, чтобы они появлялись одновременно с числами $2^1b, 2^2b, \dots, 2^{n-1}b$.

С помощью третьей группы компонент автомат будет накапливать суммы $S_i = \sum_{j=1}^i 2^{j-1} b a_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $S_0 = 0$. Т.е. если вычисленное число a_i равно единице, то к числу S_{i-1} добавим вычисленное число $2^{i-1}b$. Это тоже можно сделать за 5 тактов, как было описано выше.

Тем самым описанный клеточный автомат с локаторами может за $5n$ тактов вычислить число ab .

Литература

1. А. Карацуба, Ю. Офман “Умножение многозначных чисел на автоматах”, Доклады АН СССР, **145**:2 (1962), 293–294.
2. Э. Э. Гасанов “Клеточные автоматы с локаторами”, Интеллектуальные системы. Теория и приложения, **24**:2 (2020), 120–133.
3. Г. В. Калачев “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, Интеллектуальные системы. Теория и приложения, **24**:4 (2020), 47–56.
4. Д. Э. Ибрагимова “Сложение векторов на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, Интеллектуальные системы. Теория и приложения, **26**:4 (2022), 134–162.
5. Э. Э. Гасанов “Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью”, Математические вопросы кибернетики, **21** (2023), 5–51.
6. Д. И. Васильев “Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами”, Интеллектуальные системы. Теория и приложения, **24**:3 (2020), 99–119.

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ПОЧТИ- R -ДЕРЕВЬЕВ АВТОМАТАМИ

А.А. Демидова

anna.dem98@mail.ru

УДК 519.713, 519.17

В данной работе рассматриваются автоматы, осуществляющие проверку связных плоских простых неориентированных графов на выполнение свойства быть почти- r -деревом.

Ключевые слова: автоматы, графы, почти- r -деревья.

Подробный анализ области теории автоматов, связанной с обходом лабиринтов, представлен в работе [1], а автоматы, осуществляющие обход графов, рассматриваются в [2]. Отличие между обходом графов и лабиринтов состоит в том, что в последних в распоряжении автомата есть компас, предоставляющий дополнительную информацию об окружающей среде [3].

Функционирование автоматов с красками в лабиринтах и на графах ранее исследовалось в работах [4 – 6], а в работах [7 – 9] были представлены алгоритмы для определения автоматом того, является ли произвольный связный плоский простой неориентированный граф деревом, псевдодеревом или графом-кактусом (графом, в котором циклы не могут иметь общих рёбер).

Будем рассматривать связные плоские простые неориентированные графы.

Цикломатическое число графа — минимальное число рёбер, удаление которых разрушает все циклы графа, превращая его в дерево или лес. Это число $r = m - n + c$, где m — число рёбер, n — число вершин, а c — число компонент связности. Граф с цикломатическим числом r также называется почти- r -деревом.

Допустим, что было удалено некоторое ребро, принадлежащее циклу. Число вершин осталось прежним, и всё ещё должна работать формула Эйлера: $n - m + f = 2$. Значит, с удалением этого ребра число граней должно уменьшиться на 1.

Количество граней в графе, являющемся почти- r -деревом, равно $r + 1$.

Пусть автомат с красками осуществляет обход графа следующим образом. До начала обхода все рёбра графа окрашены в серый цвет. Обход по умолчанию осуществляется по правилу левой руки. Автомат обладает частичной информацией о вершинах, в которые он попадает. При проходе по очередному серому ребру графа автомат перекрашивает его в чёрный цвет. Автомат устанавливает наличие цикла в графе в том случае, если в текущий момент времени некоторое ребро было покрашено в чёрный цвет, и при этом вершине, в которой находится автомат, инцидентно по крайней мере ещё одно чёрное ребро [7].

Любой цикл делит плоскость на две грани, и до его обнаружения путь автомата затрагивает только одну из них. Подграфы, имеющие общие вершины с рассматриваемым циклом и лежащие в той грани, которую автомат обходил до установления его наличия, будем называть левыми ветвлениями, а оставшиеся подграфы — правыми ветвлениями.

Для определения того, является ли граф почти- r -деревом, автомат будет действовать следующим образом. При обнаружении очередного цикла автомат должен будет удалить из него некоторое ребро (в силу того, что выбор ребра не влияет на получаемое число граней — то ребро цикла, которое было перекрашено в чёрный цвет последним). Для удаления рёбер автомат будет использовать третью краску — белую.

Пусть автомат устанавливает наличие цикла при переходе из вершины j в вершину i (см. Рисунок 1). После удаления ребра, соединяющего эти вершины, автомат окажется в вершине j и начнёт обход подграфов, которые ранее являлись правыми ветвлениями разомкнутого цикла, по правилу левой руки в направлении, совпадающем с первоначальным.

Проверка выполнения свойства графа быть почти- r -деревом будет выполняться следующим образом. После удаления r рёбер автомат вернётся к алгоритму для деревьев [7], и условие окончания работы алгоритма будет тем же: автомат остановится либо когда во второй раз зайдёт в первый посещённый лист, либо когда обнаружит ещё хотя бы один цикл.

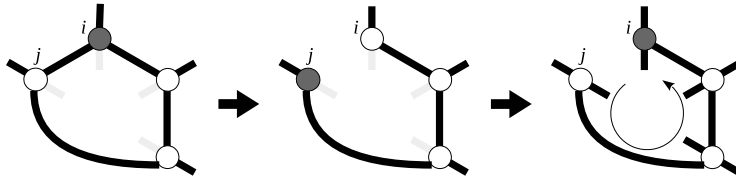


Рис. 1: Действия автомата после обнаружения цикла

Литература

1. Кудрявцев В. Б., Килибарда Г., Ушчумлиш Ш. Системы автоматов в лабиринтах // Интеллектуальные системы. — 2006. — Т. 10. — №. 1–4. — С. 449–562.
2. Okhotin A. Graph-Walking automata: from whence they come, and whither they are bound // Implementation and Application of Automata: 24th International Conference, CIAA 2019, Košice, Slovakia, July 22–25, 2019, Proceedings 24. — Springer International Publishing, 2019. — P. 10–29.
3. Blum M., Kozen D. On the power of the compass (or, why mazes are easier to search than graphs) // 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1978). — IEEE Computer Society, 1978. — P. 132–142.
5. Насыров А. З. Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки // Дискретная математика. — 1997. — Т. 9. — №. 1. — С. 123–133.
6. Голованов А. В. Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими след в вершинах лабиринта // Интеллектуальные системы. — 1998. — Т. 3. — №. 3–4. — С. 193–212.
7. Голубев Д. В. Об обходе графов автоматами с одной нестираемой краской // Интеллектуальные системы. — 1999. — Т. 4. — №. 1–2. — С. 243–272.
8. Демидова А. А. Автоматный анализ свойств графа быть деревом и псевдодеревом // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25. — №. 2. — С. 111–127.
9. Демидова А. А. Оценки времени установления автоматом свойств графа быть деревом и псевдодеревом // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25. — №. 4. — С. 113–116.
10. Демидова А. А. Анализ графов-кактусов с использованием автоматов: свойства и время распознавания // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2023. — Т. 27. — №. 2. — С. 111–124.

О КЛАССИФИКАЦИИ АВТОМАТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЕДИНИЧНЫХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ РЕБЕРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

П.С. Дергач

dergachpes@mail.ru

УДК 519.713.4

Данный текст является тезисами к Международной научной конференции «Математика в созвездии наук». Показано, что для любого регулярного языка, заданного диаграммой Мура в двухэлементном алфавите и обладающего свойством однозначности относительно некоторого алфавитного кодирования, всегда существует единичная реберная неисправность, при которой данное свойство теряется (в случае, когда это в принципе возможно для схемы кодирования).

Ключевые слова: конечный автомат, алфавитное кодирование, единичная неисправность.

Определения и результаты

Понятия конечного автомата, регулярного языка, диаграммы Мура и алфавитного кодирования считаются общеизвестными и здесь не приводятся. Желающие могут с ними ознакомиться в работах [1-2].

Пусть A – двухэлементный алфавит. Всюду далее будем считать, что $A = E_2 = \{0, 1\}$.

Конечную непустую последовательность слов в алфавите A называем *словом*. Слово α называем *измельчением* слова β , если $\beta = \alpha^n$ для некоторого натурального n . Пару слов в алфавите A называем *соизмеримыми*, если у них есть общее измельчение.

Множество схем алфавитного кодирования с входным и выходным алфавитами E_2 , у которых элементарные коды несоизмеримы, обозначаем через F_2 .

Для диаграммы Мура с входным и выходным алфавитами E_2 называем *единичной реберной неисправностью* искажение нового состояния одной из стрелок диаграммы.

Говорим, что *алфавитное кодирование обладает свойством однозначности на регулярном языке* $P \subseteq A^*$, если для любой пары различных слов в этом языке их коды различны. Также в этом случае говорим, что P обладает свойством однозначности алфавитного кодирования на f .

Для произвольной диаграммы Мура с входным и выходным алфавитом E_2 , задающей регулярный язык P , и произвольного алфавитного кодирования f , однозначного на P , говорим, что *диаграмма однозначна на f* . Также говорим, что *диаграмма слабо реберно устойчива на f* , если найдется единичная неисправность выхода диаграммы такая, что новый регулярный язык уже не обладает свойством однозначности на f .

Теорема 1. *Любая диаграмма Мура с входным и выходным алфавитом E_2 , однозначная на $f \in F_2$, является слабо реберно устойчивой.*

Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Если алфавитное кодирование из E_2 в E_2 неоднозначно на некотором $P \subseteq E_2^*$, то $f \in F_2$.*

Доказательство можно найти, например, в [3].

Лемма 2. *Если в диаграмме Мура есть достижимое из начальной вершины состояние, через которое проходит пара циклов с несоизмеримыми входными значениями слов и из этой вершины есть путь с выходным значением 1, то диаграмма не однозначна на любой схеме $f \in F_2$.*

Доказательство можно найти в [3] с той лишь поправкой, что здесь важно еще и условие достижимости из общего пересечения циклов какого-нибудь ребра с единичным выходом, а в [3] это условие выполнено изначально.

Доказательство теоремы

Ввиду ограниченного объема тезисов приводим здесь лишь краткую схему доказательства.

Лемма 1 гарантирует, что случай $f \in F_2$ является общим, так как при других схемах никакая неисправность не может изменить свойство однозначности.

На начальное состояние диаграммы подается последовательность из 0. В какой-то момент состояния начнут повторяться и произойдет заикливание с вершиной в некотором состоянии – обозначим его через q . Разберем сначала основной случай, когда в этом цикле есть хотя бы два ребра, то есть это не петля. Тогда из любой вершины этого цикла можно рассмотреть единичное (по входу) ребро и перенаправить его в начальное состояние. Изначально такие ребра туда идти не могут, так как иначе мы бы попали в условие леммы 2 и получили бы противоречие с однозначностью. Теперь нам осталось выбрать такое ребро, изменение которого не нарушит достижимость единичного по выходу ребра (такое изначально конечно же есть) из стартового состояния. Для этого достаточно взять то ребро, которое идет раньше в простом пути. В этом случае Теорема доказана.

Если же вместо цикла у нас получилась петля, то нужно проделать аналогичные рассуждения, рассмотрев единичное входное ребро из вершины q . Если оно не нужно для достижимости стартового состояния и единичного выходного ребра, то опять же направим его в стартовое состояние и применим лемму 2. Если это ребро единичное по выходу, то его опять же можно направить в стартовое состояние и применить лемму 2. Если же это ребро нулевое по выходу и лежит на любом простом пути от стартовой вершины к выходным единичным ребрам, то можно

в рассмотреть два ребра, выходящих из той вершины, куда ведет наше ребро. И уже из этой пары ребер можно выбрать хотя бы одно так, чтобы при его перенаправлении в стартовое состояние мы опять попали в условия леммы 2 (условие достижимости при этом не испортится, так как оба этих ребра не могут одновременно лежать в любом простом пути от стартового состояния к единичным выходным ребрам). Теорема доказана.

Литература

1. В.Б. Кудрявцев, С.В. Алёшин, А.С. Подколзин. Введение в теорию автоматов, М.: Наука, 1985.
2. С.В. Яблонский. Введение в дискретную математику, М.: Наука, 1986.
3. П.С. Дергач, Д.Б. Бахрамова. Об автоматных неисправностях при алфавитном кодировании, М.: Интеллектуальные системы. Теория и приложения, том 27, выпуск 4, 2023.

ПАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

М.М. Илхомов

ilkhomovmukhammad8128@gmail.com

УДК 510.57

Рассматриваются новые математические объекты: парные функции и операции над ними. Через эти операции и понятие слабой эквивалентности определяется оператор замыкания. Рассматриваются вычислительные системы над множеством парных функций, моделирующие автоматные системы. Доказано, что класс парных функций, вычислимых всевозможными вычислительными системами над множеством парных функций F , есть замыкание F . *Ключевые слова:* парные функции, вычислительные системы, обобщённая суперпозиция, обобщённая итерация, слабая эквивалентность.

Парные функции

Обозначим множество натуральных чисел с нулем через \mathbb{N}_0 .

Пусть X — некоторое множество. Рассмотрим функции двух видов:

- Функция вида $f : X \rightarrow X \cup \{\lambda\}$. То есть функция, частично определенная на X и принимающая значение из X . Если для некоторого $x \in X$ функция f не определена, то $f(x) = \lambda$.
- Функция вида $g : X \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$, для которой верно $|E(g)| < \infty$, где $E(g)$ — область значений функции g .

Определение 1. Пара функций (f, g) , где $f : X \rightarrow X \cup \{\lambda\}$ и $g : X \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$ называется парной функцией, если области определения f и g совпадают. Функция f называется результирующей функцией, а функция g называется переключательной функцией.

Определение 2. Две парные функции (f_1, g_1) и (f_2, g_2) называется слабо эквивалентными, если f_1 и f_2 совпадают, и существует биекция $\chi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ такая, что $\chi(g_1(x)) = g_2(x)$.

Дальше рассматриваются такие множества функций F , для которых если $(f, g) \in F$, то любая парная функция (f', g') , слабо эквивалентная к (f, g) , тоже принадлежит к F .

Далее для произвольных функций v и u будем считать $u(v(x)) = \lambda$, если $v(x) = \lambda$.

Определение 3. Пусть $(f_0, g_0), (f_1, g_1), (f_2, g_2), \dots, (f_m, g_m)$ — парные функции над X и $E(g_0) = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, где $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Определим обобщённую суперпозицию этих функций $(f, g) = S_m[(f_0, g_0), (f_1, g_1), (f_2, g_2), \dots, (f_m, g_m)]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(f_0(x)), & g_0(x) = k_1 \\ f_2(f_0(x)), & g_0(x) = k_2 \\ \dots \\ f_n(f_0(x)), & g_0(x) = k_m \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(f_0(x)), & g_0(x) = k_1 \\ g_2(f_0(x)), & g_0(x) = k_2 \\ \dots \\ g_n(f_0(x)), & g_0(x) = k_m \end{cases}$$

Операция S_m называется операцией обобщённой суперпозиции.

Дальше будем считать $f^0(x) = x$.

Определение 4. Пусть (f_0, g_0) – парная функция и $a \in \mathbb{N}_0$. Определим обобщённую итерацию этой функции (по a) $(f, g) = R_a[(f_0, g_0)]$ следующим образом:

- Если $g_0(x) \neq a$, то $f(x) = f_0(x), g(x) = g_0(x)$
- Если для любого $k < n$ ($n \geq 1$) верно $g_0(f_0^k(x)) = a$ и $g_0(f_0^n(x)) \neq a$, то $f(x) = f_0^{n+1}(x), g(x) = g_0(f_0^n(x))$
- Если не существует такой n , что $g_0(f_0^n(x)) \neq a$, то $f(x) = \lambda, g(x) = \lambda$.

Теперь определим замыкание множества парных функций F .

Определение 5. Замыкание множества парных функций F обозначим через $[F]$, и определим следующим образом:

1. Если $(f, g) \in F$, то $(f, g) \in [F]$.
2. Если $(f_0, g_0), (f_1, g_1), \dots, (f_m, g_m) \in F$, то $S_m[(f_0, g_0), (f_1, g_1), \dots, (f_m, g_m)] \in [F]$.
3. Если $(f_0, g_0) \in F$, то $R_a[(f_0, g_0)] \in [F]$.
4. $[F]$ не содержит никаких других функций.

Вычислительные системы

Определение 6. Вычислительной системой над множеством функций F называется конечный ориентированный граф (множество вершин которого обозначается через Q), с выделенным подмножеством финальных вершин (возможно пустым) и выделенной начальной вершиной, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Начальная вершина не является финальной.
2. Существует инъективное отображение $\nu : Q \rightarrow \mathbb{N}_0$, то есть задана нумерация вершин.
3. Каждая нефинальная вершина имеет метку $(f, g) \in F$.
4. Из каждой вершины выходит $|E(g)|$ рёбер, при этом рёбра выходящие из этой вершины имеют метки из $E(g)$, кроме того, метки рёбер не повторяются.
5. Ребро с номером k ведёт в вершину с номером k .

Если v – нефинальная вершина вычислительной системы, то через (f_v, g_v) обозначается метка этой вершины.

Определение 7. Пусть V – вычислительная система и v_0 – её начальная вершина. Траекторией вычислительной системы при начальном значении x_0 называется последовательность (которая может быть и конечной, и бесконечной) $(x(0), v(0)), (x(1), v(1)), \dots, (x(n), v(n)), \dots$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} v(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \\ v(t+1) = \nu^{-1}(g_{v(t)}(x(t))) \\ x(t+1) = f_{v(t)}(x(t)) \end{cases} \quad (1)$$

Если существует момент t такой, что $v(t)$ – финальная вершина, то траектория будет конечной, и говорится, что вычислительная система остановится. Иначе, траектория будет бесконечной, и говорится, что вычислительная система не остановится.

Определение 8. Вычислительная система V вычисляет парную функцию (f, g) , если:

- Траектория V при начальном значении x_0 конечная, и последний элемент траектории равен $(f(x_0), \nu^{-1}(g(x_0)))$.

- Траектория V при начальном значении x_0 бесконечная, и имеют места равенства: $f(x_0) = \lambda, g(x_0) = \lambda$.

Множество всех вычислительных систем над множеством функций F обозначается через $V(X, F)$

Основной результат

Парная функция (f_I, g_I) , где $f_I(x) \equiv x, g_I(x) \equiv 0$, называется тождественной парной функцией.

Теорема 1. Пусть F множество парных функций, которое содержит тождественную парную функцию (f_I, g_I) (следовательно, все парные функции, слабо эквивалентные ей). Тогда множество парных функций, вычислимых вычислительными системами из $V(X, F)$, совпадает с $[F]$.

Литература

1. А.И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Наука, 1986.

О КОНЕЧНОЙ НЕПОРОЖДЕННОСТИ МНОЖЕСТВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В КЛАССЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Р.М. Колпаков

roman.kolpakov@math.msu.ru

УДК 519.714.2

Рассматриваются дискретные преобразования рациональных вероятностей посредством некоторого класса вероятностных контактных сетей. В данном классе сетей для любого простого $p > 3$ доказано отсутствие конечного порождающего подмножества в множестве всех p -ично-рациональных вероятностей.

Ключевые слова: дискретные преобразования вероятностей, вероятностные контактные сети, рациональные числа, конечная порожденность.

Булевой случайной величиной с весом p , где $0 \leq p \leq 1$, называется случайная величина, принимающая только два значения: значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - p$. Под вероятностной контактной сетью (в. к. сетью) понимается двухполюсная сильно связанная сеть, всем ребрам которой, называемым контактами, сопоставлены некоторые булевы случайные величины, называемые проводимостями соответствующих этим величинам контактов, при этом предполагается, что проводимости всех контактов вероятностной контактной сети являются независимыми в совокупности. Вес случайной величиной, сопоставленной контакту в. к. сети, называется вероятностью проводимости данного контакта. Контакт в. к. сети называется замкнутым, если его проводимость принимает значение 1, в противном случае контакт называется разомкнутым. В. к. сеть называется замкнутой, если между ее полюсами имеется цепь из замкнутых контактов. Вероятность того, что в. к. сеть является замкнутой, называется вероятностью проводимости данной сети. Очевидно, что вероятность проводимости в. к. сети однозначно определяется вероятностями проводимости всех ее контактов. Простейшим примером в. к. сети является сеть, состоящая из одного контакта, которая называется тривиальной сетью.

В работе рассматриваются элементарные вероятностные контактные параллельно-последовательные сети (элементарные в. к. π -сети) [1, 2], которые определяются следующим индуктивным образом.

Базис индукции. Тривиальная сеть является элементарной в. к. π -сетью.

Шаг индукции. Пусть S — элементарная в. к. π -сеть. Тогда в. к. сеть, полученная либо последовательным соединением сети S с тривиальной сетью, либо параллельным соединением сети S с тривиальной сетью, является элементарной в. к. π -сетью.

Пусть M — некоторое множество чисел из интервала $(0, 1)$. Будем говорить, что число $a \in (0, 1)$ порождается множеством M в классе элементарных в. к. π -сетей, если найдется элементарная в. к. π -сеть S такая, что вероятности проводимости всех контактов сети S содержатся в M и вероятность проводимости сети S равна a . Через $[M]_E$ мы обозначаем множество всех чисел из интервала $(0, 1)$, порождаемых множеством M в классе элементарных в. к. π -сетей. Множество $A \subset (0, 1)$ порождается множеством M в классе элементарных в. к. π -сетей, если $A \subseteq [M]_E$. Множество A называется конечно порожденным в классе элементарных в. к. π -сетей, если оно содержит конечное подмножество, порождающее множество A в классе элементарных в. к. π -сетей. Множество A является замкнутым относительно порождения в классе элементарных в. к. π -сетей, если $[A]_E = A$. Обзор полученных в данной области результатов можно найти в [3].

Пусть p — простое число. Обозначим через $G[p]$ множество чисел

$$\left\{ 0 < \frac{m}{p^n} < 1 \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Нетрудно заметить, что $G[p]$ является замкнутым относительно порождения в классе элементарных в. к. π -сетей. В [1, 4] было показано, что множества $G[2]$ и $G[3]$ порождаются в классе элементарных в. к. π -сетей своими подмножествами $\{\frac{1}{2}\}$ и $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$, т.е. $G[2]$ и $G[3]$ являются конечно порожденным в классе элементарных в. к. π -сетей. С другой стороны, при $p > 3$ множество $G[p]$ не порождается своим подмножеством $\{\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}\}$ в классе элементарных в. к. π -сетей. В работе этот результат обобщается на случай произвольных конечных подмножеств данного множества.

Теорема 1. *Для простого $p > 3$ множество $G[p]$ не является конечно порожденным в классе элементарных в. к. π -сетей.*

Литература

1. D. Wilhelm, J. Bruck Stochastic switching circuit synthesis. // Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). 2008. P. 1388–1392.
2. H. Zhou, J. Bruck On the expressibility of stochastic switching circuits. // Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory. 2009. P. 2061–2065.
3. А.Д. Яшунский Алгебры вероятностных распределений на конечных множествах. // Труды МИАН. Т. 301, 2018. С. 320–335.
4. Р.Л. Схиртладзе О синтезе p -схемы из контактов со случайными дискретными состояниями. // Сообщения АН ГрССР. Т. 26, № 2, 1961. С. 181–186.

СХЕМЫ ГЛУБИНЫ ДВА, ПРИБЛИЖЕННО ВЫЧИСЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИЮ ГОЛОСОВАНИЯ

Ю.А. Комбаров

yuri.kombarov@gmail.com

УДК 519.95

Рассматриваются схемы из функциональных элементов глубины два, элементы которых вычисляют функции голосования. Построена схема с входным ветвлением $n - 4$, вычисляющая функцию, совпадающую с функцией голосования n переменных на почти всех входных наборах.

Ключевые слова: булевы функции, схемы из функциональных элементов, функция голосования.

Функцией голосования от n переменных называется n -местная булева функция MAJ_n , такая, что $MAJ_n(\tilde{x}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\text{wt}(\tilde{x}) > \frac{n}{2}$ (здесь \tilde{x} — набор из $\{0, 1\}^n$, а $\text{wt}(\tilde{x})$ — число единиц в \tilde{x}). Схемой глубины два ветвления k из элементов голосования для заданной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ будем называть представление функции f в виде $f(x_1, \dots, x_n) = MAJ_k(M_1, \dots, M_k)$, где каждая из подформул M_1, \dots, M_k есть функция голосования от некоторых k переменных. Например, функция голосования семи переменных может быть представлена в виде схемы ветвления 5 следующим образом:

$$\begin{aligned} MAJ_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \\ = MAJ_5(MAJ_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), MAJ_5(x_1, x_3, x_4, x_4, x_6), \\ MAJ_5(x_2, x_5, x_5, x_6, x_7), MAJ_5(x_1, x_2, x_3, x_6, x_6), MAJ_5(x_1, x_3, x_5, x_7, x_7)). \end{aligned} \quad (1)$$

Схемы удобно задавать с помощью целочисленных матриц. Строки матрицы соответствуют невыходным элементам схемы, а столбцы — входным переменным. Число на пересечении i -ой строки и j столбца означает кратность, с которой j -ая входная переменная подается на входы i -ого элемента схемы. Например, схема, заданная формулой (1), может быть описана следующей матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В работе [1] был поставлен следующий вопрос: «Каково наименьшее ветвление схемы, реализующей функцию MAJ_n ?». В [1] приведены примеры схемы для функции голосования n переменных с ветвлением $n - 2$ при $n = 7, 9, 11$, а также даны нижние оценки ветвления таких схем. Схемы для MAJ_n с ветвлением $n - 2$ для произвольного нечетного n были построены независимо в работах [2, 3].

Несмотря на интерес к задаче целого ряда авторов, примеры схем для MAJ_n с ветвлением, меньшим $n - 2$, неизвестны. Поэтому естественно рассмотреть задачу построения схем с ветвлением, меньшим $n - 2$, вычисляющих функцию, совпадающую с функцией голосования на почти всех наборах.

Пусть C — схема глубины два из элементов голосования. Ошибкой схемы C будем обозначать вероятность того, что значение на случайном наборе из нулей и единиц отличается от значения функции голосования на данном наборе:

$$\text{Err}(C) = \text{Pr}_{x \in \{0,1\}^n}(C(x) \neq MAJ(x)).$$

В [1] показано, что для любого $\epsilon > 0$ существуют схемы ветвления $\Theta(n^{1/2})$, вычисляющие функцию MAJ_n с ошибкой, не превосходящей ϵ . Доказательство этого факта вероятностное (явная конструкция таких схем не приводится).

В данной работе построена последовательность схем, имеющих большее ветвление, но также и существенно меньшую ошибку. Этот результат описан в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $n \geq 9$ и n нечетно. Существует схема ветвления $n - 4$, вычисляющая функцию MAJ_n с ошибкой $\frac{n-1}{2^{n-2}}$.

Доказательство теоремы в настоящих тезисах не приводится из соображений экономии объема. Ниже приведена матрица, описывающая схему с ветвлением 9, реализующая функцию MAJ_{13} с ошибкой $\frac{3}{1024}$ (другими словами, вычисляемая схемой функция совпадает с функцией голосования на всех наборах длины 13, кроме двадцати четырех).

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. *Kulikov A.S., Podolskii V.V.* Computing Majority by Constant Depth Majority Circuits with Low Fan-in Gates // 34th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2017) — 2017. — 66. — P. 49:1–49:14.
2. *Комбаров Ю. А.* Схема глубины два с ограниченным входным ветвлением для функций голосования // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — №5. — С. 58–60.
3. *Amano K.* Depth Two Majority Circuits for Majority and List Expanders // 43rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2018). — 2018.

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СХЕМАМИ КОМПОЗИЦИИ МОНОМА НАД СИСТЕМОЙ МОНОМОВ

С.А. Корнеев

korneev.sa.42@gmail.com

УДК 519.714

Исследуется сложность реализации систем мономов схемами композиции. Под сложностью в этой модели понимается минимальное число операций композиции, необходимое для вычисления системы мономов. Для сложности реализации одного монома над произвольной системой мономов получены верхняя и нижняя оценки, отличающиеся на $\min(p, q) - 1$, где p — число мономов в системе, q — число переменных.

Ключевые слова: система мономов, сложность вычисления, сложность схемы, схема композиции.

Мономом над множеством переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ будем называть выражение вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$, где a_1, a_2, \dots, a_q — целые неотрицательные числа, причём $a_1 + a_2 + \dots + a_q > 0$. Если $a_1 + a_2 + \dots + a_q = 0$, то такое выражение будем называть *нулевым мономом*. В дальнейшем будем рассматривать мономы над фиксированным множеством переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$. Для мономов U_1 и U_2 будем говорить, что *моном U_1 не превосходит монома U_2* и использовать обозначение $U_1 \leq U_2$, если все показатели степеней монома U_1 не превосходят соответствующих показателей степеней монома U_2 .

Следуя [1], определим понятие композиции мономов. Пусть для мономов $U = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}$, $V = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}$ и $R = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}$ (последний моном — возможно, нулевой) выполнены условия $R \leq U$ и $R \leq V$. Тогда моном

$$(U, V)_R = \frac{UV}{R} = x_1^{a_{11}+a_{21}-b_1} x_2^{a_{12}+a_{22}-b_2} \dots x_q^{a_{1q}+a_{2q}-b_q}$$

называется *композицией мономов U и V относительно монома R* . В дальнейшем будем считать, что применение операции композиции подразумевает выполнение условий $R \leq U$ и $R \leq V$.

Схемой композиции над системой мономов $M = \{U_1, \dots, U_r\}$ будем называть такую последовательность мономов

$$(U_1, \dots, U_r, U_{r+1}, \dots, U_{r+n}), \quad (1)$$

что для любого $k, k = r+1, \dots, r+n$, найдутся такие натуральные числа s и t и такой моном R_k (возможно, нулевой), что $s < k, t < k$ и $U_k = (U_s, U_t)_{R_k}$.

Если S — схема композиции вида (1), то под сложностью $l_{Sh}(S)$ схемы композиции S будем понимать число n . Будем говорить, что схема композиции S реализует систему мономов M , если для каждого монома U из системы M выполнено условие $U \in S$.

Величину $l_{Sh}(M/M_0)$, определяемую равенством $l_{Sh}(M/M_0) = \min l_{Sh}(S)$, где минимум берётся по всем схемам композиции, реализующим систему мономов M над системой мономов M_0 , будем называть сложностью реализации системы мономов M над системой мономов M_0 схематической композиции. Это определение обобщает определение, данное в работе [2] (см. также [3]).

Пусть $U_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, U_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}$ — произвольные мономы. Введём обозначения

$$U_{\max}(U_1, U_2) = x_1^{\max(a_{11}, a_{21})} x_2^{\max(a_{12}, a_{22})} \dots x_q^{\max(a_{1q}, a_{2q})},$$

$$U_{\min}(U_1, U_2) = x_1^{\min(a_{11}, a_{21})} x_2^{\min(a_{12}, a_{22})} \dots x_q^{\min(a_{1q}, a_{2q})}.$$

Для доказательства основной теоремы потребуются два вспомогательных утверждения. Лемма 1 была доказана в работе [4].

Лемма 1. Пусть мономы $U = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$ и $V = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_q^{b_q}$ удовлетворяют условиям $a_k \geq b_k > 0, k = 1, \dots, q$. Тогда

$$l_{Sh}(U|V) = \left\lceil \log \max_{k:1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{b_k} \right\rceil.$$

Лемма 2. Пусть существует схема, реализующая систему мономов M над системой мономов $M_0 = \{U_0, U_1, U_2, \dots, U_q\}$, моном U_0 содержится в каждом из мономов системы M , а каждый моном системы M_0 содержится в мономе U_0 . Тогда

$$l_{Sh}(M|M_0) = l_{Sh}(M|U_0).$$

Доказательство. Неравенство $l_{Sh}(M|M_0) \leq l_{Sh}(M|U_0)$ очевидно. Докажем обратное неравенство.

Пусть S — минимальная схема (схема минимальной сложности), реализующая систему мономов M над системой мономов M_0 . Заменим каждый моном U в схеме S мономом $U' = U_{\max}(U, U_0)$ и удалим из полученной последовательности все мономы U_0 , кроме одного. Полученную в результате последовательность мономов обозначим через S' . Нетрудно доказать, что последовательность S' образует схему, реализующую систему мономов M над мономом U_0 . При этом $l_{Sh}(S') = l_{Sh}(S)$, откуда получаем $l_{Sh}(M|M_0) = l_{Sh}(S) = l_{Sh}(S') \geq l_{Sh}(M|U_0)$.

Теорема 1. Пусть системе мономов $M = \{U_1, U_2, \dots, U_p\}$, не содержащей нулевых степеней, соответствует матрица $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q$, и каждый моном из этой системы не превосходит монома $U_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$. Тогда

$$l_{Sh}(U_0|M) \leq \left\lceil \log \max_{1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{pk})} \right\rceil + \min(p, q) - 1,$$

$$l_{Sh}(U_0|M) \geq \left\lceil \log \max_{1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{pk})} \right\rceil.$$

Верхняя оценка. Для каждого $j = 1, 2, \dots, q$ выберем из системы M моном с наибольшим показателем переменной x_j и обозначим через M_0 систему, состоящую из всех таких мономов. Ясно, что количество мономов в этой системе не превосходит $\min(p, q)$. Пусть $M_0 = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ и пусть этой системе мономов соответствует матрица $B = (b_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, q$. Положим $V_0 = U_{\min}(V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_n, U_0)$. Тогда каждый моном из системы M не превосходит монома V_0 , который, в свою очередь, не превосходит монома U_0 . Легко видеть, что $l_{Sh}(V_0|M_0) \leq n - 1$.

Если $U_0 = V_0$, то логарифм в формулировке теоремы равен нулю. Тогда

$$l_{Sh}(U_0|M) = l_{Sh}(V_0|M) \leq n - 1 \leq \min(p, q) - 1.$$

Если же $U_0 \neq V_0$, то, используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} l_{Sh}(U_0|M_0) &\leq l_{Sh}(U_0|V_0) + l_{Sh}(V_0|M_0) \leq \\ &\leq \left\lceil \log \max_{1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{\min(b_{1k} + b_{2k} + \dots + b_{pk}, a_k)} \right\rceil + n - 1 \leq \\ &\leq \left\lceil \log \max_{1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{\min(\max(b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{pk}), a_k)} \right\rceil + \min(p, q) - 1 = \\ &= \left\lceil \log \max_{1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{pk})} \right\rceil + \min(p, q) - 1. \end{aligned}$$

Нижняя оценка. Положим $V_0 = U_{\max}(U_1, U_2, \dots, U_p)$. Тогда каждый моном из системы M не превосходит монома V_0 , который, в свою очередь, не превосходит монома U_0 . Используя леммы 1 и 2, получаем

$$l_{Sh}(U_0|M) \geq l_{Sh}(U_0|M \cup \{V_0\}) = l_{Sh}(U_0|V_0) = \left\lceil \log \max_{1 \leq k \leq q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{qk})} \right\rceil.$$

Литература

1. *Ширшов А. И.* Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. С. 292-296.
2. *Меркин Ю. В.* О порождение слов с использованием операции композиции // Дискретный анализ и исследование операций, серия 1. 2003. Т. 10, №4. С. 70-78.
3. *Трусевич Е. Н.* О сложности вычисления некоторых систем одночленов схемами композиции // Вестник московского университета, серия 1. Математика. Механика. 2014. №5. С. 18-22.
4. *Корнеев С. А.* О сложности реализации системы из двух мономов схемами композиции // Дискретная математика, Т. 32, №2. 2020. С. 15-31.

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

В.В. Кочергин
vkoch@yandex.ru

УДК 519.71

Исследуется сложность реализации систем элементов конечных абелевых групп. Под сложностью реализации системы элементов над заданным базисом понимается минимальное число применений групповых операций для вычисления элементов системы по базисным элементам, при этом допускается многократное использование результатов промежуточных вычислений.

Функционал $L_m(G; B)$, где G — конечная абелева группа, а B — система порождающих ее циклических компонент, характеризует минимально возможное число операций умножения в группе, достаточное для вычисления по элементам множества B любой системы из m элементов группы G . В работе при условии ограниченности величины $|B| + m$ установлена асимптотика роста функционала $L_m(G; B)$ при $|G| \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: конечная абелева группа, сложность вычисления, аддитивные цепочки, векторные аддитивные цепочки.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Кочергин Вадим Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

В работе исследуется задача о сложности реализации систем элементов конечных абелевых групп.

Пусть G — конечная абелева группа (по умножению), а подмножество $B = \{a_1, \dots, a_q\}$ элементов группы — *базис* в группе G , т. е. G раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп, порожденных элементами множества B :

$$G = \langle a_1 \rangle_{u_1} \times \langle a_2 \rangle_{u_2} \times \dots \times \langle a_q \rangle_{u_q},$$

где u_i — порядок элемента a_i , $i = 1, \dots, q$.

Для элемента g группы G под *сложностью реализации над базисом B* (формальные определения, в том числе на языке схем из функциональных элементов [1] и аддитивных цепочек [2], см., например, в [3, 4, 5]), обозначаемой через $L(g; B)$, понимается минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления элемента g с использованием элементов множества B , причем все уже вычисленные элементы могут быть использованы многократно — в этом принципиальное отличие этой, «схемной», меры сложности от другой, «формульной», меры сложности вычислений элементов в группах.

Следуя [6], для произвольного подмножества $M = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ элементов группы G определим его *сложность реализации над базисом B* , обозначаемую через $L(M; B)$, как минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления элементов множества M с использованием элементов множества B .

В работе [6] исследовалась функция Шеннона $L(n, m)$ сложности реализации систем элементов абелевых групп, определяемая равенством $L(n, m) = \max L(M; B)$, где максимум берется по всем абелевым группам порядка не более n , по всем их базисам B и по всем m -элементным подмножествам M этих групп.

В данной работе изучается максимально возможная сложность реализации системы из m элементов фиксированной конечной абелевой группы над фиксированным базисом. Положим

$$L_m(G; B) = \max L(M; B),$$

где максимум берется по всем m -элементным подмножествам M группы G . Эта задача в случае $m = 1$ достаточно подробно исследована в работах [3, 4, 5]. Здесь же рассматривается случай ограниченных значений m .

Задача о сложности реализации системы

$$g_1 = a_1^{n_1} \dots a_q^{n_1 q}, g_2 = a_1^{n_2} \dots a_q^{n_2 q}, \dots, g_m = a_1^{n_m} \dots a_q^{n_m q}$$

элементов конечной абелевой группы, заданной базисом $B = \{a_1, \dots, a_q\}$, тесно связана с задачей Пиппенджера [7] (см. также [5]) о наименьшем числе умножений, достаточном для вычисления системы одночленов

$$y_1 = x_1^{n_1} \dots x_q^{n_1 q}, y_2 = x_1^{n_2} \dots x_q^{n_2 q}, \dots, y_m = x_1^{n_m} \dots x_q^{n_m q}.$$

Однако между этими задачами могут быть и существенные отличия. Так, например, очевидная нижняя оценка числа умножений, необходимого для вычисления системы одночленов

$$x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_{\min(m, q)}^{n_{\min(m, q)}},$$

численно равная $\log_2 n_1 + \log_2 n_2 + \dots + \log_2 n_{\min(m, q)}$, вообще говоря, не переносится автоматически на задачу о сложности вычисления системы элементов конечной абелевой группы.

Действительно, для прямого произведения циклических подгрупп $\langle b_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$, каждая из которых имеет порядок $n + 1$, при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$L(\{b_1^n, b_2^n, \dots, b_m^n\}; \{b_1, b_2, \dots, b_m\}) \leq \log_2 n(1 + o(1)) + m^2,$$

так как можно за $\log_2 n(1 + o(1)) + m - 1$ операций (см., например, [2, 5]) получить элемент $b_1^n b_2^n \dots b_m^n$, а затем этот элемент последовательно умножать на элементы $b_1 \dots b_{i-1}, b_{i+1} \dots b_m$, $i = 1, \dots, m$.

С другой стороны, для вычисления системы одночленов $x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n$ требуется не менее $m \log_2 n$ операций умножения.

В приведенном примере при ограниченных и слаборастущих значениях параметра m и росте параметра n сложность реализации системы элементов конечной абелевой группы превосходит сложность реализации соответствующей системы одночленов асимптотически в m раз.

Основным результатом настоящей работы является преодоление этой проблемы при исследовании величины $L_m(G; B)$.

Теорема 1. Пусть $G = \langle a_1 \rangle_{u_1} \times \langle a_2 \rangle_{u_2} \times \dots \times \langle a_q \rangle_{u_q}$, где $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_q$ и величина $q + m$ ограничена сверху. Тогда при $|G| \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$L_m(G; \{a_1, a_2, \dots, a_q\}) \sim \sum_{k=1}^{\min(m, q)} \log_2 u_k.$$

Литература

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Московского университета, 1984 (2-е издание: 2024).
2. Кнут Д. Е. Искусство программирования. Т. 2. 3-е изд. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2000.
3. Кочергин В. В. О сложности вычислений в конечных абелевых группах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. — М.: Наука, 1992. — С. 178–217.
4. Кочергин В. В. О некоторых мерах сложности конечных абелевых групп // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 3. — С. 25–43.
5. Кочергин В. В. Задачи Беллмана, Кнута, Лупанова, Пиппенджера и их вариации как обобщения задачи об аддитивных цепочках // Математические вопросы кибернетики. Вып. 20. — М.: Физматлит, 2022. — С. 119–256.
6. Кочергин В. В. О сложности вычисления системы элементов конечной абелевой группы // Вестник Московского университета. Математика. Механика. — 2023. — № 4. — С. 22–29.
7. Pippenger N. On evaluation of powers and monomials // SIAM J. Comput. — 1980. — V. 9, № 2. — P. 230–250.

О СХЕМНОЙ СЛОЖНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НАД ОДНИМ БЕСКОНЕЧНЫМ БАЗИСОМ

В.В. Кочергин, А.В. Михайлович

vkoch@yandex.ru, avmikhailovich@gmail.com

УДК 519.71

Для произвольной булевой функции установлены отличающиеся друг от друга не более чем на единицу верхняя и нижняя оценки сложности реализации схемами над бесконечным базисом, состоящем из всех монотонных функций и отрицания.

Ключевые слова: схемная сложность, инверсионная сложность, бесконечный базис.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Кочергин Вадим Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Михайлович Анна Витальевна, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ, общеуниверситетская кафедра высшей математики (Москва, Россия)

Рассматривается задача о сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов [1] над полным бесконечным базисом, состоящем из всех монотонных функций и отрицания.

Для произвольной схемы S над этим базисом обозначим через $L(S)$ общее число элементов в схеме S , а через $I(S)$ — число инверторов (элементов отрицания). Под *сложностью* $L(f)$ и *инверсионной сложностью* $I(f)$ функции f понимается минимально возможное значение величин $L(S)$ и $I(S)$ соответственно, где минимум берется по всем схемам S , реализующим функцию f схемами над базисом из всех монотонных функций и отрицания.

В 1957 г. А. А. Марков получил [2] исчерпывающее решение задачи о нахождении величины $I(f)$, установив для произвольной булевой функции равенство

$$I(f) = \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil,$$

где $d(f)$ — максимальное (максимум берется по всем возрастающим цепям наборов значений переменных) число изменений значений функции с большего значения на меньшее.

Из результата Маркова в силу очевидных неравенств $I(f) + 1 \leq L(f) \leq 2I(f) + 1$, справедливых для всех функций, кроме отрицания, следуют верхняя и нижняя оценки сложности произвольной булевой функции, отличающиеся вдвое.

Из результатов работ [3, 4], в которых исследовалась сложность реализации функций k -значной логики схемами над двумя бесконечными базисами, следуют такие оценки сложности реализации произвольной булевой функции f над базисом из всех монотонных функций и отрицания:

$$2\lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil - 1 \leq L(f) \leq 2\lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil + 1.$$

Чтобы уточнить эти оценки, дадим некоторые определения.

Будем говорить, что булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *удовлетворяет граничным условиям*, если для этой функции выполняются следующие условия:

- 1) $f(0, 0, \dots, 0) = 1$;
- 2) $f(1, 1, \dots, 1) = 0$;
- 3) $d(f) = 2^k - 1$ для некоторого натурального k .

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ будем называть *улучшаемой по переменной x_n* , если верно равенство

$$\lceil \log_2(\max\{d(f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)), d(f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1))\} + 1) \rceil = \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil - 1.$$

Функцию будем называть *улучшаемой*, если она улучшаема хотя бы по одной из своих переменных.

Теорема 1. Неравенство

$$L(f) \leq 2\lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil$$

выполняется тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет граничным условиям или улучшает.

Литература

1. Лупанов О. В. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Московского университета, 1984 (2-е издание: 2024).
2. Марков А. А. Об инверсионной сложности систем функций // ДАН СССР. — 1957. — Т. 116, № 6. — С. 917–919.
3. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 42–74.
4. Кочергин В. В., Михайлович А. В. О схемной сложности функций k -значной логики в одном бесконечном базисе // Прикладная математика и информатика. — 2018. — № 58. — С. 21–34.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОСТОРОННИМИ И ДВУСТОРОННИМИ АВТОМАТАМИ

В.А. Литовский

vlad-litov@mail.ru

УДК 512.56

В работе исследуются функции, задаваемые различными видами автоматов: классическим автоматом, автоматом с остановками, двусторонним автоматом. Рассмотрены свойства кодировок, преобразующих числа во входные последовательности для автомата и обратно. Найдены классы функций, вычислимые указанными тремя видами автоматов в этих кодировках. Для каждого из рассмотренных видов автоматов приведены конкретные способы построения автомата по заданной функции, которую он вычисляет.

Основные определения и понятия

За \mathbb{N} обозначим *множество натуральных чисел с нулём*. *Начальным сегментом* \mathbb{N} назовём либо множество $\{0, \dots, m\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, либо само \mathbb{N} .

За \mathbb{N}_λ обозначим $\mathbb{N} \cup \{\lambda\}$, где λ — фиктивный элемент, обозначающий, что функция на нём не определена. Бесконечную последовательность $x(t)$ элементов \mathbb{N}_λ назовём *периодичной с периодом* $T \in \mathbb{N}$, $T > 0$, *предпериодом* $T_0 \in \mathbb{N}$ и *смещением* $N \in \mathbb{N}$, если $\forall t \geq T_0 \ x(t+T) = x(t)+N$. Нетрудно показать, что если последовательность не равна тождественно λ ни с какого момента, то есть такие период T , предпериод T_0 и смещение N , что все тройки период/предпериод/смещение есть в точности тройки вида (T', T'_0, N) , где $T' = kT$ для некоторого $k > 0$, $T'_0 \geq T_0$ и $N' = kN$. Такие период/предпериод/смещение (T, T_0, N) будем называть *главными*, а остальные — *побочными*. В случае если последовательность тождественно равна λ с некоторого момента, то главное смещение будем считать равным 0.

Будем говорить, что бесконечная последовательность обладает *смещающим периодом* $(N_0, \dots, N_{T-1}) \in \mathbb{N}^T$ с предпериодом T_0 , если $\forall r \in \mathbb{N} \ \forall p \in \{0, \dots, T-1\}$ выполнено соотношение $x(T_0 + (r+1)T + p) = x(T_0 + rt + p) + N_p$. N_p будем называть p -м смещением.

Двусторонней последовательностью элементов множества X назовём функцию из промежутка с нулём в \mathbb{Z} в X , либо пустую функцию (пустая двусторонняя последовательность разрешается).

Бесконечную двустороннюю последовательность $x(t)$ назовём *периодичной* вправо с индекса T_0 и с *периодом* $T > 0$, если $\forall t \geq T_0 \ x(t+T) = x(t)$. Бесконечную двустороннюю последовательность $x(t)$ назовём *периодичной* влево с индекса T_0 и с *периодом* $T > 0$, если $\forall t \leq T_0 \ x(t-T) = x(t)$.

Бесконечную двустороннюю последовательность $x(t)$ назовём *периодичной с периодом* $T > 0$, если $\forall t \in \mathbb{Z} \ x(t+T) = x(t)$. *Двусторонним автоматом* называется упорядоченная шестёрка $(A, B, Q, \varphi, \psi, \theta)$, где

- A, B и Q — конечные алфавиты, называемые соответственно входным, выходным и внутренними алфавитами (Q также часто называется множеством состояний, а его символы — состояниями);
- $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$, $\psi : Q \times A \rightarrow B$ и $\theta : Q \times A \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ — функции, называемые соответственно функциями перехода, выхода и скорости [1].

Инициальным двусторонним автоматом называется упорядоченная пара (V, q_1) , где V — двусторонний автомат, а $q_1 \in Q$ — одно из его состояний, называемое начальным состоянием инициального двустороннего автомата.

Каноническими уравнениями инициального двустороннего автомата называется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} t'(1) = 0 \\ t'(t+1) = t'(t) + d(t) \\ d(t) = \theta(q(t), a'(t)) \\ a'(t) = a(t'(t)) \\ q(1) = q_1 \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a'(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), a'(t)) \end{cases}$$

Решение системы канонических уравнений для автомата V , входной последовательности a и начального состояния q_1 будем обозначать как $q[V, a, q_1]$, $t'[V, a, q_1]$, $a'[V, a, q_1]$, $b[V, a, q_1]$ и $d[V, a, q_1]$. Если автомат, входная последовательность или начальное состояние понятны из контекста, то они в данной записи могут опускаться.

Пусть $g : X \rightarrow A^{\mathbb{N}}$, $h : B^{\omega} \rightarrow Y$ — некоторые функции. Функцией, задаваемой инициальным классическим автоматом V во входной кодировке g и выходной кодировке h , называется функция $f : X \rightarrow Y$, вычисляемая по формуле $f(x) = h(b[g(x)])$. Пусть теперь $g : X \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$, $h : B^{\omega} \rightarrow Y$ — некоторые функции.

Функцией, задаваемой инициальным двусторонним автоматом V во входной кодировке g и выходной кодировке h , называется функция $f : X \rightarrow Y$, вычисляемая по формуле $f(x) = h(b[g(x)])$.

Автоматом с остановками называется двусторонний автомат, для которого θ принимает только значения 0 и 1. Для него точно также определяются канонические уравнения за исключением того, что параметр a считается обычной последовательностью, а не двусторонней. Пусть $g : X \rightarrow A^{\mathbb{N}}$, $h : B^{\omega} \rightarrow Y$ — некоторые функции. Функцией, задаваемой инициальным автоматом с остановками V во входной кодировке g и выходной кодировке h , называется функция $f : X \rightarrow Y$, вычисляемая по формуле $f(x) = h(b[g(x)])$.

Постановка задачи

Определим выходные кодировки: $E : \{0, 1\}^{\omega} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\lambda\}$

$$E(\alpha) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } 1^{n+1}0^{\omega} \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N} \\ \lambda, & \text{если } \alpha \text{ не имеет вид } 1^{n+1}0^{\omega} \text{ ни для какого } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$D : \{0, 1\}^{\omega} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\lambda\}$

$$E(\alpha) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } 0^m 1^{n+1} 0^{\omega} \text{ для некоторых } m, n \in \mathbb{N} \\ \lambda, & \text{если } \alpha \text{ не имеет вид } 0^m 1^{n+1} 0^{\omega} \text{ ни для каких } m, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Определим также входную кодировку для классического автомата:

$$E^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$$E^{-1}(n) = 1^{n+1}0^{\omega}$$

И для двустороннего автомата:

$$E'^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

$$E'^{-1}(n) = 0^{-\omega} . 1^{n+1} 0^{\omega}$$

E -вычислимыми функциями на автомате (классическом или с остановками) будем называть функции, вычисляемые на этом автомате со входной кодировкой E^{-1} и выходной E . D -вычислимыми функциями на автомате (классическом или с остановками) будем называть функции, вычисляемые на этом автомате со входной кодировкой E^{-1} и выходной D .

E -вычислимыми функциями на двустороннем автомате будем называть функции, вычисляемые на этом автомате со входной кодировкой E'^{-1} и выходной E . D -вычислимыми функциями

на автомате (классическом или с остановками) называются функции, вычисляемые на этом автомате со входной кодировкой E'^{-1} и выходной D . В указанных терминах задача данной работы формулируется следующим образом: найти классы функций, E - и D -вычисляемые классическим автоматом, автоматом с остановками.

Основные результаты

Для формулировки результатов определим некоторые классы функций.

Множество E_λ определяется как множество периодических последовательностей $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda$, для которых существует число $m \in \mathbb{N}$, называемое главным значением, которое удовлетворяют следующим условиям:

- $t \leq m \Rightarrow a(t) \geq t \vee a(t) = \lambda$
- $t > m \Rightarrow a(t) = m \vee a(t) = \lambda$

Множество \mathcal{A}_0 определяется как множество всех периодических последовательностей \mathbb{N}_λ .

Множество \mathcal{A}'_1 определяется как множество всех периодичных со смещением последовательностей таких, что период равен смещению. Эквивалентно, множество \mathcal{A}'_1 есть множество всех последовательностей $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda$, которые можно представить в виде $f(n) = n + g(n)$, где $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\lambda\}$ — произвольная периодическая последовательность. Сумма положительного с большим по модулю отрицательным числом считается равной λ .

Множество \mathcal{A}''_1 определяется как множество всех периодичных со смещением последовательностей $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda$ таких, что период равен смещению и во всех n , в которых f не равно λ , выполняется неравенство $f(n) \geq n$. Эквивалентно, множество \mathcal{A}''_1 есть множество всех последовательностей $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda$, которые можно представить в виде $f(n) = n + g(n)$, где $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda$ — произвольная периодическая последовательность.

Множество \mathcal{A}'_2 определяется как множество всех периодичных со смещением последовательностей таких, что смещение больше или равно периода (тождественно равная λ с некоторого момента допускается).

Множество \mathcal{A}''_2 определяется как множество всех периодичных со смещением последовательностей $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda$ таких, что смещение больше или равно периода (тождественно равная λ с некоторого момента допускается) и во всех n , в которых f не равно λ , выполняется неравенство $f(n) \geq n$.

Множество \mathcal{A}'_3 определяется как множество всех последовательностей со смещающим периодом, в которых смещения равны либо 0, либо больше периода.

Множество \mathcal{A}''_3 определяется как множество всех последовательностей $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda$ со смещающим периодом (N_0, \dots, N_T) таких, что выполнены следующие условия.

Возьмём все смещения N_{i_0}, \dots, N_{i_k} такие, что $f(T_0 + i_0) \in \mathbb{N}$. Среди них есть наименьшее N , будем его называть основным смещением, а остальные N_{i_0}, \dots, N_{i_k} — особыми. Тогда:

- для $n < T_0 + T$ выполнено $f(n) > n$ или $f(n) = \lambda$;
- для основного смещения выполнено $N \geq T$;
- для особых смещений N_i выполнено $N_i \geq N + T$, а для значений функции $f(T_0 + i)$ так же выполнено $f(T_0 + i) \geq 2n + 2$.

Теорема 1. Множество всех функций, E -вычисляемых классическим автоматом, который на слове 1^ω выдаёт 1^ω , есть \mathcal{A}''_1 .

Множество всех функций, E -вычисляемых классическим автоматом, который на слове 1^ω хотя бы 1 раз выдаёт символ 0, есть E_λ .

Теорема 2. Множество всех функций, D -вычисляемых классическим автоматом, который на слове 1^ω выдаёт $0^m 1^\omega$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, есть \mathcal{A}'_1 .

Множество всех функций, D -вычисляемых классическим автоматом, который на слове 1^ω хотя бы 1 раз выдаёт символ 0 после 1 или всегда выдаёт только 0, есть \mathcal{A}_0 .

Теорема 3. Множество всех функций, E -вычисляемых автоматом с остановками, который на слове 1^ω выдаёт 1^ω , есть \mathcal{A}''_2 .

Множество всех функций, E -вычислимых автоматом с остановками, который на слове 1^ω хотя бы 1 раз выдаёт символ 0, есть E_λ .

Теорема 4. Множество всех функций, D -вычислимых автоматом с остановками, который на слове 1^ω выдаёт $0^m 1^\omega$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, есть A'_2 .

Множество всех функций, D -вычислимых автоматом с остановками, который на слове 1^ω хотя бы 1 раз выдаёт символ 0 после 1 или всегда выдаёт только 0, есть A_0 .

Теорема 5. Множество всех функций, E -вычислимых двусторонним автоматом, который на слове 1^ω выдаёт 1^ω , есть A''_3 .

Множество всех функций, E -вычислимых двусторонним автоматом, который на слове 1^ω хотя бы 1 раз выдаёт символ 0, есть E_λ .

Теорема 6. Множество всех функций, D -вычислимых двусторонним автоматом, есть A'_3 .

Литература

1. В.В. Кудрявцев, С.В. Алёшин, А.С. Подколзин «Введение в теорию автоматов». — М: Наука, 1985. — 595 с.
2. М.О. Rabin «Two-Way Finite Automata», Proceedings Summer Institute of Symbolic Logics, 1957 at Cornell University, pp. 366–369.
3. И.Е. Иванов «Некоторые классы функций, вычисляемые автоматами», Интеллектуальные системы. — 2011. Т. 15, вып. 1–4. — с. 361–378.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПЛОЩАДИ МУЛЬТИПЛЕКСОРОВ В МОДЕЛИ КЛЕТОЧНЫХ СХЕМ

С.А. Ложкин, В.С. Зизов

lozhkin@cs.msu.ru, vzs815@gmail.com

УДК 519.714

Клеточная схема представляет собой математическую модель интегральных схем которая учитывает особенности их физического синтеза. Принципиальным отличием этой модели от хорошо изученных классов схем из функциональных элементов (СФЭ) является наличие дополнительных требований на геометрию схемы, которые обеспечивают учет необходимых трассировочных ресурсов при создании ИС. Предметом изучения многих авторов стала сложность реализации т.н. мультиплексорной функции алгебры логики (ФАЛ) в различных классах схем. В настоящей работе устанавливаются новые асимптотически точные оценки площади клеточных схем, реализующих мультиплексорную ФАЛ порядка n , которые являются оценками высокой степени точности.

Ключевые слова: плоские схемы, СБИС, мультиплексорная функция, мультиплексор, схемы из функциональных элементов, клеточные схемы.

Введение

Модель клеточных схем (КС), под сложностью которых понимается их площадь, впервые была предложена в 1967 году С.С. Кравцовым в работе [1], в которой для неё был получен порядок роста соответствующей функции Шеннона, характеризующей сложность самой «сложной» функции алгебры логики (ФАЛ) от n переменных. Аналогичная математическая модель в зарубежных источниках была описана в 1980 году К.Д. Томпсоном в работе [2].

Сложность реализации в классе КС некоторых конкретных булевых операторов и, в частности, системы всех симметрических функций ФАЛ от всех n булевых переменных (БП), системы всех элементарных конъюнкций ранга n от n БП — т.н. дешифратора порядка n , — и некоторых

Ложкин Сергей Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Зизов Вадим Сергеевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

других, исследовались Н.А. Шкаликовой [3]. При этом было установлено, что при $n = 1, 2, \dots$ сложность любой из рассматриваемых систем, состоящей из $N(n)$ ФАЛ от n БП растёт как $\Omega(n \cdot N(n))$.

Как в теоретических исследованиях, так и при синтезе ИС, часто применяется мультиплексорная функция алгебры логики (ФАЛ). Обычно схемные реализации этой ФАЛ, называемые мультиплексорами, являются составной частью более сложных схем и, в частности, схем выбора из памяти.

Мультиплексорной ФАЛ порядка n называется ФАЛ μ_n с n адресными входами x_1, \dots, x_n , 2^n информационными входами y_0, \dots, y_{2^n-1} , которая при наборе $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ на адресных входах тождественно равна $y_{\nu(\sigma)}$, то есть информационному входу с номером $\nu(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i 2^{n-i}$. Иначе говоря, мультиплексорная функция может быть представлена в виде следующей дизъюнктивной нормальной формы ДНФ

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma)},$$

где, как обычно, $x_i^0 = \bar{x}_i, x_i^1 = x_i$. Мультиплексорные ФАЛ применяются как в теории индивидуального синтеза при поиске оптимальных либо близких к оптимальным схем, так и в теории универсального синтеза при разработке методов синтеза схем для произвольных ФАЛ и анализе поведения функции Шеннона. Кроме того, ФАЛ мультиплексорного типа применяются при тестировании и исследовании надёжности схем.

В связи с этим предметом изучения для многих работ стала сложность реализации мультиплексорной ФАЛ в различных классах схем. Так, асимптотически точные оценки 2^{n+1} для сложности ФАЛ μ_n в классах формул и СФЭ в стандартном базисе были установлены в статье В.В. Коровина [4]. В работе [5] для сложности π -схем, реализующих ФАЛ μ_n , были получены более точные оценки вида $2^{n+1}(1 + \frac{1}{2n} \pm O(\frac{1}{n \log n}))$.

Ранее в работе авторов [6] были получены асимптотически точные верхние и нижние оценки сложности КС, реализующих дешифратор порядка n . Более того, данные оценки совпадают в первом члене ее асимптотического разложения, имеют вид $2^{n-1}(1 \pm O(\frac{1}{n}))$, и аналогично работе [7] могут считаться асимптотическими оценками высокой степени точности (АОВСТ). В работе [8] для мультиплексорной ФАЛ μ_n были получены верхняя и нижняя асимптотические оценки вида $n \cdot 2^{n-1}$. В настоящей работе эти оценки уточнены до уровня АОВСТ.

Основные определения и описание модели

Клеточная схема представляет собой прямоугольную решётку, состоящую из квадратных клеток единичной площади. В каждой клетке содержится элемент одного из двух типов: либо функционального, либо коммутационного. Каждой стороне клетки соответствует не более одного полюса, т.е. входа или выхода элемента. Элементы, находящиеся в смежных по какой-либо стороне клетках, соединяются, а их полюса, отвечающие общей стороне клеток, отождествляются.

В данной работе рассматривается **базис**, состоящий из 3 функциональных элементов и 5 коммутационных, а также изоляторы (см. Рис. 1).

Определим *функционал площади* схем, который далее будет их критерием сложности. Схема Σ , не содержащая ни рядов, ни столбцов, состоящих только из изоляторов, имеет горизонтальный размер — *длину* l , вертикальный размер — *высоту* h . Всюду далее без ограничения общности будем считать, что $h \leq l$. Площадью $A(\Sigma)$ клеточной схемы Σ называется произведение длины и высоты схемы

$$A(\Sigma) = l(\Sigma)h(\Sigma). \tag{1}$$

Теорема 1. [о верхней оценке [8]] *Существует КС M_n , реализующая мультиплексорную ФАЛ μ_n , $n = 1, 2, \dots$, для которой*

$$A(M_n) \leq n2^{n-1} + O(2^{n-1}).$$

Нижняя оценка площади мультиплексоров

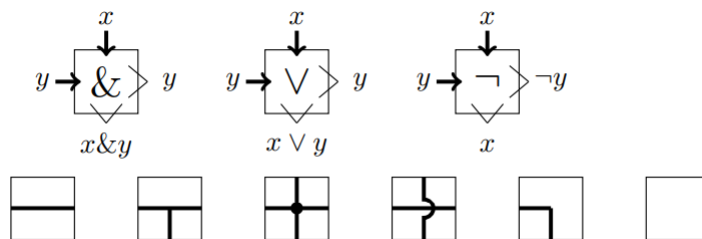


Рис. 1: Базис B_0 , функциональные элементы (&) конъюнкции, (V) дизъюнкции и (\neg) отрицания. Коммутационные элементы: 1) проводник, 2) Т-образный разветвитель, 3) разветвитель, 4) пересечение без соединения, 5) поворот.

Лемма 1. Пусть $КС \Sigma$ высоты h и длины l , где $h \leq l$, от $БП X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ и $Y(n) = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$ реализует ФАЛ $\mu_n(X, Y)$. Тогда для всех n высота схемы Σ удовлетворяет неравенству

$$h(\Sigma) \geq n - 1$$

Теорема 1. [о нижней оценке] Для мультиплексорной ФАЛ μ_n , при $n = 1, 2, \dots$, верна нижняя оценка:

$$A(\mu_n) \geq (n - 1)2^{n-1} + O(n^2)$$

Следствие 1. Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что при $n = 1, 2, \dots$ в классе $КС$ справедливо равенство,

$$A(\mu_n) = n2^{n-1} \pm O(2^n),$$

которое дает для $A(\mu_n)$ АОВСТ [7].

Заключение

В настоящей работе впервые получены нижние и верхние асимптотические оценки площади КС, реализующих мультиплексорную ФАЛ, которые являются асимптотическими оценками высокой степени точности.

Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука. — 1967. — Т. 19.
2. Thompson C.D. A complexity theory for VLSI. — 1980.
3. Шкаликowa Н.А. О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов // Математические вопросы кибернетики. — 1989. — Т. 2. — С. 177–197. — DOI: [10.4064/-21-1-573-583](https://doi.org/10.4064/-21-1-573-583).
4. Коровин В.В. О сложности реализации универсальной функции схемами из функциональных элементов // Дискретная математика. — 1995. — Т. 7 №2.
5. Ложкин С.А., Власов Н.В. О сложности мультиплексорной функции в классе π -схем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151 №2. — С. 98–106.
6. Ложкин С.А., Зизов В.С. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162 №3. — С. 322–334. — DOI: [10.26907/2541-7746.2020.3.322-334](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.3.322-334)
7. Ложкин С.А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики М., Наука, Физматлит. — 2005. — Т. 6.
8. Ложкин С. А., Зизов В.С. Асимптотически точные оценки для площади мультиплексоров в модели клеточных схем // Дискретная математика. — 2022. — Т. 34 №4. — С. 52–68. — DOI: [10.4213/dm1712](https://doi.org/10.4213/dm1712).

АЛГОРИТМ ЛОКАЛИЗАЦИИ АЦИКЛИЧЕСКОГО ПОДГРАФА

А.С. Лосев

A.S.Losev@yandex.ru

УДК 519.17

В работе предлагается алгоритм локализации ациклического подграфа в связном ориентированном графе. Полученный алгоритм может быть использован в исследованиях функционирования незамкнутых систем в условиях изоляции.

Ключевые слова: ориентированный граф, кластеризация, избыточные связи.

Задача формирования обратных стабилизирующих связей в замкнутых динамических системах, направленных на корректировку необходимых параметров системы и позволяющих поддерживать её в равновесии, имеют широкую практическую значимость в различных отраслях [1], [2]. В сочетании с современным принципом модульного построения технических систем [3], [4], обеспечивающего эффективную взаимозаменяемость и универсальность её составных частей, особый практический интерес вызывает обратная задача. А именно, исследование функциональных возможностей незамкнутой системы в условиях изоляции, например, выделение незамкнутой ациклической подсистемы из системы общего вида через удаление избыточных связей.

Введем в рассмотрение ориентированный граф $\Gamma = \{U, W\}$ с конечным множеством вершин U , множеством ребер W без петель и кратных ребер. Обозначим через $\|a(u_i, v_j)\|_{i,j=1}^n$ матрицу смежности, где $r(u_i, v_i) = 1$, $1 \leq i \leq n$, а n количество вершин графа.

На множестве U введем бинарное отношение: $u_1 \succ u_2$, $u_1, u_2 \in U$, если существует путь из вершины u_1 в вершину u_2 , которое является отношением частичного порядка. Обозначим U^* множество максимальных элементов и U_* множество минимальных элементов в U по отношению \succ . Назовем U^* множество выходных вершин, состоящее из вершин, в которые не входят ребра, соответственно U_* множество входных вершин, состоящее из вершин, из которых не выходят ребра.

Преобразование ориентированного графа в ациклический связный граф проведем последовательно в два этапа.

На первом этапе проведем кластеризацию ориентированного графа по отношению циклической эквивалентности. Обозначим $[U]$ множество классов эквивалентности на которые разбивается множество U , и отношением частичного порядка: $[u_1] \succeq [u_2]$, $[u_1], [u_2] \in [U]$, если существует путь из вершины класса $[u_1]$ в вершину класса $[u_2]$. Бинарное отношение " \succeq " является отношением частичного порядка, так как рефлексивно, транзитивно и антисимметрично [5]. Эквивалентными вершинами назовем две любые вершины графа Γ принадлежащие одному циклу.

Используя разработанный алгоритм [6] на множестве U, W графа Γ построим ациклический фактор-граф $[\Gamma]$ с множеством фактор-вершин $[U] = \bigcup_{i=1}^s [k_i]$, где $[k_i]$ кластер содержащий эквивалентные вершины и множеством фактор-ребер $[W] = W \setminus \bigcup_{i=1}^s W([k_i])$, где $W([k_i]) = \{(u, v) \in W : u, v \in [k_i]\}$.

На втором этапе в каждом кластере удаляем набор ребер, приводящий его к ациклическому виду, для этого в каждом кластере $[k_i] \subseteq U$ выделим подмножество входных $U_*([k_i])$ и выходных вершин $U^*([k_i])$, $1 \leq i \leq s$ относительно полученного графа.

Используя разработанный алгоритм [7] на множестве фактор-вершин $[U]$ и фактор-ребер $[W]$ ациклического фактор-графа $[\Gamma]$ построим ациклический ориентированный граф $\hat{\Gamma}$ с множеством вершин $U(\hat{\Gamma}) = \bigcup_{i=1}^s U_*([k_i]) \cup U^*([k_i]) \subseteq U$ и ребер $W(\hat{\Gamma}) \subseteq W$.

Каждый из этапов алгоритма является независимым инструментом и может быть использован для кластеризации ориентированного графа по отношению циклической эквивалентности

и формирования ациклического ориентированного графа из связного, удалением избыточных связей между выделенными начальными и конечными вершинами. Необходимо подчеркнуть, что второй этап алгоритма формирует ациклический подграф, который может содержать как меньшее число ребер, так и вершин по отношению к исходному графу.

Вычислительная сложность полученного алгоритма на каждом из этапов равна $O(n + m)$ и $O(n^2 + m)$ числу арифметических операций соответственно. Она сравнима с алгоритмами определения компонентов сильной связности Косарайю и Тарьяна [8]. Но в отличие от них, представленный алгоритм обладает более высокой скоростью реализации, так как не содержит в своей реализации повторного обращения к обработанным вершинам.

Литература

1. *Востриков А.С.* Принцип локализации в задаче синтеза систем автоматического управления // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 1988. — №2. — С. 42.
2. *Жмудь В.А.* Численная оптимизация замкнутых систем автоматического управления в программе VisSim: новые структуры и методы: монография — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2016. — 252 с.
3. *Базров Б.М.* Модульная технология в машиностроении. М.: Машиностроение: 2001. — 368 с.
4. *Ерофеев Я.П., Бобков А.В.* О модульном принципе конструирования авиакосмической техники // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. — 2018. — №14. — С. 96–98.
5. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре — М.: Физматлит, 1962. — 431 с.
6. *Цициашвили Г.Ш., Лосев А.С., Осипова М.А.* Алгоритмы кластеризации графов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика и математика. — 2016. — №1. — С. 145–149.
7. *Tsitsiashvili G.Sh., Bulgakov V.P., Losev A.S.* Replacement of Directed Graph by Acyclic Directed Graph and Its Application in Biostatistics // Journal of Biometrics & Biostatistics. — 2018. — Vol.9(1).
8. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы. Построение и анализ — М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. — 955 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ К ЗАДАЧЕ ПЕРЕВОДА ИЗОБРАЖЕНИЙ В ФОРМАЛЬНУЮ МОДЕЛЬ ДОРОЖНЫХ СИТУАЦИЙ

М.И. Менькин

mihail_mn@inbox.ru

УДК 512.56

Работа посвящена определению некоторых свойств дорожных ситуаций по изображениям из билетов экзамена на знание ПДД. Приведён список распознаваемых свойств. Описаны основные процедуры алгоритма для распознавания поворота налево.

Ключевые слова: семантический анализ правил дорожного движения, распознавание образов, анализ изображений, формальная модель дорожной ситуации, автоматическая сдача экзамена на знание правил дорожного движения.

Тема доклада связана с исследованием по семантическому анализу Правил дорожного движения. Ранее в статьях [1,2] были введена формальная модель дорожных ситуаций, а также представлен вариант разбора предложений из документа [3] и их перевод в формальную модель. Следующий этап работы заключается в верификации и проверке предлагаемой модели семантики текста ПДД посредством автоматического прохождения экзамена на знание ПДД.

Для автоматического прохождения экзамена на знание ПДД необходимо распознать текст вопроса, изображение к вопросу (если есть) и правильно ответить на вопрос. В докладе рассказывается об одном подходе к распознаванию какой-либо сущности на изображении через построение правил относительно понятий «пиксель изображения», «цвет пикселя», «путь (из пикселей)».

Для полного описания дорожной ситуации, которая изображена на картинке в каком-либо из вопросов, необходимо установить наличие определённых свойств, например: поворот налево или направо; количество полос; наличие светофора или регулировщика, их сигнал; и др.

Логические правила в моделировании процессов принятия решения использовались профессором А.С. Подколзиным для автоматического решения математических задач, обработки текста и изображений, автоматической игры в шахматы, и т.д. [4,5]. Одна из причин использования такого подхода — необходимость извлечения большого количества информации при наличии маленькой обучающей выборки. Это приводит к необходимости моделирования мышления человека, т.е. разработки алгоритма по принципу того, как сам человек находил бы и понимал конкретные сущности (в нашем случае — на изображении).

Для демонстрации этой идеи приведём в качестве примера поиск поворота налево.

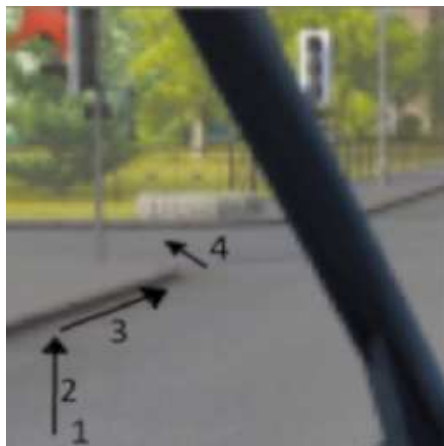


Рис. 1: Поиск поворота налево.

Предобработка изображения. Понижаем разрешение изображения. Таким образом оставляем только контрастную часть и избавляемся от шумов, т.е. выделяем основные линии и области цветности. Как человек пытается огрубить изображение (когда ищет поворот), так и мы пытаемся заметить только важные детали на изображении (дорога и её граница).

Поиск поворота. Находим пиксель такой, что его цвет соответствует цвету дороги (1). Далее строим путь до границы дороги, горизонтально вверх (2). Двигаемся вдоль границы дороги (3) и проверяем, не обрывается ли граница дороги чтобы уйти налево (4) (см. рис. 1). Если все четыре условия будут выполнены, то мы нашли поворот налево.

Даже такое простое правило, проверенное на 200 изображениях, даёт неплохой результат: 72% верных ответов, 20% ошибок первого рода (нашли поворот там где его нет), 8% ошибок второго рода (пропустили поворот). Результат может быть улучшен, если подкрепить этот алгоритм, например, распознаванием знаков или транспортных средств, которые находятся слева.

Литература

1. М. И. Менькин Объектная модель правил дорожного движения. // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, **23**:1 (2019), 39-53.
2. М. И. Менькин Автоматический перевод правил дорожного движения в теоретико-графовую формальную модель // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, **23**:1 (2019), 7-31.
3. Постановление Правительства РФ от 23.10.1993 N 1090 (ред. от 04.12.2018) «О правилах дорожного движения» // КонсультантПлюс.
4. А. С. Подколзин Компьютерный решатель математических задач // Докл. РАН, **335**:4 (1994), 427-429.
5. А. С. Подколзин Исследование логических процессов путем компьютерного моделирования // Интеллектуальные системы. Теория и приложения, **20**:3 (2016), 164-168.

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ АВТОМАТОВ-ЖЕРТВ АВТОМАТОМ-ХИЩНИКОМ С КРАСКОЙ

Д.И. Мони́на
d.monina@mail.ru

УДК 510.51

В работе исследуются различные траектории движения автомата-волка с краской для поимки автомата-зайца в зависимости от траектории движения и начального положения зайца. Доказаны некоторые утверждения, описывающие траекторию движения волка.

Ключевые слова: автоматы в лабиринтах, автоматы с краской, задача преследования, траектории, периодичность.

Постановка задачи

Целью работы является постановка и решение задачи математического моделирования процесса преследования зайца волком на бесконечной дискретной прямой.

Механизмы восприятия и принятия решений перемещающихся объектов — «волка» и «зайца» моделируется при помощи конечного автомата.

Таким образом, задача преследования получает автоматную трактовку и решается в этой постановке методами дискретной математики.

В данной работе было решено рассмотреть более узко специализированную задачу, в которой рассматривается автомат с краской, который мы назовем волком и конечный автомат, который мы назовем зайцем.

Обозначим множества натуральных и целых чисел как \mathbb{N} и \mathbb{Z} , соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество целых точек на прямой будем обозначать символом $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, рассматривая это множество как геометрический объект, а именно, как лабиринт, в котором могут перемещаться автоматы. Точку на этой прямой будем идентифицировать при помощи ее координаты. Назовем r -окрестностью точки x_0 множество целых точек $D_{x_0,r} = \{x \in \mathbb{L}_{\mathbb{Z}} \mid |x - x_0| \leq r\}$.

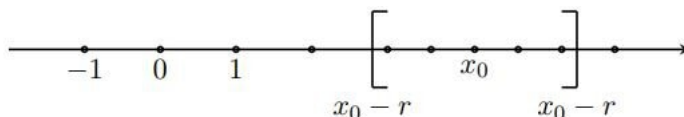


Рис. 1:

Под конечным автоматом будем понимать инициальный конечный автомат вида $A = (A, Q, B, \phi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата A , $\varphi: Q \times A \rightarrow Q$ и $\psi: Q \times A \rightarrow B$ — функции переходов и выходов A , соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности A «видеть» происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции ϕ и ψ задают внутреннюю логику автомата A .

Под конечным автоматом с краской будем понимать инициальный конечный автомат вида $A = (A, Q, B, \phi, \psi, \psi', q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата A , $\phi: Q \times A \rightarrow Q$ и $\psi: Q \times A \rightarrow B$ — функции переходов и выходов A , соответственно, $\psi': Q \times A \rightarrow [0, 1]$ — функция покраски (0 — пустая клетка, 1 — закрашенная). $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности A «видеть» происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции ϕ, ψ, ψ' задают внутреннюю логику автомата A .

Пусть автомат A со скоростью V и обзором R находится в точке x_0 . Множество точек $D_{x_0,R}$ называется зоной обзора A .

Автомат со скоростью V и обзором R будем обозначать как $A(R, V)$

В рассматриваемой задаче, Волк- это конечный автомат $W = W(2, 2)$ с краской, которая помогает волку делать клетки различимыми для себя (волк может покрасить клетку и “стереть” цвет с нее).

Заяц также является конечным автоматом $H = H(1, 1)$. Однако у зайца есть небольшая привилегия — он сам выбирает стартовую клетку.

Фиксируются V и R волка и зайца так, чтобы обзор волка был не меньше обзора зайца, а скорость волка — больше скорости зайца.

Входным алфавитом автомата W является множество всех возможных состояний его конечной зоны обзора. Выходным алфавитом автомата W , перемещающегося в лабиринте $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$, является множество $B = D_{0,V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется скоростью автомата W . В каждый такт времени автомат W получает на вход символ, кодирующий состояние его зоны обзора. В соответствии со своими функциями переходов и выходов, W вырабатывает свой выходной символ b и меняет свое состояние. При этом, если W в такт t находился в точке $x(t)$ и выдал выходной символ $b(t)$, это означает, что он переходит в точку $x(t+1) = x(t) + b(t)$, где и будет находиться в такт $(t+1)$.

$|A| = 2^5 = 32$ - мощность входного алфавита, так как каждая клетка может быть либо пустой, либо закрашенной, а всего автомат видит только пять клеток.

$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ - выходной алфавит для любой скорости волка (1 и 2)

$|B| = 5$ - мощность выходного алфавита.

Скажем, что волк или заяц идет “вправо”, если он идет в положительном направлении прямой, “влево” — если идет в отрицательном направлении, а “развернуться” — значит поменять положительное направление хода на отрицательное и наоборот.

Цель работы

Цель данной работы — понять, существует ли волк, который ловит зайца независимо от его начального положения, и если такой существует, то привести пример траектории волка при которой реализуется поимка зайца, или же доказать, что такой траектории не существует.

Основные результаты

Утверждение 1. *Существует траектория, при которой волк ловит статичного зайца при любом его начальном расположении.*

Утверждение 2. *Волк с периодической последовательностью выходных символов не ловит зайца.*

Утверждение 3. \nexists *автомата, реализующего траекторию, задаваемую геометрической прогрессией.*

Литература

1. *Н.Ю. Волков.* Об автоматной модели преследования. Дискретная математика 2007, Т. 19, вып. 2., с. 131-160.
2. *Н.Ю. Волков.* Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях. Интеллектуальные системы 2007, Т. 11, вып. 1-4, с. 361-402.
3. *Н.Ю. Волков.* Об автоматной модели преследования внутри квадрата. Интеллектуальные системы 2008, Т. 12, вып. 1-4, с. 137-158.
4. *Н.Ю. Волков.* О возможности поимки жертв в квадранте. Интеллектуальные системы 2009, Т. 13, вып. 1-4, с. 169-236, 2009 г.

ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТОГО КЛАССА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО МОДУЛЮ КВАДРАТА ПРОСТОГО ЧИСЛА ПОСРЕДСТВОМ ОТНОШЕНИЯ

С.Н. Селезнева

selezn@cs.msu.ru

УДК 519.716, 519.716.5

В работе исследуется замкнутый класс Pol_{p^2} полиномиальных по модулю p^2 функций p^2 -значной логики, где p — простое число. Получены в явном виде отношения, описывающие класс Pol_{p^2} .

Ключевые слова: функция многозначной логики, кольцо вычетов, полином, замкнутый класс, отношение.

Пусть $k \geq 2$ — целое число и $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Функцией k -значной логики называется отображение $f : E_k^n \rightarrow E_k$, $n \geq 1$. Множество всех функций k -значной логики обозначаем P_k . Функцию $f \in P_k$ называем полиномиальной (по модулю k), если ее можно представить каким-то полиномом над кольцом вычетов по модулю k . Множество всех полиномиальных функций k -значной логики обозначаем Pol_k . Известно, что $Pol_k = P_k$ тогда и только тогда, когда k — простое число [1]. Отметим, что при $k \geq 2$ множество Pol_k является замкнутым классом.

Отношением (предикатом) местности r на множестве E_k называется подмножество множества E_k^r . Множество всех отношений на E_k обозначаем R_k . Множество всех функций из P_k , сохраняющих отношение ρ , обозначаем $A_k(\rho)$. Отметим, что для любого $\rho \in R_k$ множество $A_k(\rho)$ является замкнутым классом.

В [2] получены отношения, описывающие замкнутые классы полиномиальных функций k -значной логики для некоторых случаев, когда k — степень простого числа. В настоящей работе эти отношения уточняются для случая, когда k — квадрат простого числа.

Определим отношение $\rho_{p,2,2} \subseteq E_{p^2}^4$:

$$\rho_{p,2,2} = \left\{ \left(\begin{array}{c} a \\ a + bp \\ a + cp \\ a + (b + c)p \end{array} \right) \mid a, b, c \in E_{p^2} \right\}.$$

Теорема 1. Пусть p — простое число. Класс Pol_{p^2} является множеством всех функций из P_{p^2} , сохраняющих отношение $\rho_{p,2,2}$, т. е. $Pol_{p^2} = A_{p^2}(\rho_{p,2,2})$.

Следующий критерий следует из теоремы 1.

Теорема 2. Пусть p — простое число и $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{p^2}$. Функция f полиномиальна по модулю p^2 тогда и только тогда, когда для любых $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in E_{p^2}$ справедливо равенство:

$$f(x_1 + (b_1 + c_1)p, \dots, x_n + (b_n + c_n)p) - f(x_1 + b_1p, \dots, x_n + b_np) - f(x_1 + c_1p, \dots, x_n + c_np) + f(x_1, \dots, x_n) = 0 \pmod{p^2}.$$

В случае $p \neq 2$ отношение, описывающее класс Pol_{p^2} , можно упростить. Определим при $p \neq 2$ отношение $\rho_{p,2,1} \subseteq E_{p^2}^3$:

$$\rho_{p,2,1} = \left\{ \left(\begin{array}{c} a \\ a + bp \\ a + 2bp \end{array} \right) \mid a, b \in E_{p^2} \right\}.$$

Теорема 3. Пусть p — простое число, $p \neq 2$. Класс Pol_{p^2} является множеством всех функций из P_{p^2} , сохраняющих отношение $\rho_{p,2,1}$, т. е. $Pol_{p^2} = A_{p^2}(\rho_{p,2,1})$.

Работа поддержана Минобрнауки в рамках выполнения программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

Селезнева Светлана Николаевна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Следующий критерий следует из теоремы 3.

Теорема 4. Пусть p — простое число, $p \neq 2$ и $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{p^2}$. Функция f полиномиальна по модулю p^2 тогда и только тогда, когда для любых $b_1, \dots, b_n \in E_{p^2}$ справедливо равенство:

$$f(x_1 + 2b_1p, \dots, x_n + 2b_np) - 2f(x_1 + b_1p, \dots, x_n + b_np) + f(x_1, \dots, x_n) = 0 \pmod{p^2}.$$

Литература

1. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.

2. Селезнева С. Н. Описание замкнутого класса полиномиальных функций по модулю степени простого числа посредством отношения // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 4. С. 115–125.

ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ МУРА ПО РЕГУЛЯРНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ

А.И. Сидорчук

alexstelbu@mail.ru

УДК 519.72

В данной работе рассмотрен алгоритм, который преобразует регулярное выражение в диаграмму Мура. Его принципиальное отличие от других алгоритмов является то, что при изменении регулярного выражения вида $R_2 = R_1 * B$, будет выполнено преобразование автомата соответствующего R_1 до автомата соответствующего R_2 , вместо построения с нуля.

Ключевые слова: теория автоматов, регулярные выражения.

Введение

В данной работе происходит изучение взаимосвязи регулярных событий, определяемых аналогично [1] и диаграмм Мура. В теории автоматов хорошо известна теорема Клини (точную её формулировку можно также посмотреть в [1]): Теорема Клини. Событие E в алфавите A представимо тогда и только тогда, когда оно регулярно.

Основные определения и понятия

Определение 1. Конечным абстрактным автоматом, называется 6-ка $(A, B, Q, \phi, \psi, q_0)$, где A — входной алфавит, B — выходной алфавит, Q — алфавит (множество) состояний, ϕ — функция перехода, которая по текущему состоянию и символу из A , определяет следующее состояние автомата, ψ — функция выхода, которая по текущему состоянию и символу из A определяет выходной символ, q_0 — начальное состояние. Здесь, будем использовать $A = \{0, 1\}$ и $B = \{0, 1\}$.

Определение 2. Пусть $V_q = (A, B, Q, \phi, \psi, q_0)$ — инициальный конечный автомат, V' является подмножеством V . Множество $M = \{a|a \in A^*, \psi(a, q) \in B'\}$ называем представимым в конечном автомате V_q с помощью подмножества B' входных символов. Подмножества множества $A^* \setminus \{\lambda\}$ далее называем событиями в алфавите A (или, короче, событиями). Если существует конечный автомат V_q представляющий событие M посредством некоторого подмножества B' , то событие M называется представимым.

Определение 3. Итерация события M есть множество всех слов $a_1a_2\dots a_k$, где $a_1\dots a_k \in M$, $k \geq 1$

Определение 3. Произведение (конкатенация) событий A и B есть множество всех слов вида a_1a_2 , где $a_1 \in A$, $a_2 \in B$.

Определение 4. Объединения событий A и B есть множество $M = \{A \cup B\}$.

Определение 5. Множество слов E называется регулярным, если: E пусто или содержит в точности один элемент — однобуквенное слово, или E может быть получено из регулярных событий из пункта A с помощью применения к ним конечного числа раз операций объединения, конкатенации и итерации.

Определение 6. Диаграммой Мура автомата $V = (A, B, Q, \phi, \psi, q_0)$, называется ориентированный граф, вершинами которого являются состояния $q \in Q$, и для каждого равенства вида $\phi(a, q) = q'$, граф имеет ребро, идущее из q в q' , на котором стоит метка (a, b) , где $b = \psi(q, a)$, и других ребер не существует.

Основные результаты

Утверждение 1. Пусть A — автомат, задающий регулярное выражение R . Тогда, существует автомат A_R , который задает выражение R , такой, что ребра которые входят в любое состояние автомата A_R , имеют все выходные отметки равные либо 0, либо 1

Утверждение 2. Пусть задано регулярное выражение R_1 и задающий его автомат A_{R_1} . Существует алгоритм, который преобразует A_{R_1} , в A_{R_2} который соответствует регулярному выражению $R_2 = R_1 * a$.

Утверждение 3. Пусть задано регулярное выражение R_1 и задающий его автомат A_{R_1} . Тогда, существует алгоритм, который преобразует A_{R_1} , в A_{R_2} который соответствует регулярному выражению $R_2 = R_1 * (B)^*$, где B — регулярное выражение состоящая из конкатенации символов алфавита

Утверждение 4. Пусть задано регулярное выражение R_1 и задающий его автомат A_{R_1} . Тогда, существует алгоритм, который преобразует A_{R_1} , в A_{R_2} который соответствует регулярному выражению $R_2 = R_1 * B$, где B — любое регулярное выражение, не содержащее символов объединения

Литература

1. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Наука, 1985.
2. <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/635013>
3. <https://studfile.net/preview/300184/page:2/>
4. <https://studfile.net/preview/3009034/page:7/>

О СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ АНАЛИЗА ВЫЧИСЛЕНИЙ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Т. Тан

tangtx@smbu.edu.cn

УДК 519.713.8

Для новой модели параметризованных конечных синхронных автоматов-преобразователей установлены оценки вычислительной сложности ряда алгоритмических задач, включая задачи проверки эквивалентности, унифицируемости, минимальности, бисимулярности, тотальности.

Ключевые слова: автомат-преобразователь, параметризация, алгоритм, сложность.

В статье рассматривается новая разновидность конечных автоматов — параметризованные конечные синхронные автоматы-преобразователи. В отличие от широко известной модели конечных автоматов-преобразователей, частным случаем которой являются автоматы Мили, в новой модели на переходах между состояниями автоматов в качестве выходных данных допускается использование не только букв выходного алфавита, но также и переменных-параметров. Для каждого набора значений этих переменных параметризованный автомат становится обычным

Тан Тяньсян, аспирант, университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

конечным автоматом, который осуществляет преобразование слов входного алфавита в слова выходного алфавита. Таким образом, любой параметризованный автомат задает целое множество обычных автоматов-преобразователей. Для параметризованных автоматов можно формулировать и изучать традиционные алгоритмические задачи анализа свойств вычислений такие, как проверка эквивалентности, бисимулярности, тотальности, минимальности и др, а также задачи унификации, антиунификации. В статье представлены оценки временной сложности указанных задач для новой модели параметризованных конечных синхронных автоматов-преобразователей.

Конечный синхронный автомат-преобразователь (далее просто автомат) — это система $\pi = (\Sigma, \Delta, Q, q_0, F, \varphi)$, где Σ и Δ — входной и выходной алфавиты, Q — конечное множество состояний, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $F \subseteq Q$ — подмножество финальных состояний, и $\varphi \subseteq Q \times \Sigma \times \Delta \times Q$ — конечное отношение переходов. Каждый набор $(q, a, b, q') \in \varphi$ условимся называть переходом и обозначать записью $q \xrightarrow{a/b} q'$. Автомат π называется детерминированным, если для каждого состояния $q \in Q$ и каждой входной буквы $a \in \Sigma$ отношение переходов φ содержит не более одного перехода вида $q \xrightarrow{a/b} q'$. Вычислением автомата π называется любая последовательность переходов $q_0 \xrightarrow{a_1/b_1} q_1 \xrightarrow{a_2/b_2} \dots \xrightarrow{a_n/b_n} q_n$, в которой $q_n \in F$; такое вычисление обозначим записью $q_0 \xrightarrow{u/w} q_n$, где $u = a_1 a_2 \dots a_n$, $w = b_1 b_2 \dots b_n$. Автомат π задает отношение $T_\pi \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$ на множествах входных и выходных слов: $T_\pi = \{(u, w) : q_0 \xrightarrow{u/w} q' \text{ для некоторого } q' \in F\}$. Размером $size(\pi)$ автомата π будем называть число переходов в множестве φ .

Пусть \mathcal{X} — это бесконечное множество переменных. Конечный параметризованный синхронный автомат-преобразователь (далее просто параметризованный автомат) — это система $\Pi = (\Sigma, \Delta, Q, q_0, F, \Phi)$, которая отличается от автомата лишь тем, что отношение переходов имеет вид $\Phi \subseteq Q \times \Sigma \times (\Delta \cup \mathcal{X}) \times Q$, т.е. некоторые переходы $q \xrightarrow{a/x} q'$ вместо выходной буквы $b \in \Delta$ могут быть помечены переменной $x \in \mathcal{X}$.

Подстановкой будем называть всякое отображение $\theta : \mathcal{X} \rightarrow \Delta \cup \mathcal{X}$. Подстановка θ называется основной, если $\theta(x) \in \Delta$ для любой переменной $x \in \mathcal{X}$. Множество всех подстановок (основных подстановок) обозначим записью $Subst$ (соответственно $GSubst$). Результатом применения подстановки θ к параметризованному автомату Π является система $\Pi' = \Pi\theta$, которая получается из Π заменой каждой переменной x на символ (выходную букву или переменную) $\theta(x)$ во всех переходах $q \xrightarrow{a/x} q'$ параметризованного автомата Π .

Задачи проверки выполнимости предикатов вида $P(\pi)$ или $R(\pi', \pi'')$, которые традиционно изучают для различных типов автоматов без параметров, можно распространить на класс параметризованных автоматов двояко:

- экзистенциально (\exists -формулировка): проверка выполнимости предикатов $\exists \theta \in GSubst : P(\Pi\theta)$ или $\exists \theta', \theta'' \in GSubst : R(\Pi'\theta', \Pi''\theta'')$;
- универсально (\forall -формулировка): проверка выполнимости предикатов $\forall \theta \in GSubst : P(\Pi\theta)$ или $\forall \theta' \in GSubst \exists \theta'' \in GSubst : R(\Pi'\theta', \Pi''\theta'')$.

Далее перечислены результаты о вычислительной сложности экзистенциальных и универсальных вариантов задач проверки некоторых предикатов, хорошо известных в теории автоматов и характеризующих особенности устройства и вычислений автоматов-преобразователей. Эти результаты были получены автором статьи в совместных исследованиях с его научным руководителем.

Ввиду ограниченности объема статьи утверждения приводятся без доказательств. Некоторые оценки сложности являются сравнительно простым переложением результатов, ранее полученных в статье [1] для параметризованных регулярных выражений; они особо отмечены соответствующей ссылкой.

1). Автоматы π' и π'' называются эквивалентными, если $T(\pi') = T(\pi'')$.

Утверждение 1. Для параметризованных детерминированных автоматов \exists -задача и \forall -задача проверки эквивалентности являются **NL**-полными.

Утверждение 2 [1]. Для параметризованных недетерминированных автоматов \exists -задача и \forall -задача проверки эквивалентности являются **EXPSPACE**-полными.

2). Автомат π называется функциональным, если отношение $T(\pi)$ является функцией, имеющей тип $\Sigma^* \rightarrow \Delta^*$.

Утверждение 3. Для параметризованных автоматов \exists -задача и \forall -задача проверки функциональности являются **NL**-полными.

3). Задача проверки минимальности автоматов состоит в том, чтобы для заданного автомата π и заданного положительного числа k проверить, существует ли такой автомат π' , для которого выполнены условия $T(\pi) = T(\pi')$ и $size(\pi') \leq k$.

Утверждение 4. Для параметризованных детерминированных автоматов \exists -задача проверки минимальности является **NP**-полной, а \forall -задача проверки минимальности является **со-NP**-полной.

4). Для автоматов $\pi' = (\Sigma, \Delta, Q', q'_0, F', \varphi')$ и $\pi'' = (\Sigma, \Delta, Q'', q''_0, F'', \varphi'')$ отношение $B \subseteq Q' \times Q''$ называется отношением бисимуляции, если оно удовлетворяет следующим трем условиям для любой пары состояний $q' \in Q', q'' \in Q''$, для которой выполнено $(q', q'') \in B$:

- $q' \in F' \Leftrightarrow q'' \in F''$;
- для любого перехода $q' \xrightarrow{a/b} p'$ существует такой переход $q'' \xrightarrow{a/b} p''$, для которого верно $(p', p'') \in B$;
- для любого перехода $q'' \xrightarrow{a/b} p''$ существует такой переход $q' \xrightarrow{a/b} p'$, для которого верно $(p', p'') \in B$.

Автоматы π' и π'' называются бисимулярными, если существует такое отношение бисимуляции B , для которого верно $(q'_0, q''_0) \in B$.

Утверждение 5. Для параметризованных автоматов \exists -задача проверки бисимулярности является **NP**-полной, а \forall -задача проверки бисимулярности является Π_2^P -полной.

5). Задача проверки включения слов состоит в том, чтобы для произвольного заданного автомата π и заданной пары слов $(u, w) \in \Sigma^* \times \Delta^*$ проверить, выполняется ли включение $(u, w) \in T(\pi)$.

Утверждение 6 [1]. Для параметризованных автоматов \exists -задача проверки включения слов является **NP**-полной, а \forall -задача проверки включения слов является **со-NP**-полной.

Утверждение 7. Для детерминированных параметризованных автоматов \exists -задача и \forall -задача проверки включения слов являются **NL**-полными.

6). Задача проверки тотальности автоматов состоит в том, чтобы для произвольного заданного автомата π проверить, что для любого выходного слова $w \in \Delta^*$ существует такое входное слово $u \in \Sigma^*$, для которого выполняется включение $(u, w) \in T(\pi)$.

Утверждение 8 [1]. Для параметризованных автоматов \exists -задача проверки тотальности является **EXSPACE**-полной, а \forall -задача проверки тотальности является **PSPACE**-полной.

7). Помимо ранее известных задач анализа вычислений автоматов была также исследована задача унификации, характерная для параметризованных систем. Параметризованные автоматы π_1 и π_2 называются унифицируемыми, если существуют такие подстановки θ_1 и θ_2 , что для параметризованных автоматов $\pi'_1 = \pi_1\theta_1$ и $\pi'_2 = \pi_2\theta_2$ выполнены два условия:

- для любой подстановки $\eta_1 \in GSubst$ существует такая подстановка $\eta_2 \in GSubst$, для которой верно равенство $T(\pi'_1\eta_1) = T(\pi'_2\eta_2)$;
- для любой подстановки $\eta_2 \in GSubst$ существует такая подстановка $\eta_1 \in GSubst$, для которой верно равенство $T(\pi'_1\eta_1) = T(\pi'_2\eta_2)$.

Утверждение 9. Для параметризованных детерминированных автоматов задача проверки унифицируемости принадлежит классу сложности **P**.

Как можно видеть из полученных результатов, задачи анализа поведения параметризованных конечных автоматов-преобразователей расположены в очень широком диапазоне классов

сложности от **NL** до **EXPSpace** в зависимости от типа задачи и формы ее постановки. Важным здесь является то, что для параметризованных детерминированных автоматов сложность некоторых задач оказалась невелика, и поэтому для этого класса автоматов можно разрабатывать эффективные алгоритмы их решения, которые смогут найти практическое применение.

Литература

1. Pablo Barcelo, Juan Reutter, Leonid Libkin. Parameterized regular expressions and their languages. Theoretical Computer Science, 2013, v. 474, p. 21–45.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ ПО ЛЕНТАМ МАШИН ТЬЮРИНГА ПРИ СТАРТЕ НА ПУСТОЙ ЛЕНТЕ

В.В. Ушакова

valentina@ushakovatina.com

УДК 510.57

В данной работе рассматриваются знакопеременные последовательности $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$, где $s_i \in \mathbb{Z}$, $s_i \neq 0$, называемые последовательностями траектории. Также изучаются допустимые последовательности траектории (последовательности траектории, которым можно сопоставить по крайней мере одну машину Тьюринга такую, которая при старте на пустой ленте будет перемещаться в соответствии с данной последовательностью).

Ключевые слова: машина Тьюринга, последовательность, траектория.

Определения

Последовательность траектории. Последовательностью траектории назовём последовательность вида $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$, где $s_i \in \mathbb{Z}$, такую, что:

1. при $s_1 > 0$ все элементы $s_i > 0$ при нечётном номере i и $s_i < 0$ при чётном номере i ;
2. при $s_1 < 0$ все элементы $s_i < 0$ при нечётном номере i и $s_i > 0$ при чётном номере i .

Конечная последовательность траектории. Конечной последовательностью траектории назовём последовательность траектории конечной длины.

Бесконечная последовательность траектории. Бесконечной последовательностью траектории назовём последовательность траектории бесконечной длины.

Последовательность разностей траектории. Последовательностью разностей траектории для последовательности траектории s назовём последовательность вида $s'_1, s'_2, \dots, s'_i, \dots$, где $s'_i = s_{i+1} + s_i$.

Машина Тьюринга. Понятие Машины Тьюринга будем рассматривать аналогично тому, как она рассматривается в [1]:

Машина Тьюринга M состоит из двух объектов:

1. бесконечной влево и вправо ленты (в дальнейшем лента);
2. управляющего автомата (в дальнейшем автомат).

Лента состоит из ячеек, в каждой из которой записан символ из конечного алфавита ленточных символов Γ . При этом, на конечном участке ленты записаны символы из алфавита входных символов Σ , $\Sigma \subset \Gamma$, а в остальных ячейках записан символ b , который будем называть пустым символом. $b \in \Gamma$ и $b \notin \Sigma$.

Автомат обладает конечным алфавитом состояний Q . Также, у него есть считывающая-пишущая головка, которая обзывает в каждый момент времени одну из ячеек ленты. Функцией переходов δ , которая зависит от символа в обзываемой ячейке и текущего состояния автомата, определяются следующее состояние, в которое перейдёт автомат, символ, который запишется в

текущей ячейке вместо считанного, а также перемещение головки по ленте (на одну ячейку влево или вправо, или остаться на месте — L,R,S соответственно).

Формально определим машину Тьюринга как восьмёрку:

$$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, M = \{L, R, S\}, q_0, b, F),$$

Q — алфавит состояний машины Тьюринга,

Σ — алфавит входных символов,

Γ — алфавит ленточных символов,

δ — функция переходов, $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Sigma \times M$,

$M = \{L, R, S\}$ — алфавит символов допустимых перемещений по ленте,

q_0 — начальное состояние автомата,

b — пустой символ ($b \in \Gamma$ и $b \notin \Sigma$),

F — алфавит финальных состояний ($F \subseteq Q$).

Рабочая зона машины Тьюринга. Рабочей зоной машины Тьюринга будем называть отрезок ленты машины Тьюринга, заключённый между ячейками, в которых записаны пустые символы и в ячейках которого записаны символы из алфавита входных символов Σ .

Допустимая последовательность траектории на пустой ленте. Допустимой последовательностью траектории на пустой ленте назовём последовательность траектории, которой можно сопоставить по крайней мере одну машину Тьюринга такую, которая при старте на пустой ленте будет перемещаться в соответствии с данной последовательностью. А именно, отрицательные элементы будем рассматривать как количество подряд идущих перемещений влево, а положительные — как количество подряд идущих перемещений вправо. Такты, когда ячейка не меняется, опускаем.

Основные результаты

Утверждение 1. *Любая конечная последовательность траектории является допустимой на пустой ленте.*

Рассмотрим подпоследовательность траектории s_1, s_2, \dots, s_i . Рассмотрим каждую из её подпоследовательностей s_1, s_2, \dots, s_j , $j \leq i$. Посчитаем сумму элементов $s_1 + s_2 + \dots + s_j$ в каждой из этих подпоследовательностей. Минимумом \min_i подпоследовательности траектории s_1, s_2, \dots, s_i назовём наименьшую из получившихся сумм. Максимумом \max_i подпоследовательности траектории s_1, s_2, \dots, s_i назовём наибольшую из получившихся сумм.

Утверждение 2. *Любая бесконечная последовательность траектории, в которой нельзя подобрать такое натуральное число C , что для любого элемента с номером i выполнено $s_1 + s_2 + \dots + s_i < \max_{i-1} + C$ и $s_1 + s_2 + \dots + s_i > \min_{i-1} - C$, не является допустимой на пустой ленте.*

Утверждение 3. *Любая бесконечная периодическая последовательность траектории является допустимой на пустой ленте.*

Утверждение 4. *Любая бесконечная последовательность траектории с последовательностью разностей траектории, которая является арифметической прогрессией, является допустимой на пустой ленте.*

Заключение

Автор выражает благодарность научному руководителю Волкову Н.Ю. за постановку задачи.

Литература

1. John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation Prentice Hall, U.S., 1985, 560.

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ЧАСТИЧНЫМ ОРАКУЛОМ

А.М. Хайруллин

eternaldominium@gmail.com

Работа нацелена на изучение различных способов вычисления с частичным оракулом. В отличие от вычислений с тотальным оракулом различные модели вычислений с частичным оракулом порождают различные классы функций.

Даны 3 различных определения вычисления с частичным оракулом. Показана неэквивалентность этих трех подходов вычисления, а также то, что множества функций вычислимых с частичным оракулом α согласно 1), 2) и 3) определению строго вложены друг в друга.

Рассмотрены сводимости, порождаемые различными способами вычислений с частичным оракулом. Доказана импликация сводимостей, соответствующих различным определениям вычислений с оракулом и выявлена связь этих сводимостей с сводимостью по перечислению.

Получен критерий вычислимости с частичным оракулом α согласно первому определению, обобщающий критерий для вычислений с тотальным оракулом, а также связь этих трех определений с моделью частично-рекурсивных функций. Выявлены 3 класса оракулов, которые порождают классы функций для которых обобщение определения перечислимых множеств различны.

Определения

При определении некоторых понятий будут использованы понятия образца и корректных троек из [1].

Обычные вычисления с оракулом определяются как программы в которых мы можем вызывать некоторую внешнюю процедуру α , которая является тотальной функцией, однако если это частичная функция, то необходимо уточнить каким образом мы будем обращаться с нашей внешней процедурой в моменты зависания, должен ли алгоритм тоже зависеть или мы можем параллельно запросить несколько значений функции α .

Класс α_b -вычислимых функций это класс функций в программах которых используется внешняя процедура α , вызов которой происходит по значению, если в этой точке α не определена то программа зависает. Обозначим это множество как P_{α_b} .

Класс α_{mb} -вычислимых функций это класс функций, который помимо возможности обращений к внешней процедуре по значению может также спросить принадлежит ли хоть один образец из перечислимого множества образцов данной функции α . Если хоть один образец принадлежит, то будет получен положительный ответ иначе программа зависнет. Более точно, в программах α_{mb} -вычислимых функций будет оператор

$$S_{\alpha}(z) = \begin{cases} 1 & \exists \theta \in W_z \text{ и } \tilde{\theta} \subset \alpha \\ \text{не определено} & \text{иначе} \end{cases}$$

Обозначим это множество как $P_{\alpha_{mb}}$. Далее под $A_b(A_{mb})$ -вычислимыми функциями мы будем иметь ввиду $\alpha_b(\alpha_{mb})$ -вычислимые функции, где $\alpha = \chi_{\bar{A}}$.

A_{id} -вычислимые функции-это пересечение всех множеств α -вычислимых функций, где α -тотальна и перечисляет A . То есть это такое множество функций "которое можно получить" имея любую тотальную функцию перечисляющую множество A , обозначим его как $P_{A_{id}}$. Теперь мы можем ввести новые виды сводимости $A \leq_b (\leq_{mb}, \leq_{id}) B \leftrightarrow \chi_{\bar{A}} - B_b(B_{mb}, B_{id})$ -вычислима. $A \equiv_b B \leftrightarrow A \leq_b B$ и $B \leq_b A$.

Обозначим область значений f как $range(f)$, а ее область определения как $domain(f)$. Для класса функций P назовем множество $A \in E_1$ -множеством если $\exists f \in P : domain(f) = A$. Для класса функций P назовем множество $A \in E_2$ -множеством если $\exists f \in P : range(f) = A$. Для класса функций P назовем множество $A \in E_3$ -множеством если \exists тотальная $f \in P : range(f) = A$. В классической теории вычислений с тотальным оракулом α определения перечислимого множества как области определения некоторой α -вычислимой функции, образа некоторой

α -вычислимой функции и образа некоторой некоторой α -вычислимой тотальной функции эквивалентны. Однако при α_b -вычислениях с частичным оракулом α эквивалентность этих определений зависит от оракула.

Образец — это конечное число точек, значение их можно упорядочить последовательными числами от 0 до n , упорядоченные образцы также можно закодировать. Корректное множество M -троек вида (x, y, t) , где x и y — натуральные числа, а t — номер упорядоченного образца назовем упорядоченным если для каждого x соблюден порядок логики обращения по значениям т.е. $\forall (x, y_1, t_1), (x, y_2, t_2) \in M$ точка с номером 0 одина для обоих образцов, но значение в этой точке у них может быть разное и если упорядоченный подобразец $\tilde{t}_1|_k$ -полученный из \tilde{t}_1 отбором пар точка-значение с номерами $0, \dots, k-1$ лежит с учетом номеров в \tilde{t}_2 , то если у \tilde{t}_1 есть точка с номером k то она лежит и в \tilde{t}_2 , но возможно значение имеет другое. Пусть M — упорядоченное множество, а α — некоторая функция по аналогии с корректным множеством мы можем построить функцию, будем также обозначать эту функцию $M[\alpha]$.

Основные результаты

Утверждение 1. S_α — рекурсивный оператор относительно функции α .

Теорема 1. Функция $f : N_0 \rightarrow N_0$ α_b -вычислима тогда и только тогда, когда существует перечислимое упорядоченное множество троек M , для которого $f = M[\alpha]$.

Теорема 2. $\forall f$ — α_b -вычислимой $\forall \beta$ такой, что $\alpha \subseteq \beta$
 $\exists f' - \beta_b$ -вычислимая такая, что $f \subseteq f'$.

Следствие 1. Если $\exists g$ -вычислимая такая, что $\alpha \subseteq g$, то $\forall f$ — α_b -вычислимой $\exists f'$ -вычислимая такая, что $f \subseteq f'$.

Утверждение 2. Для α_b -вычислимых функций вообще говоря не все определения перечислимых множеств эквивалентны. Для любых оракулов α выполнено $E_3 \subseteq E_2 \subseteq E_1$, однако существуют такие частичные оракулы α для которых $E_3 \subset E_2 \subset E_1$.

Теорема 3. Для частичной функции α выполнено,

$$a) [0, S(x), I_1^1(x), \alpha] = P_{\alpha_b\text{-выч}}$$

$$b) [0, S(x), I_1^1(x), \alpha, S_\alpha] = P_{\alpha_{mb}\text{-выч}}$$

c) Для множества A верно $\bigcap_{\alpha \in P_T^A} [0, S(x), I_1^1(x), \alpha] = P_{A_{id}\text{-выч}}$, где P_T^A - множество всюдуопределенных функций перечисляющих A

Теорема 4. О соотношении вычислимости с частичным оракулом

$$a) P_{\alpha_b\text{-выч}} \subset P_{\alpha_{mb}\text{-выч}}$$

$$b) P_{A_b\text{-выч}} \subset P_{A_{mb}\text{-выч}} \subset P_{A_{id}\text{-выч}}$$

Теорема 5. О соотношении сводимостей

$$a) A \leq_b B \rightarrow A \leq_{mb} B \leftrightarrow A \leq_e B \rightarrow A \leq_{id} B$$

$$b) A \leq_{mb} B \not\rightarrow A \leq_b B$$

Теорема 6. О классификации оракулов

1. Если $\alpha \equiv_b \beta$, где β -какая-то тотальная функция, то $E_3 = E_1$. Обратно если для α_b -вычислимых функций верно $E_3 = E_1$, то $\alpha \equiv_b \beta$, где β -некоторая тотальная функция.

2. Если $P_{\alpha_b\text{-выч}} = P_{\alpha_{mb}\text{-выч}}$, то $E_2 = E_1$.

Обратно если для α_m -вычислимых функций верно $E_2 = E_1$, то $P_{\alpha_b\text{-выч}} = P_{\alpha_{mb}\text{-выч}}$.

Из этой теоремы можно сделать следствие, что множество частичных оракулов можно расложить согласно свойствам вычислимых с их помощью функций на

1. оракулы эквивалентные тотальным,
2. оракулы для которых оператор S_α не расширяет вычислительные возможности,
3. оракулы для которых оператор S_α расширяет вычислительные возможности.

Литература

1. Верещагин Н.К., Шень А. Вычислимые функции // МЦНМО, 2012.

О НЕКОТОРЫХ ИЗОТОПНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КВАЗИГРУПП, УЛУЧШАЮЩИХ КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

С.С. Чаплыгина

svetlana.chaplygina@math.msu.ru

УДК 512.548.7, 519.716.2

В работе показано, как из данной квазигруппы изотопными преобразованиями получить растущее как факториал от порядка число различных квазигрупп, обладающих рядом полезных свойств: полиномиальной полнотой, простотой, неаффинностью и отсутствием собственных подквазигрупп.

Ключевые слова: квазигруппа, подквазигруппа, изотопия, полиномиальная полнота.

Введение

Квазигруппы, как пример некоммутативных и неассоциативных алгебраических структур, в последнее время становятся всё больше востребованы в криптографии. На их основе построены, например, такие алгоритмы, как хэш-функции EDON- \mathcal{R} [1], алгоритмы низкоресурсной криптографии GAGE and InGAGE [2] и INRU [3]. В работах М.М. Глухова [4] и В.А. Щербаккова [5] приведен обзор различных алгоритмов, использующих данные структуры. Для обеспечения стойкости квазигруппы, применяемые в подобных криптосистемах, должны обладать определенным набором свойств. Неаффинность обеспечивает NP-полноту задачи проверки разрешимости уравнений [6], то есть защищенность от атак методом решения систем уравнений на биты ключа. Наличие подквазигрупп может сделать алгоритм уязвимым к методу прямого перебора из-за “вырождения” квазигруппового преобразования на подквазигруппу.

Алгоритм, описанный в данной работе, был вдохновлен работой Т. Кепки [7], в которой доказывается, что любую (не более чем счетную) квазигруппу, имеющую по крайней мере 3 элемента, можно привести изотопными преобразованиями к квазигруппе, не имеющей собственных подквазигрупп, и являющейся полиномиально полной [8].

Автор выражает искреннюю благодарность к.ф.-м.н., доценту Галатенко Алексею Владимировичу за постановку задачи и поддержку в работе.

Основные понятия и результаты

Определение 1. *Конечной квазигруппой порядка $k \in \mathbb{N}$ называется такое множество $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$ с бинарной операцией $f: Q \times Q \rightarrow Q$, что для любых $a, b \in Q$ уравнения $f(x, a) = b$ и $f(a, y) = b$ однозначно разрешимы. Все квазигруппы предполагаются конечными, поэтому в дальнейшем слово “конечный” будет опускаться.*

Замечание 1. *Таблицы Кэли квазигрупп являются латинскими квадратами, и наоборот, любой латинский квадрат является таблицей Кэли квазигруппы.*

Определение 2. *Собственной подквазигруппой квазигруппы (Q, f) называется пара (Q', f') , где Q' – собственное подмножество Q , замкнутое относительно квазигрупповой операции f , а операция f' является сужением f на $Q' \times Q'$.*

Без ограничения общности можно считать, что $Q = \{0, \dots, k-1\}$, а операция f есть функция k -значной логики от двух переменных.

Определение 3. *Квазигруппы (Q, f) и (Q, g) будем называть изотопными, если существуют перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на Q , для которых выполнено тождество*

$$f(x, y) = \sigma_3^{-1}(g(\sigma_1(x), \sigma_2(y))).$$

Определим необходимые свойства квазигрупп.

Определение 4. *Квазигруппу (Q, f) будем называть полиномиально полной, если $[f \cup P_k^0] = P_k$, где P_k^0 – множество всех констант.*

Определение 5. Квазигрупповая операция f сохраняет некоторое отношение эквивалентности \sim , если для любых элементов a_1, a_2, b_1, b_2 таких, что $a_1 \sim a_2$ и $b_1 \sim b_2$, верно $f(a_1, b_1) \sim f(a_2, b_2)$.

Определение 6. Квазигруппа (Q, f) называется простой, если операция f не сохраняет ни одного нетривиального отношения эквивалентности.

Определение 7. Квазигруппа (Q, f) называется аффинной, если существует абелева группа $(Q, +)$, автоморфизмы α и β этой группы и константа $c \in Q$, для которых выполнено тождество $f(x, y) \equiv \alpha(x) + \beta(y) + c$.

Пусть дана квазигруппа (Q, f) , где $Q = E_k$, $k \geq 5$. Построим изотопию, переводящую данную квазигруппу в квазигруппу (Q, f) .

Для начала заметим, что для любой фиксированной последовательности элементов E_k и для любой позиции i данную квазигруппу можно привести к виду, такому что в i -ой строке таблицы Кэли будет располагаться заданная перестановка. Аналогично можно привести к любому наперед заданному виду i -ый столбец. Более того, можно одновременно зафиксировать на выбранных позициях нужный столбец и нужную строку при условии их корректного пересечения.

Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Разобьем множество E_k на два непустых непересекающихся подмножества S_1 и S_2 , $|S_1| = r - 1 \leq |S_2| = k - r + 1$. Добавим один элемент S_2 в множество S_1 . Таким образом, мощность каждого из получившихся множеств не меньше 2, и пересекаются они по одному элементу.
2. Из элементов этих множеств составим два цикла $\sigma_1 = (a_1 a_2 \dots a_{r-1} b)$ и $\sigma_2 = (b c_1 c_2 \dots c_{k-r})$, где b — элемент в пересечении S_1 и S_2 . Каждый цикл задает перестановку, которая, в свою очередь, может задавать строку или столбец нашей таблицы Кэли.
3. С помощью перестановок строк и столбцов преобразуем данную квазигруппу так, чтобы перестановка σ_1 стала b -й строкой, а перестановка σ_2 — c_1 -м столбцом. Будем называть эти строку и столбец выделенными. Заметим, что их пересечение корректно:

$$\sigma_1(c_1) = c_1 = \sigma_2(b).$$

Аналогично возможен вариант с пересечением по a_1 и координатами (a_1, b) . Далее, без ограничения общности, будем рассматривать пересечение по c_1 .

Теорема 1. Квазигруппа (Q, f) , получаемая на выходе исследуемого преобразования, не содержит собственных подквазигрупп.

Теорема 2. Квазигруппа (Q, f) , получаемая на выходе преобразования, проста, неаффинна и полиномиально полна.

Теорема 3. Количество возможных квазигрупп на выходе алгоритма равно $k! \left(\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor - 1 \right)$, где k — порядок квазигруппы Q . При этом не более двух преобразований могут привести к одной и той же квазигруппе.

Заключение

В работе был представлен алгоритм приведения квазигруппы изотопными преобразованиями к нефиксированному виду, обладающему важными для криптографии свойствами — полиномиальной полнотой, неаффинностью, простотой и отсутствием собственных подквазигрупп.

В дальнейшем планируется доработать алгоритм, чтобы квазигруппа после его применения также обладала лишь тривиальной группой автоморфизмов. Еще одним важным и интересным направлением для исследования является обобщение алгоритма для n -квазигрупп, то есть для алгебраических структур с n -арной, обратимой по каждому аргументу, операцией.

Литература

1. Gliogroski D., Ødegård R.S., Mihova M., Knapskog S.J., Drapal A., Klima V., Amundsen J., El-Hadedy M. Cryptographic hash function EDON-R' // Proceedings of the 1st International Workshop on Security and Communication Networks, 2009.— 1-9.

2. Gliogroski D. On the S-box in GAGE and InGAGE // 2019. URL: <http://gageingage.org/upload/LWC2019NISTWorkshop.pdf>

3. *Tiwari S., Awasthi A., Chkrabarti S., Yadav S.* INRU: A Quasigroup Based Lightweight Block Cipher // 2021. URL: <https://arxiv.org/pdf/2112.07411.pdf>
4. *Глухов М.М.* О применениях квазигрупп в криптографии // ПДМ, 2008. № 2(2), — 28-32.
5. *Shcherbacov V.A.* Quasigroups in cryptology // CSJM, 2009. Vol. 17, № 2(50), — 193-228.
6. *Larose B., Zádori L.* Taylor Terms, Constraint Satisfaction and the Complexity of Polynomial Equations over Finite Algebras // IJAC, 2006. Vol. 16, — 563-582.
7. *Кепка Т.* A note on simple quasigroups // AUC, 1978. Vol. 19, № 2, — 59-60.
8. *Чаплыгина С.С.* О свойствах конечных квазигрупп на выходе алгоритма Т. Кепки // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXI Международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения А.А. Карацубы. Тула, 2022, — 172-175.

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ГРАФОВ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ОБЪЕКТОВ

А.А. Чеповский

aachepovsky@hse.ru

УДК 519.178

Анализ графов, представляющих сложные сети (complex networks) из различных отраслей наук является активно развивающейся проблематикой последних 20 лет. Данная тема характеризуется применением фундаментального математического аппарата и прикладных информационных технологий. Показаны актуальные на сегодняшний день подходы, предложенные в предыдущих работах автора.

Ключевые слова: сложные сети, граф взаимодействующих объектов, выделение неявных сообществ, анализ социальных сетей.

Сетевые структуры встречаются во многих сферах наук и представляют из себя системы, требующие исследования и анализа. Для структур, содержащих большое количество объектов и связи между ними в современной науке введено понятие сложных сетей — complex networks [1,2,3,4]. Это могут быть, например, биологические, транспортные, инфраструктурные, телекоммуникационные или социальные (в том числе онлайн) сети. Наиболее релевантной математической моделью для таких сетей являются графы: узлы сети представляются вершинами, а связи между узлами характеризуют ребра, инцидентные соответствующим вершинам. Важным аспектом при построении таких графов является то, что вершины, как и ребра могут обладать некоторой информацией, которая представляется в виде их атрибутов, в том числе и текстовых. Таким образом, получаются неориентированные графы взаимодействующих объектов [5].

Одним из актуальных подходов для анализа таких графов является ставшее популярным за последние более чем 20 лет направление по разработке алгоритмов выделения неявных сообществ на графах. Это поиск таких подграфов в исходном графе, что плотность ребер внутри этих подграфов значительно выше плотности ребер между ними. Выделение таких компонент позволяет перейти от анализа всего графа к меньшим фрагментам, а также выделить вершины графа с высокими значениями центральностей и иных показателей — ключевые объекты исходной сети («мосты», «хабы»). Распространен, в частности, такой подход к решению задачи выделения сообществ как построение алгоритмов для минимизации «модулярности» — функционала Q , характеризующего качество разбиения [6,7]. Классическая версия модулярности определяется по следующей формуле:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - \frac{d_i \cdot d_j}{2m} \right) \cdot \delta(C_i, C_j) \quad (1)$$

где A_{ij} — элемент матрицы смежности; m — число ребер в графе; d_i — степень i -ой вершины; C_i — сообщество, к которому принадлежит i -ая вершина.

Существуют и развиваются и иные подходы для решения задач выделения неявных, в том числе и пересекающихся, вложенных сообществ на графах [8,9,10]. При работе с графами, полученных из реальных сетей, важным видится корректный итерационный переход от анализа всего графа к отдельным его частям. Так автором предложен реализованный «Комбинированный алгоритм» для выделения пересекающихся сообществ на графе, позволяющий убирать из рассмотрения малозначимые элементы сети и предусматривающий параметрические модификации для формирования разнородных разбиений в зависимости от задач оператора [11,12].

Наиболее спорной и практически открытой является проблема оценки корректности и эффективности работы алгоритмов и методов выделения сообществ на графах [9]. Существуют методы генерации случайных графов для тестирования алгоритмов и получения оценки качества разбиения на сообщества. Однако, данные подходы не позволяют корректно оценить результаты работы с графами реальных сетей, особенно для графов, полученных при импорте данных из социальных сетей и сетей мгновенного обмена сообщениями.

Для импорта данных было предложено использование следующего семейства моделей [13,14]. Вес $w(e)$ на ребрах графа $G(V, E)$ задается в общем случае взвешенной суммой N факторов взаимодействия пользователей:

$$w(e) = \sum_{k,N} W_k \cdot \delta_e^k \quad (2)$$

где W_k — весовой коэффициент для k -го фактора взаимодействия; δ_e^k — функция, принимающая нулевое значение в случае отсутствия k -го фактора взаимодействия у ребра e и натуральные значения в иных случаях в зависимости от степени интенсивности взаимодействия, заложенной в конкретной модели.

Методики формирования взвешенных графов из семейства моделей (2) были представлены за последние годы для следующих популярных сетей. Это социальная сеть ВКонтакте и целый ряд моделей для формирования графов при импорте данных из нее. Для сети коротких сообщений Twitter (ныне X) построена (F, L, C, R) -модель информационного взаимодействия в ней, на основе которой предложен «метод ядра» для выделения непересекающихся сообществ, предусматривающий выделение ключевой компоненты на основании вычисляемых в явном виде характеристик графа [15]. Для сети каналов мессенджера Telegram предложена (U, M, R) -модель информационного воздействия. Стоит отметить, что получаемые так графы удовлетворяют важному свойству *complex networks* — степенному закону распределения степеней вершин.

Для построенных таким образом графов взаимодействующих объектов в одной из работ [16] был представлен «метод Галактик», описывающий алгоритм работы со взвешенными графами, полученными при импорте данных из сети мгновенного обмена сообщениями Telegram в соответствии с (U, M, R) -моделью информационного воздействия. Этот метод выделения сообществ на взвешенных графах основан на последовательном применении других алгоритмов, обработке графа и переходу к мета-графу из мета-сообществ с последующим выделением пересекающихся сообществ. Важным элементом применения современных эвристических методов выделения сообществ на графах взаимодействующих объектов, построенных при импорте данных из социальных и телекоммуникационных сетей, является дополнение их методами компьютерной лингвистики для обработки текстовых метаданных (атрибутов вершин выделенных сообществ) и анализа психолингвистических факторов. Именно такой подход позволяет для этих графов получить дополнительную оценку качества разбиения.

Другим актуальным вопросом в этой сфере является разработка модели для эффективного хранения графов взаимодействующих объектов, основанная на алгоритмах сжатия и оптимизации операций с графами по памяти и по скоростным характеристикам.

Таким образом, данная сфера является примером перспективной области математики и смежных отраслей наук, актуальных в фундаментальном и прикладном смыслах.

Литература

1. Newman M. E. J. Networks: An Introduction. Oxford University Press, 2010. 784 p.
2. Aggarwal C. Social Network Data Analytics. Springer New York, NY, 2011. 502 p.

3. Fortunato S. Community Detection in Graphs. // Physics Reports. 2010; 486(3):75-174.
4. Евин И. А. Введение в теорию сложных сетей. // Компьютерные исследования и моделирование. 2010; 2(2):121-141.
5. Чеповский А.А. Анализ графов взаимодействующих объектов. — М.: Национальный открытый университет «ИНТУИТ». 2022. — 270 с.
6. Girvan M., Newman M. E.: Finding and evaluating community structure in networks. // Physical Review. 2004. E 69. 026113. — 16 p.
7. Girvan M., Newman M. E. J. Community structure in social and biological networks. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2002; 99(12):7821-7827.
8. Rosvall M., Bergstrom C. T., Axelsson D. The map equation. // The European Physical Journal Special Topics. 2009; 178(1):13-23
9. Fortunato, S., Newman, M. E. J. 20 years of network community detection. // Nat. Phys. 2022; 18:848-850.
10. Чеповский А. А. О неявных сообществах на графе взаимодействующих объектов. // Успехи кибернетики. 2023. Т.4. № 1. С. 56-64.
11. Чеповский А. А., Лобанова С. Ю. Комбинированный алгоритм выделения сообществ в графах взаимодействующих объектов. // Бизнес-информатика. 2017. Т. 42. № 4. С. 64-73
12. Chepovskiy A. Methods to reveal communities without the property of "picking up junk". // In The 6 th International Conference on Complex Networks & Their Applications. Nov. 29 — Dec. 01, 2017, Lyon (France). — P. 336-340
13. Попов В. А., Чеповский А. А. Модели импорта данных из Твиттера. // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2021. Т. 19, № 2. С. 76-91.
14. Попов В. А., Чеповский А. А. Модели импорта данных из мессенджера Telegram. // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. — 2022. — Т.20. — №2. С. 60-71.
15. Chepovskiy A., Leshchev D., Khaykova S.P. Core Method for Community Detection, in: Complex Networks & Their Applications IX. Volume 1: Proceedings of the Ninth International Conference on Complex Networks and Their Applications COMPLEX NETWORKS 2020. Springer, 2021. P. 38-50.
16. Попов В. А., Чеповский А. А. Выделение неявных сообществ на графе взаимодействия Telegram-каналов с помощью «метода Галактик». // Труды ИСА РАН. — 2022. — Т.72. — №4. С. 39-50.

Секция 7

Механика и математическое моделирование (теоретическая и прикладная механика)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УСКОРЕНИЕ И ЕГО ПРОИЗВОДНУЮ

М.Д. Белоусова

bmargaretd@yandex.ru

УДК 517.977.5

В работе представлено решение задачи быстродействия при наличии ограничений на управление и его производную, полученное с использованием принципа максимума Понтрягина в форме Гамкредидзе. Для решения задачи были записаны расширенная функция Понтрягина, условия, определяющие множители Лагранжа, отвечающие оптимальному процессу в силу принципа максимума. Были рассмотрены ситуации выхода на границу фазового ограничения, построена поверхность переключения.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

Рассмотрим задачу создания математического обеспечения для динамических имитационных стендов на базе промышленных роботов-манипуляторов, входящих в состав тренажёров по управлению летательными аппаратами. Динамический стенд в процессе работы должен реализовывать движение своих компонентов и оператора, находящегося на стенде, таким образом, чтобы воздействия на механорецепторы оператора были схожи с воздействиями, которые он мог бы получить в процессе реального полёта. Данный процесс называется динамической имитацией [1].

При выполнении динамической имитации может случиться так, что в какой-то момент манипулятор не может реализовать движение, определяемое алгоритмами, поскольку его концевой эффектор находится на границе рабочей области. А значит, перед продолжением имитации нужно выполнить возврат концевика в центр рабочей области. Чтобы при выполнении возврата не нарушить эффект погружения, это движение должно выполняться с допороговыми значениями

Работа выполнена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020-2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2020-923).

Белоусова Маргарита Дмитриевна, м.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

ускорений и производных ускорений. Эту задачу можно сформулировать как задачу наискорейшего прихода точки в заданную область при наличии ограничений на управление и его производную. Более того, эта задача может быть разбита на три подзадачи, решаемой для каждой координаты отдельно.

Модель, описывающую процесс возврата концевика, можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, & x_1(t_1) = a_1, \\ \dot{x}_2(t) = x_3, & x_2(t_1) = b_1, \\ \dot{x}_3(t) = u(t), & x_3(t_1) = c_1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь t_1 — момент начала движения, t_2 — момент окончания движения, x_1 — координата точки на прямой, x_2 — её скорость, x_3 — ускорение, $u(t)$ — управление, производная скорости, на которую наложено ограничение: $|u| \leq u_m$. На ускорение $x_3(t)$ наложено фазовое ограничение: $|x_3| \leq x_{3m}$. Поставлена задача наискорейшего прихода точки на множество $M = \{x_1(t_2) = a_2, x_2(t_2) = b_2\}$:

$$J = t_2 - t_1 \rightarrow \min.$$

Указанная задача решена с использованием принципа максимума Понтрягина в форме Гамкредидзе [2,3]. Записаны выражения для поиска множителей Лагранжа, определён вид оптимального управления, для некоторых ситуаций определены аналитические зависимости координат точек переключения, недостающих краевых значений координат, построена поверхность переключения управления.

Литература

1. Ишимский А.Ю., Александров В.В., Садовничий В.А., Глазков Ю.Н., Воронин Л.И. Математические задачи динамической имитации аэрокосмических полетов. — Москва: Изд. Ун-та, 1995.
2. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. R.V. Gamkrelidze's Maximum Principle for Optimal Control Problems with Bounded Phase Coordinates and Its Relation to Other Optimality Conditions. *Doklady Mathematics*, **83**:1 (2011).
3. Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю., Перейра Ф. Об условиях отсутствия скачка решения сопряженной системы принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН, (2014).

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ 2D И 3D ЗАДАЧИ О ПРЕСЛЕДОВАНИИ

В.Ю. Бодряков

bodryakovvuy@yandex.ru

УДК 372.851

В работе представлено точное решение классической задачи о преследовании хищником жертвы в 2D и 3D евклидовых пространствах в форме параметрически заданных кривых преследования на плоскости и в пространстве, соответственно. Приведены результаты компьютерных расчетов, выполненных по точным формулам. Определен полный комплекс существенных характеристик процесса преследования.

Ключевые слова: задача о преследовании, 2D пространство, 3D пространство.

Задача о преследовании в ее классической постановке, когда модули скорости преследующего (хищника) и преследуемого (жертвы) постоянны, а вектор скорости хищника всегда нацелен на жертву, известна. Задача является фундаментальной основой для многочисленных приложений, и по-прежнему актуальна. Однако до недавнего времени не существовало ее точного аналитического решения для произвольного начального угла прицеливания даже на евклидовой плоскости (2D пространство), не говоря уже о 3D пространстве [1]. В настоящей работе представлено точное решение задачи о преследовании в 2D и 3D Евклидовом пространстве.

Постановка задачи. Объект B (жертва) движется параллельно оси Ox евклидова 3D-пространства $Oxyz$ с постоянной скоростью ν из начальной точки $B_0(x_0, y_0, z_0 = h)$. Объект A (хищник) движется из начальной точки $O(0, 0, 0)$ с постоянной скоростью u так, что вектор \dot{i} все время направлен на объект B . Начальный угол прицеливания α_0 , отсчитываемый от плоскости Oxy (угол возвышения), лежит в пределах $0 < \alpha_0 \leq 90^\circ$; начальный угол прицеливания φ_0 , отсчитываемый от оси Ox в плоскости Oxy (азимутальный угол), $0 \leq \varphi_0 < 360^\circ$.

Задача состоит в том, чтобы найти уравнение $z(x, y)$ траектории движения хищника (кривую преследования), уравнения движения хищника и жертвы, время погони T , другие характеристики преследования. Провести численное моделирование процесса преследования при различных начальных положениях жертвы.

Результаты и обсуждение. С учетом краткого формата тезисов, ограничимся сообщением основных результатов. Решение задачи о преследовании в 2D пространстве сводится к решению задачи Коши для неполного дифференциального уравнения второго порядка [1]. В свою очередь, задача о преследовании в 3D пространстве может быть путем преобразования пространства сведена к решению 2D задачи о преследовании.

Результаты аналитического решения задачи о преследовании в более общем случае 3D пространства можно представить в форме совокупности аналитических выражений, характеризующих движение хищника и жертвы в пространстве и во времени. В частности — параметрически заданной пространственной траектории хищника, временных уравнений движения хищника и жертвы, и др.

Уравнения движения хищника $(x(\zeta), y(\zeta), z(\zeta))$, $0 \leq \zeta \leq 1$:

$$x = \frac{h}{2} \left[\frac{1 - \zeta^{1-\frac{1}{k}}}{1 - \frac{1}{k}} \frac{1 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} - \frac{1 - \zeta^{1+\frac{1}{k}}}{1 + \frac{1}{k}} \frac{1 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} \right];$$

$$y = h(1 - \zeta) \operatorname{ctg} \alpha_0 \sin \varphi_0; \quad z = h(1 - \zeta).$$

Уравнения движения жертвы $(x_B(\zeta), y_0, z_0)$:

$$x_B(\zeta) = x_0 + \frac{h}{2k} \left[\frac{1 - \zeta^{1-\frac{1}{k}}}{1 - \frac{1}{k}} \frac{1 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} - \frac{1 - \zeta^{1+\frac{1}{k}}}{1 + \frac{1}{k}} \frac{1 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} \right]; \quad z_B(\zeta) = h.$$

Как и следует, при $\varphi_0 \rightarrow 0$ выражения переходят в выражения для 2D задачи [1].

Выборочные результаты компьютерных расчетов, выполненных по точным формулам, для случая 2D задачи о преследовании приведены на Рис. 1; для случая 3D — на Рис. 2 и Рис. 3. При расчетах были приняты следующие значения параметров задачи: $h = 10000$ м, $\nu = 300$ м/с, $u = 500$ м/с. Варьируемые параметры: в случае 2D — начальный угол α_0 ; в случае 3D — начальные координаты жертвы x_0 и y_0 .

Таким образом, в работе получены точные уравнения, позволяющие исчерпывающе описать движение хищника и жертвы в процессе преследования в 2D и в 3D евклидовых пространствах. Дальнейшее развитие исследований можно видеть в натурной беспилотной реализации модели, как, например, в [2].

Литература

1. Бодряков В.Ю. Задача о преследовании с произвольным начальным углом прицеливания // Математическое моделирование. — 2023. — Т.35. — №11. — С.35-46.
2. Алексеевский П.И., Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Робототехническая реализация модельной практико-ориентированной задачи об оптимальной беспилотной транспортировке грузов // Информатика и образование. — 2018. — № 8 (297). — С.51-60.

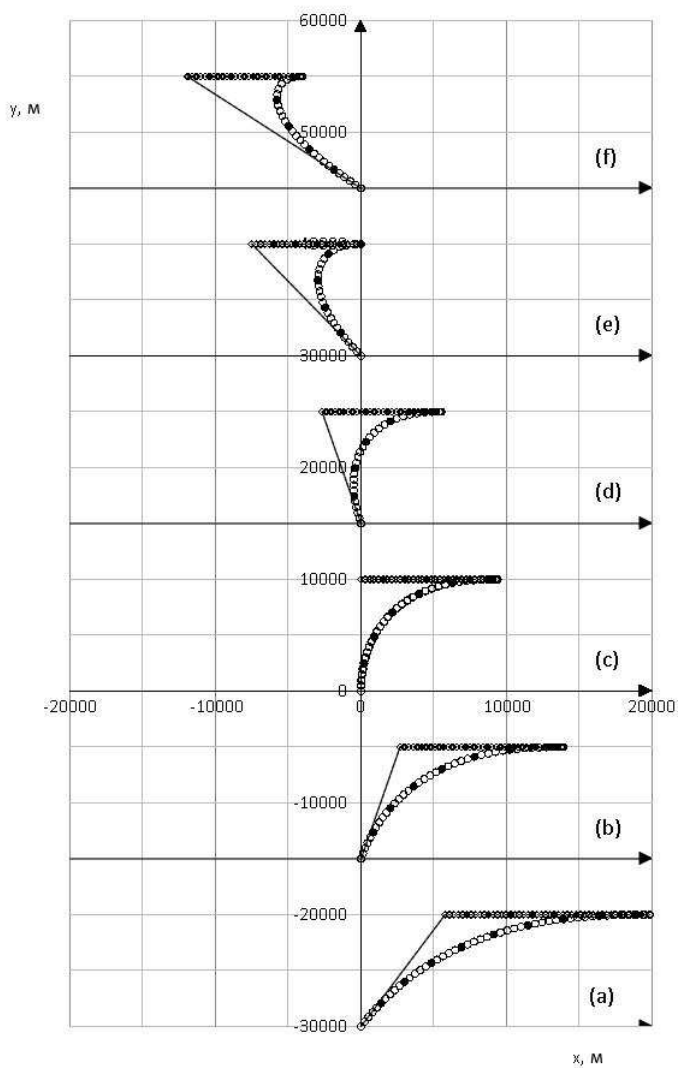


Рис. 1: 2D кривые преследования при различных начальных углах прицеливания: (a) $\alpha_0 = 60^\circ$; (b) 75° ; (c) 90° ; (d) 105° ; (e) 127° ; (f) 140° . Белые кружки и белые ромбы — посекундные положения хищника и жертвы, соответственно. Черные кружки и черные ромбы — положения хищника и жертвы, соответственно, через каждые 5с. Прямые — начальные линии визирования. Каждая диаграмма смещена относительно соседней на 15000м по оси ординат.

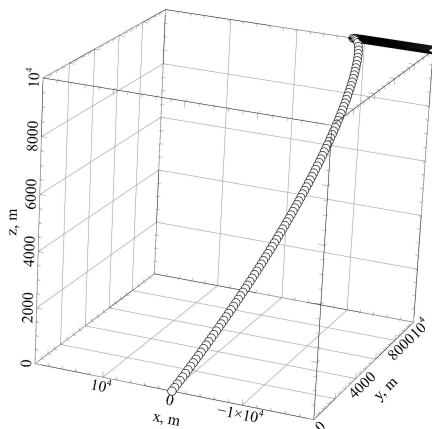


Рис. 2: 3D кривая преследования при начальных координатах жертвы $(x_0, y_0, z_0) = (-20000, 10000, 10000)$. Кружки отражают движение хищника, треугольники — жертвы.

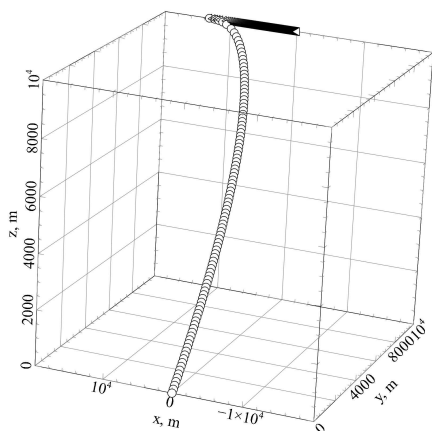


Рис. 3: То же, что на Рис. 2 при $(x_0, y_0, z_0) = (0, 10000, 10000)$.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Ю.В. Болотин, А.В. Брагин

ybolotin@yandex.ru, avb9676@yandex.ru

УДК 531.8

В работе выясняются некоторые свойства обобщенного фильтра Калмана, связанные с его состоятельностью. Вводится понятие структурной состоятельности как необходимое условие состоятельности. Состоятельность и структурная состоятельность зависят от формы, в которой записаны уравнения ошибок. В качестве примера рассмотрена задача навигации пешехода с использованием инерциальных блоков, установленных на стопах. Для коррекции указанных систем используются условия нулевой скорости стопы в фазе опоры и ограниченности расстояния между стопами. Показано, что при записи уравнений ошибок в динамических ошибках (в отличие от полных) фильтр Калмана структурно состоятелен.

Болотин Юрий Владимирович, д.ф.-м.н, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Брагин Александр Викторович, м.н.с, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Ключевые слова: БИНС, инерциальная навигация пешехода, фильтр Калмана..

1. Свойства состоятельности ОФК. Обобщенный фильтр Калмана (ОФК) описан во многих работах, см., например, [1]. Рассмотрим задачу оценивания состояния X_k системы со случайными возмущениями по измерениям Y_k :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f_k(X_k, w_k), & E[w_k] &= 0, & E[w_k w_k^T] &= Q_k \geq 0; \\ Y_k &= h_k(X_k) + r_k, & E[r_k] &= 0, & E[r_k r_k^T] &= R_k > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ОФК рекуррентно строит оценку X_k по Y_1, \dots, Y_k (обозначается $X_{k|k}$) и оценку X_{k+1} по Y_1, \dots, Y_k (обозначается $X_{k+1|k}$). В основу алгоритма положено введение ошибок x согласно формуле

$$X - X' = C(X')x + o(X - X'),$$

линеаризации уравнений в окрестности $X_{k|k}, X_{k+1|k}$ и рассмотрение линейных уравнений ошибок:

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k, \quad y_k = H_k x_k + r_k. \quad (2)$$

Здесь F_k, G_k, H_k выражаются через матрицы частных производных $f_k(X, w), h_k(X)$ по X, w в точке $X = X_{k|k}, w = 0$. Наряду с уравнениями (1) будем рассматривать их «идеальную» версию, где линеаризация проводится в истинных состояниях X_k, X_{k+1} , обозначая соответствующие матрицы через $\bar{F}_k, \bar{G}_k, \bar{H}_k$:

$$x_{k+1} = \bar{F}_k x_k + \bar{G}_k w_k, \quad y_k = \bar{H}_k x_k + r_k. \quad (3)$$

Алгоритм ОФК вычисляет матрицы F_k, G_k, H_k в текущих оценках состояния и представляет собой этапы прогноза $x_{k+1|k} = F_k x_{k|k}$ и коррекции $x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}x_{k+1|k})$, а также прогноз и коррекцию ковариационных матриц $P_{k|k}, P_{k+1|k}$. На каждом шаге коррекции проводится обновление состояния $X_{k+1|k} = f(X_{k|k}), X_{k+1|k+1} = X_{k+1|k} + C(X_{k+1|k})x_{k+1|k+1}$. После этого оценка отклонения $x_{k+1|k+1}$ обнуляется. Для инициализации фильтра в момент $k = 0$ задана начальная оценка $x_{0|0}$ и начальная ковариация ошибки оценки $P_{0|0}$. Наряду с ОФК введем «идеальный» ОФК (ИОФК), где вместо (2) используется (3).

Определение 1. *Задача оценивания ненаблюдаема относительно однопараметрической группы преобразований, называемой симметрией, если она переводит уравнения (1) в себя.*

Ненаблюдаемые подпространства $\mathcal{N}_k, \bar{\mathcal{N}}_k$ ОФК и ИОФК определяются как ядра матриц наблюдаемости $\mathcal{O}_k, \bar{\mathcal{O}}_k$:

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} H_1 F_1^{-1} \dots F_{k-1}^{-1} \\ \dots \\ H_{k-1} F_{k-1}^{-1} \\ H_k \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{O}}_k = \begin{bmatrix} \bar{H}_1 \bar{F}_1^{-1} \dots \bar{F}_{k-1}^{-1} \\ \dots \\ \bar{H}_{k-1} \bar{F}_{k-1}^{-1} \\ \bar{H}_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k = \text{Ker } \mathcal{O}_k, \quad \bar{\mathcal{N}}_k = \text{Ker } \bar{\mathcal{O}}_k.$$

Утверждение 1. *Если есть t групп симметрий, то t переменных ИОФК ненаблюдаемы ($\dim \bar{\mathcal{N}}_k = t$) и их ошибки оценки имеют бесконечную дисперсию.*

Определение 2. [1] *ОФК состоятелен, если вычисленные им ковариационные матрицы соответствуют реальным ошибкам оценки.*

Определение 3. *ОФК структурно состоятелен, если $\mathcal{N}_k, \bar{\mathcal{N}}_k$ совпадают, или близки при стремлении дисперсий шумов к нулю.*

Утверждение 3. *Из структурной несостоятельности ОФК следует его несостоятельность. Ненаблюдаемые подпространства \mathcal{N}_k и структурная состоятельность ОФК в общем случае зависят от выбора системы координат в уравнениях ошибок.*

2. ОФК для пешехода с БИНС, установленной на стопе. Измерения бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) включают измерения удельной силы, действующей на чувствительную массу M акселерометра: $f'_s = f_s + \Delta f_s$, и угловой скорости

корпуса БИНС: $\omega'_s = \omega_s + \Delta\omega_s$. Здесь f_s, ω_s — истинные значения удельной силы и угловой скорости в проекциях на оси связанной с корпусом системы координат (с.к.) Ms ; $\Delta f_s, \Delta\omega_s$ — ошибки измерения, предполагаемые ниже белыми шумами и соответствующие в (1) возмущению w_k . Навигация пешехода с БИНС на стопах основана на идее коррекции по нулевой скорости стопы в фазе опоры [1,3]. Вводя опорную с.к. On , связанную с плоской невращающейся Землей (ось n_3 направлена вверх), уравнения идеальной работы БИНС и модельные уравнения можно записать в виде (штрихом обозначены модельные переменные) [3]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= v_n, & \dot{p}'_n &= v'_n, \\ \dot{v}_n &= g + R_{ns}f_s, & \dot{v}'_n &= g + R_{ns'}f'_s, \\ \dot{R}_{ns} &= R_{ns}\hat{\omega}_s, & \dot{R}_{ns'} &= R_{ns'}\hat{\omega}'_s. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь p_n, v_n — координаты и скорости в опорной с.к.; R_{ns} — матрица преобразования из приборной в опорную с.к.; $\hat{\omega}$ — кососимметрическая матрица, задаваемая формулой $\omega \times a = a\hat{\omega}$. Вектор состояния X образован парой векторов p_n, v_n и матрицей R_{ns} .

Условия нулевой скорости стопы в фазе опоры в моменты t_k разные авторы [2, 3] записывают в двух не эквивалентных формах — в опорной и приборной с.к., которые мы обозначим N, S; а именно: N: $Z_n = v'_n(t_k) = 0$, S: $Z_s = v'_s(t_k) = R_{s'n}v'_n(t_k) = 0$.

Введем ошибку координат $\Delta p_n = p'_n - p_n$, ошибку скоростей $\Delta v_n = v'_n - v_n$ и ошибку ориентации — вектор $\hat{\beta}_n$ малого поворота [3,4]. Наряду с $\Delta p_n, \Delta v_n$ — полными ошибками — вводятся так называемые динамические ошибки $\delta p_n = \Delta p_n + \hat{p}_n\beta_n, \delta v_n = \Delta v_n + \hat{v}_n\beta_n$.

Вектор ошибок введем тремя разными способами.

$$x_{FF} = (\Delta p_n, \Delta v_n, \beta_n), \quad x_{FD} = (\Delta p_n, \delta v_n, \beta_n), \quad x_{DD} = (\delta p_n, \delta v_n, \beta_n).$$

Уравнения (2) получаются интегрированием (4) от t_k до t_{k+1} . К полученным уравнениям применяется ОФК. Уравнения БИНС и условия нулевой скорости инвариантны к параллельным переносам БИНС и ее поворотам вокруг вертикальной оси. Размерность ненаблюдаемого подпространства ИОФК \mathcal{N}_k равна 4, наблюдаемы скорости, крен и тангаж.

Утверждение 5. При записи условия нулевой скорости в форме N ОФК структурно несостоятелен при использовании всех форм уравнений в отклонениях. При записи условия нулевой скорости в форме S ОФК структурно состоятелен при использовании уравнений в отклонениях в формах FD, DD.

4. Заключение. Показано, что в задаче навигации пешехода наилучшим выбором с точки зрения структурной состоятельности является запись уравнений в отклонениях ОФК в динамических ошибках. В теории инерциальной навигации преимущества динамических ошибок перед полными общепризнаны [4], но, насколько нам известно, их связь со свойствами состоятельности ОФК ранее не исследовалась. Заметим, однако, что представленные результаты получены в упрощающем приближении плоской Земли. В рамках точных уравнений свойства наблюдаемости задачи несколько другие [4].

Литература

1. J. Bancroft, G. Lachapelle, M. Cannon, and M. Petovello. Twin IMU-HSGPS Integration for Pedestrian Navigation// ION GNSS 2008, Session E3, Savannah, GA, pp. 16–20, September 2008.
2. Bar-Shalom Y., Li X., Kirubarajan T. Estimation with applications to tracking and navigation. — N.Y.: Wiley-Interscience, 2001.
3. Bolotin Y. V., Bragin A. V., Gulevskii D. V. Исследование состоятельности расширенного фильтра Калмана в задаче навигации пешехода с БИНС, закрепленными на стопах // Гироскопия и навигация. 2021. 29, №2. — 59–77.
4. Голован А.А., Вавилова Н.Б., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2020.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

В.М. Буданов

vlbudanov@gmail.com

УДК 517.925.52+534

В работе представлен алгоритм построения аналитических приближений для неустойчивых предельных циклов системы Лоренца. В явном виде выписаны три приближения в виде рядов по степеням амплитуды первой гармоники по первой координате с коэффициентами в виде усеченных рядов Фурье. Проведено сравнение с результатами численного интегрирования.

Ключевые слова: периодическое решение, система Лоренца, последовательные приближения.

Система Лоренца (1963 год) является первым примером, возникшим из физической задачи, в котором проявились свойства динамического хаоса. Система состоит из трех уравнений с тремя неизвестными и тремя параметрами. При изменении параметров происходят качественные изменения структуры фазового потока от единственного стока до странного аттрактора. В данной работе рассматривается промежуточная ситуация, когда вблизи двух устойчивых особых точек существуют периодические решения. Эти периодические решения имеют седловой тип, поэтому даже численное их нахождение представляет определенные проблемы [1]. Здесь мы строим для них последовательные приближения аналитически, используя подходы, изложенные в [2].

В данной работе, также как в большинстве работ по этой системе, два параметра фиксируются и анализируется динамика процесса при изменении третьего, только значения параметров выбраны так, что для критических особых точек получаются целочисленные значения, что позволяет построить точные аналитические приближения.

Рассматривается система трех уравнений относительно трех неизвестных x, y, z с тремя положительными параметрами σ, ρ, β

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned} \tag{1}$$

Зафиксируем значения двух параметров $\sigma = 8, \beta = 3$. При таком выборе для третьего параметра существует целочисленное критическое значение $\rho_c = 28$, при котором три особые точки становятся неустойчивыми, а также целочисленными являются координаты нетривиальных особых точек $x_c = y_c = \pm 9, z_c = 27$. Частота малых периодических решений при этом равна $\omega_c = 6\sqrt{3}$. При значениях $\rho < \rho_c$ координаты «правой» особой точки равны $z_0 = \rho - 1, x_0 = y_0 = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$. Сделаем замену переменных $x = x_0 + x_c\xi, y = x_0 + x_c\eta, z = z_0 + z_c\zeta$, а также введем вместо параметра ρ параметр r , равный нулю в критической точке $\rho = (\rho_c - 1)(1 - r)^2 + 1$ и новую независимую переменную $\psi = \omega_c(1 - \gamma)t$. Тогда исходная система (1) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \xi' + \frac{4\sqrt{3}}{9}(\xi - \eta) &= \gamma\xi' \equiv u \\ \eta' + \frac{\sqrt{3}}{18}(-\xi + \eta) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta &= \gamma\eta' + \frac{3\sqrt{3}}{2}(r - \xi)\zeta \equiv v \\ \zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-\xi - \eta + \zeta) &= \gamma\zeta' + \frac{\sqrt{3}}{6}(-r\xi - r\eta + \xi\eta) \equiv w \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим следующие особенности полученной системы. Во-первых, в критической точке $r = \gamma = 0$ и можно предположить, что они аналитически зависят от амплитуды, таким образом выполняются условия нижеприведенной теоремы 1. Во-вторых, все ее решения должны иметь период 2π и единичную частоту.

Для построения периодических решений используется метод Ляпунова, но применяется он к системе (2), которая не является системой Ляпунова по причине неконсервативности. Обоснование этого подхода дает следующая теорема, которую здесь формулируем без доказательства.

Теорема 1. Пусть имеется нелинейная система

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

удовлетворяющая следующим условиям: $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ – вектор-функция, компоненты которой – полиномы степени не ниже первой; в диапазоне $\mu \in [0, \bar{\mu}]$ система имеет периодическое решение и период, представимые в виде сходящихся рядов по степеням μ

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \sum_{l=0}^{\infty} (\mathbf{a}_{kl} \cos l\omega t + \mathbf{b}_{kl} \sin l\omega t), \quad \omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \theta_k. \quad (4)$$

Тогда частичные ряды \mathbf{x}_n, ω_n , получаемые из (4) отбрасыванием слагаемых степени выше n , удовлетворяют уравнению (3) с точностью $O(\mu^{n+1})$.

Следствие. Если решение представляется в виде сходящегося ряда по степеням параметра в некотором диапазоне, то оно может быть найдено методом последовательных приближений. При этом найденные коэффициенты не меняются в последующих приближениях.

Отметим, что сформулированная теорема не дает ответа на вопрос о существовании разложения (4), но указывает на принципиальную возможность построить периодическое решение, если угадать его вид, в частности, правильно выбрать параметр разложения. Далее будем строить последовательные приближения для периодического решения системы (2), приняв за параметр амплитуду первой гармоники по переменной ξ .

В качестве первого приближения берем решение линейной части (2), которое получаем следующим образом. Полагаем в (2) все u, v, w , а также γ, r равными нулю. Очевидно, что при этом система (2) становится однородной и имеет гармонические решения единичной частоты. Поскольку система автономна, то соответствующим выбором начала отсчета времени можно изменять фазу, и без ограничения общности можно принять $\xi = A \cos \psi$. После подстановки этого выражения в (2) получаем уравнения для остальных двух переменных. В результате получаем следующее решение первого приближения

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A \cos \psi \\ \eta_1 &= A \cos \psi - \frac{3\sqrt{3}}{4} A \sin \psi \\ \zeta_1 &= \frac{1}{2} A \cos \psi + \frac{\sqrt{3}}{4} A \sin \psi \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, в первом приближении получили семейство периодических решений, параметризуемое амплитудой по первой переменной. В дальнейших приближениях будем считать, что это полная амплитуда основной гармоники по первой переменной, которая не должна изменяться в последующих приближениях. В связи со структурой уравнений (2) можно выразить η, ζ через ξ из двух первых уравнений

$$\begin{aligned} \eta &= \xi + \frac{3\sqrt{3}}{4} (\xi' - u) \\ \zeta &= \frac{1}{2} (-\xi'' + u') - \frac{\sqrt{3}}{4} \xi' + \frac{\sqrt{3}}{36} u + \frac{2\sqrt{3}}{9} v \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка этих выражений в третье уравнение (2) позволяет получить уравнение относительно одной переменной ξ

$$\xi''' + \frac{2\sqrt{3}}{3} \xi'' + \xi' + \frac{2\sqrt{3}}{3} \xi = u'' + \frac{2\sqrt{3}}{9} u' + \frac{7}{9} u + \frac{4\sqrt{3}}{9} v' + \frac{2}{9} v - 2w \equiv q \quad (7)$$

В правой части этого уравнения, как видно из обозначений в (2), содержатся нелинейные члены второго порядка и произведения с множителями γ, r , которые по нашему предположению зависят от A .

Второе приближение. Подставляем первое приближение (5) в правую часть (2, 7). Опуская множитель A^2 , получим

$$q = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 3 \cos 2\psi) + \frac{5}{4} \sin 2\psi$$

Находим решение уравнения (7) с этой правой частью относительно ξ , а затем находим η, ζ из (6). В результате можем выписать второе приближение

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + A^2\left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{24} \sin 2\psi\right) \\ \eta_2 &= \eta_1 + A^2\left(-\frac{3}{8} + \frac{7}{16} \cos 2\psi - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2\psi\right) \\ \zeta_2 &= \zeta_1 + A^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \cos 2\psi + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin 2\psi\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Третье приближение. После подстановки второго приближения (8) в правые части (2) и (7) получим следующее выражение, имеющие множителем A^3

$$q = \frac{\sqrt{3}}{96}(37 \cos \psi - 65 \cos 3\psi) - \frac{11}{16} \sin \psi + \sin 3\psi$$

Видим, что возникли слагаемые на основной частоте, которые могут быть скомпенсированы добавками второго порядка по γ, r , которые в произведениях с элементами первого приближения дадут дополнительные члены третьего порядка. Условие отсутствия в правой части (7) первых гармоник приводит к такой зависимости добавки по частоте и параметра от амплитуды предельного цикла

$$\gamma = -\frac{65}{128}A^2, r = \frac{7}{32}A^2$$

Добавляя решение для третьей гармоники стандартным образом, можно получить третье приближение, которое здесь не приводим.

Отметим, что зависимость между параметром и амплитудой появилась лишь в третьем приближении. Далее итерационный процесс может быть продолжен с использованием пакетов символьных вычислений. При этом сходимость наблюдается вплоть до значений амплитуды, близких к предельному, когда два неустойчивых предельных цикла образуют гомоклиническую бабочку.

На Рис. 1 представлена проекция предельного цикла (синий цвет) в полученном третьем приближении на плоскость при значении амплитуды, близком к предельному, и результат интегрирования исходной системы (1) с соответствующим масштабированием (красный цвет). Начальные условия для интегрирования взяты из аналитического решения в нулевой момент времени.

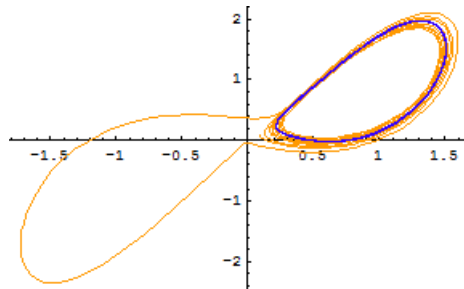


Рис. 1: Предельный цикл и численное решение

Литература

1. Гукенхаймер Д., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

2. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. —М.: Едит. УРСС, 2004.

ДИНАМИКА ФЛЮГЕРА В РАЗРЕЖЕННОМ ПОТОКЕ ЧАСТИЦ

А.А. Давыдов, А.Ю. Плахов

davydov@mi-ras.ru, plakhov@ua.pt

УДК 517.9

Для нелинейной системы уравнений, описывающей движение флюгера в плоском разреженном потоке частиц, дан полный анализ её фазового портрета, который топологически совпадает с фазовым портретом математического маятника с трением.

Ключевые слова: аэродинамика Ньютона, флюгер, фазовый портрет.

Мы рассматриваем плоский флюгер — массивный стержень, насаженный на тонкую негнущуюся невесомую «спицу», которая соединяет его с точкой крепления и может свободно вращаться вокруг неё, — и изучаем его динамику в потоке невзаимодействующих точечных частиц, движущихся с фиксированной скоростью. Частицы при столкновении со стержнем упруго отражаются и больше не взаимодействуют с ним, а с иглой вообще не взаимодействуют. Для этой системы получены уравнения динамики, которые оказываются кусочно-аналитическими, и дано полное описание фазового портрета, который с точностью до гомеоморфизма совпадает с фазовым портретом математического маятника с трением [1]. Таким образом, лишь две фазовые кривые этой системы входят в неустойчивое положение равновесия изучаемой системы, — расположение флюгера вдоль и против потока частиц, а все остальные стремятся к устойчивому положению флюгера — его расположению вдоль и по потоку частиц. Последнее равновесие топологически является фокусом, и стабилизация флюгера в этом положении происходит с затухающими колебаниями около него [2].

Эту модель можно интерпретировать и как плоский маятник, точка опоры которого движется с постоянной скоростью в среде неподвижных частиц, что связывает изучаемую систему с моделью ньютоновской аэродинамики [3], в которой выпуклое тело движется в среде покоящихся точечных частиц, не взаимодействующих друг с другом и взаимодействующих с телом по закону абсолютно упругого (бильярдного) удара. Задача Ньютона о теле с минимальным сопротивлением пережила свой ренессанс в последние 30 лет. Было обнаружено, что наилучшие обтекаемые формы в разумных классах выпуклых тел в трёхмерном пространстве не совпадают с осесимметричным решением, найденным И.Ньютоном в [3]; см. [4], [5]. Среди работ по этой теме отметим численное построение оптимальных форм в [6,7] и доказательство того, что боковая поверхность оптимальных тел является развертывающейся (то есть расслаивающейся на отрезки) вне замыкания множества её особых точек [5,8]. В [9] решена задача о минимальном сопротивлении колеблющихся тел с плоской шероховатой носовой частью.

Изучение же свободного движения (включая и вращения) тел в рамках ньютоновской аэродинамики является сложной задачей даже в двумерном случае. В [10] и [11] независимо изучалось бильярдное рассеяние шероховатыми телами на плоскости, в [12] исследован диапазон сил, действующих на вращающийся диск с шероховатой границей на плоскости, и открыт механизм обратного эффекта Магнуса (возникновения поперечной силы, искривляющей траекторию). В [13]

Исследования АД проводятся при поддержке Программы развития МГУ, соглашение №23-Ш05-25, а АР — при поддержке R&D центра по математике и приложениям университета города Авейру, проекты UIDB/04106/2020, UIDP/04106/2020 и 2022.03091.PTDC.

Давыдов Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Плахов Александр Юрьевич, д.ф.-м.н., Центр R&D по математике и приложениям университета Авейру (Авейру, Португалия)

показано, что траектория вращающегося шероховатого диска на плоскости с подходящим образом выбранной формой шероховатостей может аппроксимировать любую заданную спрямляемую кривую конечной длины. Взаимодействие бесконечного стержня (прямой линии), равномерно вращающегося вокруг неподвижной точки, и бильярдного шара (точки) на плоскости изучено в [14, 15].

Наша модель является одной из простейших в различных классах изучаемых моделей в рамках рассматриваемых задач ньютоновской аэродинамики, и при её изучении удалось получить исчерпывающий ответ.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МЦНМО, 2012.
2. Davydov A.A., Plakhov A.Yu. Dynamics of a Pendulum in a Rarefied Flow//Regular and Chaotic Dynamics, 2024. DOI: [10.1134/S156035472401009X](https://doi.org/10.1134/S156035472401009X)
3. Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica. — London: Streater, 1687.
4. Buttazzo G., Ferone V., Kawohl B. Minimum problems over sets of concave functions and related questions//Math. Nachr. **173**, 1995. 71–89.
5. Brock F., Ferone V., Kawohl B. A symmetry problem in the calculus of variations//Calc. Var. **4**, 1996. 593-599 (1996).
6. Lachand-Robert T., Oudet E. Minimizing within convex bodies using a convex hull method/ SIAM J. Optim. **16**, 2006. 368-379.
7. Wachsmuth G. The numerical solution of Newton's problem of least resistance//Math. Program. A **147**, 2014. 331-350.
8. Plakhov A. A solution to Newton's least resistance problem is uniquely defined by its singular set//Calc. Var. **61**, 2022. 189.
9. Plakhov A., Tchemisova T. Problems of optimal transportation on the circle and their mechanical applications//J. Diff. Eqs. **262**, 2017. 2449-2492.
10. Plakhov A. Billiards and two-dimensional problems of optimal resistance//Arch. Ration. Mech. Anal. **194**, 2009. 349-382.
11. Angel O., Burdzy K., Sheffield S. Deterministic approximations of random reflectors//Trans. Amer. Math. Soc. **365**, 2013. 6367–6383.
12. Plakhov A., Tchemisova T., Gouveia P. Spinning rough disk moving in a rarefied medium// Proc. R. Soc. Lond. A. **466**, 2010. 2033–2055.
13. Kryzhevich S. Motion of a Rough Disc in Newtonian Aerodynamics// In Optimization in the Natural Sciences. EmC-ONS 2014. Communications in Computer and Information Science, vol 499, 2015. Springer, 3–19.
14. Kryzhevich S., Plakhov A. Billiard in a rotating half-plane// J. Dynam. Control Syst., DOI: [10.1007/s10883-023-09655-z](https://doi.org/10.1007/s10883-023-09655-z). pp. 1-13. Published online: 03 July 2023.
15. Kryzhevich S., Plakhov A. Rotating rod and ball // J. Math. Anal. Appl. **533**, 2024, 128018.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

М.Д. Ковалев

mdkovalev@mtu-net.ru

УДК 531.01,531.8

На основе построения математической модели плоских шарнирно-рычажных механизмов решается вопрос о числе степеней свободы типичного механизма заданного строения.

Ключевые слова: математическая модель, шарнирно-рычажный механизм, плоские механизмы с вращательными парами, конфигурационное пространство механизма.

В теории механизмов есть раздел, называемый структурным анализом. Он посвящён исследованию строения механизмов. Одной из основных задач структурного анализа механизма является определение его числа степеней свободы, или в терминологии теории механизмов — степени подвижности. На этот счёт имеются так называемые структурные формулы, выражающие число степеней свободы через числа звеньев и кинематических пар. Однако, эти формулы не всегда дают верный результат.

Разобраться в этом вопросе на современном уровне позволяет математическая формализация понятий теории механизмов. Её несложно провести для механизмов простой природы, построив математические модели плоских шарнирно-рычажных механизмов [1,2], и плоских механизмов с вращательными парами [4]. Причём, фундаментальной является модель шарнирно-рычажных механизмов. К её анализу можно свести вопросы изучения модели плоских механизмов с вращательными парами [4].

Математическая модель шарнирно-рычажного механизма основывается на введении исчерпывающе описывающего строение механизма графа. Этот граф G строится иначе, чем принятый в теории механизмов граф Γ . Если граф Γ состоит из отвечающих звеньям механизма вершин и отвечающих кинематическим парам рёбер, то вершины графа G отвечают шарнирам, а его рёбра — рычагам механизма. Рычагом мы называем прямолинейный стержень, несущий на концах по шарниру. Если соединить концевыми шарнирами два рычага, то мы получим обычную кинематическую пару. Если соединить в одном шарнире три и более рычагов, то получим так называемый сложный или совмещённый шарнир, допускающий произвольное взаимное проворачивание вокруг одной и той же оси любой пары соединённых им рычагов. В являющемся концом лишь одного рычага шарнире нет кинематической пары. Описание строения шарнирно-рычажного устройства графом Γ не всегда равносильно описанию его графом G [5,6].

Исходя из графа $G = G(V, E)$ и положений (x_i, y_i) в плоскости шарниров легко выписать систему уравнений вида

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = l_{ij}^2, \quad (i, j) \in E,$$

где l_{ij} — длина рычага, определяющую конфигурационное пространство механизма. При этом мы считаем, что каждой компоненте связности положительной размерности множества решений этой системы отвечает свой шарнирный механизм.

Простейшей и исторически первой структурной формулой является формула Чебышёва, получающаяся простым подсчётом числа степеней свободы:

$$W = 3\rho - 2\mu, \quad (1)$$

где ρ — число звеньев за исключением стойки (для шарнирно-рычажных механизмов это число r рычагов механизма), μ — число его вращательных пар. Она справедлива лишь в случае отсутствия совмещённых шарниров.

Такой же подсчёт для нашей шарнирно-рычажной модели, но основанный на общем числе степеней свободы всех незакреплённых шарниров, и справедливый также в случае наличия совмещённых шарниров, даёт формулу

$$W = 2m - r, \quad (2)$$

где m — число всех свободных шарниров, r — число рычагов. Действительно, число степеней свободы всех незакреплённых шарниров как точек в плоскости равно $2m$, а число условий связи в случае их независимости равно r .

Формулой (1) обычно пользуются в теории механизмов для подсчёта числа степеней свободы механизма. Однако, эта формула как и формула (2), не всегда даёт правильный ответ. Машиноведы для её исправления вводят добавочные слагаемые, которые соотносят наличие избыточных или пассивных связей [3]. Их приходится выявлять в каждом случае отдельно.

Введённая модель шарнирно-рычажных устройств позволяет решить этот вопрос. Причины, по которым нарушаются формулы (1), (2), оказываются двух родов.

Во-первых, структурная формула может быть верна в типичном случае, и терять силу при специальном подборе параметров механизма. Например, плоский шарнирный четырёхзвенник

становится фермой, если длина одного из его звеньев равна сумме длин остальных трёх. Множество таких исключительных механизмов представляет собой подмножество меньшей размерности в множестве параметров (у нас длин рычагов).

Во-вторых, структурная формула может быть не верна в типичном случае. Это происходит по той причине, что число степеней свободы определяется не только числом звеньев и шарниров, но и строением устройства. Строение же может быть такое, что налагаемые кинематическими парами связи зависимы для всех устройств. Пример этого приведён на рис. 1. Типичное устройство с таким графом является шарнирным механизмом с одной степенью свободы (по существу шарнирным четырёхзвенником), хотя структурная формула (2) даёт нулевое число степеней свободы.

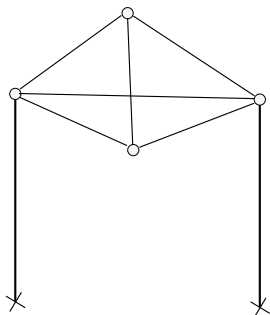


Рис. 1: Шарнирный четырёхзвенник с избыточной связью в шатунном звене. Закреплённые в стойке шарниры обозначены крестиками.

Вопрос независимости связей в типичной шарнирно-рычажной конструкции в математике давно решён [1]. А именно, имеется критерий применимости в типичном случае структурных формул (1), (2). Чтобы его сформулировать нужно построить по графу G закреплённого шарнирно-рычажного устройства граф \bar{G} . Если в графе G имеется k отвечающих закреплённым шарнирам вершин, v_1, v_2, \dots, v_k , то достаточно добавить к G рёбра v_1v_2, \dots, v_1v_k , и рёбра v_2v_3, \dots, v_2v_k .

Теорема 1. *Степень подвижности типичного плоского шарнирно-рычажного устройства вычисляется по формулам (1), (2) тогда и только тогда, когда для произвольной совокупности (пусть $e > 0$ штук) ребер отвечающего ей графа \bar{G} число v инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству $e \leq 2v - 3$.*

Например, граф \bar{G} получается из изображённого на рисунке 1 графа G добавлением ребра, соединяющего две обозначенные крестиками вершины. В графе \bar{G} содержится полный подграф K_4 , для которого $v = 4$, $e = 6$, и $e > 2v - 3 = 5$. Поэтому структурная формула (2) не выполняется. Причина этого в зависимости налагаемых входящими в K_4 рычагами связей.

Литература

1. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, т.58, №1, с.45–70.
2. Ковалёв М.Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, URSS, 2019. 256 с.
3. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин, Москва: Наука, 1990.
4. Ковалёв М.Д. О структурных графах теории механизмов // РАН Проблемы машиностроения и надёжности машин, 2023, № 1, С. 39–44.
5. Ковалёв М.Д. О графах и структурных формулах теории механизмов // Сибирский журнал индустриальной математики, 2023, Т. 26, №3, С. 42–55.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАГРУЖЕННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ШИНЫ

И.Ф. Кожевников

kozhevnikovif@gmail.com

УДК 531/534, 534.1, 534.5, 517.9

Исследуются вынужденные малые колебания нагруженной вращающейся шины в окрестности стационарного режима качения. Из-за вибраций колесного диска, внешние силы и крутящий момент, приложенные к нему, координаты центра масс, компоненты реакции в пятне контакта и натяжение бандажа зависят от времени. В случае вынужденных колебаний собственные формы вычисляются аналитически. При различных возмущающих частотах в горизонтальном и вертикальном направлениях из спектра выделяются две собственные формы, представляющие собой бегущие волны в направлении, противоположном вращению шины, которые накладываются одна на другую.

Ключевые слова: радиальная шина, аналитическая модель, вынужденные колебания.

Модель радиальной шины, позволяющая аналитически проанализировать динамические эффекты, возникающие при качении, была предложена в [1-4]. Предполагается, что механическая система состоит из двух частей: деформируемой и недеформируемой. Недеформируемой частью колеса является диск, который представляется абсолютно твердым телом. Деформируемой частью колеса является шина, поверхность которой состоит из гибкой ленты (бандажа), контактирующей с опорной поверхностью, и двух боковин, соединяющих бандаж с диском колеса. Деформации бандажа, который моделируется в недеформированном состоянии круговым цилиндром, рассматриваются с учетом точных нелинейных условий нерастяжимости армирующих волокон (нити каркаса, натянутые от борта к борту, и два семейства косых нитей брекера). Боковые поверхности, моделируемые в недеформированном состоянии частями двух торов, тоже армированы (нити каркаса, натянутые от борта к борту) и представляют собой мембраны. Помимо этого, предполагается, что боковины снабжены материалом, который описывается согласно модели несжимаемой резины Муни-Ривлина. В результате применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получается система четырнадцати уравнений движения, которая имеет следующую структуру: три уравнения Лагранжа второго рода с неопределенными множителями, четыре уравнения движения в частных производных, три уравнения связей и четыре динамических граничных условия.

Рассматривается стационарный режим качения нагруженной шины с постоянной угловой скоростью. Далее рассматривается проблема колебаний шины в окрестности стационарного режима качения. В стационарном режиме к диску колеса прикладываются внешние силы и момент, которые вызывают смещения диска с очень малой амплитудой по горизонтали и вертикали за счет деформаций шины. Изучаются вынужденные колебания с гармоническими возмущающими функциями. Сначала рассматриваются вынужденные колебания с одинаковыми возмущающими частотами $\nu_1 = \nu_3$ в горизонтальном и вертикальном направлениях. Если возмущающая частота близка к собственной частоте, то шина реагирует на это возмущение, и из спектра выделяется соответствующая собственная форма. Таким образом, наблюдается волна, бегущая в направлении, противоположном вращению шины. Собственные формы (сплошные толстые линии) представлены в окрестности стационарного режима качения (пунктирные линии) на рис.1 (а) для $\nu_1 = \nu_3 = 115$ Гц и на рис.1 (б) для $\nu_1 = \nu_3 = 345$ Гц. Амплитуды вынуждающих воздействий на рис.1 (а) и (б) различны. Если частоты возмущающих воздействий по горизонтали и вертикали различны $\nu_1 \neq \nu_3$, то две соответствующие собственные формы выделяются из спектра и накладываются друг на друга. Наблюдается волна (рис.1 (в), $\nu_1 = 115$ Гц, $\nu_3 = 345$ Гц), бегущая в направлении, противоположном вращению шины, которая представляет собой суперпозицию двух СФ («большие горбы» соответствуют ν_1 , а «рябь» соответствует ν_3). Траектория движения точки срединной линии бандажа нагруженной вращающейся шины в процессе колебаний

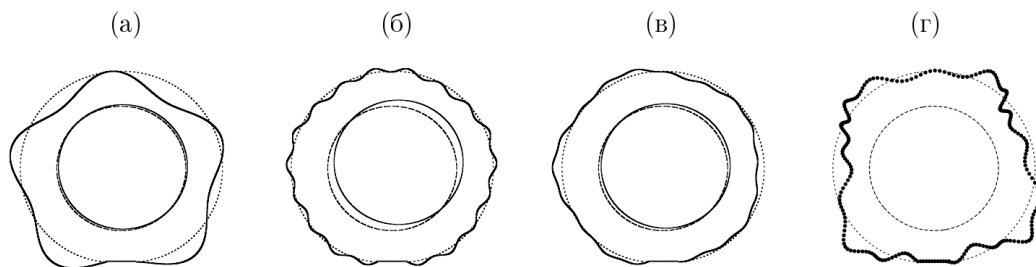


Рис. 1: Собственные формы нагруженной вращающейся шины: (а) $\nu_1 = \nu_3 = 115$ Гц, (б) $\nu_1 = \nu_3 = 345$ Гц, (в) $\nu_1 = 115$ Гц, $\nu_3 = 345$ Гц; (г) Траектория движения точки бандажа нагруженной вращающейся шины в процессе колебаний для $\nu_1 = 97$ Гц, $\nu_3 = 194$ Гц.

в невращающейся подвижной системе координат (система координат Кенига) представлена на рис.1 (г) для $\nu_1 = 97$ Гц и $\nu_3 = 194$ Гц.

Литература

1. Вильке В.Г., Кожневиков И.Ф. Об одной модели колеса с армированной шиной // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2004, №4, С.37-45.
2. Kozhevnikov I.F. The vibrations of a free and loaded tyre // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. Vol. 70, Issue 2. P. 223-228.
3. Kozhevnikov I.F. Vibrations of a rolling tyre // Journal of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331, Issue 7. P. 1669-1685.
4. Kozhevnikov I.F. Forced vibrations of a rolling tyre // Wave Motion. 2022. Vol. 114. 103007.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕСТИБУЛЯРНОГО ДАТЧИКА

Н.В. Куликовская, А.П. Кручинина

nvkpostb@mail.ru, anna.kruchinina@math.msu.ru

УДК 51-76, 519.21, 57.053.2

Представлена математическая модель преобразования информации сенсорным вестибулярным органом. Моделируется преобразование механического усилия в рецепторный потенциал и его передача во входящий ток афферентного нейрона. Модель основана на системе дифференциальных уравнений Колмогорова, учитывающих марковость системы. Интенсивности переходов между состояниями подсистем определяются факторами, характеризующими каждый этап, что подтверждается результатами физиологических опытов.

Ключевые слова: волосковая клетка, ионные каналы, дифференциальные уравнения Колмогорова, математическая модель.

Представлена математическая модель обработки информации сенсорным вестибулярным органом. Модель представляет собой последовательность преобразований информации нескольких типов. На первом шаге происходит преобразование механического усилия, вызванного наличием движения с ускорением головы, в рецепторный потенциал волосковой клетки. Второй шаг состоит в передаче этого потенциала во входящий ток афферентного нейрона с помощью быстрой синаптической передачи. В результате пространственной и временной суммации входящих в нейрон синаптических токов меняется частота спайковой активности нейрона.

При формировании алгоритма приняты следующие гипотезы:

Куликовская Нина Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Кручинина Анна Павловна, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

1. Все ионные каналы могут находиться в двух конечных состояниях — открытых или закрытых. В открытом состоянии каждый канал имеет постоянную проводимость G , в закрытом — ноль. Между этими двумя конечными состояниями могут существовать еще несколько переходных состояний [1, 2].
2. Таким образом, система одноименных каналов может быть представлена в виде размеченного графа.
3. Интенсивность перехода между состояниями подсистемы в каждом случае будем полагать зависящей только от одного фактора, который характеризует переход системы с одного энергетического уровня на другой [1].
4. Математическая модель преобразования информации представляется системой дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей каждого состояния.

Каждый этап преобразования представляется отдельной подсистемой. Особенное значение имеет связь этапов между собой, которая позволяет обеспечить марковость всей системы. Коэффициенты составленных уравнений — это интенсивности переходов между возможными состояниями каждой подсистемы. Полагается, что они представимы в виде независимых пуассоновских потоков, т. е. обладают свойством ординарности. В таком случае, весь процесс является марковским и допускает описание в виде системы уравнений Колмогорова с переменными коэффициентами.

Отметим, что получаемая система уравнений — детерминирована и не имеет случайных входных сигналов. Тем не менее, выход сформированной системы дифференциальных уравнений — частота спайковой активности афферентного нейрона — случайный процесс.

Все переходы из одного состояния в другое зависят от одного фактора. Такой фактор на первом шаге — механическая упругость биологической пружины, на втором — электрический потенциал между двумя сторонами плазматической мембраны волосковой клетки, на третьем шаге — концентрация возбуждающего нейротрансмиттера в синаптической щели.

Для того, чтобы модель могла существовать, необходимо определить все интенсивности переходов. Для этого мы используем результаты физиологических опытов, описанные в современной литературе и посвященных различным измерениям в возбудимых клетках [3].

Многие из этих экспериментов проводятся при кусочно-постоянном характере изменения рассматриваемых факторов [1, 4]. В этом случае уравнения Колмогорова имеют кусочно-постоянные коэффициенты. Изучение возникающих при этом переходных процессов помогает восстановить интенсивности [5], а сравнение модельных численных результатов с экспериментальными результатами и может подтвердить правильности принимаемых гипотез. В качестве примера мы приведем математическую модель функционирования вестибулярного нейрона, связанного с волосковой клеткой второго типа. Такая модель должна соответствовать сенсорному датчику углового ускорения головы, включенному в трехнейронную цепочку вестибуло-окулярного рефлекса.

Литература

1. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. // *J Physiol.* **117**:4 (1952), 500-544
2. *Dolphin A.C., Insel P.A., Blaschke T.F., Meyer U.A.* Introduction to the Theme "Ion Channels and Neuropharmacology: From the Past to the Future" // *Annual Review of Pharmacology and Toxicology.* **60**:1 (2020), 1-6
3. *Brichta A.M., Aubert A., Eatock R.A., Goldberg J.M.* Regional analysis of whole cell currents from hair cells of the turtle posterior crista. // *J Neurophysiol.* **88**:6 (2002), 3259-3278
4. *Contini D., Holstein G.R., Art J.J.* Simultaneous Dual Recordings From Vestibular Hair Cells and Their Calyx Afferents Demonstrate Multiple Modes of Transmission at These Specialized Endings // *Front Neurol.* **13**:891536 (2022)
5. *Куликовская Н.В., Кручинина А.П.* Об использовании уравнений Колмогорова для определения характеристик потенциал-зависимых ионных каналов // *Биофизика.* **68**:2 (2023), 305-319

КАЛИБРОВКА БЛОКА НЬУТОНОМЕТРОВ И ЗАДАЧА ДЕТЕКТИРОВАНИЯ СБОЕВ ДЛЯ БЛОКА ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**А.И. Матасов, Е.В. Шестакова***alexander.matasov@gmail.com, eva.shestakova@math.msu.ru*

УДК 531.01,629.7.05

Решены две задачи — калибровки блока ньютонометров при помощи метода скаляризации и детектирования сбоев в избыточном блоке датчиков угловой скорости; предложено четыре метода: метод “нулевых” линейных комбинаций, метод наименьших модулей, метод наименьших квадратов и гарантирующий подход.

Ключевые слова: блок ньютонометров, блок датчиков угловой скорости, калибровка, детектирование сбоев.

Рассматриваются две важные прикладные задачи: задача калибровки блока ньютонометров и задача выявления сбоев в избыточном блоке, состоящем из шести датчиков угловой скорости. Особенностью первой задачи является нестандартное расположение ортогонального блока ньютонометров. Рассчитаны оптимальные угловые положения стенда, приведена общая схема решения задачи оценивания, соответствующей задаче калибровки. Представлены результаты обработки «сырых» измерений, полученных в экспериментах, и приведены результаты окончательной обработки экспериментальной информации. Вычисления были проделаны для различных температурных условий функционирования блока. В итоге получены оценки погрешностей блока. Проведена верификация экспериментов – тесты на определение модуля ускорения силы тяжести, которые подтвердили эффект калибровки.

Во второй части решается задача определения сбоев в блоке датчиков угловой скорости. Для повышения надежности навигационной системы используются избыточные блоки инерциальных сенсоров — датчиков угловой скорости. Вместо обычно используемых трех взаимно ортогональных чувствительных элементов используются шесть датчиков. Предполагается, что в один момент времени во всех каналах блока могут происходить не более двух сбоев. Необходимо детектировать возможные сбои в каналах измерений блока. Иными словами, нужно определить наличие сбоя и установить, в каком канале он произошел. Для детектирования сбоев природа аномальных ошибок в показаниях датчиков не существенна.

Исследованы несколько методов определения сбоев и проведено их численное тестирование. Метод «нулевых» линейных комбинаций является простым и надежным инструментом функциональной диагностики при определении единичного сбоя. Также исследованы возможности классических методов оценивания – метода наименьших квадратов и метода наименьших модулей [1]. В результате численного моделирования установлено, что при столь малом количестве измерений (равном 6) традиционные подходы не дают новых преимуществ. Метод наименьших квадратов не идентифицирует даже один сбой. Метод наименьших модулей определяет один сбой, но требует несколько больше вычислительных затрат, чем метод “нулевых” линейных комбинаций. Два сбоя не идентифицируют ни метод “нулевых” комбинаций, ни традиционные методы.

Разработан новый подход для выяснения принципиальной возможности детектирования двух сбоев, основанный на методе гарантирующего оценивания [2-4]. Достоинство этого подхода состоит в том, что задача детектирования сбоев ставится как оптимальная задача оценивания. Кроме того, удастся вычислить и оптимальную гарантированную ошибку определения соответствующих параметров. При помощи обширного моделирования установлено, что метод гарантирующего оценивания позволяет выявлять два сбоя в блоке датчиков угловой скорости.

Литература

1. *Мудров В.И, Кушко. В.Л* Метод наименьших модулей. Изд. 2-е, — М.: УРСС, 2013.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и оценивание в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.

Матасов Александр Иванович, д.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, лаб. управления и навигации (Москва, Россия)

Шестакова Ева Владимировна, специалист, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра прикладной механики и управления (Москва, Россия)

3. Лидов М.Л. Минимаксные методы оценивания, Препринт №71 ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010.
4. Матасов А.И. Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.

СТРУКТУРНОЕ ОБУЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

А.М. Мухамедов, Х.И. Чаирез Ориа, А.С. Позняк, В.А. Чертополохов

a.mukhamedov@vrmsu.ru, psvr@vrmsu.ru

УДК 517.935

В докладе представлен способ динамического изменения архитектуры аппроксиматоров на базе дифференциальных нейронных сетей в процессе работы. Сети используются для построения приближенных моделей динамических систем на основе экспериментальной информации. Эффективность подхода проверена на двух наборах экспериментальных данных, полученных путем записи глазодвижительного отклика на вестибулярные и визуальные стимулы.

Ключевые слова: структурное обучение, дифференциальные нейронные сети, непараметрическая идентификация, динамические системы.

Дифференциальные нейронные сети позволяют аппроксимировать поведение сложных динамических систем, для которых нет полной математической модели [1]. Устойчивость ошибки аппроксимации обеспечивается синтезом законов обучения сети на основе теории устойчивости по Ляпунову. Однако при использовании данного метода важную роль играет выбор структуры, в том числе, размера сети. С одной стороны, увеличение количества используемых нейронов, выражающих базисные функции, обеспечивает лучшую аппроксимацию системы. С другой — для большого количества нейронов численные ошибки каждого из них могут накапливаться и ухудшать итоговую точность аппроксимации. Таким образом, в определенный момент эффект от шумов может превзойти полезность от использования дополнительного нейрона.

Для снижения негативных эффектов от слишком сложных сетей, можно изменять их структуру в процессе работы, добавляя или удаляя нейроны в зависимости от обрабатываемых данных. Это структурное изменение может делаться в конце каждой итерации обучения нейронной сети, называемой эпохой.

Рассмотрим дифференциальную нейронную сеть, также называемую нейросетевым идентификатором [1]:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + W_1(t)\sigma_1(\hat{x}(t)) + W_2(t)\sigma_2(\hat{x}(t))u(t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ — оценка вектора состояния x , $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления. Слагаемое с $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ позволяет учитывать линейную часть динамики системы. Две другие компоненты формируют саму дифференциальную сеть — первая задается первой матрицей весов $W_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times p_1}$ и вектора активационных функций (например, сигмоид) $\sigma_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_1}$, вторая — второй матрицей весов $W_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times p_2}$ и активационных функций $\sigma_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_2 \times m}$.

Мухамедов Артур Мансурович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет космических исследований (Москва, Россия)

Чаирез Ориа Хорхе Исаак, к.ф.-м.н., профессор, Монтеррейский технологический институт (Гуадалахара, Мексика)

Позняк Александр Семенович, д.ф.-м.н., профессор, СИНВЕСТАВ Национальный Политехнический Институт (Мехико, Мексика)

Чертополохов Виктор Александрович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Модифицируем сеть таким образом, чтобы иметь возможность отключать отдельные функции активации во время эпохи k :

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t | k) = A\bar{x}(t | k) + \bar{W}_1(t | k)\phi_1(t | k) + \bar{W}_2(t | k)\phi_2(t | k)u(t), \quad \bar{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ обозначает идентифицированное состояние системы при использовании неполной структуры, в отличие от \hat{x} . $\phi_i(t | k) = \chi_i(k) \odot \sigma_i(x(t))$, $i = 1, 2$ — функции активации, которые могут быть отключены в процессе работы системы с помощью вектора и матрицы маскирующих переменных $\chi_1 \in \{0, 1\}^{N_1}$, $\chi_2 \in \{0, 1\}^{N_2 \times m}$. То есть, выключение p -того компонента $\sigma_i(x(t))$ эквивалентно установлению p -того компонента χ_i в 0. Символ \odot обозначает поэлементное умножение матриц.

Важно отметить, что ϕ_1, ϕ_2 сохраняют свойство Липшицевости от функций σ_1, σ_2 . Это позволяет использовать подход, приведенный в [1], для доказательства устойчивости по Ляпунову нулевого решения системы, описывающей динамику ошибки аппроксимации $\Delta = \bar{x} - x$. В процессе доказательства выводится динамика весовых коэффициентов $\frac{d}{dt}\bar{W}_i$, что завершает построение дифференциальной нейронной сети.

Предлагаемый способ динамического изменения количества используемых нейронов — в процессе работы оценивать их вклад в общую динамику системы, и отключать нейроны со значением вклада ниже порогового значения $\varepsilon(k)$:

$$\chi_{i,j}(k) = \begin{cases} 0 & \text{если } \lambda_{i,j}(k) \leq \varepsilon(k), \\ 1 & \text{если } \lambda_{i,j}(k) > \varepsilon(k). \end{cases} \quad (3)$$

Сами значения вклада можно рассчитывать как скалярное произведение выхода функции активации и аппроксимируемой функции:

$$\lambda_{i,j}(k) = \frac{1}{\theta_{i,j}} \int_{(k-1)T}^{kT} \left| \left(\frac{d}{dt}x_i(t | k) \right)^\top \delta_{i,j}(t | k) \right| dt, \quad (4)$$

где θ — матрица нормализационных коэффициентов для функций активации. Описанная процедура позволяет динамически изменять количество используемых нейронов из заранее известного набора. В случае, если этот набор задается равномерной сеткой в n -мерном пространстве параметров, можно добавлять новые нейроны, используя более плотную сетку. Значения вкладов при этом можно линейно интерполировать от полученных на более грубой сетке.

Для демонстрации работы предложенного подхода была произведена аппроксимация динамики углов поворота глаз по данным двух экспериментов. «Эксперимент 1», описанный в [2], содержит движения глаз во время пассивных вращений на динамической платформе. В записи «Эксперимент 2» испытуемый, находясь на вратарской позиции виртуального хоккейного поля, следит глазами за шайбами, которые появляются в различных областях поля и движутся в направлении ворот с различными скоростями (серия Block 5 в описании [3]). В качестве вектора состояния для «Эксперимента 1» использовались горизонтальные составляющие углов поворота левого и правого глаз и соответствующие угловые скорости, для «Эксперимента 2» — углы поворота и угловые скорости одного из глаз по вертикали и горизонтали. Для обеих записей с помощью предложенного метода с иерархическим увеличением плотности параметрической сетки была получена архитектура, показывающая наименьшую ошибку аппроксимации:

$$J(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \|\Delta(\tau | \chi_1, \chi_2)\|^2 d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Затем обе оптимизированные архитектуры («Оптим. на данных ...») были использованы как идентификаторы для обеих записей. Для демонстрации эффекта от выбора конкретных функций активации были также посчитаны средние ошибки аппроксимации для архитектур «Случ.» с тем же количеством нейронов, но выбранными случайно из набора, соответствующего заданной параметрической сетке. Наконец, архитектуры «Все функции» содержат все функции для указанной параметрической сетки. Результаты сравнения представлены в Таблице 1. Н/Д в одной из ячеек показывает, что аппроксимация не была успешна, поскольку сеть расходилась.

| Тип архитектуры (к-во ф-й активации) | Эксперимент 1 | Эксперимент 2 |
|---------------------------------------|-----------------|-----------------|
| Оптим. на данных эксп. 1 (65 из 125) | 1.710 | 6.19 |
| Оптим. на данных эксп. 2 (537 из 729) | 1.97 | 3.30 |
| Случ. (65 из 125) | 2.27 ± 0.10 | 7.78 ± 0.28 |
| Случ. (537 из 729) | Н/Д | 4.16 ± 0.05 |
| Все функции (27 из 27) | 1.91 | 14.99 |
| Все функции (125 из 125) | 1.709 | 5.62 |
| Все функции (729 из 729) | 1.80 | 3.77 |

Таблица 1: Сравнение точности различных архитектур

Результаты показывают, что архитектуры, оптимизированные на конкретных тестовых данных, показывают более высокую точность аппроксимации по сравнению со случайными или полученными при оптимизации на данных другого эксперимента. Также оптимизированные архитектуры показывают лучшую или похожую точность по сравнению с полными, использующими все функции активации. В случае, когда полная архитектура превосходит оптимизированную, это происходит на том же уровне параметрической сетки, используя почти в два раза больше функций активации, что в совокупности демонстрирует эффективность предложенного подхода. Кроме того, на разных экспериментальных данных структура оптимизированной сети отличалась при одинаковых исходных наборах функций активации. Таким образом, предложенный подход позволяет адаптировать структуру дифференциальной нейронной сети под конкретную динамическую систему.

Литература

1. *Poznyak A. S., Sanchez E. N., Yu W.* Differential neural networks for robust nonlinear control: identification, state estimation and trajectory tracking. — World Scientific, 2001.
2. *Prud V. et al.* Non-parametric spiking neural network modelling of the eye-movement response to enforced controlled accelerations //IFAC-PapersOnLine. — 2021. — Т. 54. — №13. — С. 311-316.
3. *Polikanova I. et al.* What Differences Exist in Professional Ice Hockey Performance Using Virtual Reality (VR) Technology between Professional Hockey Players and Freestyle Wrestlers?(a Pilot Study) //Sports. — 2022. — Т. 10. — №8. — С. 116.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕЙРОХИРУРГИЧЕСКОГО ЛЕЧЕНИЯ СОСУДИСТОЙ ПАТОЛОГИИ

И.А. Петренко, А.А. Черевко, Т.С. Шарифуллина

petrenko_irina@bk.ru, a.cherevko@g.nsu.ru, t.gologush@g.nsu.ru

УДК 517.977.56, 612.13

В докладе рассматривается задача оптимального управления возникающая при математическом моделировании нейрохирургического вмешательства. Динамика задачи описывается гиперболическим интегро-дифференциальным уравнением. Построены необходимые условия оптимальности в терминах принципа максимума Понтрягина и найдено решение, удовлетворяющее этим условиям.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, нейрохирургия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-11-00264).

Петренко Ирина Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия)

Черевко Александр Александрович, к.ф.-м.н., с.н.с, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Шарифуллина Татьяна Сергеевна, к.ф.-м.н., н.с, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Рассматривается задача оптимального управления с динамикой описываемой гиперболическим квазилинейным интегро-дифференциальным уравнением с заданным начальным и управляемым граничным условием. Управление входит как в граничное условие, так и в коэффициенты уравнения. Такая задача возникает при математическом моделировании нейрохирургического вмешательства и описывает совместное течение крови и специальной жидкости (эмболического агента) внутри сосудистой патологии головного мозга — артериовенозной мальформации (далее — АВМ) [1]. Целью такой операции является максимально полное замещение крови в патологических сосудах эмболическим агентом. В одномерном приближении при некоторых предположениях такое течение моделируется на основе начально-краевой задачи для уравнения двухфазной фильтрации

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + (q_b(\bar{S}(t)) + u(t)) \frac{\partial f(S(t, x))}{\partial x} = 0,$$

$$S(0, x) = 1, \quad f(S(t, 0)) = \frac{q_b(\bar{S}(t))}{q_b(\bar{S}(t)) + u(t)},$$

где $S(t, x)$ — концентрация крови в сечении АВМ,

$\bar{S}(t)$ — средняя концентрация крови,

$u(t)$ — расход эмболического агента на входе (управление),

$q_b(\bar{S})$ — расход крови на входе (клинические данные),

$f(S)$ — невыпуклая функция Баклея-Леввергта.

Данная начально-краевая задача решается в области: $t \in [0, T]$ — время; $x \in [0, L]$ — координата вдоль АВМ.

Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала, описывающего среднее кровосодержание в патологии в конце операции.

$$J = \frac{1}{L} \int_0^L S(T, x) dx$$

при выполнении ограничений на управление $u(t)$

$$u(t) \geq 0, \quad q_b(\bar{S}(t)) + u(t) \leq \bar{Q}$$

а также фазовую переменную и входное давление

$$S(t, L) = 1, \quad p(t) \leq p_{max}$$

где \bar{Q} , p_{max} — постоянные ограничения на суммарный расход и входное давление.

Такие ограничения следуют из медицинских соображений обеспечения безопасности операции.

Для этой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина построено оптимальное управление

$$u^*(t) = -V\bar{S}'(t),$$

где V — объем АВМ, которое находится с помощью решения задачи Коши

$$q_b(\bar{S}(t)) - V\bar{S}'(t) = \bar{Q}, \quad \bar{S}(0) = 1.$$

Найденное оптимальное управление обеспечивает наименьшее достижимое значение целевого функционала (среднего кровосодержания в патологии) в каждый момент времени и может быть использовано в качестве эталонного при принятии решения о тактике проведения операции.

Литература

1. Cherevko A.A., Gologush T.S., Petrenko I.A., Ostapenko V.V., Panarin V.A. Modelling of the arteriovenous malformation embolization optimal scenario. R Soc Open Sci. 2020 Jul 22;7(7):191992. DOI: [10.1098/rsos.191992](https://doi.org/10.1098/rsos.191992). PMID: 32874606; PMCID: PMC7428277.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНО-СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

А.Г. Петров, А.Б. Батхин

petrovipmeh@gmail.com, batkhin@technion.ac.il

УДК 512.643

Рассматривается метод вычисления параметрического представления ортогонально-симплектической матрицы. Подробно рассмотрена структура матриц размеров 2, 4 и 6. Показано, что для размерности 4 такие матрицы представлены в виде композиции двух матриц изоклинических вращений. Решена задача построения ортогонально-симплектической матрицы размера 4 по заданному вектору. Продемонстрировано применение такого преобразования для исследования семейств периодических решений автономной системы Гамильтона с двумя степенями свободы.

Ключевые слова: ортогонально-симплектическая матрица, периодическое решение, система Гамильтона, матрица монотропии.

Введение. При исследовании фазового потока неинтегрируемой системы Гамильтона особую роль играют инвариантные многообразия: положения равновесия, периодические решения, инвариантные торы различных размерностей. Тогда вблизи соответствующего многообразия можно нормализовать исходную систему и с помощью полученной нормальной формы сделать выводы об устойчивости соответствующих многообразий, локальной интегрируемости в их окрестностях, характере бифуркаций при малом изменении параметров и асимптотически проинтегрировать нормализованную систему уравнений.

Для автономных систем Гамильтона характерно наличие «естественных семейств» периодических орбит, которые параметризуются значением интеграла энергии. Получив информацию хотя бы об одном периодическом решении семейства затем с помощью предикторно-корректорного метода оно продолжается и исследуется. Успешное продолжение вдоль семейства требует вычисления нормальных и касательных смещений, что достигается с помощью соответствующих ортогонально-симплектических преобразований фазового пространства вблизи периодического решения. Группа ортогонально-симплектических матриц (ОСМ) оказывается очень полезной при исследовании семейств периодических решений систем Гамильтона, а в критических решениях позволяет определить характер бифуркации семейства [1].

В работе рассматривается общий метод получения параметрического представления ОСМ размера $2n \times 2n$, а также подробно рассмотрены частные случаи для $n = 1, 2, 3$. Сформулировано утверждение об общем представлении n^2 параметрического семейства ОСМ с помощью блочной кососимметрической матрицы K_{2n} размера $2n \times 2n$. Решается задача построения ортогонально-симплектического преобразования матрицы монотропии периодического решения системы Гамильтона с двумя степенями свободы по заданному вектору фазовой скорости.

Общий вид ортогонально-симплектического преобразования. Здесь и далее \mathbf{B}_{2n} означает квадратную вещественную матрицу размера $2n \times 2n$; \mathbf{E}_n и \mathbf{E} – единичные матрицы размерности $n \times n$ и $2n \times 2n$ соответственно. Знак $^\top$ означает операцию транспонирования матрицы или вектора.

По аналогии с известной формулой Кэли [2]

$$\mathbf{A}_{2n} = (\mathbf{E} + \mathbf{K}_{2n})(\mathbf{E} - \mathbf{K}_{2n})^{-1}, \quad (1)$$

определяющей параметризацию ортогональной матрицы \mathbf{A}_{2n} : $\mathbf{A}_{2n}^\top \mathbf{A}_{2n} = \mathbf{E}$ посредством кососимметрической матрицы \mathbf{K}_{2n} , доказана

Работа выполнена по теме государственного задания (№госрегистрации 124012500443-0).

Петров Александр Георгиевич, д.ф.-м.н., профессор, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия)

Батхин Александр Борисович, д.ф.-м.н., доцент, Технион – Израильский институт технологий (Хайфа, Израиль)

Теорема 1.[3] Матрица \mathbf{A}_n симплектическая тогда и только тогда, когда матрица

$$\Psi_{2n} = -2\mathbf{J}(\mathbf{E} + \mathbf{A}_{2n})^{-1}(\mathbf{A}_{2n} - \mathbf{E}), \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2)$$

симметрическая.

Согласно теореме 1 вычислительная схема следующая.

1. Зададим произвольную кососимметрическую матрицу \mathbf{K}_{2n} размера $2n \times 2n$, однозначно определяемую $n(2n - 1)$ элементами.
2. Вычислим ортогональную матрицу \mathbf{A}_{2n} по формуле (1).
3. По формуле (2), получим выражение матрицы Ψ_{2n} через матрицу \mathbf{K}_{2n} .
4. Используя условие симметричности $\Psi_{2n}^\top = \Psi_{2n}$, получим систему соотношений между элементами матрицы \mathbf{K}_{2n} .
5. Согласно указанной выше теореме 1 матрица \mathbf{A}_{2n} симплектическая.

Теорема 2. Число независимых элементов матрицы \mathbf{K}_{2n} , определяющей по формуле Кэли (1) симплектическую матрицу \mathbf{A}_{2n} , равно n^2 .

На основании вычислений для случаев малых размерностей $2n = 2, 4, 6, 8$, сформулировано

Утверждение 1. Если матрица \mathbf{K}_{2n} блочная матрица

$$\mathbf{K}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

где \mathbf{B} – $n \times n$ кососимметрическая матрица состоящая из $n(n - 1)/2$ независимых элементов, а \mathbf{C} – $n \times n$ симметрическая матрица состоящая из $n(n + 1)/2$ независимых элементов, то матрица \mathbf{A}_{2n} , вычисляемая по формуле (1) является ОСМ общего вида, состоящей из n^2 независимых элементов.

Построение матрицы преобразования по заданному вектору для случая $2n = 4$.

С помощью ОСМ решается следующая

Задача. Пусть известна матрица монодромии \mathbf{M}_4 периодического решения $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}^0)$ с периодом T автономной системы Гамильтона с двумя степенями свободы. Найти такую ОСМ \mathbf{A}_4 , которая приводит матрицу \mathbf{M}_4 к более простому виду.

Решение указанной задачи представляет собой трёх-параметрическое семейство ОСМ \mathbf{A}_4 вида

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_4^{(1)} & \mathbf{A}_4^{(2)} & \mathbf{J}^\top \mathbf{A}_4^{(1)} & \mathbf{J}^\top \mathbf{A}_4^{(2)} \end{pmatrix} \quad 3$$

где столбцы $\mathbf{A}_4^{(1)}$ и $\mathbf{A}_4^{(2)}$ суть

$$\mathbf{A}_4^{(1)} = \frac{1}{d} (1 - Q \quad -2k_1 \quad -2k_2 \quad -2k_3)^\top, \quad \mathbf{A}_4^{(2)} = \frac{1}{d} (2k_1 \quad 1 - Q \quad -2k_3 \quad 2k_2)^\top,$$

где $d = 1 + Q$, $Q = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Нетрудно показать, что матрица $\mathbf{A}_2^{(1)}$ есть матричное представление единичного кватерниона, осуществляющего поворот в \mathbb{R}^4 на угол α , $\cos \alpha = (1 - Q) / (1 + Q)$.

Пусть вектор $\mathbf{A}_4^{(1)} = \mathbf{v}_0 / |\mathbf{v}_0|$, где \mathbf{v}_0 – вектор фазовой скорости в точке \mathbf{z}_0 . В силу автономности системы Гамильтона векторы $\mathbf{A}_4^{(1)}$ и $\mathbf{J}^\top \mathbf{A}_4^{(1)}$ являются соответственно правыми и левыми собственными векторами матрицы монодромии \mathbf{M}_2 , а преобразование $\mathbf{M}_4 \rightarrow \mathbf{A}_4^\top \mathbf{M}_4 \mathbf{A}_4$ приводит матрицу \mathbf{M}_4 [4] к симплектической матрице \mathbf{N}_4 вида

$$\mathbf{N}_4 = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix}.$$

Её симплектичность обеспечивается системой равенств $n_{22}n_{44} - n_{24}n_{42} = 1$, $n_{42}n_{23} - n_{22}n_{43} = n_{12}$, $n_{44}n_{23} - n_{24}n_{43} = n_{14}$.

Тогда в линейном приближении смещение вдоль решения задаётся ортом \mathbf{e}_1 , а вдоль семейства вектором $(0, d_2, d_3, d_4)$, где $d_2 = n_{23} - n_{14}$, $d_3 = 2 - n_{22} - n_{44}$, $d_4 = n_{12} + n_{43}$, при этом изменение периода есть $dT = - \left(\sum_{j=2}^4 n_{1j} d_j \right) / |\mathbf{v}_0|$.

Литература

1. *Батхин А. Б.* Бифуркации периодических решений системы Гамильтона с дискретной группой симметрий // Программирование, 2020, 46:2, 14–29. DOI: [10.31857/S0132347420020041](https://doi.org/10.31857/S0132347420020041)
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004, 5-е изд., 560 с.
3. *Петров А. Г.* О параметрических представлениях ортогональных и симплектических матриц // Известия вузов. Математика, 2020, 6, 93–98. DOI: [10.26907/0021-3446-2020-6-93-98](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-6-93-98)
4. *Крейсман Б. Б.* Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трёх тел // Космические исследования, 2005, 43:2, 1–23.

Секция 8

Механика и математическое моделирование (механика деформируемого твёрдого тела)

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ОСНОВЕ SAAS PROVE.DESIGN

А.М. Антонов, В.А. Левин

artmihant@gmail.com, v.a.levin@mail.ru

УДК 519.8

В работе представлены результаты исследования статистической сеточной и спектральной сходимости решения линейноупругой статической задачи механики деформируемого твердого тела, проведенные на большой выборке САД-моделей в условиях распределенной облачной инфраструктуры.

Ключевые слова: облачные сервисы, САЕ, конечноэлементная сетка.

Облачные web-сервисы играют все большую роль в нашей жизни, во многих областях дополняя или заменяя традиционные десктопные приложения. Их основные преимущества — гибкая масштабируемость, снижение требований к пользователю, возможность проведения высокопроизводительных вычислений на арендуемой платформе.

Разработанный нами облачный сервис Prove.Design [1] предназначен для автоматического решения задач механики деформируемого твердого тела посредством цифрового моделирования методом конечных элементов [2] на вычислительных мощностях облачного сервиса. В настоящем докладе рассматриваются проблемы верификации и масштабирования, решаемые при разработке сервиса.

Проблема верификация результатов расчетов, произведенных сервисом, на момент разработки сервиса уже была частично решена посредством тестирования используемых в сервисе численных ядер САЕ-Fidesys [3] на основе стандартов качества инженерного моделирования Nafems [4], однако для нужд облачного сервиса и с целью настройки расчетных скриптов были

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 19-77-10062).

Антонов Артем Михайлович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Левин Владимир Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

дополнительно произведены тесты сеточной и спектральной сходимости для большого множества (10000) САД-моделей. Был произведен статистический анализ качества различных алгоритмов построения сетки и выделен ряд признаков, указывающих на проблемы моделирования.

Проблема масштабирования сводится к невозможности получения точного знания о предстоящих численных нагрузках на узел вычислительной сети сервиса. На основе проведенного в рамках верификации исследования на большой выборке моделей, была дана оценка соотношения скорости построения сетки и решения задачи в зависимости от топологических особенностей исходной САД-модели, а так же оценка практической точности полученного решения.

Литература

1. <https://prove.design> // интернет-ресурс.
2. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. // Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015.
3. Левин В.А., Зингерман К.М., Вершинин А.В., Коновалов Д.А., Комолова Е.Д. К вопросу о валидации программного кода промышленных пакетов для прочностного инженерного анализа на основе точных решений теории многократного наложения больших деформаций // Упругость и Неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110- летию со дня рождения А. А. Илюшина, 2021. — 93-100.
4. Smith. J. Engineering Simulation Quality Management Standard // NAFEMS SGMWG, 2020.

ЗАДАЧА ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА ДЛЯ УПРУГОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ПОЛОСЫ

А.А. Бобылев

abobylov@gmail.com

УДК 539.3

Рассмотрена задача одностороннего дискретного контакта упругой стратифицированной полосы и жесткого штампа. Приведены граничные вариационные формулировки задачи с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего контактные напряжения в нормальные перемещения. Разработан алгоритм численного решения задачи. Установлены закономерности контактного взаимодействия поверхностей с регулярным микрорельефом.

Ключевые слова: односторонний дискретный контакт, стратифицированная полоса.

Рассматривается задача одностороннего дискретного (множественного) контакта упругой стратифицированной полосы и жесткого гладкого штампа конечных размеров, имеющего поверхностный микрорельеф. При постановке задачи на части верхней границы полосы, по которой возможен контакт со штампом, задаются граничные условия одностороннего гладкого контакта, содержащие неравенства. Остальная часть верхней границы полосы свободна от внешних нагрузок. Нижняя граница полосы сцеплена с недеформируемым основанием. Полоса находится в условиях плоской деформации. Предполагается, что параметры Ламе материала полосы являются произвольными ограниченными функциями поперечной координаты, имеющими конечное число разрывов первого рода, характерных для реальных слоистых тел.

Отметим, что априори задавалась лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта, которая включает множество отдельных пятен фактического контакта, положение и размеры которых заранее неизвестны и подлежат определению. Как следствие задачи одностороннего дискретного контакта являются нелинейными. Наиболее распространенный подход к решению такого класса задач состоит в применении вариационных методов.

В [1] с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова (ОПС), отображающего на части границы упругой полосы нормальные напряжения в нормальные перемещения, получены граничные

вариационные формулировки и на их основе разработан вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полосы. При конечномерной аппроксимации граничных вариационных задач, в отличие от вариационных задач, используемых в методе конечных элементов, требуется дискретизировать только часть границы области — зону возможного контакта. Это существенно уменьшает размерность получаемых дискретных задач и снижает вычислительные затраты.

В настоящей работе алгоритм [1] обобщен на случай произвольной стратифицированной полосы (СП). Идея обобщения состоит в применении для построения передаточной функции интегрального представления ОПС нового подхода, предложенного в [2]. Использовалась вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений, полученной в результате применения преобразования Фурье по поперечной координате. Аппроксимация вариационных уравнений производилась методом конечных элементов. Для численного решения задачи использован нестационарный итерационный метод, на каждом шаге которого методом прогонки решались две системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Разработан алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимости для любых значений параметра преобразования Фурье.

Даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток. При наличии разрывов первого рода у модулей упругости сетка конечных элементов адаптировалась так, чтобы точки разрывов совпадали с узлами конечных элементов. Такой подход позволяет применять при вычислении элементов матрицы жесткости квадратурные формулы для непрерывных функций.

При решении задач дискретного контакта требуется вычислять значения передаточной функции ОПС в достаточно широком диапазоне изменения параметра преобразования Фурье. С целью уменьшения вычислительных затрат для больших значений этого параметра применялся алгоритм, использующий полученное в [3] трехчленное асимптотическое разложение передаточной функции и построенные на его основе аппроксимации Паде.

Выбор метода конечномерной аппроксимации граничных вариационных формулировок определяется в первую очередь возможностью построения эффективной с вычислительной точки зрения аппроксимации ОПС. Учитывая, что для СП передаточная функция ОПС строится численно, используемый подход состоит в аппроксимации искомых нормальных напряжений периодическими сеточными функциями и применении алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Для уменьшения возникающей ошибки периодичности вводится расширенная вычислительная область [1].

Для численного решения полученной в результате дискретизации задачи квадратичного программирования использовался алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, предложенный в [4] при решении задач одностороннего дискретного контакта для упругой полуплоскости. В [1] этот алгоритм применялся при решении задач одностороннего дискретного контакта для однородной упругой полосы. Следует отметить, что алгоритм [4] позволяет вычислять не только сеточную функцию нормальных напряжений, но и смещение и угол поворота жесткого штампа.

Разработанный вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для СП реализован на языке FORTRAN с применением программного пакета для разработчиков NVIDIA HPC SDK. Для выполнения БПФ использовалась библиотека cuFFT, позволяющая с помощью технологии CUDA производить вычисления на графических процессорах.

Предложена процедура апостериорного анализа полученных численных решений. При верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения использовалась рассмотренная в [1] тестовая задача о вдавливании в упругую полосу штампа, форма основания которого описывается квадратичной функцией. Проведено сравнение решений для случаев наличия и отсутствия момента внешних сил, приложенных к штампу, относительно точки начального контакта.

Получены численные решения задач для предложенного в [4] семейства штампов с регулярным поверхностным микрорельефом. Аналогично случаю однородной полосы [1] для СП установлены следующие закономерности: если условия нагружения штампов таковы, что пятна контакта отдельных микровыступов остаются изолированными друг от друга, то существуют единая огибающая контактного давления, единая огибающая нормализованных контактных усилий и единая огибающая относительных величин фактических площадей контакта микровыступов, форма и положение которых зависят от закона изменения упругих свойств по толщине полосы,

параметров внешней нагрузки, а также от отношения размера области контакта к толщине СП. Кроме того, исследованы зависимости от внешней нагрузки осадки и угла поворота штампа, а также относительной фактической площади контакта. На основе результатов вычислительных экспериментов сделано предположение о существовании для рассмотренного семейства штампов предельных кривых для указанных выше зависимостей характеристик контактного взаимодействия от нагрузки, приложенной к штампу.

Литература

1. *Бобылев А.А.* Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы // Прикл. матем. и механ., **86**:3 (2022), 404-423.
2. *Бобылев А.А.* Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре-Стеклова для упругой полосы // Дифференц. уравнения, **59**:1 (2023), 115-129.
3. *Бобылев А.А.* О вычислении передаточной функции оператора Пуанкаре-Стеклова для функционально-градиентной упругой полосы // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ., 5 (2023), 52-60.
4. *Бобылев А.А.* Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. Механ. твердого тела, 2 (2022), 135-153.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ МОМЕНТОВ ПРИ ИЗГИБЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ В СЛУЧАЕ «ГИПОТЕТИЧЕСКОГО» МОДУЛЯ СДВИГА НА БАЗЕ {1,0}-АППРОКСИМАЦИИ

Н.С. Бондаренко

n.bondarenko123@mail.ru

УДК 539.3

В рамках обобщённой теории пластин в варианте {1,0}-аппроксимации для случая наличия «гипотетического» модуля сдвига построены выражения для обобщённых моментов, представляющих собой фундаментальное решение задачи изгиба ортотропной пластины.

Ключевые слова: {1,0}-аппроксимация, ортотропная пластина, сосредоточенная сила, «гипотетический» модуль сдвига, обобщённые моменты.

Введение. Тонкие пластины, изготовленные из композиционных материалов, обладающих значительной анизотропией упругих свойств, применяются в различных областях современной техники и промышленности. В качестве нагрузки на пластины могут выступать силы, имеющие сосредоточенный или локальный характер. Об актуальности определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) ортотропных пластин, подверженных сосредоточенным воздействиям, свидетельствует ряд современных публикаций, например, работа [1], в которой получены уравнения Сен-Венана и Кармана для ортотропной пластины с учётом приращения температуры.

Целью настоящей работы является построение обобщённых моментов, являющихся фундаментальным решением задачи изгиба ортотропной пластины на базе обобщённой теории в варианте {1,0}-аппроксимации [2].

Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластину толщины $2h$, подверженную действию сосредоточенной силы. Отнесём пластину к безразмерной системе координат x_1, x_2, x_3 , определённых с точностью до полутолщины пластины h , причём x_1, x_2 — координаты точки в срединной плоскости пластины, x_3 — поперечная координата.

Компоненты вектора объёмной силы $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ в рамках {1,0}-аппроксимации имеют вид:

$$F_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2} m_k(x_1, x_2) P_1(x_3) \quad (k = 1, 2); \quad F_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} q(x_1, x_2) P_0(x_3), \quad (1)$$

Исследование проводилось по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012400353-3).

Бондаренко Наталья Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», факультет математики и информационных технологий (Донецк, Россия)

где $P_0(x_3) = 1$, $P_1(x_3) = x_3$ — полиномы Лежандра.

Система уравнений статики для изгиба ортотропной пластины на базе $\{1,0\}$ -аппроксимации включает в себя [2]:

— соотношения упругости в перемещениях

$$M_1 = D_1 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} + \nu_{21} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} \right); \quad M_2 = D_2 \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \nu_{12} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1} \right); \quad H_{12} = D_{12} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right);$$

$$Q_k = \Lambda_k \left(\gamma_k + \frac{\partial w_0}{\partial x_k} \right) \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

где γ_1, γ_2, w_0 — обобщённые перемещения, причём γ_1, γ_2 являются аналогами углов поворота нормали, w_0 — аналог прогиба срединной плоскости; M_1, M_2 — обобщённые изгибающие моменты; H_{12} — обобщённый крутящий момент; Q_1, Q_2 — обобщённые перерезывающие силы;

$$D_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad D_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad D_{12} = \frac{2G_{12}}{3E};$$

$$\Lambda_1 = \frac{5G_{13}}{3E}; \quad \Lambda_2 = \frac{5G_{23}}{3E}; \quad E = \sqrt{E_1 E_2};$$

E_1, E_2 — модули Юнга для направлений x_1, x_2 соответственно; ν_{12}, ν_{21} — коэффициенты Пуассона ($E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}$); G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига, характеризующие изменение углов между главными направлениями x_1 и x_2, x_1 и x_3, x_2 и x_3 соответственно;

— уравнения равновесия

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 + m_1 = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 + M_2 = 0; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = 0. \quad (3)$$

Пусть имеет место «гипотетический» модуль сдвига:

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}})}.$$

Если на пластину действует сосредоточенная сила, приложенная в начале координат, то компоненты вектора объёмной силы (1) берём в виде

$$m_k = m_k^* \delta(x_1, x_2) \quad (k = 1, 2); \quad q = q^* \delta(x_1, x_2), \quad (4)$$

где $m_k = \text{const}$ ($k = 1, 2$); $q = \text{const}$; $\delta(x_1, x_2)$ — двумерная дельта-функция Дирака.

Методика решения. Подставляя соотношения упругости в перемещениях (2) в уравнения равновесия (3) и учитывая вид правых частей (4), получим систему уравнений равновесия в перемещениях, фундаментальное решение которой найдём с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и методики обращения, основанной на применении специальной G -функции [3]. После решения данной системы обобщённые моменты определим по формулам (2):

$$M_k = \sum_{m=0}^{11} \left(\beta_{1m}^{(k)} \Psi_{m,1} + \beta_{2m}^{(k)} \Psi_{m,2} \right) \quad (k = 1, 2); \quad H_{12} = \sum_{m=0}^{11} \left(\beta_{1m}^{(3)} \Psi_{m,1} + \beta_{2m}^{(3)} \Psi_{m,2} \right); \quad \Psi_{m,k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k},$$

где $\beta_{im}^{(k)}$ — коэффициенты, зависящие от упругих постоянных ортотропного материала; $\Psi_0 - \Psi_6$ — функции, выражения для которых получены в замкнутом виде; $\Psi_7 - \Psi_{11}$ — функции, представляющие собой ряды по специальным G -функциям $G_{n,\nu}$ [3], например:

$$\Psi_2 = \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{2^4 \sqrt{D_1^3 D_2}} x_1 \left\{ \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{x_1^2}{\sqrt{D_1}} + \frac{x_2^2}{\sqrt{D_2}}} \right) \right\};$$

$$\Psi_8 = -\frac{2D_{12}\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}{\pi} \phi_{8,0} \left\{ \ln \frac{\gamma r_0}{2} + G_{0,0}(a_0 r_0) \right\} - \frac{r_0^2 (\Lambda_1 \Lambda_2)^{3/2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{8,n} \cos 2n\varphi_0 G_{n+1,n-1}(a_0 r_0);$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{D_{12}}}; \quad r_0 = \sqrt{\frac{x_1^2}{\Lambda_1} + \frac{x_2^2}{\Lambda_2}}; \quad \cos \varphi_0 = \frac{x_1}{\sqrt{\Lambda_1 r_0}}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{x_2}{\sqrt{\Lambda_2 r_0}};$$

$$\phi_{8,n} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos 2n\theta d\theta}{(\Lambda_2 \sqrt{D_1} \cos^2 \theta + \Lambda_1 \sqrt{D_2} \sin^2 \theta)^2}; \quad \ln \gamma = 0,5772\dots$$

Заключение. Описанная в работе методика решения задач статики на базе обобщённой теории пластин в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации позволяет выполнять исследования НДС тонкостенных элементов конструкций с учётом влияния концентраторов напряжений для оценки фактических запасов прочности пластин, используемых в технике.

Литература

1. *Сабиров Р. А.* Уравнения Сен-Венана и Кармана для ортотропной предварительно растянутой пластины при воздействии температуры // Сибирский аэрокосмический журнал. — 2023. — Т. 24, № 1. — 18-34.
2. *Пелех Б. Л., Лазько В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. — Киев: Наукова думка, 1982. — 296 с.
3. *Хижняк В. К., Шевченко В. П.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие. — Донецк: ДонГУ, 1980. — 128 с.

УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ В МНОГОМЕРНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

Д.В. Георгиевский

georgiev@mech.math.msu.su

УДК 539.3

Исследованы системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, основанных на обобщённых соотношениях Коши. Для анализа кинематики многомерной сплошной среды введён в рассмотрение обобщённый тензор несовместности, представляющий собой тензор Крёнера с двумерной структурой индексов. Описаны его свойства и связь с обобщённым тензором Римана–Кристоффеля.

Ключевые слова: механика деформируемого твёрдого тела, совместность деформаций, многомерная сплошная среда, обобщённый тензор Крёнера, обобщённый тензор Римана–Кристоффеля, соотношения Коши.

Вопросы совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных, различные формы записи уравнений совместности и их эквивалентность играют важную роль в постановках задач механики деформируемого твёрдого тела в терминах напряжений [1–3]. В работе выведены условия интегрируемости систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, основанных на обобщённых кинематических соотношениях Коши. Обобщение производится как на размерность евклидова пространства, так и на ранг объекта, в классическом случае соответствующего вектору перемещений. Условия интегрируемости, или уравнения совместности, записаны в виде равенства нулю всех компонент либо введённого в рассмотрение обобщённого тензора несовместности (обобщённый тензор Крёнера с двумерной структурой индексов), либо полученного из него свёртками с символами Леви–Чивиты обобщённого тензора Римана–Кристоффеля. Найдены ранги и число независимых компонент этих тензоров [4–6].

Литература

1. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. — М: Изд-во МГУ, 1995.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-20008).

Георгиевский Дмитрий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор РАН, зав.кафедрой теории упругости, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет; директор НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

2. *Amrouche C., Ciarlet P. G., Gratie L., Kesavan S.* On the characterization of matrix fields as linearized tensor fields // J. Math. Pures Appl., **86**:2 (2006), 116-132.

3. *Ciarlet P. G., Ciarlet P. (Jr.), Geymonat G., Krasucki F.* Characterization of the kernel of the operator CURL CURL // C. R. Acad. Sci. Paris, **344** (2007), 305-308.

4. *Георгиевский Д.В.* Общие решения не эквивалентных классической систем теории упругости в напряжениях // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 6 (2012), 26-32.

5. *Георгиевский Д.В.* Уравнения совместности в системах, основанных на обобщённых кинематических соотношениях Коши // Изв. РАН. МТТ, 1 (2014), 127-132.

6. *Георгиевский Д.В.* Деформаторы высоких рангов и тензоры несовместности Крёнера с двумерной структурой индексов // Докл. РАН, **486**:4 (2019), 430-432.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ

В.И. Горбачев

vigorby@mail.ru

УДК 539.3

Получена интегральная формула представления решения дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (исходное уравнение) через решение уравнения того же типа с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение) и фундаментальную функцию исходного уравнения. Решение сопутствующего уравнения считается известным. Рассмотрены три метода вычисления фундаментальных функций: метод возмущений; сведение уравнения для фундаментальной функции к интегро-дифференциальному уравнению и его решение методом последовательных приближений; метод структурных функций.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, интегральные формулы, композиты.

1. Исходное и сопутствующее уравнения. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами в самосопряженной форме [1] (исходное уравнение):

$$[C(x)u']' + q(x)u + X(x) = 0, \quad x \in (a, b), \quad C(x) > 0, \quad (1)$$

и такое же уравнение с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение):

$$C_o v''(x) + q_o v(x) + X(x) = 0, \quad C_o = 1/\langle 1/C \rangle, \quad q_o = \langle q \rangle, \quad \langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Общее решение сопутствующего уравнения имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\lambda_o x} + K_2 e^{-i\lambda_o x} + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, \quad \varphi(x) = \frac{i}{\lambda_o C_o} \int_a^x X(y) \operatorname{sh}[i\lambda_o(x-y)] dy, \quad (3)$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы. Кроме исходного и сопутствующего уравнений нам понадобятся фундаментальные функции $G(x, \xi)$ и $G_o(x, \xi)$ исходного и сопутствующего уравнений. Функции $G(x, \xi)$ и $G_o(x, \xi)$ часто называют обобщенными функциями.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right] + q(x)G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad C_o \frac{\partial^2 G_o(x, \xi)}{\partial x^2} + q_o G_o(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\delta(x - \xi)$ — дельта-функция Дирака. Нам понадобятся только частные решения уравнений (4). Частное решение сопутствующего фундаментального уравнения находится по последней формуле (3), в которой нужно заменить $X(y)$ на $\delta(y - \xi)$. В результате получим:

$$G_o(x, \xi) = h(x - \xi)F_o(x, \xi), \quad F_o(x, \xi) = \frac{i}{\lambda_o C_o} \operatorname{sh} [i\lambda_o(x - \xi)]. \quad (5)$$

Здесь $h(x - \xi)$ — функция Хевисайда.

2. Интегральная формула представления решения исходного уравнения через решение сопутствующего уравнения. Внутри интервала (a, b) искомая функция $u(x)$ удовлетворяет исходному уравнению (1). На концах отрезка, то есть, при $x = a$ и $x = b$ задаются граничные условия не нарушающие линейность задачи. В этом случае решение уравнения (1) можно представить в виде следующей интегральной формулы [2-4]:

$$u(x) = v(x) + \int_a^b \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где $\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi)$, $\tilde{q}(\xi) = q_o - q(\xi)$. Подстановкой выражения (6) в исходное уравнение (1) убеждаемся, что оно удовлетворяется.

3. Общее решение исходного уравнения. Подставив (3) в интегральную формулу (6), получим общее решение исходного уравнения (1)

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x), \quad (7)$$

где K_1 и K_2 — произвольные константы, а функции $A(x)$, $B(x)$ и $\Phi(x)$ определяются по следующим формулам:

$$A(x) = e^{i\lambda_o x} + i\lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{i\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{i\lambda_o \xi} d\xi,$$

$$B(x) = e^{-i\lambda_o x} - i\lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-i\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-i\lambda_o \xi} d\xi,$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \varphi'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Осталось найти функцию $G(x, \xi)$, то есть решить исходное уравнение (4).

4. Метод возмущений. Метод возмущений [5,6] применительно к нашему случаю заключается в том, что в первом из уравнений (4) второе слагаемое умножается на постоянный множитель \varkappa . Затем решение уравнения ищется в виде ряда по степеням \varkappa . После всех выкладок возмущающий параметр полагается равным единице. В итоге получаем:

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \quad \psi(x, \xi) \equiv \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy \quad (8)$$

Выбирая конечное значение для n получаем приближенное решение исходного уравнения (1). Эта методика проверена на примере уравнения Чебышева, имеющего точное аналитическое решение [7].

5. Метод последовательных приближений. Другой способ приближенного вычисления функции $G(x, \xi)$ заключается в том чтобы дифференциальное уравнение(4) для функции $G(x, \xi)$ свести к интегро-дифференциальному уравнению и затем решать его методом последовательных приближений [8]. По аналогии с формулой (7), в которой $u(x)$ и $v(x)$ заменим на $G(x, \xi)$ и $G_o(x, \xi)$,

получаем следующее уравнение типа Фредгольма второго рода

$$G(x, \xi) = G_o(x, \xi) + \int_a^b \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \tilde{C}(y) \frac{\partial G_o(y, \xi)}{\partial y} dy - \int_a^b G(x, y) \tilde{q}(y) G_o(y, \xi) dy. \quad (9)$$

Учтем (5) и положим $G(x, \xi) = h(x - \xi)F(x, \xi)$, тогда вместо уравнения (9) типа Фредгольма получим интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$F(x, \xi) = F_o(x, \xi) + \int_{\xi}^x \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \tilde{C}(y) \frac{\partial F_o(y, \xi)}{\partial y} dy - \int_{\xi}^x F(x, y) \tilde{q}(y) F_o(y, \xi) dy, \quad (10)$$

где $F_o(x, \xi)$ определяется по формуле (5). Это же выражение можно принять в качестве нулевого приближения, тогда последующие приближения определяются по следующей рекуррентной формуле:

$$F^{(n)}(x, \xi) = \frac{i}{\mu_o C_o} \text{sh} [i\mu_o(x - \xi)] - \frac{1}{C_o} \int_{\xi}^x \frac{\partial F^{(n-1)}(x, y)}{\partial y} \tilde{C}(y) \text{ch} [i\mu_o(y - \xi)] dy - \\ - \frac{i}{\mu_o C_o} \int_{\xi}^x F^{(n-1)}(x, y) \tilde{q}(y) \text{sh} [i\mu_o(y - \xi)] dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

6. Метод структурных функций. Суть этого метода заключается в том, что функция $v(x)$ предполагается гладкой функцией. Это предположение позволяет нам представить $v(\xi)$ в любой точке $\xi \in (a, b)$ в виде ряда Тейлора в некоторой другой точке $x \in (a, b)$, тогда из интегральной формулы (9) получим ряд: для функции $u(x)$

$$v(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi - x)^m}{m!} \frac{d^m v(x)}{dx^m} \Rightarrow u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} N_{(m)}(x) \frac{d^m v(x)}{dx^m} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} N_{(m)} v^{(m)} \quad (11)$$

Здесь

$$N_{(0)}(x) = 1 - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) d\xi, \\ N_{(m)}(x) = \int_a^b G'_{\xi}(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \frac{(\xi - x)^{m-1}}{(m-1)!} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \frac{(\xi - x)^m}{m!} d\xi.$$

В случае постоянных коэффициентов $C(x) \equiv C_o = const.$ и $q(x) \equiv q_o = const.$ все $N_{(m)}$ -функции тождественно равны нулю, кроме $N_{(0)} = 1$. По этой причине $N_{(m)}$ -функции названы структурными функциями. Далее подставим ряд для $u(x)$ в исходное уравнение (1), соберём коэффициенты при одинаковых производных и учтём, что функция $v(x)$ удовлетворяет сопутствующему уравнению (2). В результате получим рекуррентные уравнения для $N_{(m)}(x)$ -функций

$$[C(N'_{(m)} + N_{(m-1)})]' + C(N'_{(m-1)} + N_{(m-2)}) + qN_{(m)} = a_{(m)}, \\ a_{(0)} = q_o, \quad a_{(1)} = 0, \quad a_{(2)} = C_o, \quad a_{(m)} = 0 \quad \text{if } m > 2.$$

Общее уравнение этой рекуррентной последовательности перепишем следующим образом:

$$[C(N'_{(m)} + N_{(m-1)})]' + C(N'_{(m-1)} + N_{(m-2)}) + \varkappa \cdot [qN_{(m)} - a_{(m)}] = 0.$$

Здесь \varkappa — возмущающий параметр, который после всех выкладок полагается равным единице. Далее решение этих уравнений ищем в виде рядов по степеням \varkappa :

$$N_{(m)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n N_{(m)}^{[n]}(x), \quad a_{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n a_{(m)}^{[n]}, \quad a_{(m)}^{[n]} = \begin{cases} C_o, & \text{если } n = 0; \quad m = 2 \\ q_o, & \text{если } n = 2; \quad m = 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

После подстановки этих рядов в предыдущее уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x получаем:

$$[C(N_{(m)}^{[n]'} + N_{(m-1)}^{[n]})]' + C(N_{(m-1)}^{[n]'} + N_{(m-2)}^{[n]}) + qN_{(m)}^{[n-1]} = a_{(m)}^{[n-1]}.$$

Решать эту двойную рекуррентную систему нужно начинать с $n = 0; m = 0, 1, 2, \dots$, следом полагаем $n = 1; m = 0, 1, 2, \dots$, и так далее. В результате каждая из функций $N_{(m)}^{[n]}(x)$ определяется с точностью до двух констант (кроме $N_{(0)}^{[0]} \equiv 1$). Для определения этих констант нужно два условия. Будем применять условие "периодичности" и условие нормировки [11, 12]. В этом случае в общую методику включается случай периодически неоднородного тела.

Методика обобщена на случай уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

Литература

1. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Москва, Росвузиздат, 1962.
2. *Горбачев В.И.* Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела, №2. 1991, — 61-76.
3. *Горбачев В.И.* О представлении решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Вестник МГУ, №6. 2000, — 68-71.
4. *Горбачев В.И.* Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности // Известия РАН. МТТ, №1. 2001, — 31-37.
5. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. — Москва: Мир, 1976.
6. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. — Москва: Изд. МГУ, 1976.
7. *Горбачев В.И.* Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, Т.20, №4. 2019, —108-123.
8. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкии Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — Москва, Наука, 1969.
11. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. — Москва, Наука, 1984.
12. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. — Москва, Изд. МГУ, 1984.

МОДЕЛИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ШЕРОХОВАТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

И.Г. Горячева

goryache@ipmnet.ru

УДК 539.3

Излагаются постановки и методы решения контактных задач с учетом макроформы и микрогеометрии (шероховатости) поверхностей взаимодействующих упругих тел. Основной особенностью развиваемого подхода является учет взаимного влияния микроконтактов. Изучается зависимость контактных характеристик от формы и пространственного расположения неровностей на контактирующих поверхностях.

Ключевые слова: упругое взаимодействие, шероховатость поверхности, дискретный контакт.

Работа выполнена при поддержке государственного финансирования в НИИ механики МГУ, номер проекта ЦИТИС АААА-А19-119012990120-9.

Горячева Ирина Георгиевна, д.ф.-м.н., академик РАН, главный научный сотрудник Института механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Большинство технических и натуральных поверхностей не являются идеально гладкими и имеют отклонения от правильной формы на различных масштабных уровнях, которые формируют их микрорельеф. При соприкосновении таких поверхностей их контакт локализован на отдельных дискретно расположенных пятнах (область фактического контакта). Дискретность контакта играет важную роль в протекании физических процессов, происходящих при контактном и фрикционном взаимодействии, а также оказывает влияние на электросопротивление, массоперенос, изнашивание и усталостное разрушение поверхностных слоев материалов.

Приводятся постановки задач дискретного контакта для упругого однородного и неоднородного упругого полупространства с жестким контртелом, контактирующая поверхность которого описывается функцией $z = -F(x, y)$ в системе координат, связанной с полупространством (плоскость Oxy совпадает с границей полупространства, а ось Oz направлена вглубь) (Рис. 1).

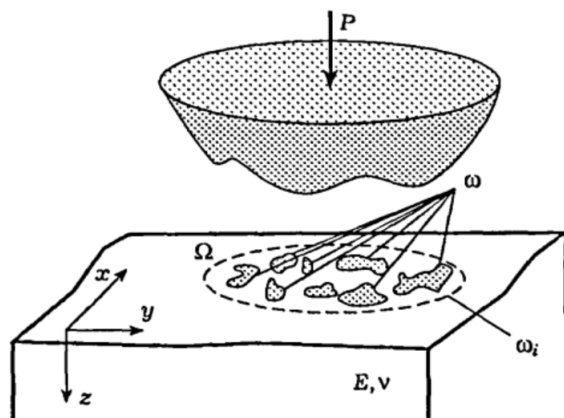


Рис. 1: Постановка задачи дискретного контакта

Функция $F(x, y)$ такова, что при сближении тел на некоторую величину D под действием нормальной силы P область фактического контакта представляет собой конечное N или бесконечное число пятен контакта ω_i . При достаточно большом числе контактирующих неровностей, что, как правило, имеет место при конечных значениях сжимающей силы P , в [1] предложен метод решения задач дискретного контакта, основанный на рассмотрении поставленной контактной задачи на двух масштабных уровнях: на микроуровне рассматривается задача о контакте двух полупространств, одно из которых является жестким, имеющим шероховатую поверхность, параметры которой определяются микрогеометрией внедряющегося жесткого штампа (Рис. 1), а второе является упругим. Полученная на основании решения задачи на микроуровне функция дополнительной податливости используется затем для постановки контактной задачи на макроуровне, что позволяет учесть при расчете номинальной площади контакта и распределения контактных напряжений параметры микрогеометрии внедряемого в упругое полупространство штампа. Предложенный подход распространен на случай вязкоупругого полупространства и использован для анализа влияния параметров микрогеометрии при внедрении жесткого шероховатого цилиндрического штампа в упругое полупространство и упругий или вязкоупругий тонкий слой, сцепленный с жестким или упругим полупространством [2-5].

Результаты решения задач дискретного контакта дают возможность оценить влияние параметров микрогеометрии поверхностей на распределение контактных давлений, фактическую площадь контакта; они также используются для разработки способов управления функциональными характеристиками трибосопряжений за счет выбора оптимального поверхностного рельефа.

Литература

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. — Москва: Наука, 2001.
2. Goryacheva I.G. Mechanics of discrete contact // Tribology International, **39**:5 (2006), 381-386.

3. *Goryacheva I.G., Tsukanov I.Y.* Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // *Frontiers in Mechanical Engineering*, **6** (2020), 1-10.

4. *Yakovenko A., Goryacheva I.* The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // *Tribology International*, **161** (2021), 1-10.

5. *Горячева И.Г., Яковенко А.А.* Внедрение в тонкий вязкоупругий слой жесткого цилиндра с плоским шероховатым основанием // *Прикладная механика и техническая физика*, **62:5** (2021), 22-37.

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В.С. Дрякина

vadryakina@yandex.ru

УДК 539.214, 539.374, 621.9.011

Статья посвящена исследованию вязкопластического течения в двуслойной и трехслойной среде металла с различными свойствами материалов. Моделирование систем рассматривается с использованием уравнений механики деформируемого твердого тела. Предложен общий подход к описанию вязкопластического течения в многослойных конструкциях, включающих уравнения равновесия, кинематические уравнения равновесия, уравнение потока жидкости, краевые условия задачи в многослойных средах.

Ключевые слова: вязкопластическое течение, многослойные среды, свойства металлов, напряжение и давление в слоях.

1. Вязкопластическое течение в двуслойной среде

Вязкопластическое течение в двуслойной среде означает, что два слоя среды обладают разной вязкостью и пластичностью, что влияет на их способность к течению. Вязкопластическое течение в двуслойной среде характеризуется неоднородностью свойств материала и различными механизмами деформации в каждом из слоев. Материал ведет себя как вязкая жидкость при низких напряжениях, но при достижении определенного уровня напряжения начинает проявлять пластичность и деформироваться.

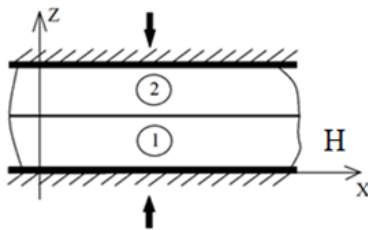


Рис. 1: Двуслойная среда вязкопластической жидкости

Рассмотрим двумерное течение вязкопластической материала, состоящего из двух слоев с разными свойствами (рис.1). В уравнение (1) плотность потока ρ сохранена с целью уменьшения внешних различий размерной и безразмерной записи, J – скорость набегающего потока, размер тела – M [1].

$$\begin{aligned}
 J \frac{\partial J}{\partial x} + v \frac{\partial J}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} \right) \\
 J \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

При больших значениях числа Рейнольдса в уравнениях параметр перед старшими производными является малой величиной. Наличие малого параметра в уравнениях обычно подсказывает путь к решению – разложением по этому параметру. Однако в данном случае в нулевом приближении по параметру порядок уравнений уменьшается на единицу – вместо уравнений вязкой жидкости получаем уравнения движения идеальной жидкости. В формулировании задач для идеальной жидкости присутствует только условие непроницаемости $v_n = 0$, а условие прилипания $v_\tau = 0$ не выполняется решение в лучшем случае может описывать течение вдали от тела, но совершенно непригодно вблизи тела. Поэтому следует применять специальную измененную процедуру разложений по малому параметру, выделяя тонкие области вблизи твердой границы - пограничные слои [2-3].

Внутреннее решение задачи с пограничным слоем в вязкопластическом течении металлов может быть получено с использованием модифицированной уравнения Навье-Стокса и модифицированного уравнения течения. рассмотрим конкретный пример задачи с краевыми условиями.

Пусть имеется плоскопараллельный пограничный слой вязкопластического течения металла, который находится в прямоугольном канале. Обозначим оси координат как x и y , а толщину пограничного слоя как $H(x)$ (рис. 1).

Внутреннее решение задачи:

1. Модифицированное уравнение Навье-Стокса вязкопластического течения металлов:

$$0 = -\nabla p + \mu \left(v + (\nabla_v)^T \right) + S, \tag{2}$$

где p – давление, v – вектор скорости течения, μ – вязкость металла, ∇_v – оператор Лапласа для вектора скорости, $(\nabla_v)^T$ – транспонированный градиент вектора скорости, S – тензор напряжений пластичности.

2. Модифицированное уравнение течения для пограничного слоя:

$$\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \tag{3}$$

где $\frac{\partial v}{\partial y}$ – частная производная вектора скорости по координате y .

Внешнее решение задачи:

Уравнение Рейнольдса для пограничного слоя:

$$\rho \left(\frac{\partial J}{\partial t} + v \frac{\partial J}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} \right), \tag{4}$$

где t – время, $\frac{\partial J}{\partial t}$ и $\frac{\partial J}{\partial y}$ – частные производные скорости по времени и y соответственно, $\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}$ – вторые частные производные скорости по y и z соответственно.

Граничные условия задачи:

1. На входе в прямоугольный канал:

$$j = J, \quad v = V, \quad w = W$$

где J, V и W – известные значения скоростей по осям x, y и z соответственно.

2. На выходе из канала:

$$\frac{\partial j}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

3. На стенках канала:

$$j = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

Таким образом, для решения данной задачи необходимо решить модифицированные уравнения Навье-Стокса и течения для внутреннего пограничного слоя, а также уравнение Рейнольдса для внешнего пограничного слоя с заданными краевыми условиями. Решение может быть получено численными методами, например, методом конечных разностей или методом конечных элементов [4].

Вязкопластическое течение в двуслойной среде имеет важное практическое значение в различных областях науки и техники. Оно широко применяется в геологии, гидродинамике, металлургии и других отраслях.

2. Вязкопластическое течение в многослойной (трехслойной) среде

Рассмотрим трехслойный стержень (рис. 2), где все слои с одинаковой геометрией, но с разными свойствами.

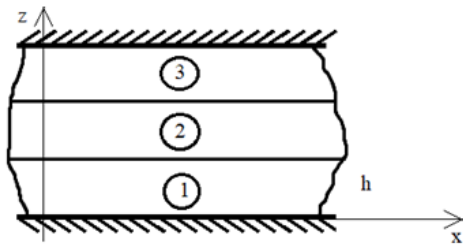


Рис. 2: Двуслойная среда вязкопластической жидкости в многослойной среде

Составим уравнения равновесия горизонтальной (5) и вертикальной (6) составляющей силы:

$$\sigma_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (6)$$

где σ_{xz} – напряжение в горизонтальном направлении, τ_{xz} – касательное напряжение в горизонтальном направлении, σ_{zz} – напряжение в вертикальном направлении, τ_{zz} – касательное напряжение в вертикальном направлении, g – ускорение свободного падения. Тогда кинематическое уравнение равновесия (7) будет выглядеть следующий образом:

$$v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Отсюда можно вывести уравнения движения несжимаемой жидкости (8) и уравнения потока жидкости (9):

$$\frac{v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g = 0,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g = 0, \quad (9)$$

где p – давление в жидкости, μ – динамическая вязкость. Это набор уравнений позволяет описать течение вязкой пластической среды в трехслойной структуре металла. Чтобы найти решение этой системы уравнений, необходимо знать краевые условия и предположения о форме и определении свойств материала в каждом из слоев.

Для трехслойной среды, где все слои имеют одинаковую геометрию, но разные свойства, краевые условия можно записать следующим образом:

1. На входе в первый слой (индекс слоя $i = 1$):

– Давление: $p_1(z = 0, t) = p_{вх}(t)$

– Скорость: $v_1(z=0, t) = v_{\text{вх}}(t)$

2. На границе между первым и вторым слоями (индекс слоя $i = 1, 2$):

– Давление: $p_1(z = h_1, t) = p_2(z = 0, t)$

– Скорость: $v_1(z = h_1, t) = v_2(z = 0, t)$

– Непрерывность объемных расходов: $\rho_1 v_1(z = h_1, t) = \rho_2 v_2(z = 0, t)$

3. На границе между вторым и третьим слоями (индекс слоя $i = 2, 3$):

– Давление: $p_2(z = h_2, t) = p_3(z = 0, t)$

– Скорость: $v_2(z = h_2, t) = v_3(z = 0, t)$

– Непрерывность объемных расходов: $\rho_2 v_2(z = h_2, t) = \rho_3 v_3(z = 0, t)$

4. На выходе из третьего слоя (индекс слоя $i = 3$):

– Давление: $p_3(z = h_3, t) = p_{\text{вых}}(t)$

– Скорость: $v_3(z = h_3, t) = v_{\text{вых}}(t)$

где $p_i(z, t)$ – давление в слое i в точке с глубиной z и временем t , $v_i(z, t)$ – скорость в слое i в точке с глубиной z и временем t , h_i – толщина слоя i , ρ_i – плотность в слое i , $p_{\text{вх}}(t)$ и $p_{\text{вых}}(t)$ – давления на входе и выходе соответственно, $v_{\text{вх}}(t)$ и $v_{\text{вых}}(t)$ – скорости на входе и выходе соответственно.

Литература

1. И.А. Куйко Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // ПММ. — 2006. — Т.70. — Вып. 2. — 344-351.
2. Tim G. Myers Extension to the Messinger Model for Aircraft Icing / Tim G. Myers // AIAA JOURNAL. — 2021. — № 2. — 211-218.
3. В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов. Течения вязкой жидкости / В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов — 2733. — Москва: Московский университет, 1984 — 200 с.
4. В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская К вопросу об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине / В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская // 2023.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МЕТОДАМИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

А.С. Желнов

a.zhelnov@stankin.ru

УДК 004.8

В работе рассматривается построение рельефа фрактальной поверхности с помощью функции Вейерштрасса совместно с применением генеративного нейросетевого машинного обучения модели. Критерием подлинности является алгоритм, в основе которого заложен, в общем случае, математический метод Монте-Карло.

Ключевые слова: фрактальная поверхность, искусственный интеллект, генеративные алгоритмы.

В трибологических исследованиях некоторые геометрические параметры, определяемые в евклидовом пространстве очень трудно измерить. Значения этих параметров увеличиваются при уменьшении масштаба измерения. Фрактальная геометрия может быть использована в качестве адаптированного пространства, в котором шероховатость может рассматриваться, как непрерывная, но недифференцируемая функция, а размерность D этого пространства является внутренним параметром, характеризующим рельеф поверхности [1]. В данной работе фракталы выступают в качестве математической модели для построения случайного рельефа поверхности, которая может быть использована в качестве исходных данных при моделировании механики деформируемого твердого тела.

Фрактал – некоторая геометрическая фигура, состоящая из частей, представляющих собой уменьшенную (необязательно точную) копию целого [2]. В свою очередь каждая часть разбивается на ещё меньшие копии до бесконечности. При этом фрактал является фигурой с дробным числом измерений, то есть не двухмерной и не трёхмерной, а, например, 1.5-мерной. На рис. 1 представлена модель фрактала, называемая треугольником Серпинского, с размерностью приближенно равной 1.585 [3].

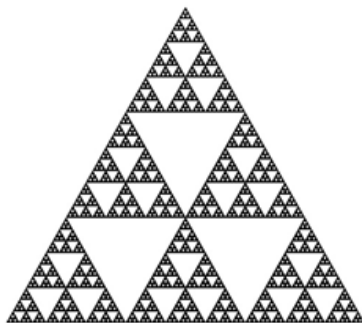


Рис. 1: Фрактальная модель с размерностью 1.585

Рельеф поверхности рассматривается в ряде важных трибологических задач, таких как контактная механика, трение, износ, и т.д. Взаимодействие рельефов поверхностей приводит к образованию дискретных точек контакта, когда две шероховатые, номинально плоские, поверхности сближаются, реальная площадь контакта складывается из площади отдельных пятен контакта.

Основные статистические параметры шероховатости, такие, как высота, наклон и кривизна, к сожалению, не всегда независимы от масштабов длины. Неточности в определении наклона или вершины шероховатости поверхности систематически обуславливаются процессом измерения, поэтому очень важно характеризовать шероховатые поверхности с помощью собственных параметров, которые не зависят от длины или площади выборки.

Для генерации случайных профилей и поверхностей используется метод случайных смещений, который моделирует случайную функцию со спектром. Для построения используются массивы данных такие же, как и в большинстве сканирующих методов получения изображений реального диапазона, а именно массив из 2 значений: $Z(x, y)$. Алгоритм метода случайных смещений шероховатых поверхностей математически описывается следующим образом. Массив элементов $Z(x)$ зависит от масштаба длины. Предполагается, что каждый элемент массива $Z(x)$ является непрерывной, но недифференцируемой функцией. Поэтому для построения модели, достаточно, чтобы в каждой точке выполнялось условие самоподобия:

$$|Z(x + \Delta) - Z(x)| \propto \Delta^H, \quad 0 < H < 1 \quad (1)$$

и существовал предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{H-1}$. В данном случае параметр H характеризует фрактальную размерность.

Во многих исследованиях уже проводилось построение поверхностей с помощью функции Вейерштрасса:

$$Z(x, y) = A \sum_{n,m=1}^{\max} \frac{\cos \{2\pi k^n x + \varphi_n\} \cos \{2\pi k^m y + \psi_m\}}{k^{(n+m)H}} \quad (2)$$

где A – масштабирующая константа, k – произвольное нечетное число.

Однако построенные с помощью функции Вейерштрасса модели не являются фрактальными ввиду того, что отсутствует однородность результата. Следовательно, важнейшим пунктом в построении является применение метода случайных смещений, описанного ранее, и проверка массива данных с помощью критерия самоподобия.

Для упрощения моделирования фрактальных поверхностей было принято решение уйти от проверки функции Вейерштрасса при помощи метода случайных смещений. Для этого использовалось машинное обучение, в котором вместо простого создания фрактальной поверхности с использованием случайных точек, генератор создает фрактальные поверхности на основе распределения, изученного в процессе обучения. Для построения использовался язык программирования "Python" и генеративная модель обучения [4-5].

Полученные результаты построения моделей оценивались на подлинность с помощью метода Монте-Карло. В качестве проверяющего фактора была использована мера отклонения точек максимума построенной с помощью обучения поверхности от точек максимума сгенерированной заранее фрактальной поверхности. Результаты оценки представлены в таблице 1.

| № | Обученная модель | Оценочная модель | Модуль разности |
|----|------------------|------------------|-----------------|
| 1 | 0.983 | 0.978 | 0.005 |
| 2 | 0.547 | 0.543 | 0.004 |
| 3 | 0.672 | 0.678 | 0.006 |
| 4 | 0.991 | 0.985 | 0.006 |
| 5 | 0.479 | 0.470 | 0.009 |
| 6 | 0.865 | 0.877 | 0.012 |
| 7 | 0.341 | 0.354 | 0.013 |
| 8 | 0.447 | 0.459 | 0.012 |
| 9 | 0.788 | 0.783 | 0.005 |
| 10 | 0.879 | 0.877 | 0.002 |
| 11 | 0.375 | 0.376 | 0.001 |
| 12 | 0.541 | 0.535 | 0.006 |
| 13 | 0.887 | 0.870 | 0.007 |
| 14 | 0.253 | 0.241 | 0.012 |
| 15 | 0.348 | 0.344 | 0.004 |

Таблица 1: Отклонение 15 точек максимумов

Фрактальная модель построена с высокой точностью. Фрактальная размерность может быть использована в качестве реальных значений различных масштабно-зависимых параметров, таких, как длина поверхности и объем шероховатости. На рис. 2.а представлено изображение смоделированной фрактальной поверхности, на рис. 2.б – профиль поверхности.

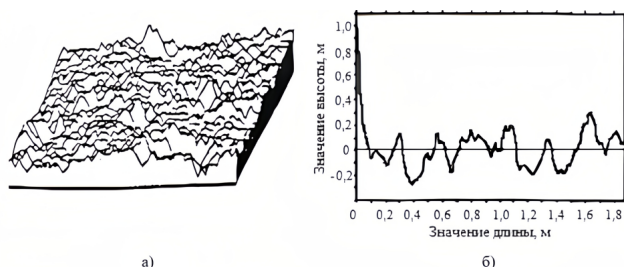


Рис. 2: Модель фрактальной поверхности (общий вид и профиль)

В дальнейшем рассматривается возможность применения моделей, полученных с помощью методов искусственного интеллекта, в задачах упругого контактного взаимодействия фрактальных поверхностей различной жесткости друг с другом для нахождения параметров жесткости и изнашивания.

Литература

1. Тихомиров В.П., Гриб В.В. Развитие трибологии // Вестник Брянского технического университета – 2018. — № 12 (73). — 14–23.
2. Бекман И.Н. Геометрия фракталов. Курс лекций / И. Н. Бекман. — М.: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2010. — 29 с.
3. Бекман И.Н. Нелинейная динамика сложных систем: теория и практика / И. Н. Бекман. — М.: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2018. — 132 с.
4. Дэвид Фостер. Генеративное глубокое обучение. Творческий потенциал нейронных сетей. — СПб.: Питер, 2020. — 336 с.: ил. — (Серия «Бестселлеры O'Reilly»).
5. Гафаров, Ф.М. Искусственные нейронные сети и приложения: учеб. пособие / Ф.М. Гафаров, А.Ф. Галимянов. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. — 121 с.

К ВОПРОСУ ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИВОЙ УСТАЛОСТИ ПРИ ЗВУКОВЫХ И УЛЬТРАЗВУКОВЫХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Э.Б. Завойчинская, А.А. Бобылев, А.Р. Каблин

eleonor.zavoychinskaya@math.msu.ru, abobylov@gmail.com, aleksandr.kablin@math.msu.ru

УДК 539.4

Представляются результаты анализа напряженно-деформированного состояния образцов при ускоренных усталостных испытаниях. Показывается, что в экспериментах состояний резонанса в образцах не возникает. Обсуждается существование единых непрерывных кривых усталости по макроразрушению при заданной частоте симметричного одноосного нагружения в областях много- и гигацикловой усталости.

Ключевые слова: многоцикловая и гигацикловая усталость, резонанс.

Кривая усталости по макроразрушению при одночастотном симметричном одноосном нагружении описывается функцией трех независимых переменных: $\sigma_a^* = \sigma_a^*(\omega, N, T)$, где σ_a^* — амплитуда напряжения при разрушении, ω — круговая частота ($\omega = 2\pi\nu$, ν — частота нагружения), N — число циклов до разрушения, T — температура, и является единой непрерывной кривой по каждой из переменных в областях много- ($N \in (10^4, 10^6)$ циклов) и гигацикловой ($N \in (10^6, 10^{11})$ циклов) усталости [1].

Анализ многочисленных экспериментов [2–24] позволяет считать частоту нагружения независимой переменной. В экспериментах осуществляется воздушное или водяное охлаждение образцов и при этом наблюдается зависимость от частоты.

В диапазоне частот, в среднем до $\nu = 35$ Гц, применяется сервогидравлическое испытательное оборудование, в диапазоне до $\nu = 100$ Гц — электродинамические и электромагнитные испытательные установки, при этом амплитуда σ_a^* определяется непосредственно в эксперименте.

При построении кривых усталости, в особенности в гигацикловых областях, в связи с большой продолжительностью испытаний возникает необходимость применения методов ускоренных испытаний, к которым относится, например, метод магнитострикционного возбуждения колебаний при частотах $\nu = 10$ кГц [2, 3]. Широко используется также метод ультразвуковых усталостных испытаний с возбуждением упругих волн со стандартной частотой $\nu = 20$ кГц [5–12, 15–17, 19, 20, 23, 24]. В этих экспериментах задается амплитуда перемещений одного из концов

Завойчинская Элеонора Борисовна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Бобылев Александр Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Каблин Александр Романович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

образца u_a , другой конец остается свободным. Амплитуду напряжения σ_a^* авторами предлагается определять из условия возникновения в образце резонансных продольных колебаний ([5–7, 23, 24]). Подбирается т.н. «резонансная» длина образца, которая для прямоугольного сечения представляется в виде: $l = (\pi/\omega)\sqrt{E/\rho}$ (E — модуль Юнга, ρ — плотность материала), и дается алгоритм нахождения σ_a^* при разрушении. Также рассматриваются образцы переменных сечений, для которых определяются «резонансная» длина и амплитуда напряжений σ_a^* .

Условия этих экспериментов соответствуют двум известным постановкам краевых задач о колебаниях упругого стержня, а именно: задаче о вынужденных колебаниях при циклическом осевом перемещении одного конца и задаче о вынужденных колебаниях с закрепленным концом при действии внешней периодической силы. В данной работе анализируются решения этих задач.

Показывается, что решения рассматриваемых задач совпадают. Резонансы, при которых имеет место бесконечное перемещение стержня длины l , в рассматриваемых задачах возникают на следующих частотах: $\omega_n = (\pi(2n - 1)/(2l))\sqrt{E/\rho}$, $n = 1, 2, \dots$. Задаваемая в опытах частота вынужденных колебаний $\omega^* = (\pi/l)\sqrt{E/\rho}$ не является резонансной частотой, как полагают авторы работ, а находится посередине между первой и второй резонансными частотами: $\omega_1 < \omega^* < \omega_2$. Таким образом, в экспериментах условий для резонанса не возникает. Амплитуда напряжений представляется в виде: $\sigma_a^* = \omega^* u_a \sqrt{E\rho}$. Вычисленные таким образом амплитуды σ_a^* при разрушении в зависимости от числа циклов N определяют построенные авторами работ [2–24] экспериментальные кривые усталости.

В результате анализа обширного экспериментального материала можно выделить два класса металлов и сплавов: с независимыми и зависящими от частоты усталостными свойствами. К первому классу относятся: чистые металлы (например, алюминий и медь) [6]; некоторые никелевые сплавы (Udimet U500, MAR-M-246, ЭИ437Б) [2, 6, 9]; хромоникелевые (У1612), медноникелевые и магниевые сплавы [4, 6]; высокоуглеродистые стали с содержанием углерода больше 0.6% (X18H10T, 42CrMo4, GCr15, D38, JIS-SCM440, SGI52) [10], мартенситно-хромистые стали [6]; некоторые алюминиевые сплавы (2024-T351) [6, 12]; титановые сплав ВТ3-1 [5]; чугуны [6, 8].

Ко второму классу относятся: некоторые никелевые сплавы (ЭИ826, ЭП202, Inconel 718) [2, 4, 9], титановые сплавы (ОТ4-1, ВТ22, ВТ3-1, ВТ20У) [2, 6, 9, 14–17], низкоуглеродистые (с содержанием углерода до 0,25%) и среднеуглеродистые стали (1X17H2Ш, 1X2М, X18H9, сталь 45, AISI 316L, 50CrMo4, JIS S15C, DP600, 17-4PH) [2, 10, 11], алюминиевые сплавы АМг6Н, Д16Т [24]. Зависимость усталостных свойств от частоты связана с различной структурой материала, например, как для титанового сплава Ti-6Al-4V (ВТ6) [15, 16]. С уменьшением размера зерна наблюдается увеличение пределов усталости с ростом частоты. В ряде работ [2, 9, 17] описывается немонотонная зависимость усталостных свойств от частоты для некоторых алюминиевых и титановых сплавов и сталей.

Для материалов второго класса в зависимости от частоты нагружения имеют место разные кривые усталости [1]. Однако при заданной частоте отсутствуют «бифуркационные участки» кривой усталости, наличие которых полагает А.А. Шанявский и др. [5, 14, 24], «две ветви долговечности», которые рассматривали Л.Р. Ботвина [17] и В.Ф. Терентьев [18]. Кривая усталости не является «дуплексной кривой», как ее представляли Т. Sakai с коллегами [19], К. Shiozawa, S. Ishihara [20] и др. В много- и гигацикловой областях не существует «эффекта дуальности кривой Велера», как это полагают О.Б. Наймарк с коллегами [21] и описывают в предложенной ими модели усталостного разрушения. На известной диаграмме Х. Муграби [22] и схеме А.А. Шанявского [5, 14] на одном графике представлены две разные кривые усталости при разных частотах для материала с зависящими от частоты усталостными свойствами: в многоцикловой области при одной частоте, в гигацикловой области — при другой.

У большинства материалов второго класса наблюдается упрочнение и увеличение пределов усталости при высоких частотах. Например, у низко- и среднеуглеродистых сталей это увеличение достигает 40%. Отсюда следует, что для таких материалов применение методов высокочастотных испытаний как методов ускоренных испытаний может привести к предсказанию пределов усталостной прочности и долговечности выше реальных. При этом для материалов с независимыми от частоты усталостными свойствами есть возможность использования этих методов для оценки усталостной прочности.

Литература

1. Завойчинская Э.Б., Каблин А.Р. О много- и гигацикловой усталости металлов и сплавов // Журнал технической физики. Наука (СПб.), **93**:12 (2023), 1736-1739.
2. Кузьменко В.А., Матюхнюк Л.Е., Писаренко Г.Г. Усталостные испытания на высоких частотах нагружения. — Киев: Наукова Думка. 1979.
3. Матюхнюк Л., Бялонович А., Войналович А., Кофто Д. Прогнозирование характеристик сопротивления усталости материалов на больших базах нагружения // Вестник ТНТУ, **71**:3 (2013), 99-112.
4. Sharma A., Min Chul Oh, Byungmin Ahn. Recent Advances in Very High Cycle Fatigue Behavior of Metals and Alloys – A Review // Metals, **10** (2020), 1200.
5. Шаняевский А.А., Никитин А.Д., Palin-Luc T., Bathias C. Масштабная иерархия процессов малоциклового, многоциклового и сверхмногоциклового усталости разрушения титанового сплава ВТ3-1 // Физическая мезомеханика, **17**:4 (2014), 59-68.
6. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle fatigue in mechanical practice. — New York: Dekker Publisher. 2005.
7. Peng W., Xue H., Ge R., Peng Z. The influential factors on very high cycle fatigue testing results // MATEC Web of Conferences. — 165. 20002. 2018.
8. Stanzl-Tschegg S. Very high cycle fatigue measuring techniques // International Journal of Fatigue, **60** (2014), 2-17.
9. Нгуен Нгок Т., Капралов В.М., Коленко Г.С. Влияние частот нагружения на сопротивление усталости материалов // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки, **25**:2 (2019), 68-77.
10. Гридасова Е.А., Дренкина К.Ю., Дренин А.С., Середя М.А. Влияние частоты нагрузки при низкочастотном и высокочастотном методах испытаний на усталостные характеристики низкоуглеродистых и высокоуглеродистых сталей (обзор) // Вестник инженерной школы ДВФУ, **42**:1 (2020), 3-12.
11. Palin-Luc T., Jeddi D. The Gigacycle Fatigue Strength of Steels: a Review of Structural and Operating Factors // Procedia Structural Integrity, **13** (2018), 1545-1553.
12. Fitzka M., Mayer H. Constant and Variable Amplitude Fatigue Testing of Aluminum Alloy 2024-T351 With Ultrasonic and Servo-Hydraulic Equipment // International Journal of Fatigue, **91** (2016), 363-372.
13. Мьльников В.В. Влияние частоты нагружения на усталость конструкционных материалов // Наука и техника, **18**:5 (2019), 427-435.
14. Шаняевский А.А., Захарова Т.П., Потапенко Ю.А. Бифуркационный переход от мезо- к наномиру усталости титанового сплава ВТ3-1 как частично замкнутой системы // Физическая мезомеханика, **12**:3 (2009), 33-44.
15. Takeuchi E., Furuya Y., Nagashima N., Matsuoka S. The Effect of Frequency on the Giga-Cycle Fatigue Properties of a Ti-6Al-4V Alloy // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., **31** (2008), 599-605.
16. Günther J., Krewerth D., Lippmann T., Leuders S., Tröster T., Weidner A., Biermann H., Niendorf T. Fatigue life of additively manufactured Ti-6Al-4V in the very high cycle fatigue regime // International Journal of Fatigue, **94**:2 (2017), 236-245.
17. Ботвина Л.Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. — М.: Наука. 2008.
18. Терентьев В.Ф., Кораблева С.А. Усталость металлов. — М.: Наука, 2015.
19. Sakai T., Nakagawa A., Oguma N., Nakamura Y., Ueno A., Kikuchi S., Sakaida A. A review on fatigue fracture modes of structural metallic materials in very high cycle regime // International Journal of Fatigue, **93** (2016), 339-351.
20. Shiozawa K., Lu L., Ishihara S. S-N Curve Characteristics and Subsurface Crack Initiation Behavior in Ultra-Long Life Fatigue of a High Carbon-Chromium Bearing Steel // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., **24** (2001), 781-790.
21. Наймарк О.Б., Ледон Д.Р. Описание эффекта дуальности кривой Велера и изменения усталостной долговечности с изменением частоты нагружения // Междун. конф. «Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии» (6-10 сентября 2021 г.). Тезисы докл. — Томск: Изд-во ТГУ, 2021. — 564.
22. Mughrabi H. Microstructural Mechanisms of Cyclic Deformation, Fatigue Crack Initiation and Early Crack Growth // Philosophical Trans. of the Royal Soc.: A Math.Phys. and Eng. Sci., **373**(2038) (2015), 21. № 373(2038). 2015. 21 p.
23. Никитин А.Д., Стратула Б.А. Актуальные и перспективные схемы проведения сверхмногоциклового усталостных испытаний // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. трудов межд. науч. конф. ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет». — 2020. — 1009-1114.
24. Шаняевский А.А., Никитин А.Д., Palin-Luc T. Сверхмногоциклового усталость алюминиевого сплава Д16Т // Физическая мезомеханика, **23**:3 (2020), 43-53.

**МЕТОД СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
О НАГРУЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ**

Л.А. Кабанова

liubov.kabanova@math.msu.ru

УДК 539.3

Доклад посвящён построению приближенных решений квазистатической задачи о нагружении линейно-упругой ортотропной пластины при помощи метода структурных функций первого и второго порядка; их сопоставлению с известным приближенным и конечноэлементным решением аналогичной задачи в трехмерной постановке.

Ключевые слова: метод структурных функций, слоистая пластина.

Доклад посвящён вопросу применения метода структурных функций – одной из техник построения приближенных решений задачи теории упругости для тела произвольной неоднородности – непосредственному построению такого приближенного решения, а также изучению влияния параметров настройки метода на конечный результат. Метод структурных функций (МСФ) был исходно построен в работах В. И. Горбачева ([1] и другие работы), как способ построения приближенного решения краевой задачи для уравнения в частных производных с переменными коэффициентами; вариации метода разработаны для ряда задач математической физики, динамической задачи теории упругости, задач теплопроводности, и многих других. Однако исследование приближенных решений, которые являются результатами работы метода, равно как и изучение влияния параметров настройки метода на точность получаемого приближения, требует продолжения и расширения пула тестовых задач.

В данном докладе строятся и сопоставляются между собой и с известным решением аналогичной задачи в трехмерной постановке МСФ-приближения решения задачи о нагружении слоистой прямоугольной ($L_1 * L_2$) пластины постоянной толщины H , скомпонованной из линейно-упругих ортотропных материалов, причём оси ортотропии слоев пластины параллельны сторонам последней; пластина рассматривается в декартовых прямоугольных координатах, оси которых параллельны сторонам пластины. Верхняя лицевая поверхность пластины нагружена тестовой гармонической нагрузкой, нижняя лицевая поверхность свободна, а ребра пластины закреплены так, что на каждом из них возможны только нормальные к плоскости ребра смещения (см. рисунок 1). Математическая постановка данной задачи имеет вид (1)

$$[C_{ijkl}(x_3)u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} = 0, \tag{1}$$

$$x_3 = -H/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2, -H/2) = 0,$$

$$x_3 = H/2 : \sigma_{I3}(x_1, x_2, H/2) = 0, \sigma_{33}(x_1, x_2, H/2) = q_0 \sin \lambda x_1 \sin \mu x_2, \lambda = \pi/L_1, \mu = \pi/L_2$$

$$x_1 = 0, L_1 : u_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, u_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0$$

$$x_2 = 0, L_2 : u_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, u_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0,$$

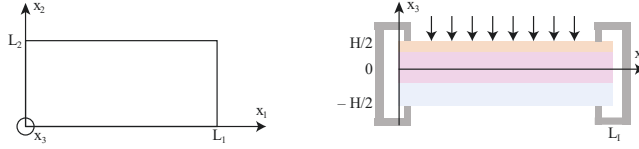
$\vec{u}(\vec{u})$ – вектор перемещений; $\sigma_{ij}(\vec{x})$ и $\varepsilon_{ij}(\vec{x})$ – тензоры напряжений и деформаций в пластине, $C_{ijkl}(x_3)$ – компоненты тензора модулей упругости; данную задачу и неоднородную пластину будем ниже называть исходной.

В соответствии с общим подходом, в докладе строятся приближения решения задачи (1) по МСФ первого

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(\vec{x})v_{k,l}(\vec{x}), \tag{2}$$

и второго порядка

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(\vec{x})v_{k,l}(\vec{x}) + N_{ikli_1}(\vec{x})v_{k,li_1}(\vec{x}). \tag{3}$$

Рис. 1: Схема пластины: вид сверху, вид сбоку в плоскости Ox_1x_3 .

Здесь $\vec{v}(\vec{x})$ – перемещения во вспомогательной пластине, называемой сопутствующей: это – пластина аналогичной исходной геометрии, закрепленная и нагруженная так же, но – изготовленная из однородного материала; таким образом, $\vec{v}(\vec{x})$ представляют собой решение задачи

$$C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x}) = 0, \quad (4)$$

$$x_3 = -H/2 : s_{i3}(x_1, x_2, -H/2) = 0,$$

$$x_3 = H/2 : s_{I3}(x_1, x_2, H/2) = 0, \quad s_{33}(x_1, x_2, H/2) = q_0 \sin \lambda x_1 \sin \mu x_2,$$

$$x_1 = 0, L_1 : v_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad v_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad s_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0$$

$$x_2 = 0, L_2 : v_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad v_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad s_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0,$$

здесь C_{ijkl}^0 – упругие свойства сопутствующего тела; из общих соотношений МСФ на них следуют только стандартные термодинамические ограничения положительной определенности тензора C_{ijkl}^0 . В качестве техники построения решения сопутствующей задачи в докладе выбран метод Н.Ж. Рагапо [2]. Детально процедура построения МСФ-приближений решения задачи (1) изложена в работа [3], [4].

$N_{ikl}(\vec{x})$ и $N_{ikli_1}(\vec{x})$ в соотношениях (3) и (4) – структурные функции первого и второго порядка. В докладе приводится построение краевых задач для вычисления структурных функций; с учётом описанной ранее ортотропии материалов от тождественно нулевых отличны 5 структурных функций первого порядка,

$$N_{3\alpha\alpha}(x_3) = \int_{-H/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} dy, \quad N_{\alpha\alpha 3}(x_3) = \int_{-H/2}^{x_3} \frac{C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(y)}{C_{\alpha 3\alpha 3}(y)} dy, \quad (5)$$

в соотношениях (5) отсутствует суммирование по α , а свойства сопутствующего тела имеют вид¹

$$C_{\alpha 3\alpha 3}^0 = 1/\langle 1/C_{\alpha 3\alpha 3} \rangle, \quad C_{33\alpha\alpha}^0 = \langle C_{33\alpha\alpha}/C_{3333} \rangle / \langle 1/C_{3333} \rangle; \quad (6)$$

и 13 структурных функций второго порядка,

$$N_{\alpha\beta\beta\alpha}(x_3) = - \int_{-H/2}^{x_3} \left[\int_{-H/2}^y (C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha}(z))/C_{3333}(z) dz + k_{3\alpha\alpha} \right] dy, \quad (7)$$

$$N_{\alpha\alpha 33}(x_3) = - \int_{-H/2}^{x_3} \left[\int_{-H/2}^y (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(z))/C_{\alpha 3\alpha 3}(z) dz + k_{\alpha\alpha 3} \right] dy,$$

$$N_{33\alpha\alpha}(x_3) = - \int_{-H/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} \left[\int_{-H/2}^y (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(z))/C_{\alpha 3\alpha 3}(z) dz + k_{\alpha\alpha 3} \right] dy,$$

¹Здесь и далее угловыми скобками обозначено осреднение по толщине, $\langle f \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_3) dx_3$.

здесь $k_{\alpha\alpha\beta} = \langle N_{\alpha\alpha\beta} \rangle$, а свойства сопутствующего тела определяются формулами

$$C_{\alpha 3 \alpha 3}^0 = \begin{cases} \left\langle \frac{\langle C_{33\alpha\alpha} * y / C_{\alpha\alpha 33} \rangle}{\frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} \left[\int_{-h/2}^y \frac{1}{C_{\alpha 3 \alpha 3}(z)} dz - \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{\xi} \frac{1}{C_{\alpha 3 \alpha 3}(\zeta)} d\zeta d\xi \right]} \right\rangle, & \text{если } \forall x_3 C_{\alpha 3 \alpha 3}(x_3) \neq C_{\alpha 3 \alpha 3}(-x_3), \\ \langle C_{\alpha 3 \alpha 3} \rangle, & \text{если } \forall x_3 C_{\alpha 3 \alpha 3}(x_3) = C_{\alpha 3 \alpha 3}(-x_3), \end{cases}$$

$$C_{33\alpha\alpha}^0 = \langle C_{33\alpha\alpha} / C_{3333} \rangle / \langle 1 / C_{3333} \rangle . \tag{8}$$

Приближения решения задачи (1), построенные по формулам (3)-(8), в докладе вычисляются и сопоставляются с известным приближенным решением задачи (1) в трехмерной постановке, а также с решением данной задачи при помощи метода конечных элементов с использованием восьмиузловых лагранжевых и двадцатиузловых серендиповых элементов² для двух типов тестовых пластин, упругие свойства которых приведены в таблицах 1-2. На иллюстрациях ниже приведены выдержки из результатов, представленных в докладе: графики нормализованных приближений напряжений, построенных различными вариациями МСФ, а также – контрольных решений, вычисленных в поперечном сечении $\{x_1 = L_1/2, x_2 = L_2/2\}$ тестовых пластин.

| Слой | $\frac{E_1}{E_T}$ | $\frac{E_2}{E_T}$ | $\frac{E_3}{E_T}$ | ν_{12} | ν_{13} | ν_{23} | $\frac{G_{12}}{E_T}$ | $\frac{G_{13}}{E_T}$ | $\frac{G_{23}}{E_T}$ |
|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------|------------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $[-H/2, -H/6]$ | 50 | 1 | 1 | 0.25 | 0.25/50 | 0.25/50 | 0.5 | 0.5 | 0.2 |
| $[-H/6, H/12]$ | 1 | 30 | 1 | 0.25/30 | 0.25 | 0.25/30 | 0.5 | 0.2 | 0.5 |
| $[H/12, H/2]$ | 70 | 1 | 1 | 0.25 | 0.25/70 | 0.25/70 | 0.5 | 0.5 | 0.2 |

Таблица 1: технические постоянные модельной пластины №1, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$.

| Слой | $\frac{E_1}{E_T}$ | $\frac{E_2}{E_T}$ | $\frac{E_3}{E_T}$ | ν_{12} | ν_{13} | ν_{23} | $\frac{G_{12}}{E_T}$ | $\frac{G_{13}}{E_T}$ | $\frac{G_{23}}{E_T}$ |
|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------|------------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $[-H/2, -H/6]$ | 1 | 30 | 1 | 0.25/30 | 0.25 | 0.25/30 | 0.5 | 0.2 | 0.5 |
| $[-H/6, H/6]$ | 30 | 1 | 1 | 0.25 | 0.25/30 | 0.25/30 | 0.5 | 0.5 | 0.2 |
| $[H/6, H/2]$ | 1 | 30 | 1 | 0.25/30 | 0.25 | 0.25/30 | 0.5 | 0.2 | 0.5 |

Таблица 2: Технические постоянные модельной пластины №2, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$, нагружение $q_3^+ = q_0 \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2$, $q_I^+ \equiv 0$, $q_i^- \equiv 0$

Литература

1. Горбачев В. И. Осреднение линейных задач механики композитов при неперIODической неоднородности // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – 31–37.
2. Pagano N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // Journal of composite materials. – 1970. – Т. 4. – №1. – 20-34.
3. Kabanova L. A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, № 7. – 1628–1639.
4. Кабанова Л. А. Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций // Чебышевский сборник. – 2022. – Т. 23, № 4. – 211–233.

²Данные результаты получены автором совместно с н. с. А.В. Романовым

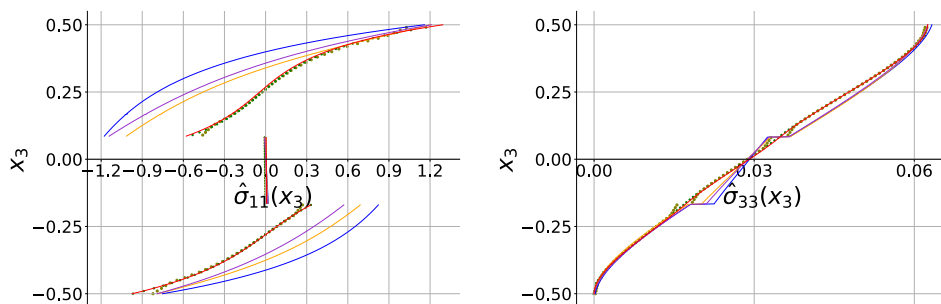


Рис. 2: Результаты визуализации приближений нормализованного продольного $\hat{\sigma}_{11}$ и поперечного напряжения $\hat{\sigma}_{33}$ в сечении $(L_1/2, L_2/2, x_3)$ Пластины №1, вычисленных по методу структурных функций I и II порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела по формулам (6), (8) (розовые и оранжевые кривые соответственно); по методу структурных функций I порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$ (синие кривые); по методу конечных элементов с использованием элементов C3D8 (зеленые точки) и C3D20 (оливковые точки), по толщине пластины распределено 100 элементов; по методу Пагано (красные линии).

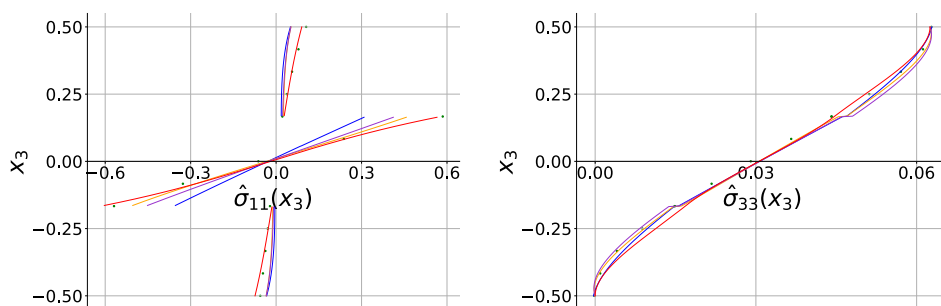


Рис. 3: Результаты визуализации приближений нормализованного продольного $\hat{\sigma}_{11}$ и поперечного напряжения $\hat{\sigma}_{33}$ в сечении $(L_1/2, L_2/2, x_3)$ Пластины №2, вычисленных по методу структурных функций I и II порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела по формулам (6), (8) (розовые и оранжевые кривые соответственно); по методу структурных функций I порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$ (синие кривые); по методу конечных элементов с использованием элементов C3D20 (оливковые точки), по толщине пластины распределено 15 элементов; по методу Пагано (красные линии).

К ЗАДАЧЕ О ПЛАСТИЧЕСКОМ РАСТЯЖЕНИИ ПОЛОСЫ С УЧЕТОМ УСЛОВИЙ НА ТОРЦАХ

В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская

vkadymov@yandex.ru, sen@stankin.ru, elena_yanovskaya@bk.ru

УДК 539.214, 539.374, 621.9.011

В статье приводится постановка и решение плоской задачи о растяжении пластической полосы между двумя параллельными шероховатыми плоскостями, дополненная несимметричностью условий на растекающихся торцах. Найдена верхняя оценка общего усилия обжатия приторцевых областей пластически растягиваемой полосы, при достижении которого одновременно с пластическим растяжением полосы происходит пластическая осадка приторцевых ее частей. Показано, что при дальнейшем деформировании происходит утонение и отрыв не в средней ее растягиваемой части, а вблизи внутренней границы контакта (захвата).

Ключевые слова: плоская задача, сжатие пластической полосы, пластическая осадка.

Классическая задача о сжатии пластической полосы между сближающимися шероховатыми плоскостями твердых тел [1] продолжает привлекать внимание многих исследователей. С ее помощью объяснены присущие описываемым физическим процессам некоторые качественные особенности: явление проскальзывания вдоль поверхности контакта; заметное доминирование шаровой части тензора напряжений над девиаторными составляющими в пластической полосе; соизмеримость нормальных упругих перемещений контактирующих тел с толщиной полосы [2]; эффект “холодной сварки” и пр. С другой стороны, задача помогает лучше понять механизм контактного взаимодействия твердых и пластически деформируемых тел. Л. Прандтлем построено предельное поле напряжений [1], которое Надаи [3] дополнил соответствующими скоростями течения. На основе анализа решения Прандтля – Надаи была предложена приближенная математическая модель для описания процесса растекания пластических слоев [4].

Задача 1. Рассмотрим осадку пластической полосы в условиях плоской деформации:

$$S = \{(x, y) \mid -h < y < h; l_1 < x < l_2\}$$

с несимметричными условиями на концах (рис. 1)

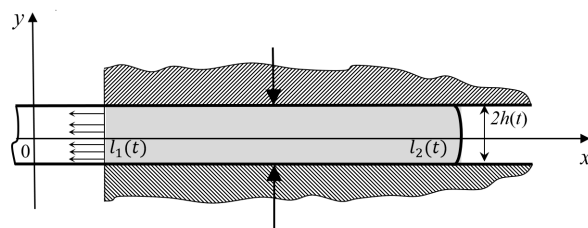


Рис. 1: К задаче об осадке пластической полосы: q_1 – распределенная растягивающая нагрузка; h – половина толщины полосы; $(l_1, -h)$; $(l_2, -h)$ – координаты крайних точек захвата

Кадымов Вагид Ахмедович, д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики и программирования ФГБОУ РТУ «МИРЭА» (Москва, Россия)

Сосенушкин Евгений Николаевич, д.т.н., профессор кафедры систем пластического деформирования ФГБОУ ВО «МГТУ СТАНКИН» (Москва, Россия)

Яновская Елена Александровна, к.т.н., доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГТУ СТАНКИН» (Москва, Россия)

Постановка задачи в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2 &= 4\tau_s^2, \\ \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{4\tau_{xy}} &= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y = 0 : v = 0, \tau_{xy} = 0; \quad (2)$$

$$y = h : v = -v_0 = \frac{dh}{dt}, \tau_{xy} = -\text{sign}(\vec{v} \cdot \vec{k}_1), \quad (3)$$

где \vec{k}_1 – положительное направление Ox . Из (3) следует, что на контактной границе $y = h$ существует неизвестная точка $x = x_p$, при переходе через которую напряжение τ_{xy} меняет знак ($x = x_p$ совпадает с точкой ветвления течения). Поэтому задачу интегрирования системы (1) решается отдельно для каждой из областей:

$$S_1 = \{x \mid x_p < x < l_2\}, \quad S_2 = \{x \mid l_1 < x < x_p\}, \quad S = S_1 \cup S_2$$

Задача 2. Полученное решение рассмотрено в совокупности с пластическим растяжением пластины. Подобный процесс существенно зависит от общей силы P_0 сжатия краевых участков пластины захватами. При значениях P_0 , превышающих некоторое критическое значение $P_{кр}$, жесткий захват пластины не обеспечивается ввиду того, что в зонах сжатия краевых участков пластины, еще до того, как начнется процесс растяжения, металл будет вытекать из-под захватов. При дальнейшем деформировании происходит утонение и разрыв пластины вблизи внутренней границы контакта с захватом. Пусть $l_1(t) < |X| < l_2(t)$ – область контакта с захватом, а $0 < |X| < l_1(t)$ – область пластического растяжения (рис. 2). В предположении, что полоса тонкая $|l_2 - l_1| \gg h$, найдем силу $P_{кр}$.

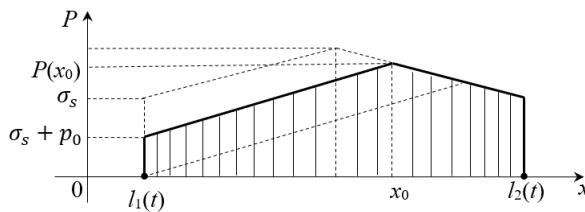


Рис. 2: Распределение контактного давления в области захвата

Показано, что $P_{кр}$ меньше соответствующего P_0 , необходимого для “чистого” сжатия той же части полосы со свободными концами. Найдено общее растягивающее усилие. Рассмотренная задача в частном случае решена в работах [5, 6]. В рамках модели идеально-пластического тела в настоящей работе решена плоская задача о пластическом растяжении (тонкой) полосы с одновременной осадкой сжатых торцов в режиме однородного поля скоростей деформаций, при котором полоса выдерживает максимальные пластические деформации, сохраняя постоянную толщину вдоль всей ее протяженности (для сжатой и растягиваемой частей).

Рассмотрена **задача о правке пластины**. Пусть полоса, сжимаемая по торцам, подвергается растяжению. В этом случае найдено предельное значение общего усилия сжатия торцов, при достижении которого одновременно с растяжением полосы имеет место пластическая осадка сжатых торцов, мешающая осуществлению процесса правки.

Выводы: В рамках модели идеально-пластического тела в настоящей работе решена плоская задача о пластическом растяжении тонкой полосы с одновременным сжатием торцов при условии однородности поля скоростей деформаций, при котором полоса выдерживает максимальные пластические деформации, сохраняя постоянную толщину на всей ее длине (для сжатой и растягиваемой частей).

Литература

1. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Л. Прандтль. Теория пластичности. Сборник статей. М.: Гос. изд. Иностранной литературы. 1948. С. 102-113 [Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz uber das plastische Gleichgewicht // ZAMM. 1923. Bd.3. H.6. — 401-406].
2. *Кийко И.А.* Течение тонкого слоя пластического материала по упруго-деформируемым поверхностям // Инжен. журн. 1965, т. 5, вып. 2. — 372-375.
3. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества [перевод с англ. под ред. Л.С. Лебензона] // М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.
4. *Ильюшин А.А.* Труды (1946-1966). Т.2. Пластичность // М.: Физматлит, 2004. — 480 с.
5. *Кадымов В.А.* Математическое моделирование контактных задач пластического течения [Монография] // Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. — 129 с.
6. *Sosenushkin E.N., Kadymov V.A., Yanovskaya E.A., Tatarintsev A.A., Sosenushkin A.E.* The Parameters of the Stress State in the Operations of Plastic Deformation // Key Engineering Materials Submitted: 2015-09-16. ISSN: 1662-9795, Vol. 684, — 57-66, doi:10.4028/www.scientific.Net/KEM.684.57/Revised: 2015-11-13. Accepted: 2015-11-13. 2016 Trans Tech Publications, Switzerland Online: 2016-02-18.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЬЕЗОПЛИТ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ

С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов

kaloerov@mail.ru, aleks.serosht@gmail.com

УДК 539.3

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит даются решения задач об изгибе тонких пьезоплит с отверстиями и трещинами. При этом коэффициенты разложений голоморфных функций в ряды определяются из граничных условий на контурах областей обобщенным методом наименьших квадратов. Впервые приводятся решения ряда новых задач для плит с отверстиями и трещинами.

Ключевые слова: комплексные потенциалы пьезоплит, многосвязные пьезоплиты.

Рассматривается тонкая пьезоплита, ограниченная внешним контуром L_0 и контурами произвольно расположенных эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathfrak{L}}$) с полуосями a_l, b_l , которые в частном случае могут переходить в трещины. Плита находится под действием приложенных к её контурам самоуравновешенных механических изгибающих моментов, поперечных сил, моментов электрической и магнитной индукций. В частном случае, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную многосвязную плиту. В последнем случае на бесконечности действуют механические изгибающие и крутящие моменты $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ моменты электрической и магнитной индукций $M_{dx}^\infty, M_{dy}^\infty, M_{bx}^\infty, M_{by}^\infty$.

Решение задачи об изгибе рассматриваемой плиты можно проводить с помощью комплексных потенциалов теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит [1, 2]. В таком случае это

Калоеров Стефан Алексеевич, д.ф.-м.н., профессор, ДонГУ, факультет математики и информационных технологий (Донецк, Россия)

Сероштанов Александр Владимирович, аспирант, ДонГУ, факультет математики и информационных технологий (Донецк, Россия)

решение сводится к нахождению функций $W'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1)$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения 8-го порядка, из граничных условий

$$2Re \sum_{k=1}^4 g_{ikl} W'_k(t_k) = f_{il}(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (2)$$

в которых g_{ikl} и $f_{il}(t)$ – соответственно известные постоянные и функции, зависящие от способов нагружения или подкрепления контуров L_l .

В общем случае плиты с эллиптическими контурами функции $W'_k(z_k)$ имеют вид

$$W'_k(z_k) = (1 - g)a_{k00} + g\Gamma_k z_k + \sum_{l=g}^{\mathfrak{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (3)$$

где коэффициент $g = 0$ в случае конечной плиты и $g = 1$ в случае бесконечной плиты; Γ_k – постоянные, определяемые из решения известной системы линейных алгебраических уравнений восьмого порядка [1, 2]; a_{kln} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты;

$$\varphi_{k0n}(z_k) = (z_k - z_{k0})^n, \quad \varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n(z_k)} \quad (l = \overline{1, \mathfrak{L}}); \quad (4)$$

ζ_{kl} – переменные, вычисляемые из конформных отображений

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (5)$$

внешности единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl} , соответствующих эллипсам L_l при аффинных преобразованиях (1);

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = (a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l))/2, \\ m_{kl} = (a_l(\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l(\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l))/2R_{kl}; \quad (6)$$

x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ с началом в центре эллипса L_l и направлением оси $O_l x_l$ вдоль полуоси a_l в основной системе Oxy .

Неизвестные коэффициенты a_{kln} рядов функций (3) определяются из граничных условий (2) на контурах плиты, которые удовлетворяются обобщенным методом наименьших квадратов. При этом на каждом из контуров L_p ($p = \overline{g, \mathfrak{L}}$) выбирается система точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворяются соответствующие граничные условия. В результате для определения неизвестных постоянных a_{kln} получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая решается методом сингулярных разложений. После нахождения псевдорешений последней системы функции (3) будут известными, и можно вычислять основные характеристики электромагнитоупругого состояния плиты (механические изгибающие и крутящие моменты, перерезывающие силы, моменты индукций электрического и магнитного полей) в любой точке плиты. При этом, в случае если некоторый эллипс переходит в прямолинейный разрез-трещину, для его концов по известным формулам можно вычислить коэффициенты интенсивности моментов (КИМ).

Численные исследования были проведены для конечной и бесконечной плит с конечным числом отверстий или трещин, для плиты с периодическим рядом или двоякопериодической системой отверстий или трещин, для полуплоскости с отверстиями и трещинами.

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (3) и количество точек M_p на каждом их контуров L_p , в которых удовлетворялись граничные условия,

увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). Как показали численные исследования, для такого удовлетворения граничным условиям в зависимости от близости концентраторов напряжений друг к другу в рядах (3) достаточно было оставлять от 10 до 150 членов для каждого отверстия и брать на каждом из контуров от 50 до 500 точек.

Исследованиями для многосвязных плит с отверстиями и трещинами, в том числе краевыми, установлено, что при сближении отверстий друг с другом наблюдается значительная концентрация моментов (следовательно, и напряжений) около контуров отверстий вблизи перемычек, тогда как вдали от перемычек значения этих моментов изменяются незначительно. Как показали расчеты, учет пьезосвойств материала оказывает значительное влияние на значения основных характеристик электромагнитоупругого состояния плиты и при исследованиях концентрации моментов в элементах конструкций, изготовленных из пьезоматериалов, нельзя ограничиваться решением частной задачи теории упругости, а нужно решать общую задачу электромагнитоупругости.

Аналогичные результаты получены по периодической и двоякопериодической задачам. Установлено, что значения моментов вблизи точек перемычек растут с уменьшением длин перемычек, и при расстояниях между соседними отверстиями менее их радиусов здесь возникает очень высокая концентрация моментов. Если расстояние между соседними отверстиями больше двух диаметров отверстий, то влияние одного контура на значения моментов около других незначительно, им можно пренебречь и считать плиту ослабленной одним отверстием. При сближении трещин, расположенных вдоль одной линии, значения КИМ растут, и при близких расстояниях между трещинами они становятся весьма большими, а при сближении параллельных трещин значения КИМ для их концов наоборот уменьшаются.

В случае плиты в виде полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе использован метод интегралов типа Коши, обеспечивший точное удовлетворение этим условиям. Для контуров отверстий и трещин опять использовался обобщенный метод наименьших квадратов. Исследованиями установлено, что с приближением отверстий к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычек между отверстиями и прямолинейной границей резко возрастают, незначительно изменяясь в остальных точках. Концентрация моментов наблюдается и вблизи точек перемычек на прямолинейной границе, причем при удалении от этих точек значения моментов быстро уменьшаются, а затем незначительно растут до значения, соответствующего случаю сплошной полуплоскости без отверстий и трещин. Рассмотрены случаи совместного наличия и отверстий и трещин, в том числе краевых, выходящих из контуров отверстий. Установлен ряд ранее неизвестных закономерностей влияния на значения изгибающих моментов места расположения и длин трещин, материалов пьезоплит.

В заключение отметим, что для тонких плит из пьезоматериалов все указанные задачи решены впервые. При этом полученные значения основных характеристик для частных случаев решенных задач (задач электроупругости и теории упругости без учета электромагнитных свойств) совпадают с ранее известными в литературе.

Литература

1. Калоеров С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. — 2022. — № 1. — 20–38.
2. Калоеров С.А., Сероштанов А.В. Исследование изгиба тонких электромагнитоупругих плит // ПМТФ. — 2022. — Т. 63, № 2. — 151–165.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНСТРУМЕНТАРИЯ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ПРОЧНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАКЕТА «ФИДЕСИС»

В.А. Левин, А.В. Вершинин, М.Я. Яковлев

v.a.levin@mail.ru, versh1984@mail.ru, maxim.yakovlev@math.msu.ru

УДК 539.4, 519.6

В докладе приведён ряд примеров применения искусственного интеллекта для численного решения задач нелинейной механики прочности в сочетании с применением российского пакета прочностного анализа «Фидесис»: решение прямой задачи механики твёрдого тела, решение обратной задачи определения структуры материала по заданным свойствам, анализ частотной фильтрации.

Ключевые слова: механика деформируемого твёрдого тела, прочность, нелинейные задачи, искусственный интеллект.

Отмечается, что решение ряда задач механики деформируемого твердого тела для практического применения можно значительно ускорить, применяя инструментарий (программы для ЭВМ) на основе искусственного интеллекта (ИнИИ) [1] и (или) путем создания базы синтетических данных (полученных с помощью численного моделирования) для машинного обучения с целью дальнейшего решения задач механики деформируемого твердого тела. Рассматриваются три типа использования ИнИИ для задач механики деформируемого твердого тела.

Первый. Решение прямой задачи с помощью нейронных сетей аппроксимирует решение некоторого дифференциального уравнения в частных производных (PDE) используя ряд граничных и начальных условий при помощи полносвязной нейронной сети. В докладе рассмотрен случай, когда модель обучается путем построения функции потерь, которая измеряет, насколько нейросеть удовлетворяет PDE и граничным условиям. Минимизация функции потерь нейросетью фактически означает нахождение решения заданного PDE. В этом случае возможно применение самообучающихся нейронных сетей.

Второй. Определение структуры материала, отвечающего заранее заданным механическим (включая прочностные) характеристикам. Рассмотрены две задачи. Задача об оптимизации структуры двумерного метаматериала [2] на основе спектра собственных частот с использованием технологии машинного обучения. Метаматериалы – композиционные материалы с периодической структурой, которые обладают уникальными электромагнитными или акустическими свойствами. В частности, фоновые метаматериалы уже нашли применение в качестве различных отражателей и фильтров и в настоящее время являются перспективными материалами для акустической инженерии. Одним из методов создания новых метаматериалов является модульное проектирование, в котором основой периодической структуры являются «мета-атомы» – структуры, содержащие расположенные в определенном порядке включения с заданными механическими характеристиками. Особенностью задачи проектирования модульных метаматериалов является необходимость прогнозирования различных характеристик итогового образца по известным данным о структуре и материалах «мета-атомов». Существенно ускорить выбор наиболее эффективных «мета-атомов» для решаемой задачи проектирования возможно с использованием технологии машинного обучения. В данной работе рассматривается модельная система – композит [3] в виде двумерной полосы. Сама матрица, так же, как и ее включения, задается массовой плотностью, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона. Используя численное моделирование и алгоритм оптимизации на основе нейронной сети, разработана методика нахождения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проекты № 22-11-00110 и № 19-71-10008).

Левин Владимир Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Вершинин Анатолий Викторович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Яковлев Максим Яковлевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

такой последовательности включений, которая обеспечивает максимальную ширину запрещенной зоны в колебательном спектре. Расчет собственных частот проводится в пакете прочностного анализа «Фидесис». Для обучения нейронной сети на основе синтетических данных многократно проводился расчет эффективных свойств на ячейке периодичности метаматериала с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [4] для некоторого подмножества комбинаций включений. Далее обученная нейронная сеть использовалась для поиска оптимальной (в указанном выше смысле) комбинации включений путем перебора всех возможных вариантов расположения включений в ячейке периодичности. Применение разработанной методики позволило реализовать оптимизацию микроструктуры метаматериала [5], не требующую значительных временных затрат и вычислительных мощностей, в сравнении с прямыми МКЭ-расчетами эффективных свойств для всех возможных вариантов ячеек периодичности.

Третий. Задача анализа частотной фильтрации в решетчатых структурах с подбором оптимальных параметров волнистости и размеров ячеек. В рамках данной задачи было проведено моделирование механических волновых процессов [6] в решетчатых материалах с фиксированной и непрерывно изменяемой структурой. При исследовании распространения упругих волн в решетчатых структурах было установлено влияние формы решетчатой структуры на механизм распространения упругих волн: наиболее сильно отклоняет акустическую волну от основного направления распространения решетка, образованная круговыми и четырехугольными звездчатыми ячейками периодичности. В этих случаях передающаяся энергия упругих колебаний от одного узла решетки к другому в виде волновых фронтов, благодаря волнистости, дробится и отклоняется от основной оси распространения. Также выявлен факт возможности частотной фильтрации волн. Для частотной фильтрации волн целесообразно использовать криволинейные и градиентные решетки. В зависимости от желаемого результата стоит подбирать степень волнистости и протяженность волнистой зоны градуированной решетки. Отношение максимумов норм скоростей для базовой решетки и градуированной решетки достигает 5,5 раз. Было произведено исследование метрики затухания акустических волн на расстоянии при различных параметрах волнистости, расстоянии, частоте, толщине стержней, размеру ячеек решетки, модуля Юнга, коэффициента Пуассона, плотности, направлении градиентного изменения волнистости прутьев решетки. Использование методов машинного обучения позволило построить предсказательную модель высокой точности. Построение модели было произведено при помощи кросс-валидации, где в качестве модели был выбран метаоценщик трех методов машинного обучения: градиентного бустинга, случайного леса и случайного леса повышенной рандомизации с метрикой качества R2. Построенная модель предсказывает результат точнее, чем одиночные упомянутые алгоритмы. Также была построена двухслойная нейронная сеть, обладающая высокой предсказательной способностью. В отличие от классической нейронной сети, где модель нейрона подразумевает задание весового коэффициента для входного сигнала и функции активации, в случае новой нейронной сети таких гиперпараметров больше: для каждого нейрона ищутся гиперпараметры дерева решений (или ансамбля деревьев), площадь соприкосновения каждого синопсиса S . Также вариации подлжит единое правило формирования количества нейромедиаторов. Количество переменных возрастает, что повышает риск переобучения, но в то же время, за счет использования дерева решений при описании типа нейромедиаторов и использовании концепции складывания сигнала от разных нейронов удается совместить два принципиально разных и наиболее успешных подхода к предсказанию результата. Именно нейронная сеть, основанная на новых соображениях, позволила построить модель машинного обучения наиболее высокого качества.

Во всех случаях в качестве решателя использовался пакет «Фидесис» [7], дополняемый (путем интеграции с соответствующим программным обеспечением и скриптов на Python) соответствующим ИНИИ и позволяющий значительно ускорить построение такой обучающей выборки за счет промышленного использования метода спектральных элементов.

Литература

1. Schmidt J., Marques M.R.G., Botti S., Marques M.A.L. Recent advances and applications of machine learning in solid-state materials science // npj Computational Materials, V. 5, 2019. — Article ID 83.
2. L. Wu, L. Liu, Y. Wang, Z. Zhai, H. Zhuang, D. Krishnaraju, Q. Wang, H. Jiang. A machine learning-based method to design modular metamaterials // Extreme Mechanics Letters, V. 36, 2020. — Article ID 100657.

3. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures, V. 131, 2015. — 25–36.
4. Kukushkin, A.V., Kononov, D.A., Vershinin, A.V., Levin, V.A. Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes // Journal of Physics: Conference Series, V. 1158, I. 2, 2019. — Article ID 032022.
5. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // Журнал технической физики. Т. 83, вып. 1, 2013. — 3–28.
6. Phani A.S., Woodhouse J., Fleck N. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices // Journal of the Acoustical Society of America, V. 119, I. 4, 2006. — 1995–2005.
7. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URSS, 2015. — 408 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА – ГАЛЕРКИНА ДЛЯ АНАЛИЗА ЯВЛЕНИЙ РЕЗОНАНСА В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова

vladlitvinov@rambler.ru, kristinalitvinova900@rambler.ru

УДК 534.11

Метод Канторовича–Галеркина развит применительно к решению краевых задач о колебаниях одномерных механических систем с подвижными границами. Данный метод также позволяет рассмотреть более широкий класс граничных условий, отличных от условий первого рода. Анализируются явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс каната с движущейся границей с учетом вязкоупругости.

Ключевые слова: краевые задачи, колебания механических систем, движущиеся границы, резонансные свойства, вязкоупругость.

Одномерные механические системы с движущимися границами широко распространены в технике. Это и колебания канатов грузоподъемных установок, гибких звеньев передач, лентопротяжных механизмов, балок, рельсовых путей, бурильных колонн, тесемочных передач, стержней твердого топлива при сгорании и т.д. [1–8]. Наличие подвижных границ вызывает значительные трудности при описании таких систем и делает неприменимыми к ним классические методы математической физики. Точные методы решения данных задач ограничены решением волнового уравнения с относительно простыми граничными условиями. Из приближенных методов наиболее эффективным является метод Канторовича–Галеркина, описанный в работе [5]. Однако этот метод можно использовать и в более сложных случаях. Метод Канторовича–Галеркина позволяет учесть влияние сил сопротивления внешней среды на систему, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта, а также слабую нестационарность граничных условий. В работе рассмотрены явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс при поперечных колебаниях каната переменной длины с учетом вязкоупругости и действия демпфирующих сил. Применяя преобразования, аналогичные приведенным в работе [5], получены выражения для амплитуды колебаний, соответствующих n -й динамической моде, а также выражения, описывающие явления установившегося резонанса и прохождения через резонанс.

Выражение, определяющее максимальную амплитуду колебаний каната при прохождении через резонанс, исследовано при помощи численных методов. Найдена временная точка начала резонансной области. Проанализирована зависимость амплитуды колебаний каната от предельной скорости движения границы, вязкоупругости и сил демпфирования.

Литвинов Владислав Львович, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой, Самарский государственный технический университет, кафедра ОТД (Высшей математики) (Самара, Россия)

Литвинова Кристина Владиславовна, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, геологический факультет (Москва, Россия)

Результаты численных исследований позволяют сделать следующие выводы:

- с уменьшением скорости движения границы, вязкоупругости и демпфирующих сил амплитуда колебаний увеличивается;

- в случае, если скорость движения границы, вязкоупругость и силы демпфирования стремятся к нулю, амплитуда колебаний стремится к бесконечности.

В заключение отметим, что приведенные результаты позволяют провести количественный анализ явлений установившегося резонанса и прохождения через резонанс для систем, колебания которых описываются данной задачей.

Литература

1. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками // Физматлит, М., 2001, 320 стр.
2. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Продольные колебания вязкоупругого каната переменной длины // Тр. 4-й Всероссийской научной конф. «Математическое моделирование и краевые задачи. Часть 1. Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара, 2007, — 25–27.
3. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины // Наук.думка, Киев, 1962, 332 стр.
4. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. №4. — 161–165.
5. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. — 70–77.
6. *Литвинов В.Л.* Решение краевых задач с подвижными границами с использованием приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2020. Том. 26, №2. — 188–199.
7. *Литвинов В.Л., Литвинова К.В.* Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегро-дифференциальным уравнениям // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2022, т. 62, №6, 977–986.
8. *Литвинов В.Л.* Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с подвижной подпружиненной опорой // Теоретическая и математическая физика, 2023, т. 215, №2, 709–715.

УРАВНЕНИЯ СОВМЕЩНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ, ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ЧЕЗАРО. ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

С.А. Лурье, П.А. Белов

salurie@mail.ru, belovpa@yandex.ru

УДК 539.3

Построены обобщенные формулы Чезаро, позволяющие с точностью до квадратичных полиномов определить поле перемещений через интегро-дифференциальные операторы от тензора-девиатора деформаций в 3D- и 4D-упругости. Рассмотрены две постановки задач теории упругости в напряжениях, функции напряжений строятся с помощью техники множителей Лагранжа.

Ключевые слова: уравнения совместности, функции напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-11-00275).

Лурье Сергей Альбертович, д.т.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Белов Петр Анатольевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ФГБУН Институт прикладной механики РАН (Москва, Россия)

Рассматривается классическая проблема теории упругости об условиях совместности деформаций, обеспечивающих определение непрерывного поля перемещений упругого тела по полю деформаций.

В первой части сообщения построены обобщенные представления Чезаро, в 3D и 4D упругости, позволяющие с точностью до квадратичных полиномов определить поле перемещений через интегро-дифференциальные операторы от компонентов тензора-девиатора деформаций. Установлено, что квадратуры и для псевдовектора локальных поворотов в 3D, псевдотензора поворотов в 4D и для деформации изменения объема полностью определяются полем девиатора деформаций. Представлены условия существования перечисленных квадратур и новые уравнения совместности третьего порядка [1]. Предлагается для обсуждения анализ обобщенных формул Чезаро в 4D пространстве событий.

Во второй части рассмотрены две постановки задач теории упругости в напряжениях: первая — на основе уравнений совместности Папковича, вторая — на основе уравнений совместности Сен-Венана.

Уравнения совместности, вводятся как связи между дисторсиями или деформациями с помощью техники неопределенных множителей Лагранжа, тензоров второго порядка. Эти тензоры подпадают под определение функций напряжений, так как определяют напряжения, тождественно удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия. Тем самым устраняется известное несоответствие между числом уравнений и числом неизвестных при решении в напряжениях.

Показано, что формулы Чезаро в обеих постановках позволяют ввести в качестве вектора неопределенных множителей Лагранжа вектор частных решений неоднородных уравнений равновесия, удовлетворяющих векторной задаче Неймана.

Литература

1. Лурье С.А., Белов П.А. Обобщенные формулы Чезаро и уравнения совместности третьего порядка // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ., 4 (2023), 61-64.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДО НАЧАЛА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВОДОРОДНОЙ КОРРОЗИИ В СТАЛЬНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

В.В. Назаров

inmec130@mail.ru

УДК 539.376

Произведено моделирование процессов, оказывающих решающее влияние на зарождение коррозионных трещин. К таковым процессам относят накопление концентрации метана, развитие пористости, а также термическое состояние метана в микропорах обезуглероживаемой стали, которые могут привести к образованию коррозионных трещин.

Ключевые слова: полый цилиндр под внутренним давлением водорода, водородная коррозия, уравнение диффузии, уравнение термического состояния метана, пористость, критерий разрушения.

Воздействию водородной коррозии, в первую очередь, могут быть подвержены элементы конструктивных элементов, изготовленных из углеродистых и низколегированных сталей, применяющихся на аммиачных и нефтехимических заводах, на которых используют трубопроводы, теплообменники и сосуды под внутренним давлением, содержащие водород при высокой температуре. Кроме этого, водородная коррозия возможна при нагреве или охлаждении парогенератора при получении водяного пара высокой температуры и давления с использованием теплоты сгорания водород-кислородной смеси.

Суть водородной коррозии заключается в том, что в диапазоне высоких температур от 200 до 600°C водород способен вступать в химическую реакцию с карбидами железа. На границе соприкосновения со сталью молекулы водорода адсорбируют на атомы, которые затем диффундируют внутрь твердого тела. Из-за своего большого размера молекула метана не способна к диффузии в твердом теле, что приводит к накоплению и увеличению концентрации метана в микропорах. При достижении давлением метана предела прочности происходит локальное разрушение с образованием межкристаллитных трещин, которые способны приводить к хрупкому разрушению.

Для защиты от разрушительного воздействия водородной коррозии стараются предотвратить соприкосновение водорода с поверхностью стали. Одним из решений этого вопроса являются различные покрытия, позволяющие предотвратить адсорбцию молекул водорода на атомы. Но с течением времени эксплуатации эти покрытия могут подвергаться износу и повреждению. Для обнаружения микротрещин, вызванных водородной коррозией, на производствах используют различные методы неразрушающего контроля.

Предложен критерий разрушения, основанный на том, что трещины локализируются в круговой области, расположенной между внутренним граничным радиусом и средней линией [1], где сумма окружного напряжения, возникающего под воздействием давления водорода внутри полости цилиндра, и окружного локального напряжения, возникающего вокруг микропоры под воздействием давления метана, достигает предела кратковременной прочности.

При определении локальных напряжений и рассмотрена плоская деформация с цилиндрическими микропорами с одними и теми же уравнениями, что при определении обычных напряжений [2], но с другими граничными условиями.

Предложено уравнение термического состояния метана в микропоре, где учтены температурный диапазон химического превращения водорода и углерода в метан, концентрация метана и пористость.

В качестве характеристики плотности микропор рассмотрена пористость, равная относительному приращению поперечного сечения полого цилиндра.

В предположении того, что время, затрачиваемое на химическое превращение водорода и углерода в метан пренебрежимо мало, по сравнению со временем завершения процесса диффузии водорода внутрь полого цилиндра, для описания процесса накопления концентрации метана предложено использовать уравнение диффузии с одним начальным и двумя граничными условиями. Решение уравнения диффузии получено как приближенным методом, так и численно на компьютере, где пунктирные линии – приближенные решения, сплошные линии – численное решение в различные моменты времени. Сравнение средних концентраций с численным решением в точной постановке свидетельствует о высокой точности приближенного решения, которое представляется возможным использовать при анализе аналитических зависимостей между механическими характеристиками. Численное решение уравнения диффузии содержит один материальный параметр, который зависит от отношения граничных радиусов. Для его экстраполяции предложена двухпараметрическая степенная зависимость.

Таким образом, предложена модель, которая позволяет определить начальный момент разрушения в стальном полом цилиндра, находящегося в условиях водородной коррозии при высокой температуре, где отличительная особенность проявляется в месте зарождения трещины: в условиях водородной коррозии трещина зародится в области, ограниченной внутренним граничным радиусом и средней линией в поперечном сечении; при отсутствии водородной коррозии, когда только ползучесть – зарождение трещины следует ожидать на внешнем граничном радиусе, на котором окружное напряжение достигает предела кратковременной прочности.

Литература

1. *Shannon B.E., Jaske C.E.* Optimizing reformer tube life by employing a realistic condition based methodology // Nitrogen conference. (2006).
2. *Bhatnagar N.S., Gupta S.K.* Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep // Journal of the Physical Society of Japan, **27**:6 (1969), 1655–1661.

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ ДВУХ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ ПРИ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

В.В. Назаров

inmec130@mail.ru

УДК 539.376

Вычислены критические напряжения ползучести для титановых сплавов ВТ5 и ВТ6 при 650°С. На практике титановые сплавы используют до 600°С в охлаждаемых лопатках вентилятора газотурбинных авиационных двигателях. С повышением рабочей температуры следует ожидать более высокий КПД авиационного двигателя. С этой целью предстояло узнать, каким окажется ограничение на ползучесть по напряжению при повышении температуры еще на 50°С до 650°С. Вместе с этим, решен еще и другой вопрос, заключающийся в выборе аппроксимации экспериментальных данных, полученных в условиях установившейся ползучести и длительной прочности, а именно, достаточно ли двух материальных параметров или нужно рассматривать аппроксимацию с четырьмя материальными параметрами.

Ключевые слова: критическое напряжение, ползучесть, длительная прочность, аппроксимация экспериментальных данных, титановые сплавы.

При 650°С титановые сплавы проявляют развитые вязкие свойства в виде конечных предельных деформаций [1]. Следует добавить, что экспериментальные исследования титановых сплавов на ползучесть начали проводить только в текущем столетии, а до этого в прошлом веке механические испытания при высокой температуре проводились исключительно для стали, алюминиевых сплавов, меди и никелевых сплавов, в том числе, монокристаллических.

Чтобы вычислить критические напряжения ползучести, рассмотрена аппроксимация с четырьмя материальными параметрами [2], два из которых принимают физический смысл стартового напряжения ползучести (термин введен автором работы и означает максимальное напряжение, при котором скорость деформаций ползучести равна нулю) и предела кратковременной прочности (минимальное напряжение, при котором происходит мгновенное разрушение).

В качестве целевого условия рассмотрена суммарная погрешность в виде разности экспериментальных и аппроксимирующих значений, где материальные параметры были вычислены из минимизации той же самой суммарной погрешности.

Таким образом, подтверждена достоверность методики вычисления критических напряжений ползучести, при этом экспериментальные данные на установившуюся ползучесть и длительную прочность приводят почти к одинаковым значениям стартового напряжения ползучести и предела кратковременной прочности. Также установлено, что двухпараметрическая и четырехпараметрическая аппроксимации приблизительно одинаково хорошо аппроксимируют экспериментальные данные на установившуюся ползучесть и длительную прочность даже для материала с развитыми вязкими свойствами.

Литература

1. Назаров В.В. Кратковременная ползучесть титановых сплавов ВТ5 и ВТ6 при высокой температуре // Заводская лаборатория. Диагностика материалов, **81:6** (2015), 57–60.
2. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести // Механика твердого тела, 1 (1984), 86–92.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПОВТОРНО-ГРАДИЕНТНЫХ ТЕОРИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ И ТОНКИХ ТЕЛ

М.У. Никабадзе

munikabadze@yandex.ru

УДК 539.3, 517.9

Даны постановки начально-краевых задач (НКЗ) повторно-градиентных (ПГ) относительно тензора деформаций и вектора скорости теорий упругости и вязкоупругости, из которых получены трехмерные постановки НКЗ ПГ теорий упругих и вязкоупругих тонких тел, а из последних, применяя метод ортогональных полиномов выведены постановки НКЗ в момен-тах. Для однородных тел с кусочно-плоской границей даны расщепленные НКЗ.

Ключевые слова: градиентная теория, упругость, вязкоупругость, масштаб длины.

Введение. Градиентные относительно тензора деформаций теории упругости появились в литературе [1] вместе с аналогичными нелокальными теориями в роли аналитических средств, способных учитывать дальнедействующие силы взаимодействия в микроструктуре материалов и фиксировать экспериментально обнаруженные явления (такие как эффекты масштаба длины, дисперсия волн, локализация деформации, и т. д.), которые классическая теория не в состоянии учитывать (см., например, [2–6]). Градиентные относительно тензора деформаций теории не учитывают независимые вращения частиц материала, т. е. они неполярные по своей природе, и тензор моментных напряжений возникает в силу градиента вектора вихря сплошной среды.

В этом контексте особый интерес представляет важнейшая статья Миндлина [5], который построил ПГ относительно тензора деформаций теорию упругости для статики, а также для динамики [4, 6]. Несмотря на то, что в ней используется чрезмерное количество материальных констант, она является эталоном из-за своих концептуальных основ и способности улавливать эффекты масштаба длины. Тупин и др. [7], исследуя модели одно- и двухатомных решеток, указали на способность ПГ относительно тензора деформаций теории упругости интерпретировать атомную структуру вещества. Впоследствии Айфантис и его соавторы предложили градиентную теорию упругости первого порядка, в которой применялись только три материальных константы (два классических константы Ламе и параметр масштаба длины) [8–10]. Затем эта теория была распространена на динамику более высокого порядка [11,12], в которой требуется еще один дополнительный параметр масштаба длины. Эта модель, называемая моделью Айфантиса, использовалась для решения множества структурных проблем, показывая, что в вершинах трещин и ядрах дислокаций не возникают сингулярности деформации и что можно уловить дисперсионные эффекты при распространении волн [12]. Однако, как показали Лазар и Можен [13], особенности двойного тензора напряжений не могут быть устранены в силу упомянутой модели Айфантиса. Расширение вышеупомянутой градиентной относительно тензора деформаций теории первого порядка до градиентной относительно тензора деформаций теории второго порядка, характеризуемой четырьмя материальными константами – двумя константами Ламе и двумя параметрами масштаба длины было предложено в [14].

Аналогичная теория, называемая градиентной относительно тензора деформаций теории типа би-Гельмгольца, была независимо разработана Лазаром и др. [15,16] и применена к ряду задач о дислокации в бесконечной области с выдающимся результатом, заключающимся в том, что в ядре дислокации не возникает никаких сингулярностей и, конечно, эта модель материала обладает высокой способностью к регуляризации. Этот результат был в значительной степени подтвержден рядом приложений к проблемам взаимодействия дефектов [17], анализу дислокаций [15,16,18] и анализу дисклинации [19]. Однако не уделялось внимания граничным условиям и поверхностным эффектам, которые обычно характеризуют последние модели градиентной теории.

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального научного фонда Грузии им. Шота Руставели (проект № ФР-21-3926).

Никабадзе Михаил Ушангиевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, в.н.с. НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Роль градиента скорости и присущих им членов инерции более высокого порядка в уравнениях движения рассматривалась в серии исследований, посвященных волновому движению и связанным с ним явлениям дисперсии. Эта тема широко освещалась в литературе, но здесь мы ограничимся упоминанием следующих работ: [11,20–25], см. также обзорную статью [12] и литературу в ней. Из последней литературы следует, что модели инерции более высокого порядка способны реалистично описывать явления волновой дисперсии. В работах [11,24,25] авторы выдвинули концепцию «динамически согласованной» градиентной модели, а именно модели, наделенной градиентными улучшениями как жесткости, так и характеристик инерции, что позволяет устранять сингулярности поля деформации, возникающего, например, вблизи острой вершины трещины и реалистично описать дисперсионные характеристики распространения волны в неоднородной среде. Однако инерционные члены более высокого порядка, появляющиеся в основных уравнениях, были введены в этих исследованиях эвристически, и их связь с кинетической энергией осталась невыясненной.

В работах [26,27] — полезная информация о законах сохранения и баланса для градиентной эласто-динамики. Обзор исторического развития градиентной теории относительно тензора деформаций и вектора скорости более высокого порядка с соответствующими приложениями можно смотреть в [12]. Заметим, что изложенный выше краткий обзор по градиентным теориям заимствован в основном из работы [1]. Заметим также, что расширением работы [14] и, конечно, упомянутых выше работ являются работы [1,28], в которых изложены некоторые важнейшие вопросы ПГ относительно тензора деформаций и вектора скорости теории упругости. В частности, даны постановки краевых и НКЗ, которые и более общие постановки НКЗ, рассмотренные автором данной работы, далее применяются им при получении постановок краевых и НКЗ для ПГ теорий тонких тел.

О некоторых вопросах градиентных теорий. Найдены выражения для удельной энергии, получены определяющие соотношения и для некоторых трехмерных градиентных теорий упругости уравнения движения и равновесия [1,12,28,29], а также даны постановки НКЗ. При этом определяющие соотношения градиентных тел записываются с помощью тензорно-блочных матриц (ТБМ), а также с учетом канонических представлений [30,32] материальных тензорных объектов. Кроме того, статические граничные условия и уравнения движения и равновесия представлены в случае градиентных теорий дифференциальными ТБМ операторами. Для упомянутых выше дифференциальных ТБМ операторов некоторых градиентных теорий построены дифференциальные ТБМ операторы кофакторов, позволяющие расщепление НКЗ. Далее из трехмерных постановок НКЗ некоторых градиентных теорий упругости выведены постановки НКЗ для трехмерных градиентных теорий тонких тел при новой параметризации их областей. Из них получены постановки НКЗ в моментах относительно произвольных систем ортогональных полиномов и в том числе относительно системы полиномов Лежандра. Постановки НКЗ в моментах даны также для градиентных теорий упругих тонких тел относительно вектора перемещений. Как частные случаи рассмотрены несколько первых приближений этих постановок НКЗ. Для однородных тел с кусочно-плоской границей НКЗ расщеплены. Вышесказанное легко распространяется на теории других реологических тел, в том числе на градиентные теории высоких порядков, а также на линейные и нелинейные классические и микрополярные [31,32] градиентные теории вязкоупругих тел.

Литература

1. *Polizzotto C.* A second strain gradient elasticity theory with second velocity gradient inertia. Part I: Constitutive equations and quasi-static behavior // *Int. J. Solids Struct.* 2013. 50.
2. *Kröner E.* Elasticity theory of materials with long range cohesive forces // *Int. J. Solids Struct.* 1967. 3.
3. *Krumhansl J.A.* Some considerations on the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics // In: *Kröner, E. (Ed.), Mechanics of Generalized Continua.* Springer, Berlin. 1968.
4. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1964. 16.
5. *Mindlin R.D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 1965. 1.
6. *Mindlin R.D., Eshel N.N.* On first strain-gradient theories in linear elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 1968. 28.
7. *Toupin R., Gazis D.C.* Surface effects and initial stress in continuum and lattice models of elastic crystals // In: *Willis, R.F. (Ed.), Lattice Dynamics.* Pergamon Press, Oxford. 1963.

8. *Aifantis E.C.* On the role of gradients in the localization of deformation and fracture // *Int. J. Eng. Sci.* 1992. 30.
9. *Altan S., Aifantis E.* On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity // *Scr. Metall. Mater.* 1992. 26.
10. *Ru C.Q., Aifantis E.C.* A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity // *Acta Mech.* 1993. 101.
11. *Askes H., Aifantis E.C.* Gradient elasticity theories in statics and dynamics – a unification of approaches // *Int. J. Fract.* 2006. 139.
12. *Askes H., Aifantis E.C.* Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *Int. J. Solids Struct.* 2011. 48.
13. *Lazar M., Maugin G.M.* Nonsingular stress and strain fields of dislocations in first strain gradient elasticity // *Int. J. Eng. Sci.* 2005. 43.
14. *Polizzotto C.* Gradient elasticity and nonstandard boundary conditions // *Int. J. Solids Struct.* 2003. 40.
15. *Lazar M., Maugin G.M.* Dislocations in gradient elasticity revisited // *Proc. R. Soc. A: Math., Phys. and Eng. Sci.* 462. 2006.
16. *Lazar M., Maugin G.M., Aifantis E.C.* Dislocations in second strain gradient elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2006. 43.
17. *Zhang X., Jiao K., Sharma P., Yakobson B.I.* An atomistic and non-classical continuum field theoretic perspective of elastic interactions between defects (force dipole) of various symmetries and application to graphene // *J. Mech. Phys. Solids.* 2006. 54.
18. *Lazar M.* The fundamentals of nano-singular dislocations in the theory of gradient elasticity: dislocation loops and straight dislocations // *Int. J. Solids Struct.* 2013. 50.
19. *Deng S., Liu J., Liang N.* Wedge and twist disclinations in second strain gradient elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2007. 44.
20. *Altan B.S., Aifantis E.C.* On some aspects of the special theory of gradient elasticity // *J. Mech. Behav.* 1997. 8.
21. *Georgiadis H., Vardoulakis I., Lycotrafitis G.* Torsional surface waves in gradient elastic half-space. *Wave Motion.* 2000. 31 (4).
22. *Askes H., Swiker A.S.J., Sluys L.J.* A classification of higher-order strain gradient models – linear analysis // *Arch. Appl. Mech.* 2002. 72.
23. *Askes H., Bennet T., Aifantis E.C.* A new formulation and C0-implementation of dynamically consistent gradient elasticity // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2007. 72.
24. *Metrikine A.V., Askes A.* One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2002. 21.
25. *Askes H., Aifantis E.C.* Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes // *Phys. Rev.* 2009. 80, 195412 (8).
26. *Lazar M., Anastassiadis C.* Lie point symmetries, conservation and balance laws in linear gradient elastodynamics // *J. Elast.* 2007. 88.
27. *Agiarofitou E.K., Lazar M.* Conservation and balance laws in linear elasticity of grade three // *J. Elast.* 2009. 94.
28. *Polizzotto C.* A second strain gradient elasticity theory with second velocity gradient inertia. Part II: Dynamic behavior // *Int. J. Solids Struct.* 2013. Vol. 50. 24.
29. *Dell’Isola F., Sciarra G., Vidoli S.* Generalized Hooke’s law for isotropic second gradient materials // *Proc. R. Soc. A: Math., Phys. and Eng. Sci.* 2107. 465.
30. *Nikabadze M.U.* Topics on tensor calculus with applications to mechanics // *J. Math. Sci.* 2017. 225, No 1.
31. *Eringen A.C.* *Microcontinuum Field Theories. 1. Foundation and solids.* Springer-Verlag, N.Y.: 1999.
32. *Никабадзе М.У.* Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2023.

МАСШТАБНЫЕ ЭФФЕКТЫ МИКРОПОЛЯРНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С ЦЕНТРОМ СИММЕТРИИ

А.В. Романов

atomicra@ya.ru

УДК 531.6, 539.3, 519.6

Для исследования масштабных эффектов микрополярных материалов формулируется вариационный принцип Лагранжа и методом Ритца краевая задача приводится к системе линейных алгебраических уравнений в тензорно-блочном виде. Вариационная модель апробируется на аналитическом решении задачи о кручении цилиндрического микрополярного изотропного тела. Сравнение численных и аналитических решений с результатами экспериментов позволяют сделать вывод, что микрополярные среды демонстрируют существенные размерные эффекты при кручении и изгибе.

Ключевые слова: задача о кручении цилиндрического тела, микрополярная среда, метод конечных элементов, масштабный эффект, относительная жёсткость..

Вариационный принцип Лагранжа и метод Ритца позволяют привести краевую задачу микрополярной теории упругости к тензорно-блочной системе линейных алгебраических уравнений для материалов с центром симметрии произвольной анизотропии [1–6]:

$$DL(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = 0, \quad \begin{cases} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(1)q}^j, \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(2)q}^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\mathbb{K}_{(1)pq} & -\mathbb{K}_{(2)pq} \\ \mathbb{K}_{(3)pq} & \mathbb{K}_{(4)pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_{(1)q} \\ \mathbb{F}_{(2)q} \end{Bmatrix} \quad (1),$$

где \mathbb{K}_{pq} — тензорные блоки матрицы жёсткости; \mathbb{F}_q — узловые векторы массовых и поверхностных сил (пар); $\widehat{\mathbf{w}}^p, \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p$ — узловые векторы макроперемещений и микроповоротов, соответственно [3–6].

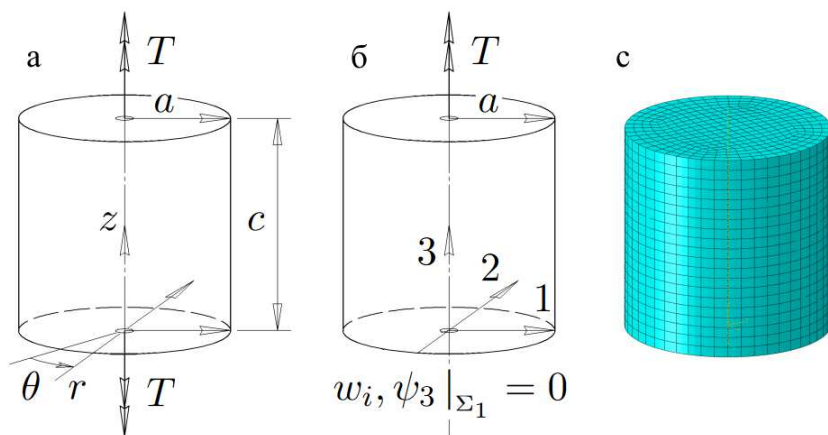


Рис. 1: Расчётная схема (а) к аналитическому решению 2 краевой задачи [7]; расчётная схема (б) к численному решению 3 краевой задачи (1)–(5); конечно-элементная схема (с)

Для апробации численного решения вариационной модели (1) рассмотрим краевую задачу о кручении цилиндрического микрополярного изотропного тела, под действием осевого крутящего

момента T (см. рис. 1) и определим параметр относительной жёсткости в рамках теории малых деформаций

$$\Omega = \frac{T}{\theta_m} \cdot \frac{\theta}{T} = \frac{u_\theta}{u_{\theta_m}}, \quad (2)$$

где θ_m, u_{θ_m} — параметры микрополярной теории упругости, которые определяются выражениями аналитического решения 2 краевой задачи [7] либо численным решением 3 краевой задачи (1), (3)–(5); θ, u_θ , — аналогичные параметры классической теории упругости.

Боковая поверхность цилиндрического тела $r = a$ является свободной $n_j p_{ji}|_{\Sigma_2} = 0, n_j \mu_{ji}|_{\Sigma_2} = 0$. На торцевой грани $z = c$ заданы поверхностные силы и пары, которые приводятся к паре с осевым моментом $T = 0.002$ Н·мм

$$T = \int_{\Sigma_{z=c}} (r p_{z\theta} + \mu_{zz}) d\Sigma, \quad (3)$$

где $p_{z\theta}, \mu_{zz}$ — поверхностные силы и пары, соответственно, определяемые из аналитического решения [7] приводятся к узловым силам $\mathbb{F}_{(1)q}^j$ и парам $\mathbb{F}_{(2)q}^j$

$$\mathbb{F}_{(1)q}^j = \int_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma d\Sigma \xi, \quad \mathbb{F}_{(2)q}^j = \int_{\Sigma_2} R^j N_q J_\Sigma d\Sigma \xi, \quad R^1 = R^2 = 0, \quad R^3 = \mu_{zz}, \quad (4)$$

$$S^1 = -\frac{x^2 p_{z\theta}}{r}, \quad S^2 = \frac{x^1 p_{z\theta}}{r}, \quad S^3 = 0, \quad r = \sqrt{x^I x^I}, \quad I = 1, 2,$$

где x^I — компоненты векторной функции изопараметрического отображения [3]. На торцевой

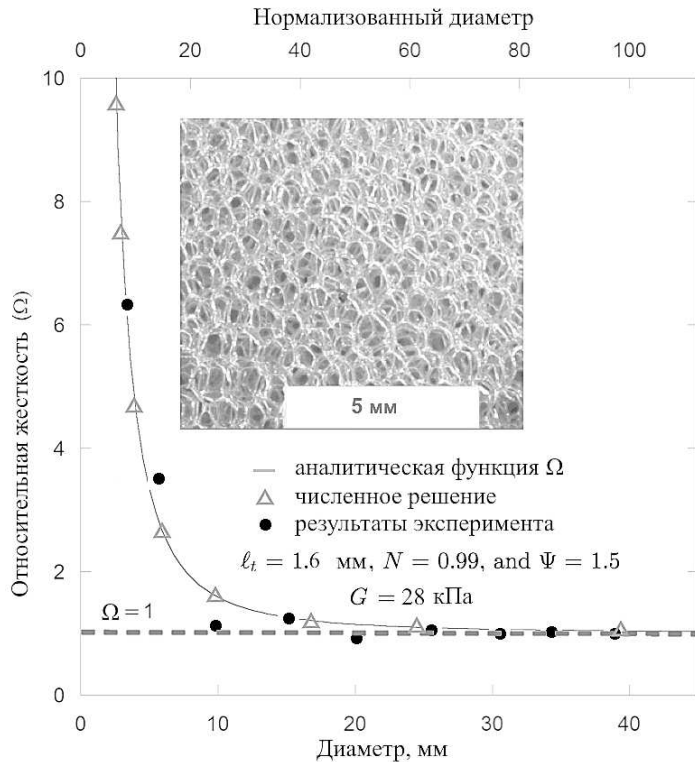


Рис. 2: Масштабный эффект при кручении образца из пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм. Относительная жёсткость Ω задана выражением (2); Δ — численное решение модели (1), рис. 1 б, с; \bullet — экспериментальные данные [8].

поверхности модели $z = 0$ заданы кинематические граничные условия

$$w_i, \psi_3|_{\Sigma_1} = 0, \quad (5)$$

которые дополняют граничные условия Неймана на свободной поверхности.

Численное решение задачи о кручении цилиндра из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм выполнялось по схеме (см. рис. 1 б, с) 8-узловыми конечными элементами (КЭ) с общим числом узлов $N = 7581$, а также 20-узловыми КЭ серендипова семейства с общим числом узлов $N = 29417$. Число уравнений для микрополярной теории упругости $6N$. Геометрические параметры варьировались от $a = 1.3$ мм, $c = 2.6$ мм до $a = 20$ мм, $c = 40$ мм. Материальные параметры $[\text{Н}/\text{мм}^2]$ $\lambda = 4.2E - 002$, $\mu = 2.8E - 002$, $\alpha = 1.379$; $[\text{Н}]$ $\gamma = -4.779E - 002$, $\delta = 7.168E - 002$, $\beta = -0.072$ соответствуют принятым параметрам $E = 7.28E - 002$ Н/мм², $\nu = 0.3$, $N = 0.99$, $\Psi = 1.5$, $l_t = 1.6$ мм, $l_b = 0$ мм в работе [8]. Для улучшения аппроксимации 8-узловыми КЭ и устранения эффекта запертия “locking effect” (в том числе для почти несжимаемых сред) применялась обобщенная схема редуцированного и селективного интегрирования [6].

Относительная жёсткость Ω , найденная из эксперимента [8], аналитического [7,8] и численного решения (1)–(5) представлена на рис. 2. Относительная погрешность между численным и аналитическим решением параметра Ω оказалась несущественна. Наблюдаемый по результатам эксперимента масштабный эффект хорошо согласуется с параметрами $N = 0.99$, $\Psi = 1.5$, $l_t = 1.6$ мм согласно работе [8]. Подобные результаты были получены и при изгибе.

Из сравнения описанных выше результатов можно сделать вывод, что математический аппарат вариационной модели (1)–(5) для микрополярной теории упругости реализован корректно, а обобщение метода селективного и редуцированного интегрирования [6] позволило уточнить численное решение. Таким образом проведенные исследования подтверждают существенные размерные эффекты при кручении (аналогично при изгибе) для микрополярных сред.

Литература

1. *Никабадзе М.У.* Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во МГУ имени М.В. Ломоносова, 2023.
2. *Eringen A.* Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids. New York: Springer-Verlag; 2012.
3. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально-изотропной среды. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 4. с. 35-39. [10.3103/S0027133022040045](https://doi.org/10.3103/S0027133022040045)
4. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае ортотропной среды. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. с. 68-72. [10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-68-72](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-68-72)
5. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости при неизотермических процессах. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 2. с. 64-68. [10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-12](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-12)
6. *Романов А.В.* Применение метода редуцированного и селективного интегрирования в задачах микрополярной теории упругости. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. с. 65-69. [10.55959/MSU0579-9368-1-65-1-8](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-1-8)
7. *Gauthier R, Jahsman W.* A quest for micropolar elastic constants. J Appl Mech 1975;42(2): 369–74. [10.1115/1.3423583](https://doi.org/10.1115/1.3423583)
8. *Rueger Z., Lakes R. S.* Experimental Cosserat elasticity in open cell polymer foam. // Philosophical Magazine, 96 (2), 93-111, January 2016. [14786435.2015.1125541](https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1125541)

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ
МЕМБРАНЫ ВНУТРИ НИЗКОЙ ЖЕСТКОЙ МАТРИЦЫ****Л.В. Фомин, А.Ф. Ахметгалеев, П.М. Третьяков, Д.Д. Махов***leonid1975@mail.ru, achmet206a@yandex.ru, petr.tretiakov@math.msu.ru, monyamail@gmail.com*

УДК 539.376

Проведено моделирование ползучести и длительного разрушения узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины нормального давления на мембрану от времени. Рассматриваются два вида контактных условий: идеальное скольжение мембраны вдоль стенок матрицы и прилипание мембраны к стенкам матрицы. Анализ постепенного разрушения и время до разрушения мембраны проводится при использовании кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова.

Ключевые слова: Ползучесть, кинетическая теория ползучести, мембрана.

Введение

Решение задачи о ползучесть вплоть до разрушения длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным давлением q при постоянной и кусочно-постоянной зависимостях $q(t)$ (где t - время) при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Л.М. Качанова [1], Одквиста [2], Сторакерса [3], Н.Н. Малинина [4] и др. Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В монографиях [4, 5] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы при учете различных форм матриц: клиновидной, криволинейной и прямоугольной при двух типах контактных условий на границе мембраны: идеальное скольжение и прилипание. В основном исследователями уделяется внимание вопросам ползучести мембраны, длительное разрушение не рассматривается.

Постановка задачи

Проводится исследование ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны толщины H_0 , закрепленной вдоль длинных сторон и расположенной внутри низкой жесткой матрицы прямоугольной формы, вплоть до разрушения мембраны (рис. 1). Ширина $2a$ и длина мембраны и матрицы L удовлетворяют неравенству $2a/L \ll 1$. Отношение высоты матрицы b к половине её ширины a в данной работе удовлетворяет неравенству $b/a < 1$ (низкая матрица).

Здесь рассматривается пропорциональная зависимость величины поперечного давления от времени $q(t) = \nu t$,

где $\nu = const$ - скорость возрастания величины давления q .

Ползучесть мембраны представляет собой в общем случае последовательность трех стадий: в первой стадии деформирование происходит в свободных условиях вплоть до касания поперечной стороны матрицы, во второй — при касании поперечной стенки матрицы вплоть до касания ее продольных стенок, в третьей стадии происходит одновременное касание продольных и поперечной стенок матрицы.

Целью данного исследования является определение зависимости времени до разрушения мембраны t от величины скорости возрастания поперечного давления ν , в случае разрушения на i -й стадии ($i=1, 2, 3$) эти параметры будем обозначать t_i^* и ν_i соответственно.

Определяющие и кинетические соотношения

Для описания ползучести мембраны при $t > 0$ с учетом накопления поврежденности материала вплоть до ее разрушения рассмотрим гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений

Работа выполнена при частичной поддержке госбюджетной НИР, номер ЦИТИС АААА-А19-119012990120-9. Фомин Леонид Викторович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Ахметгалеев Александр Фагимович, ведущий инженер, НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Третьяков Петр Максимович, ведущий инженер, НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Махов Денис Дмитриевич, ведущий инженер, НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

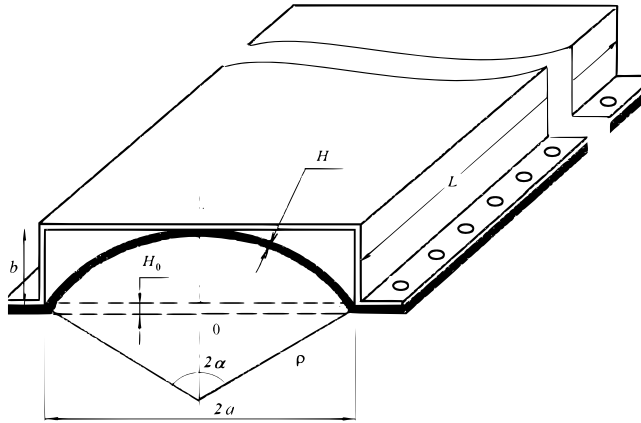


Рис. 1: Общий вид схемы деформирования мембраны в низкой матрице.

и девиаторов скоростей деформаций ползучести при учете несжимаемости материала в следующем виде (ω_i представляет собой аналог интенсивности напряжений σ_i): $\frac{dp_{ij}}{dt} = \frac{3}{2} \frac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega_u)^n} s_{ij}$, $p_{ij}(t=0) = 0$

где p_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести, A, n — постоянные величины соответствующей размерности.

Для учета накопления поврежденности в материале мембраны в процессе ползучести введем тензорный параметр поврежденности $\omega_{ij}(t)$, удовлетворяющий следующим уравнениям:

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{3}{2} F(\sigma_{ij}\omega_{ij}, t) s_{ij} \text{ при } s_{ij} > 0, \quad \frac{d\omega_{ij}}{dt} = 0 \text{ при } s_{ij} \leq 0,$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений.

Последующий анализ показывает, что отличной от нуля является только одна компонента $\omega_{\theta\theta}$ тензора поврежденности, что позволяет в процессе исследования принять поврежденность в скалярном виде ω . Для решения используются безразмерные переменные.

В результате исследования получены соотношения и уравнения, позволяющие провести расчет напряженно-деформированного состояния и накопления поврежденности на каждой из трех стадий деформирования мембраны, а также определить времена до разрушения с учетом двух видов контактных условий: идеальное скольжение и прилипание. Приведем эти уравнения ниже.

Первая стадия (свободное деформирование)

Рассмотрим элемент мембраны [4], принимая напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, заключаем, что рассматриваемый радиус кривизны ρ срединной поверхности мембраны во всех её точках один и тот же ($\rho = const$), т.е. срединная поверхность мембраны при её деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора 2α :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\alpha^{-1} - ctg\alpha} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left[1 - (m+1) B \int_0^t (\sigma_{\theta\theta})^k dt \right]^{-\frac{n}{m+1}},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q_1 \rho}{H_0 H_1} = \frac{\nu_1 t}{H_0} \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$\alpha(t=0) = 0, \quad \alpha_1 = \alpha(t=t_1) = \arcsin \left(\frac{2b}{1+b} \right),$$

где H_0 — исходная толщина мембраны, H_1 — толщина мембраны в течение первой стадии, α_1 — половина угла раствора мембраны в случае ее неразрушения в конце первой стадии в момент времени t_1 .

Скорость увеличения давления ν_1 , при котором мембрана разрушается в процессе первой стадии в момент времени t_1^* , определяется на основе соотношения, удовлетворяющему критерию разрушения

$$\omega_1^* = \omega(t_1^*) = 1 : \omega_1^* = \omega(t_1^*) = 1 - \left[1 - (m+1)B \int_0^{t_1^*} (\sigma_{\theta\theta})^k dt \right]^{-\frac{1}{m+1}} = 1$$

Идеальное скольжение мембраны вдоль сторон матрицы

Вторая стадия (при касании поперечной стенки матрицы вплоть до касания ее продольных стенок)

Вторая стадия процесса ползучести характеризуется следующими значениями параметров: $t_1 \leq t \leq t_2$, $0 \leq x_0 \leq 1 - b$, $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. При этом x_0 - длина контактной части мембраны с поперечной стенкой матрицы, ω_2 - поврежденность материала мембраны в конце второй стадии деформирования в случае неразрушения мембраны.

$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_2(x_0)\sqrt{3}}{D_1(x_0)} \frac{A}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left[(1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t (\sigma_{\theta\theta})^k dt \right]^{-\frac{n}{m+1}}$, $x_0(t = t_1) = 0$, $x_0(t = t_2) = 1 - b$, $\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{\nu_2 t \rho}{H_0 H_2(x_0)}$, где $D_2(x_0)$ - длина исходного участка деформирования, состоящая из длины контактной части x_0 и длины свободной части мембраны (цилиндрической формы). $D_1(x_0)$ - приращение длины исходного участка вследствие деформации. В проведенном исследовании получены выражения для $D_1(x_0)$ и $D_2(x_0)$ на основе геометрических соотношений. Зависимость $H_2(x_0)$ определяется и получена авторами из условия несжимаемости материала мембраны. Скорость увеличения давления q_2 , при котором мембрана разрушается в процессе второй стадии в момент времени t_2^* , определяется на основе соотношения, удовлетворяющему критерию разрушения :

$$\omega_2^* = \omega(t_2^*) = 1 : \omega_2^* = \omega(t_2^*) = 1 - \left[1 - (m+1)B \int_{t_1}^{t_2^*} (\sigma_{\theta\theta})^k dt \right]^{-\frac{1}{m+1}} = 1 .$$

Здесь учитывается поврежденность, накопленная в мембране к окончанию первой стадии.

Третья стадия (одновременное касание продольных и поперечной стенок матрицы)

Третья стадия ползучести мембраны характеризуется параметрами: $t_2 \leq t \leq t_3^*$, $1 - b \leq x_0 \leq x_0^*$, $\omega_2 \leq \omega \leq 1$, где x_0^* - определяется положением мембраны в момент разрушения. Также отметим, что в соответствии с геометрическими соотношениями в процессе деформирования $1 - x_0 = b - y_0$, где y_0 - длина контактной части мембраны с поперечной стенкой матрицы:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{b + \pi/2 - 1 + (2 - \pi/2)x_0\sqrt{3}}{2 - \pi/2} \frac{A}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left[(1 - \omega_2)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_2}^t (\sigma_{\theta\theta})^k dt \right]^{-\frac{n}{m+1}},$$

$$x_0(t = t_2) = 1 - b, \quad x_0(t = t_3^*) = x_0^*,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{\nu_3 t}{H_0} (1 - x_0),$$

$$\omega^* = \omega(t_3^*) = 1 - \left[(1 - \omega_2) - (m+1)B \int_{t_2}^{t_3^*} (\sigma_{\theta\theta})^k dt \right]^{-\frac{1}{m+1}} = 1$$

Прилипание мембраны вдоль сторон матрицы

В настоящей работе также получены расчетные соотношения для случая прилипания мембраны к продольной и поперечной сторонам матрицы. В случае постепенного прилипания материала мембраны к матрице принимается, что ее контактная часть не деформируется, а свободная часть представляет собой часть дуги окружности.

В качестве примера рассматривается ползучесть и длительное разрушение мембраны, изготовленной из хромомолибденовой стали 2.15Cr-1Mo steel и деформируемой при 600°C внутри жесткой матрицы высотой . Определены времена до разрушения в случаях идеального скольжения и прилипания мембраны к стенкам матрицы, построены зависимости характерных параметров задачи от времени.

Заключение

Исследована ползучесть вплоть до разрушения узкой мембраны внутри низкой прямоугольной матрицы при пропорциональной зависимости величины нормального давления от времени.

Рассмотрены два типа контактных условий: идеальное скольжение мембраны относительно матрицы и прилипание мембраны к матрице. Для описания процесса накопления поврежденности в материале мембраны использована кинетическая теория Ю.Н. Работнова. Показано, что в данной задаче параметр поврежденности материала имеет скалярный характер. Решение системы определяющего и кинетического уравнений проводится при последовательности первой, второй и третьей стадий. В результате решения системы определяющего и кинетического уравнений получены значения параметра поврежденности, накопленного в течение каждой стадии деформирования, а также величины времени до разрушения мембраны.

Авторы посвящают эту статью памяти заведующего лабораторией ползучести и длительной прочности НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, профессора, доктора физико-математических наук Локощенко Александра Михайловича.

Литература

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 312 с.
2. Odqvist F.K.G. Mathematical theory of creep and creep rupture. Second edition Oxford at the Clarendon Press. 1974. 200 p.
3. Storakers B. Finite creep of a circular membrane under hydrostatic pressure. Acta Polytechnica Mechanical Engineering Series Scandinavica. 1969. №44. Stocholm. 107 pp.
4. Малинин Н.Н. Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение. 1986. 216 с.
5. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит. 2016. 504 с.

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОРИЕНТАЦИИ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ АНИЗОТРОПИИ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Д.В. Христич, Д.В. Праведников

dmitrykhristich@rambler.ru, zumastral@mail.ru

УДК 539.3

Предложена программа экспериментов, позволяющих найти ориентацию главных осей анизотропии в материале. Программа включает три опыта по одноосному сжатию образцов кубической формы. По результатам выполненных экспериментов определена ориентация главных осей анизотропии в образце.

Ключевые слова: анизотропные материалы, упругие свойства, эксперимент.

В работе [1] разработаны варианты определяющих соотношений нелинейной теории упругости, описывающих зависимости между напряжениями и деформациями. Эти соотношения можно записать для изотропных и анизотропных материалов различных типов. Число параметров нелинейных моделей существенно зависит от типа упругой анизотропии материала. Поэтому для разработки экспериментальных программ по конкретизации материальных констант и функций, входящих в определяющие соотношения, требуется предварительно определить тип начальной упругой анизотропии материала.

При бесконечно малых деформациях и постоянной температуре предложенные определяющие соотношения асимптотически стремятся к закону Гука

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} \quad \text{или} \quad \mathbf{S} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, \mathbf{C} — постоянный тензор упругих податливостей четвертого ранга, \mathbf{S} — тензор напряжений, \mathbf{N} — тензор упругости материала. Структура тензоров \mathbf{N} и \mathbf{C} для материала, относящегося к определённому типу анизотропии, одинакова.

В общем случае тензор \mathbf{C} обладает внутренней симметрией: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ — и поэтому имеет 21 независимую компоненту. Для каждого типа анизотропного материала

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Христич Дмитрий Викторович, д.ф.-м.н., профессор, Тульский государственный университет (Тула, Россия)
Праведников Даниил Вячеславович, аспирант, Тульский государственный университет (Тула, Россия)

характерна своя структура тензора упругих податливостей. Поэтому тип начальной упругой анизотропии материала можно определить из экспериментов при бесконечно малых деформациях. Во многих работах предлагаются различные методы определения типа анизотропии упругого материала. Однако для их применения требуется знать 21 компоненту тензора упругости \mathbf{N} или тензора упругих податливостей \mathbf{C} в некоторой системе координат.

Предварительное определение типа анизотропии и, следовательно, симметрии материала позволяет сократить количество экспериментов, необходимых для нахождения всех компонент тензора \mathbf{N} или \mathbf{C} . В работах [2, 3] разработана программа экспериментов, позволяющая перед определением упругих констант провести классификацию материалов по кристаллографическим системам. Такая система экспериментов позволяет идентифицировать тип симметрии упругих свойств анизотропного материала.

Базовым в программе является эксперимент по определению положения главных осей анизотропии в материале. В соответствии с определением В.В. Новожилова [4] главными осями анизотропии называются главные оси тензора напряжений, возникающих в анизотропном материале в ответ на чисто объёмную деформацию.

В качестве объекта исследования рассматривается кубический образец представительных размеров, рёбра которого направлены по осям системы координат, которую в дальнейшем будем называть лабораторной. Чисто объёмное деформирование трудно реализовать в опытах. В работах [2, 3] показано, что главные оси анизотропии материала можно определить как главные оси тензора деформаций, возникающих в материале при гидростатическом сжатии.

Существенным недостатком эксперимента на гидростатическое нагружение является сложность измерения всех шести компонент тензора деформаций кубического образца. Поэтому предлагается заменить опыт по гидростатическому нагружению тремя согласованными экспериментами на сжатие.

Рассмотрим возможность определения главных осей анизотропии из трёх экспериментов на сжатие. Тензор \mathbf{S}_0 , описывающий гидростатическое напряжённое состояние, можно представить в виде суммы трёх тензоров

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3, \quad (2)$$

где $\mathbf{S}_1 = -t\vec{e}_1\vec{e}_1$, $\mathbf{S}_2 = -t\vec{e}_2\vec{e}_2$, $\mathbf{S}_3 = -t\vec{e}_3\vec{e}_3$, каждый из которых описывает сжатие вдоль одной из осей лабораторной декартовой системы координат $Oxyz$ с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Каждому тензору напряжений $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ соответствует тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$, связанный с ним законом Гука (1):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{S}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{S}_2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{S}_3. \quad (3)$$

В силу линейности закона Гука с учётом формул (2) и (3) получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{S}_0 = \mathbf{C} \cdot \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3. \quad (4)$$

Аддитивность представления (4) позволяет заменить опыт по всестороннему сжатию тремя экспериментами по одноосному сжатию, в которых возможно измерить все компоненты тензора деформации образца. Если выполнить три таких одноосных эксперимента, то главные оси анизотропии материала можно будет определить как главные оси тензора деформаций (4), который описывает отклик образца на всестороннее сжатие.

Компоненты тензоров деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ выражаются через измеряемые деформации образцов. Информация о деформациях образца в каждом эксперименте регистрируется шестью датчиками в направлениях $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_6$. Схемы расположения датчиков относительно лабораторной системы координат показаны на рис. 1.

Главные оси тензора (4) являются главными осями анизотропии материала. Направления главных осей анизотропии материала задаются единичными собственными векторами $\vec{a}_i, i = 1, 2, 3$, тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Предложенная программа из трёх экспериментов реализована, и по результатам измерений определены направления главных осей анизотропии материала в образце.

Литература

1. Sokolova M., Khristich D. Nonlinear constitutive relations for anisotropic elastic materials // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series, **973** (2018), 012018.

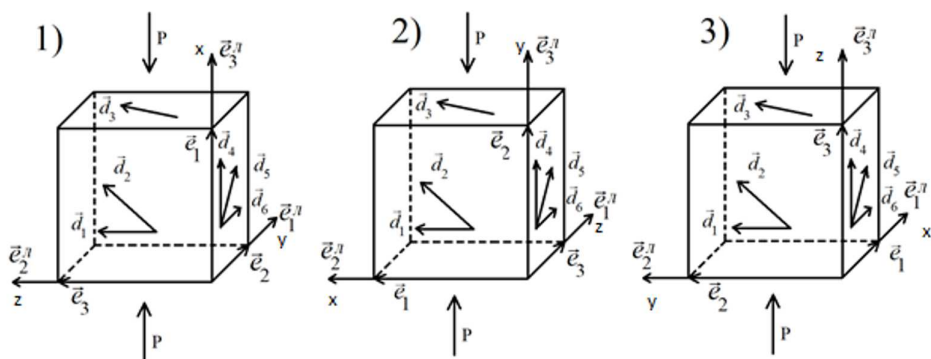


Рис. 1: Положение датчиков на образцах в экспериментах по одноосному сжатию

2. Соколова М.Ю., Христинич Д.В. Программа экспериментов по определению типа начальной упругой анизотропии материала // Прикладная механика и техническая физика, **56**:5 (2015), 205–213.

3. Христинич Д.В., Сухоруков Д.А., Соколова М.Ю. Численная симуляция экспериментов по определению типа начальной анизотропии упругого материала // Учёные записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки, **163**:2 (2021), 214–225.

4. Новожиллов В.В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958.

Секция 9

Механика и математическое моделирование (механика жидкости, газа и плазмы)

РЕАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Р.Р. Айдагулов

rustem.aidagulov@math.msu.ru

Уравнения механики сплошных сред состоят из уравнений сохранения массы, импульса и энергии. Для описания диссипации (потери импульса, энергии) вводят дополнительные члены с дифференцированием более высокого порядка. При этом меняется тип уравнений с гиперболического на параболический, даже при малости коэффициента перед введенным членом. Это приводит к существенному изменению дисперсионных соотношений, к возможности распространения возмущений со скоростями до бесконечности и к некоторым парадоксальным выводам.

В качестве примера рассмотрим введение в уравнения импульсов вязкости по закону Навье-Стокса. Введение этого члена оправдывается их выводом статистической механикой из уравнений Больцмана. Однако, уравнения Больцмана не всегда правильно описывают даже разреженный газ. В уравнениях Больцмана считается, что изменение импульса частиц происходит только при соударениях частиц в зависимости от угла между их скоростями. Гравитационные силы убывают пропорционально квадрату от расстояния. Вероятность нахождения двух частиц на расстоянии r пропорционально квадрату расстояния. Соответственно, эффект гравитационного взаимодействия между частицами примерно одинаков на любом расстоянии. Это значит, что уравнения Больцмана не работают в космологии несмотря на то, что среднее расстояние между звездами примерно в миллион раз больше их размеров. В плотной среде избытки импульсов и энергии передаются в основном без перемещения молекул от своего среднего положения через их колебательное движение, не учитываемое в осредненных уравнениях.

Автором получены осредненные уравнения непосредственно из уравнений Ньютона для большого числа взаимодействующих между собой частиц. При взаимодействии сохраняется импульс и энергия. Поэтому в осредненных уравнениях на месте диссипативных членов стоит интенсивность обмена импульсами (и энергией) между разными участками среды на некотором расстоянии и с некоторым запаздыванием по времени. Первоначально автор собирался вывести вид функции интенсивности обмена исходя из потенциала сил взаимодействия Леннарда-Джонса

между молекулами. Узнав, что этот потенциал получен исходя из грубого представления нейтральных молекул как статических конденсаторов путем осреднения по их взаимной ориентации, вывел формулу взаимодействия из динамического представления, что электроны не статичны, а быстро вращаются вокруг ядра. Соответственно, расстояние между отталкивающимися электронами преимущественно (по времени) получается большим, чем между ядром и электронами. Этот подход приводит к потенциалу взаимодействия, убывающему пропорционально кубу расстояния (а не шестому степени). Любопытно, что примерно через год после публикации в новостях науки появилась статья с экспериментальным подтверждением этого вывода. Функции интенсивности обмена импульсами получены из других соображений, на подобии нормального распределения суммы большого числа случайных величин.

Перечислим особенности решений полученных гиперболических уравнений.

1. Появляется возможность слабых тангенциальных разрывов скоростей, что приводит к появлению застойных зон в течении жидкости.

2. На границе области течения не ставится дополнительное условие отсутствие скольжения, скорость скольжения вычисляется.

3. Из уравнений получается решение Пуазейля для стационарного течения, когда градиент скоростей мал. Для течений в трубках малого диаметра градиент скоростей мал только при очень малых перепадах. Скорость течения и расход нелинейно зависит от перепада давления. В тонких трубках течение жидкости существенно отличается от течения Пуазейля. Отношение расхода к расходу в течении Пуазейля растет обратно пропорционально радиусу при уменьшении радиуса трубки. Зависимость этого отношения от радиуса трубки не монотонное. Минимальное значение достигается при диаметре трубки, равной 9 радиусам нелокальности и равен 0.59.

4. Существенно отличаются распространение волн в среде и резонансные частоты.

5. Решение хорошо описывается уравнениями Навье-Стокса только при больших размерах по сравнению с радиусом нелокальности и в то же время при малых Рейнольдсах. Соответственно, исследование на устойчивость течения Пуазейля исходя из уравнений Навье-Стокса бессмысленно. Отметим, что согласно уравнениям Навье-Стокса устойчивость течения между плоскостями нарушается при числах Рейнольдса больше 500 000, а в цилиндрической трубке течение всегда устойчиво. Это противоречит наблюдениям неустойчивости в цилиндрической трубе начиная с чисел Рейнольдса 50 000.

6. Характер кругового течения существенно отличается от решений уравнений Навье-Стокса. В решениях Навье-Стокса вязкие силы отсутствуют в случае пропорциональности орбитальной скорости удалению от центра вращения (постоянная угловая скорость). В реальных уравнениях обмен импульсами приводит к появлению силы, стремящийся уравнять орбитальные скорости. Это объясняет кривые вращения в галактиках. Попытка объяснить поведение кривых вращения привела к вводу темной материи. Чилийский эксперимент 2012 г. привело к выводу отсутствия темной материи в большой области нашей галактики (в пределах несколько тысяч световых лет вокруг солнца).

7. Закон кривых вращения наблюдается и при сливе воды в ванной. Орбитальная скорость вращения почти постоянна, не зависит от расстояния до образовавшейся воронки. Направление вращения определяется от ориентации ванной. Скорость течения в сторону воронки больше со стороны близкой к выходной трубе. Это определяет в какую сторону вращаться в зависимости от ориентации. Быстро вращается не вся жидкость а только небольшой поверхностный слой (скорость убывает экспоненциально по глубине). Такое поведение нельзя объяснить в рамках решения уравнений Навье-Стокса.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИССА**В.Д. Бейбалаев, А.А. Аливердиев***aliverdi@mail.ru, kaspj_03@mail.ru*

УДК 517.958

Доклад посвящен численному решению начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса. Построены явная и неявная разностные схемы, аппроксимирующие краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса по координате. Доказаны теоремы об условной и безусловной сходимости явной и неявной разностных схем соответственно [1].

Ключевые слова: дробные производные, тепломассоперенос, фрактальные среды.

В качестве примера рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса по координате и движущимся гауссовским источником тепла. Установлено, что процесс распределения температуры замедляется при переходе к дробным производным, что характерно для сред с фрактальной структурой. Как известно из многочисленных работ, замедление процесса диффузии во фрактальных средах настолько существенно, что физические величины начинают изменяться медленнее, чем в обычных средах, и этот эффект можно учесть только с помощью интегро-дифференциальных уравнений, содержащих дробная производная [2, 3].

В дальнейших работах мы собираемся исследовать третью начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса по координате. На этом этапе получена априорная оценка решения задачи в дифференциальной форме.

Литература

1. *Beybalaev V. Aliverdiev A.* Numerical solution of the boundary value problem for the heat equation with fractional Riesz derivative // Thermal Science and Engineering. V. 6 (2). 2082. [10.24294/tse.v6i2.2082](https://doi.org/10.24294/tse.v6i2.2082)
2. *Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A., Yakubov A.Z., Ninalalov S.A., Amirova A.A.* Mathematical Model of Heat Conduction for a Semi-Infinite Body, Taking into Account Memory Effects and Spatial Correlations // Fractal Fract. 2023. V. 7. P. 265. [10.3390/fractalfract7030265](https://doi.org/10.3390/fractalfract7030265)
3. *Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A., Hristov J.* Transient Heat Conduction in a Semi-Infinite Domain with a Memory Effect: Analytical Solutions with a Robin Boundary Condition. Fractal Fract. 2023, 7, 770. [10.3390/fractalfract7100770](https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770)

ВНУТРЕННИЕ СТРУКТУРЫ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**А.Н. Богданов***bogdanov@imec.msu.ru*

Рассмотрены математические модели нелинейных окolorезонансных колебаний газа в различных областях. Показано, что учёт даже слабой вязкости и теплопроводности среды позволяет предложить математические модели, полностью описывающие устанавливающиеся при заданных внешних условиях режимы колебаний. Определены условия развития автоколебаний.

Ключевые слова: газовая динамика, ударные волны, вязкость и теплопроводность в газовой динамике, окolorезонансы, релаксационные колебания, автоколебания, обыкновенные дифференциальные уравнения, малый параметр.

Бейбалаев Ветлугин Джабраилович, к.ф.-м.н., доцент, Дагестанский государственный университет, ИНГВЭ ОИВТ РАН (Махачкала, Россия)

Аливердиев Абутраб Александрович, д.ф.-м.н., профессор, Дагестанский государственный университет, ИНГВЭ ОИВТ РАН (Махачкала, Россия)

Богданов Андрей Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, в.н.с., НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Первоначально при моделировании газодинамических течений с ударными волнами было принято выделять эти особенности в поле течения как поверхности разрыва, само же течение газа считать невязким и нетеплопроводным. Такого приближения оказалось вполне достаточно для решения многих прикладных задач газовой динамики [1].

В последствии учет вязкости и теплопроводности в уравнениях, моделирующих газодинамический процесс, позволил получить новые важные результаты в изучении газодинамических процессов. Весьма показательным примером такого рода является моделирование околорезонансных колебаний — периодических изменений параметров среды (процесса), то медленных, то очень быстрых, близких к скачкообразным. Колебания такого рода обнаруживают себя, например, в каналах различного устройства при близости частоты внешних воздействий на среду канала к частоте возможных собственных ее колебаний в этом устройстве — в таком случае в нем возникают и распространяются по нему периодические скачки сжатия — ударные волны. При изучении этих процессов оказалось весьма полезным ввести ударные волны не как разрывы, а как очень быстрые, но непрерывные (сглаженные вязкостью и теплопроводностью) изменения параметров течения — также как при моделировании структуры ударной волны.

Другое название процессов, сочетающих медленные изменения с быстрыми — релаксационные колебания. Математическим аппаратом для моделирования процессов такого рода (в предположении малой вязкости, что соответствует реальным свойствам газовых сред) служат системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. В простейшем случае это одно обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при второй производной.

Известным примером системы, совершающей релаксационные колебания, служит осцилятор Ван-дер-Поля [2]. Заметим, что колебания в нем происходят и в отсутствие внешних воздействий — являются автоколебаниями. Поведение такой системы под действием слабой периодической силы может быть очень сложным, подчас неожиданным: неединственность периодического решения, очень большое (в сотни раз) различие периодов устанавливающихся колебаний и вынуждающей силы, сходный со случайным характер происходящих изменений системы [3]. Получить явные решения соответствующих уравнений, как правило, не удастся. Общая математическая теория таких процессов в настоящее время содержит классические результаты доказательства существования и единственности решения [4], априорные оценки решений однородных уравнений [5, 6], анализ на основе методов символической динамики [7, 8], приближенные методы построения решений с использованием сращиваемых асимптотических разложений [2, 9].

Нелинейные околорезонансные колебания в газе являются одной из важных проблем газовой динамики, поскольку развитие резонансных явлений может представлять серьезную угрозу работе механических систем [10].

Одним из методов изучения газодинамических задач такого рода служит рассмотрение слабых возмущений, распространяющихся вдоль характеристик акустических семейств [11, 12]. Нелинейность процесса учитывается оставленными в уравнении акустической характеристики членами первого порядка малости по амплитуде возмущения. Получающееся уравнение можно проинтегрировать и определить время движения рассматриваемого возмущения от одного конца канала до другого. Граничные условия на концах канала дают связь между величиной амплитуды возмущения в момент отхода от конца канала и в момент возвращения на него. Условие периодичности процесса позволяет ввести малый параметр (малое отклонение времени прохождения канала возмущением от периода собственных колебаний газа в канале) и разложить амплитуду вернувшегося возмущения в ряд Тейлора по степеням этого параметра. Таким образом выводится обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитуды распространяющегося по каналу возмущения. Это уравнение при некоторых условиях удастся проинтегрировать [12]. Найденные интегральные кривые описывают только непрерывные изменения состояния газа, разрывы нужно вводить, используя дополнительные соображения.

В работе [13] рассмотрены высокочастотные околорезонансные нелинейные колебания газа, движущегося по каналу переменного сечения. Нелинейность процесса учтена удержанием членов второго порядка малости в выражениях для искомых параметров устанавливающегося в канале процесса. При решении получающихся уравнений применено приближение геометрической акустики. Подстановка решения в граничные условия на концах канала, учет условия периодичности позволили получить интегро-дифференциальное уравнение для амплитуды уста-

новившихся в канале колебаний газа. Анализ полученного уравнения проводился качественно при пренебрежении интегральным членом уравнения. Разрывы в решении вводились согласно выведенным условиям на скачке.

Среди работ, посвященных экспериментальному исследованию нелинейных околорезонансных колебаний, следует отметить работу [14]. Особый интерес данные этой работы представляют в связи с развитой для их интерпретации теорией, опубликованной несколько ранее [15]. Колебания создавались в газе, покоящемся в канале с прямолинейными стенками, колеблющимся у одного из концов канала поршнем. Другой конец канала мог быть открытым или закрытым. Было показано, что при приближении круговой частоты колебаний поршня к некоторым критическим значениям амплитуда устанавливающихся в канале колебаний возрастает, а сами они приобретают скачкообразный характер — появляются ударные волны. При этом в случае открытого конца канала амплитуда колебаний заметно, на порядок, выше, чем в случае закрытого конца. При теоретическом исследовании [15] удалось выяснить, что анализируя колебания в канале с открытым концом следует учитывать члены третьего порядка малости. Этот результат был обобщен в работе [13], где показано, что третье приближение надо использовать, если коэффициенты отражения на концах канала имеют противоположные знаки (неоднородные граничные условия).

Формально задача околорезонансных колебаний газа подходит под теорию, развитую для релаксационных колебаний [2-9], и может изучаться ее методами. Заметим, что поскольку нелинейные околорезонансные колебания имеют место при внешнем воздействии, соответствующая система уравнений будет неавтономна. Это обстоятельство значительно усложняет анализ процесса околорезонансных колебаний.

Получающееся уравнение околорезонансных колебаний газа довольно сложно. Рассмотренные в [5] примеры уравнений с малым параметром при второй производной проще, в частности, все они однородные. Теория, развитая в [5] для уравнений общего вида, позволяет установить существование при определенных условиях у решения краевых слоев вблизи граничных значений и внутренних слоев вблизи точек нарушения гладкости решения. В [6] эта теория была распространена на случаи наличия у решения внутренних ударных слоев — наиболее интересный вид колебаний в рассматриваемой здесь задаче. В газовой динамике такие ударные слои соответствуют ударным волнам.

Уравнение околорезонансных колебаний в канале переменного сечения имеет вид [16]

$$\epsilon a_0 J'' + a_1 J J' + a_2 J' + a_3 J + a_4 F = \delta \sin \tau,$$

где J — характеризует амплитуду колебания, a_i — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров среды, ϵ — малый параметр, характеризующий влияние вязкости и теплопроводности среды, δ — амплитуды вынуждающей силы, τ имеет смысл времени, $F' = J$.

Приближенное аналитическое решение уравнения колебаний строится методом сращиваемых асимптотических разложений [2], этот путь представляется автору наиболее интересным.

Имеется также возможность численного интегрирования выведенного уравнения околорезонансных колебаний. При этом возникает возможность обойти различные необходимые при аналитическом исследовании упрощения, часто значительно сужающие общность полученных результатов. Не требуется специальных приемов для введения разрывов, что само по себе — довольно сложная проблема. Заметим также, что ранее использовавшаяся для этого процедура допускала известный произвол в выборе местоположения скачка, и, следовательно, в определении его амплитуды. Кроме того, направление перехода в скачке выбиралось по косвенным данным в соответствии с теоремой Цемплена [17] (физически реализуются только скачки уплотнения). Построенные решения соответствуют колебаниям на конце трубы, отвечающим сумме падающей и отраженной волн возмущений. В обычной газовой динамике такие колебания содержат только скачки уплотнения [18]. Если же условия отражения таковы, что, например, скачок уплотнения отражается в виде скачка разрежения большей амплитуды, то решение может содержать скачки разрежения. При таком подходе вопросы определения амплитуды и местоположения скачка решаются непосредственно при интегрировании уравнения, описывающего процесс колебаний. Направление перехода в быстром переходе (скачке) задается знаком коэффициента при старшей производной в уравнении колебаний.

Особый интерес представляет случай $a_0 a_1 > 0, a_3 < 0$, поскольку при этом в канале возникают релаксационные (содержащие скачки) колебания. Такие колебания не исчезают и после прекращения действия вынуждающей силы, т.е. являются автоколебаниями. Примером могут служить околорезонансные колебания в экзотермической среде [16].

Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
3. Cartwright M.L., Littlewood J.E. On nonlinear differential equations of the second order: 1. The equation, large// J. London Math. Soc. 1945. -V.20.
4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.2 М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 415 с.
5. Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. М.: Мир, 1988. 247 с.
6. Howes F.A. Boundary-interior layer interactions in nonlinear singular perturbation theory// Memoirs of the American Mathematical society. 1978. V.29, № 203.
7. Flaherty J.E., Hoppensteadt F.C. Frequency entrainment of a forced van der Pol oscillator// Stud. in Appl. Math.-1978.V.18, № 1.
8. Levi M. Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations// Memoirs of the American Mathematical society. 1981. V.32, № 244.
9. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
10. Ганиев Р.Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2013. 592 с.
11. Крайко А.Н., Ну А.Л. О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах// ПММ. 1980. Т.44, Вып. 1, С. 77-88.
12. Ну А.Л. Нелинейные субрезонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления// Изв. АН СССР.МЖГ. 1988. №2.
13. Егорушкин С.А. Околорезонансные колебания газа, движущегося в канале переменного сечения// Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4, с. 107-115.
14. Sturtevant B. Nonlinear gas oscillations in pipes. Part 2. Experiment// J. Fluid Mech. 1974. V.63, pt. 1.
15. Jimenez J. Nonlinear gas oscillations in pipes. Part 1. Theory// J. Fluid Mech. 1973. V.59, № 1, P. 23-46.
16. Богданов А.Н. Релаксационные колебания неравновесного газа, заполняющего канал переменного сечения// ПМТФ. 1994, № 3. С. 22-33.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
18. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

ИНТЕГРАЛ КРОККО И ЗАКОНЫ СТЕНКИ ДЛЯ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

И.И. Вигдорович
vigdorovich@imec.msu.ru

УДК 532.526

Исследуется асимптотическая структура и устанавливаются законы подобия для сверхзвукового турбулентного пограничного слоя.

Ключевые слова: сверхзвуковой турбулентный пограничный слой, законы подобия.

Мы строим асимптотическую теорию сжимаемого турбулентного пограничного слоя на плоской пластине, в которой усредненные профили скорости и температуры получены как точные асимптотические решения уравнений пограничного слоя, для замыкания которых используются функциональные соотношения общего вида, связывающие турбулентное касательное напряжение и турбулентный поток энтальпии с градиентами усредненной скорости и энтальпии [1]. Рассматривается пристеночная область пограничного слоя, состоящая из вязкого и логарифмического подслоев. Решение строится в виде разложений по малому параметру ϵ , который пропорционален числу Маха, образованному по динамической скорости и скорости звука на стенке.

В вязком подслое возможны три характерных режима течения, которые возникают при малом, умеренном и большом отрицательном тепловом потоке на стенке. Для первых двух режимов течение в вязком подслое в первом приближении несжимаемое, безразмерный профиль скорости такой же, как в несжимаемой жидкости, а профиль температуры есть суперпозиция профиля температуры в пограничном слое несжимаемой жидкости и пограничном слое на теплоизолированной стенке. В вязком подслое на сильно охлаждаемой пластине сжимаемость существенна [2].

Получен интеграл Крокко в логарифмической области, который в нулевом приближении по ϵ дает известное уравнение Вальца [3], но в отличие от него хорошо описывает зависимость температуры от скорости при любом тепловом потоке на стенке. Законы стенки для скорости и температуры также построены как разложения по ϵ . Главный член разложения для скорости совпадает с формулой Ван Дрифта [4], однако закон стенки содержит еще слагаемое порядка единицы, наличие которого и объясняет расхождение формулы Ван Дрифта с экспериментальными и расчетными данными. Формулировка закона стенки для температуры учитывает тот факт, что в случае охлаждаемой пластины профиль температуры имеет в логарифмическом подслое локальный максимум. При этом универсальные законы стенки для скорости и температуры, которые позволяют преобразовать профили этих величин в известные профили для несжимаемой жидкости в логарифмической области, существуют только при малом и умеренном тепловом потоке. В случае сильно охлаждаемой стенки такой универсальности нет, и положение логарифмического участка зависит от двух дополнительных параметров: безразмерного теплового потока и молекулярного числа Прандтля [2].

Наряду с постоянной Кармана и турбулентным числом Прандтля в логарифмической области, которые известны для течения несжимаемой жидкости, теория содержит три новые универсальные постоянные, которые также характеризуют гидродинамические и тепловые процессы в инерционной области. Они определены из сопоставления с данными прямого численного моделирования для профилей скорости и температуры.

Литература

1. *Vigdorovich I.I.* Supersonic turbulent boundary layer on a plate. I. Closure relations // *Phys. Fluids*, **35**: 11 (2023), 115122.
2. *Vigdorovich I.I.* Supersonic turbulent boundary layer on a plate. II. Flow in the wall region and the Crocco integral // *Phys. Fluids*, **35**: 11 (2023), 115123.
3. *Walz A.* Strömungs- und Temperaturschichten. Braun Verlag, Karlsruhe (1966). English trans.: *Boundary Layers of Flow and Temperature*, MIT Press, Cambridge, MA, (1969).

Работа выполнена при поддержке РФФ (№ 22-21-00315)

Вигдорович Игорь Ивлианович, д.ф.-м.н., в.н.с., НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия)

4. Van Driest E.R. Turbulent boundary layer in compressible fluids // J. Aeronaut. Sci. **18** (1951), 145–160.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА АННИГИЛЯЦИИ В СОБСТВЕННОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А.Н. Голубятников, С.А. Захаров
golubiat@mail.ru, zakchar5000@gmail.com

УДК 534.13

Предлагается модель взаимной аннигиляции симметричной системы частиц и античастиц, переходящей в тепловое излучение, в собственном гравитационном поле. Решена задача однородного движения такой системы как в рамках общей теории относительности, так и в ньютоновской механике.

Ключевые слова: математическое моделирование, аннигиляция, гравитационное поле, теория относительности, ньютоновская механика.

В астрофизике имеются оценки энергии реликтового излучения, возникшего в ранней Вселенной, по предположению, в результате аннигиляции первоначальных частиц и античастиц [1]. Имеет смысл рассмотреть стадию симметричной аннигиляции системы, имеющей одинаковые по модулю плотности зарядов, а также одинаковые скорости и массовые плотности вещества. Суммарное электромагнитное поле отсутствует, а взаимодействие осуществляется только посредством общего гравитационного поля. Кроме того, пренебрегается давлением, среда рассматривается как горячая пыль.

Оказывается, задачу об однородном движении такой системы проще решить в рамках общей теории относительности, чем в ньютоновской механике. Уравнения Эйнштейна (с учетом удвоенности источника поля) и уравнение потери массы имеют вид

$$G^{ij} = 8\pi G T^{ij} = 16\pi G \rho U(S) u^i u^j, \quad u_i u^i = 1, \quad \nabla_i (\rho u^i) = -\alpha \rho^2,$$

где ρ — плотность массы покоя, u^i — 4-скорость, $U(S)$ — удельная энергия, S — удельная энтропия, α — постоянная аннигиляции. Скорость света $c = 1$, G — гравитационная постоянная. В принципе, можно было бы учесть теплопроводность и диффузию [2].

Нулевая дивергенция тензора энергии-импульса T^{ij} с учетом второго закона термодинамики дает

$$a^i = u^k \nabla_k u^i = 0, \quad T u^k \nabla_k S = \alpha \rho U > 0.$$

Здесь a^i — ускорение и T — абсолютная температура. Если $U = 1 + U_0 \exp(S/c_0)$, то $U = 1 + c_0 T$, где c — удельная теплоемкость. Таким образом, потеря массы приводит к необратимому росту энтропии и тепловой энергии излучения.

В качестве примера рассмотрим задачу Фридмана об однородном сферическим-симметричном движении облака пыли, конечного или неограниченного. Группы симметрии решения в зависимости от вида движения шестимерны, сохраняющие соответственно трехмерные гиперболоид, плоскость или сферу. Используется форма уравнений поля Мизнера–Шарпа в синхронно-сопутствующих координатах с метрикой

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2 \left(\frac{d\xi^2}{1 + \delta \xi^2} + \xi^2 d\omega^2 \right),$$

где $d\omega^2$ — метрика единичной сферы, $a(\tau)$ — масштабный фактор, характеризующий закон движения смеси по радиусу $r = a(\tau)\xi$, $\delta = 1, 0, -1$ для указанных движений: по Кеплеру гиперболического, параболического или эллиптического типов. Считается, что $u^i = \delta_0^i$, а ρ и T — функции τ .

Для пыли уравнения имеют вид

$$1 - \frac{2GE}{r} + r_\tau^2 - \frac{(1 + \delta\xi^2)r\xi^2}{a^2} = 0, \quad E_\tau = 0, \quad E_\xi = 8\pi\rho U a^3 \xi^2,$$

$$(\rho a^3)_\tau + \alpha \rho^2 a^3 = 0.$$

Или

$$\dot{a}^2 - \frac{2GE}{a\xi^3} = \delta, \quad E = E_1 \xi^3, \quad E_1 = \frac{8\pi}{3} \rho U a^3 = \text{const.}$$

Ограничимся параболическим случаем. Решение уравнений для a дает

$$a = \left(\frac{9GE_1}{2} \right)^{1/3} |\tau|^{2/3}.$$

Для $\rho(\tau)$ получим уравнение Риккати, частное решение которого имеет вид $\rho = 1/(\alpha|\tau|)$, пригодный для отрицательных и положительных τ . Общее решение при $\tau < 0$ дает $\rho > 0$ только при временах, относительно малых по модулю, причем плотность имеет минимум и к нулю снова возрастает. При $\tau > 0$ решение, наоборот, справедливо при больших временах и монотонно убывает. Плотность энергии ρU ведет себя как $|\tau|/\rho$. Аналогично исследуются и остальные случаи движения.

Обратимся к ньютоновской механике. В этом случае для однородного движения в сферических координатах, выбирая подходящие масштабы измерения: $\alpha = 1$, $8\pi G/3 = 1$, получим

$$r = a(t)\xi, \quad M = \frac{\rho a^3}{G}, \quad \ddot{a} + \frac{M}{a^2} = 0, \quad \frac{\dot{M}}{M} + \rho = 0,$$

где M масса смеси, отнесенная к кубу лагранжевой переменной ξ . Третье соотношение — уравнение движения и последнее — аннигиляционное изменение массы. Для вычисления удельной силы тяжести $\nabla_i \varphi$ здесь использовано уравнение Пуассона $\Delta \varphi + 3\rho = 0$.

Уже эта система позволяет определить движение $a(t)$ и изменение плотности $\rho(t)$. Отметим, что она инвариантна относительно преобразований Галилея и совпадает с уравнениями радиального движения материальной точки переменной массы.

Для качественного анализа полезно понизить порядок, введя относительную скорость $A(t) = v/r = \dot{a}/a$. Тогда система сводится к уравнениям

$$\dot{A} + A^2 + \rho = 0, \quad \dot{\rho} + \rho(\rho + 3A) = 0$$

или к уравнению первого порядка

$$\frac{d\rho}{dA} = \frac{\rho(\rho + 3A)}{A^2 + \rho}$$

Последнее показывает, что при движении влево от прямой $A = 0$, отвечающей равновесию, интегральная кривая всегда пересекает линию $\rho + 3A = 0$, на которой реализуется минимум плотности. Затем плотность неограниченно растет.

Для учета термодинамических параметров надо еще ввести уравнение притока тепла. Это можно сделать неоднозначно. Здесь мы используем полученное уравнение общей теории относительности, определяющее диссипацию, связанную с потерей массы. Положим

$$\frac{dU}{dt} = \alpha \rho U$$

Отсюда, зная $\rho(t)$, можно легко определить удельную внутреннюю энергию U , рост которой связан с тепловым излучением.

Литература

1. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967.
2. Голубятников А.Н, Украинский Д.В. К проблеме концентрации энергии. Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2023. Т. 322. С. 83-93. enddocument

ПОСТРОЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВЫХ МОДЕЛЕЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

М.А. Гузев

guzev@iam.dvo.ru

УДК 539.3

Рассмотрена схема минимального расширения классической модели упругой сплошной среды на пути отказа от условия совместности Сен-Венана для деформаций, что приводит к неевклидовой модели сплошной среды.

Ключевые слова: неевклидова модель, функция напряжений, самоуравновешенные напряжения..

В механике сплошной среды хорошо известно, что шесть компонент классического тензора деформаций ε_{ij} выражаются только через три компоненты вектора перемещений, поэтому функции ε_{ij} не могут быть произвольными и должны удовлетворять дополнительным ограничениям, которые называются условиями совместности для деформаций. Эти условия сводятся к тому, что тензор Римана-Кристоффеля, вычисленный для метрического тензора деформации $g_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$, обращается в нуль. С геометрической точки зрения это означает, что пространство, соответствующее данной метрике, является евклидовым. Однако было замечено [1], что классические компоненты деформаций ε_{ij} не совпадают в общем случае с деформациями E_{ij} , определяемыми через реологическое соотношение между компонентами поля напряжений и деформаций (в [1] поля E_{ij} называются эффективными). Поэтому тензор Римана-Кристоффеля, вычисленный для эффективного метрического тензора деформации $G_{ij} = \delta_{ij} - 2E_{ij}$, в общем случае не равен нулю, т.е. пространство для описания эффективных деформаций становится неевклидовым. С физической точки зрения свойство неевклидовости определяется наличием в материале дефектных структур, например, дисклинаций, точечных дефектов и других. Для описания дефектов требуется вводить различные неевклидовы геометрические структуры: тензор Римана, тензор кручения и тензор неметричности (см., например, [2]). Запас вводимых функций достаточно велик, поэтому представляет интерес построение неевклидовых моделей механики сплошных сред, для которых набор таких функций является минимальным.

С этой целью рассмотрим случай плоско-напряженной конфигурации, тогда уравнения равновесия Коши для твердого тела записываются в виде:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Решение системы уравнений (1) строим через функцию напряжений Эйри F :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial x^2}, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^1 \partial x^1}, \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^1 \partial x^2}. \quad (2)$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института прикладной математики ДВО РАН (тема № 075-00459-24-00).

Гузев Михаил Александрович, д.ф.-м.н., академик РАН, Институт прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, Россия)

Тензор Римана–Кристоффеля определяется через тензор Риччи, отличие которого от нуля для малых эффективных деформаций задается через функцию несовместности R :

$$\frac{R}{2} = \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}. \quad (3)$$

В классической теории упругости $R = 0$, что соответствует выполнимости условий совместности для деформаций (условия Сен-Венана). Переход к неевклидовой модели сплошной среды означает, что R от нуля. Реологическое соотношение между компонентами поля напряжений и эффективными деформациями оставим линейным как в классической теории упругости (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij}, \quad (4)$$

где λ, μ – феноменологические параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера. Из (2)–(4) следует уравнение для F :

$$\Delta^2 F = \frac{\mu}{1-\nu} R, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \nu)}. \quad (5)$$

Поскольку уравнение (5) является линейным, то его решение F можно представить в виде суммы классической функции напряжений F_{cl} и дополнительного вклада F_{noncl} : $F = F_{cl} + F_{noncl}$. При этом

$$\Delta^2 F_{cl} = 0, \Delta^2 F_{noncl} = \frac{\mu}{1-\nu} R. \quad (6)$$

Соотношения для неевклидовой модели записываются в окончательной форме, если задать функцию несовместности R . В предположении квадратичной зависимости внутренней энергии среды от термодинамических переменных было получено уравнение для R в следующем виде [3]:

$$\Delta^2 R = \gamma R, \quad (7)$$

где параметр γ характеризует размер внутренней пространственной структуры. Перейдем к безразмерным переменным: $x^i \sqrt[4]{\gamma} \rightarrow x^i, \sigma_{ij} \rightarrow \mu \sigma_{ij}, F \rightarrow F \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}}, R \rightarrow R \frac{1-\nu}{\sqrt{\gamma}}$. Тогда (6), (7) записываются в виде:

$$\Delta^2 F_{noncl} = R, \Delta^2 R = R. \quad (8)$$

Из (8) и первого уравнения (6) следует, что

$$\Delta^2 F_{noncl} = F_{noncl}, R = F_{noncl}. \quad (9)$$

Используя (9), запишем компоненты поля напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \tau_{11} + T_{11}, \tau_{11} = \frac{\partial^2 F_{cl}}{\partial x^2 \partial x^2}, T_{11} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2 \partial x^2}, \\ \sigma_{22} &= \tau_{22} + T_{22}, \tau_{22} = \frac{\partial^2 F_{cl}}{\partial x^1 \partial x^1}, T_{22} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^1 \partial x^1}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \tau_{12} + T_{12}, \tau_{12} = -\frac{\partial^2 F_{cl}}{\partial x^1 \partial x^2}, T_{12} = -\frac{\partial^2 R}{\partial x^1 \partial x^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда видно, что структура поля внутренних напряжений складывается из классического поля упругих напряжений и неклассического поля напряжений, вычисляемого через след тензора Риччи R . Прочитывая соотношение (10) справа-налево, получаем, что внутренняя геометрия материала, определяемого через R , зависит от его напряженного состояния. Если внутренняя геометрия является евклидовой, т.е. $R = 0$, то она не отличается от геометрии внешнего наблюдателя и исследователь работает в рамках классической теории упругости. Таким образом, совпадение внутренней геометрии материала с евклидовой геометрий внешнего наблюдателя является дополнительной гипотезой, постулируемой в классической теории упругости, а расширение теории выполнено на пути отказа от этой гипотезы.

Нетрудно проверить поля напряжений (2) являются самоуравновешенными [4]: сила, действующая на выбранную область среды, равна нулю и суммарный момент сил внутренних напряжений обращается в нуль, хотя локально поля напряжений отличны от нуля. Это позволяет

использовать полученные соотношения для описания остаточных напряжений в инженерных конструкциях. Данная идея была реализована при обработке данных эксперимента по измерению остаточных напряжений в прямоугольных металлических образцах [5] и для материалов с цилиндрической симметрией [6].

Литература

1. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. Седов Л.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // УМН. 1965. Т. 20, N 5(125), 121-180.
3. Гузев М. А. Структура кинематического и силового поля в Римановой модели сплошной среды // ПМТФ. 2011. Т. 52, N 3, 39-48.
4. Gurtin M. E. A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1963. V. 13, N 1, 321-329.
5. Гузев М. А., Горбунов А. В., Неевклидова модель сплошной среды и описание остаточных напряжений // Вестник Инженерной школы ДВФУ. 2020. Т. 2, N 43, 3-12.
6. Liu W., Guzev M., Qi Ch. Non-Euclidean model for description of residual stresses in planar deformations // Applied Mathematical Modelling. 2021. V. 90, N 13, 615-623.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ И ВЫТЕСНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-АНОМАЛЬНЫХ ФЛЮИДОВ В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ

Ш. Каюмов, Ш.С. Зиядуллаева, Э.А. Хусанов, У.Б. Каюмов

kayumovmatematic@mail.com, joziba2004@mail.ru

УДК 532.546, 517.519

Доклад посвящен математическому моделированию задачи вытеснения одного флюида другими, имеющими структурные свойства с разными физическими характеристиками в трехпластовой изолированной системе. При этом выбран режим одновременного продвижения границ разделов флюидов в этих пластах. Алгоритм решения предусматривает использование методов прямых и потокового варианта разностной прогонки. При необходимости предложено использовать метод тепловых источников с дальнейшим применением методов типа Рунге-Кутты. Отмечено, что предложенный способ построения моделей можно использовать в практических случаях.

Ключевые слова: вытеснение, трехпластовая система, изолированные пласты, подвижные границы, структурные флюиды, балансовые уравнения, алгоритмы, метод прямых, разностные схемы, поток, прогонка, источники.

Известно что задача фильтрации нелинейных флюидов в многослойных пористых средах изучены многими исследователями [1-4]. При этом, особый интерес представляет, процесс вытеснения флюидов, когда их фильтрационные характеристики различные и часто несопоставимые.

Задача фильтрации газа в упруговодонапорном режиме изучен в [5] и при определенных допущениях, задача сведена к задачам непрерывно действующего теплового источника. Если фильтрация имеет нелинейный характер, который зависит от свойства фильтруемого флюида, а также от структуры самых пластов, тогда возникает необходимость определения положения неизвестных границ подвижных зон. Когда многослойный пласт гидродинамически связан, то с

Каюмов Шукур, к.ф.-м.н., доцент кафедры “Высшая математика”, Ташкентский государственный технический университет (Ташкент, Узбекистан)

Зиядуллаева Шохида Садуллаевна, старший преподаватель кафедры “Высшая математика”, Ташкентский государственный технический университет (Ташкент, Узбекистан)

Хусанов Элбек Абдурасул угли, ассистент кафедры “Высшая математика”, Ташкентский государственный технический университет (Ташкент, Узбекистан)

Каюмов Умар Баходирович, студент, Ташкентский государственный экономический университет (Ташкент, Узбекистан)

началом отбора флюида могут происходить перетоки из одного пласта в другие и прогнозирование одновременного движения границы раздела между фазами для всех слоистых структур практически невозможно.

В работе [6] в двухслойном гидродинамически связанном пласте использована многопараметрическая модель для нелинейных задач с учетом различных законов фильтрации. Когда пласты гидродинамически несвязанны, управление границами разделов осуществляется дополнительными условиями, регулирующими процесс отбора флюида из пластов. В обоих случаях, возникает задача управления подвижными границами, обеспечивающими наибольший объем отбора флюида при равномерном движении границ раздела. Следовательно, задача фильтрации аномальных или структурированных флюидов в многослойных пористых средах является актуальной задачей при конструировании математических моделей.

Рассмотрим трехслойный, гидродинамически несвязанный пласт, где с началом, при $t_0 > 0$ происходит, процесс вытеснения одного флюида другими. Пусть в области $D = \sum_{i=1}^3 D_i$ где $D_i = D_{1i} + D_{2i}$, в начале координат пластов закачивается флюид с легкими компонентами, имеющими весовые расходы $Q(t) = \sum_{i=1}^3 q_i$. Предположим, что вытесняемые фазы обладают структурными свойствами, и, так как вязкость вытесняющей фазы намного меньше чем вязкость вытесняемого флюида, то можно ими пренебречь. Считая, что фильтрация в пласте происходит плоско-параллельно, то математическую модель этой задачи, можно записать следующей начально краевой задачей:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_i}{\mu_i} \cdot \chi(|\Delta u_i| \cdot \beta_i) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = M_i(x_i, t) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad t_0 > 0, \quad x \in D, \quad i = \overline{1, 3} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u_i(x, 0) = u_{i0} \quad (2)$$

а также условиями на подвижной границе

$$\tilde{\sigma}_i \cdot m_i \cdot \frac{\partial R_i}{\partial t} = \frac{k_i}{m_i} \cdot \chi(|\Delta u_i| \cdot \beta_i) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=R_i+0} \quad (3)$$

и уравнением баланса вытесняемой фазы

$$W_{0i}(t) = \tilde{\sigma}_i \cdot m_i \cdot \pi \cdot h_i \cdot R_i^2 \cdot \frac{u_i}{u_0} \cdot \frac{T_0}{T_i} \quad (4)$$

с дополнительными условиями

$$\tilde{\sigma}_i \cdot m_i \cdot \frac{\partial R_{1i}}{\partial t} = \tilde{\sigma}_2 \cdot m_2 \cdot \frac{\partial R_{2i}}{\partial t} \quad (5)$$

Здесь $k_i, \mu_0, m_i, \tilde{\sigma}_i, h_i, T_0, T_i, u_{i0}$ известные параметры пластов и флюидов [2-4]. R_i, R_{1i}, R_{2i} — неизвестные подвижные границы раздела, W_{Hi} — неизвестный объем вытесняемой фазы в определенных случаях. Можно предположить, что

$$W_H(t) = \sum_{i=1}^3 W_{0i}(t) \quad (6)$$

Использование функции $\chi(\xi)$ в уравнениях (1)-(3) дает возможность обобщить задачи вытеснения для флюидов структурными свойствами [6,7] и повышает степень важности исследования для многослойных пластов. В этих случаях к задаче (1)-(5) добавится и условие непрерывности функций и потоков на границах подвижных зон. При этом количество неизвестных границ может увеличиваться многократно.

Условие (5) сформулировано для достижения равномерности движения границы раздела в процессе управления. Практически это значит, что в каждый временной шаг (промежуток времени) вытеснение границы фазы происходит одновременно и параллельно по всем пластам. Задача (1)-(6) решается численными методами [8,9]. При этом строится итерационный процесс

по нелинейным членам уравнений, а также метод прямых по переменной t , метод потокового варианта сеточной прогонки [9-10] по пространственным переменным x .

Алгоритм вычислительного процесса выглядит следующим образом:

1. По заданным нулевым приближениям дебитов $q_i^0(t)$, из формулы (4) определяется u_i , на границе расширяющейся области D_{1i} ;
2. Используя условия (3) как граничные, проводится решение сеточной задачи (1);
3. Если фильтрация структурная, то в области D_{2i} определяются свои внутренние границы возмущений;
4. Равномерность продвижения контакта обеспечивается по (5);
5. Проверяется выполнение условий итерации, если они выполнены, то производится переход к другому временному шагу.

Расчеты можно вести до времени $t = T$, когда происходит полное вытеснение по всему фронту для всех пластов.

Задачу (1)-(6) можно решить и другим методом [2,10], если при определенных допущениях уравнение (1) представимо в виде

$$u_i(x, t) = u_{ik} + \frac{M_i}{4dk_i \cdot h_i \cdot \chi_i \cdot \pi} \int_0^t \frac{Q_{i0}(\tau)}{t - \tau} e^{-\frac{x^2}{4\chi_i(t-\tau)}} d\tau \quad (7)$$

где $x > 0$. Это решение принадлежит области $R_i(t) < x$. Интенсивность фиктивных источников $Q_{i0}(t)$ пока неизвестна.

После определенных преобразований задача (1)-(7) примет вид

$$u_i = \tau_i + u_{ik} + \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{q_{it}(\tau)}{t - \tau} e^{-\frac{\varphi_i(t)}{t-\tau}} d\tau \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = B_i \varphi_i \int_0^t \frac{q_{it}(\tau)}{(t - \tau)} e^{-\frac{\varphi_i(t)}{t-\tau}} d\tau \quad (9)$$

$$u_i(t)\varphi_i(t) = f_i(t), \quad f_i(t) = u_i \sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i \quad (10)$$

где $\varphi_i(t) = \frac{S_i R^2}{\chi \pi T_0}$, $q_i(t) = \frac{Q_{i0}(t)\mu}{k_i R_i u_{i0}}$.

При $f_i(t) = k \cdot t$ можно построить автомодельное решение $\varphi_i(t) = k_i \cdot t$.

В дальнейшем эти задачи, можно решать численно, разбивая отрезок $(0, t)$ точками t_k , и в каждом интервале (t_{k-1}, t_k) дифференциальные уравнения (9) решать методом Рунге-Кутты, а интегралы квадратурной формулой трапеции.

Вышеприведенную методика, построение математической модели процесса фильтрации флюидов в трехслойном пласте и алгоритмы ее решений, можно применять при разработке эксплуатации трехслойных месторождений, имеющих аналогичные физические характеристики как в этой задаче.

Литература

1. Ширковский А.И., Задора Т.И. Добыча и подземное хранение газа. — М: "Недра". — 1974 г. — 262с.
2. Каюмов Ш. Арзикулов Г.П. Хаитов Т.О. Об одном способе моделирования задачи вытеснения нелинейных флюидов. // Сб. Материалов республиканской научной конференции "Актуальные проблемы математики и прикладной математики в эпоху глобализации". Ташкент. — 2021 г. — 74-78с.
3. Хейн А.Л. Гидродинамический расчет подземных хранилищ газа. — М: "Недра". — 1974 г. — 262с.
4. Мухидинов Н., Алимов И. Расчет основных гидродинамических показателей разработки многопластовых месторождений газа при упруговодонапорном режиме. // Сб. Вопросы вычислительной и прикладной математики. — вып. 26. — 1974 г. — 67-83с.
5. Чарный И.А., Мухидинов Н.М. Изменения пластового давления при разработки газового месторождения в неограниченном водоносном пласте. // Журнал "Газовая промышленность". — 1962 г. № 11. — 32-36с.

6. *Shukur Kayumov, Golib Arzikulov, Sherzad Bekchanov and Shohida Zuyadullayeva.* A multiparameter mathematical model for the problem of nonlinear filtration of fluids in two-layer media. // Journal of Physics: Conference Series 2697(2024)012042 [10.1088/1742-6596/2697/1/012042](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2697/1/012042).

7. *Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Е., Зиядуллаева Ш.С. Каюмов У.Б.* Математическое моделирование задачи фильтрации структурированных флюидов в связанных трехслойных средах. // Материалы республиканской научно-технической конференции "Актуальные проблемы математического моделирования, алгоритмизации и программирования". — Ташкент. — 2023 г. — 64-68сс.

8. *Каюмов Ш., Мардонов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б.* Математическое моделирование структурированных флюидов в связанных пластах. // Сборник трудов международной научной конференции. "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". — Воронеж. — 2020 г. — 934-942сс.

9. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference schemes. — New York-Basel: Marcel Dekker, Inc. — 2001. — 761р.

10. *Каюмов Ш.* Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. — ТГТУ. — Ташкент. — 2017 г. — 274с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ, ВПЛОТЬ ДО ФРАГМЕНТАЦИИ, ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗРЫВА ВВ

А.Б. Киселев, Д.П. Логинов

bogdanov@imec.msu.ru

УДК 539.3

Рассматривается задача необратимого динамического деформирования и разрушения, вплоть до фрагментации, осесимметричных толстостенных металлических оболочек под действием нагрузки, обусловленной взрывом заряда конденсированного ВВ, заполняющего оболочку. Расчеты хорошо согласуются с экспериментами.

Ключевые слова: динамическое разрушение, фрагментация, взрыв.

1. Постановка задачи

Исследуется задача динамики деформирования и разрушения металлической камеры при взрыве заряда ВВ в её полости. В качестве примера рассматривается конструкция, представляющая собой две полусферы равной толщины, контактирующих между собой, но не скрепленные по торцам. Камера заполнена ВВ. Внутри и снаружи камеры находится воздух при нормальных условиях.

Определяющие уравнения для оболочки состоят из уравнений движения, уравнения неразрывности. Поведение материала описывается уравнениями модели упругопластического течения типа Прандтля-Рейса с кинематическим упрочнением [1-4]. При численном интегрировании уравнений модели используется «процедура приведения на поверхность текучести» [1]. Подробное её обоснование дано в [5].

Для шаровой составляющей тензора напряжений используется уравнение с учетом температуры. Выписывается уравнение для плотности внутренней энергии U , которая складывается из складывается из упругой энергии E и диссипации D .

Воздух — идеальный газ. Для давления в продуктах детонации используется уравнение в форме Джонса-Уилкинса-Ли (JWL) [6].

Работа поддержана Междисциплинарной научно-образовательной школой Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса», направление Н5 «Космическое материаловедение».

Киселев Алексей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Логинов Даниил Павлович, ПАО «Авиакомплекс имени С.В. Ильюшина» (Москва, Россия)

В качестве критерия начала макроразрушения (образования поверхностей разрушения) используется энтропийный критерий предельной удельной диссипации [2, 3], хорошо себя зарекомендовавший при решении многих динамических задач ([2-4] и др.). Рассматриваемая задача решается в адиабатическом приближении, когда термическая диссипация и диссипация континуального разрушения отсутствуют: $d_T = 0$, $d_F = 0$. Учитывается только механическая диссипация d_M .

2. Математическое моделирование фрагментации оболочки

Для расчета числа фрагментов и их распределения по массам используется модифицированное вероятностное распределение типа Вейбулла [7] и предположение о том, что на разрушение расходуется половина накопленной в теле упругой энергии, а другая её половина идёт на кинетическую энергию «доразлета» осколков.

В спектре фрагментов выделяются две морфологические совокупности (см. [10, 11]): крупные фрагменты A , образованные магистральными трещинами и содержащие обе исходные поверхности оболочки; сопутствующие мелкие фрагменты B , содержащие одну исходную поверхность. Спектр фрагментов B в свою очередь включает в себя два подкласса: B^* — фрагменты контактной зоны, со стороны ВВ, образованные поверхностями сдвига; B^{**} — фрагменты зоны, расположенной у внешней поверхности оболочки, образованные в основном отколами радиального направления. Процесс фрагментации рассматривается как двухстадийный.

Сначала происходит образование «предварительной» крупной фракции осколков A . Затем в результате отрыва от крупных фрагментов мелких осколков происходит образование мелкой фракции B .

Выписывается система уравнений. Первое из которых означает что суммарная масса крупных осколков задается коэффициентом k_{mA} ($0 < k_{mA} < 1$), а второе, что накопленная в оболочке упругая энергия на момент разрушения $t = t^*$ упругая энергия расходуется на создание поверхностей разрушения [8, 10, 11].

Аналогично проводятся рассуждения для мелких осколков B . Полное число осколков $N_0 = N_{0A} + N_{0B}$. Получено ограничение на минимально допустимую массу осколка [10, 11].

3. Метод численного расчета и полученные результаты

Задача решается численно с использованием лагранжевой и эйлеровой расчетных сеток. Камера моделировалась лагранжевой расчетной сетки, а газовая среда (воздух, продукты взрыва) — эйлеровой сеткой.

Расчет детонации производится с использованием программного комплекса ABAQUS, дополненного разработанными для решения рассматриваемого типа задач расчетными модулями [10, 11].

Расчет проводился для сферической оболочки с геометрией и константами материала, приведенными в [12]. Расчеты хорошо согласуются с данными экспериментов [12]. В частности: время начала разрушения в эксперименте — 15 мкс, а в расчете — 13 мкс. Число осколков: 4970 в эксперименте и 4907 в расчете.

4. Заключение

1. Разработана и реализована в рамках программного комплекса ABAQUS методика расчета фрагментации осесимметричных оболочек под действием динамической нагрузки взрывного типа. Для определения начала макроразрушения используется критерий предельной удельной диссипации, число фрагментов и их распределение по массе рассчитывается по теории типа Вейбулла.

2. Исследована задача необратимого деформирования и фрагментации стальной сферической камеры при взрыве заряда ВВ в её полости. Результаты расчётов подтверждаются экспериментами.

Литература

1. *Wilkins M.L.* Computer simulation of dynamic problems. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer — Verlag, 1999. — 246 p.

2. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды // Прикл. механ. и техн. физика. — 1990. — № 5. — С. 116-123.
3. *Киселев А.Б., Юмашев М.В.* Математическая модель деформирования и разрушения твердого топлива при ударном нагружении. — Прикл. механ. и техн. физика. 1992. — № 6. — С. 126-134.
4. *Киселев А.Б.* Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного микроразрушения термоупруговязкопластической среды // Вестник МГУ. Матем. Механ. — 1998. — № 6. — С. 32-40.
5. *Киселев А.Б.* О численном интегрировании уравнений упругопластической среды. // Вестник МГУ. Матем. Механ. — 1995. — № 4. С. 71-74.
6. *Орленко Л.П.* Физика взрыва. — М.: Наука, 2004. — Т. 1. — 772 с.
7. *Вейбулл В.* Усталостные испытания и анализ их результатов. — М.: Машиностроение, 1964. — 273 с.
8. *Киселев А.Б.* Математическое моделирование фрагментации тонкостенных конструкций и компактных элементов при взрывном и ударном взаимодействии // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24. — № 2. — С. 33-66.
9. *Одинцов В.А.* Бимодальное распределение фрагментов цилиндров // Физика горения и взрыва. — 1991. — № 5. — С. 118-122.
10. *Киселев А.Б., Логинов Д.П.* Взрывозащитный контейнер: математическое моделирование необратимого деформирования и разрушения, вплоть до фрагментации, разлета осколков // Прикл. физика и матем. — 2021. — № 2. С. 34-45.
11. *Киселев А.Б., Логинов Д.П.* Численное моделирование дробления сферических оболочек при внутреннем взрывном нагружении // Прикл. физика и матем. — 2022. — № 2. — С. 30-37.
12. *Иванов А.И., Сырунин М.А., Федоренко А.Г., Цой А.П.* Дробление сферической оболочки при внутреннем взрывном нагружении // Проблемы прочности. — 2001. — № 2. — С. 78-87.

ИТЕРАЦИОННЫЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА УРЫСОНА

М.Г. Козлова, В.А. Лукьяненко

art-inf@mail.ru, art-inf@yandex.ru

УДК 517.983.54, 519.6

Рассматриваются итерационные алгоритмы решения нелинейных интегральных уравнений типа Урысона первого рода. Регуляризирующие алгоритмы строятся по априорной информации о решении и информации о решении близкого уравнения. При выполнении условий близости решение исходного уравнения записывается через решение близкого уравнения, более простого по своей структуре.

Ключевые слова: уравнения типа свертки, нелинейные интегральные уравнения типа Урысона 1-го рода, регуляризация, итерационные алгоритмы.

Рассматриваемые в работе нелинейные уравнения типа Урысона первого рода можно отнести к интегральным уравнениям типа свертки с неизвестным сдвигом. Такие уравнения имеют широкие приложения в моделировании косвенных измерений, дистанционного зондирования, в задачах грави-, сейсмо- и георазведки, восстановлении изображений и др.

Предполагается, что в задаче восстановления решения уравнения Урысона известна априорная информация о решении и дополнительная информация о решении близкого уравнения. В реальных задачах косвенно измеряемые данные соответствуют правой части уравнения.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

Козлова Маргарита Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, Крымский федеральный университет (Симферополь, Россия)

Лукьяненко Владимир Андреевич, к.ф.-м.н., доцент, Крымский федеральный университет (Симферополь, Россия)

Регистрируются только интегральные характеристики, учитывающие суммарный эффект от всех наблюдаемых точек. Возникают задачи обработки и интерпретации экспериментальных данных. Обработка данных проводится с целью выделения максимума достоверной информации о реальных характеристиках восстанавливаемых функций.

Прямая задача состоит в измерении интегральных характеристик объекта — правой части u интегрального уравнения типа Урысона первого рода по заданным исходным зависимостям z , характеризующих объект. Задача интерпретации состоит в решении обратной задачи $Az = u$. Априорная информация о монотонности искомого решения $z(s)$ позволяет свести решение нелинейного уравнения Урысона к линейному уравнению типа свертки.

В работах авторов [1-3] для решения таких уравнений используется непрерывное вейвлет-преобразование и регуляризирующие алгоритмы [4, 5]. Реализуется подход, впервые предложенный Ю.И. Черским для уравнений типа свертки, в котором для построения приближенного решения используется решение близкого уравнения — более простого по своей структуре или для которого известен алгоритм решения.

Рассматривается модельное уравнение Урысона задачи дистанционного зондирования Земли

$$Az = \int_{\mathbb{R}} f(s)n(t - z(s))ds = u(t), t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Ядро уравнения $n(t)$ является дельтаобразной функцией; неизвестная функция $z(s)$ характеризует время прохождения двойного расстояния от точки наблюдения до искомой поверхности и обратно; функция f может быть известной или искомой (в системе таких уравнений). С помощью преобразования Фурье или вейвлет-преобразования уравнение (1) приводится к интегральному уравнению с осциллирующим ядром

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{i\xi z(s)} ds = v(\xi), \xi \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

к которому применимы асимптотические методы (в частности, метод перевала).

Использование регуляризирующих алгоритмов и решения близкого уравнения приводит к следующей схеме: в зависимости от выбранного метода регуляризации для уравнения $Az = u$ и близкого к нему $\tilde{A}\tilde{z} = \tilde{u}$ строятся регуляризирующие функционалы и итерационные процедуры. Например, для метода Лаврентьева $F(z) = Az - u + \alpha(z - z_m)$, $\tilde{F}(\tilde{z}) = \tilde{A}\tilde{z} - \tilde{u} + \tilde{\alpha}(\tilde{z} - \tilde{z}_m)$ итерационная процедура $z_{n+1} = z_n + h$ приводит к алгоритму нахождения h из линейного уравнения $[\alpha I + (A'z_n)]h - F(z_n) = 0$. В качестве близких рассматриваются уравнения

$$\mathbb{K}h \equiv [\alpha I + (A'z_n)]h = Az_n - u + \alpha(z_n - z_m) \equiv g,$$

$$\tilde{\mathbb{K}}\tilde{h} \equiv [\tilde{\alpha} I + (\tilde{A}'\tilde{z}_n)]\tilde{h} = \tilde{A}\tilde{z}_n - \tilde{u} + \tilde{\alpha}(\tilde{z}_n - \tilde{z}_m) \equiv \tilde{g}.$$

При обеспечении условия $\|\tilde{\mathbb{K}}^{-1}(\mathbb{K} - \tilde{\mathbb{K}})\| < 1$ решение уравнения $\mathbb{K}h = g$ выражается явно через известные решения близкого уравнения $\tilde{\mathbb{K}}\tilde{h} = \tilde{g}$, более простого по своей структуре с учетом прецедентной информации по погрешности оператора и правой части. Для уравнения (1):

$$(A'z)h = \int_{\mathbb{R}} n'(t - z(s))f(s)h(s)ds.$$

Выбирая различные методы регуляризации [5], может быть получен набор разнообразных алгоритмов.

Литература

1. Belozub V. Approximated solution algorithms for Urysohn-type equations / V. Belozub, M. Kozlova, V. Lukianenko // Journal of Physics: Conference Series: Current Problems, Voronezh, 07-09 декабря 2020 года. – Voronezh, 2021. – P. 012051. – [10.1088/1742-6596/1902/1/012051](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1902/1/012051). – EDN ZNDHHT.

2. Lukianenko V., Kozlova M. & Belozub V. Application of Wavelet Transform to Urysohn-Type Equations. Mathematics 2023, 11, 3999. [10.3390/math11183999](https://doi.org/10.3390/math11183999).

3. *Lukianenko V.* Applying Wavelet Transforms as a Solution for Convolution Type Equations / V. Lukianenko // In Part of the Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Book Series; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2021; Volume 357, pp. 369–391. [10.1007/978-3-030-77493-6_22](https://doi.org/10.1007/978-3-030-77493-6_22).

4. *Тихонов А. Н.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов и др. – М.: Наука, 1988. – 198 с.

5. *Васин В.В.* Основы теории некорректных задач / В.В. Васин. – Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2020. – 313 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫТЕСНЕНИЯ ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕФТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИОПОЛИМЕРНЫХ СОСТАВОВ

В.П. Ларченко, М.Н. Кравченко

leralarchen08@gmail.com, dep.ngipg@yandex.ru

Целью работы является исследование особенностей процесса вытеснения на основе природных биополимерных составов. Актуальность работы заключается в создании вычислительных инструментов моделирования для интерпретации реальных промысловых экспериментов по поиску инновационных составов биополимерной системы с целью повышения коэффициента нефтеизвлечения.

Ключевые слова: полимерное вытеснение, биополимер, вязкопластическая жидкость, математическое моделирование.

В настоящее время широко применяется закачка в пласт полимерных вытеснителей/отклонителей различного композиционного состава с целью интенсификации процессов нефтеотдачи из месторождений с трудноизвлекаемыми запасами (ТРИЗ), в том числе пластов с высоковязкой нефтью. Основой вытесняющих систем является вода с добавками поверхностно-активных веществ, повышение эффективности добычи нефти происходит путем частичного перекрытия полимером водопроводящих каналов и тем самым вовлечения в фильтрационный процесс нефтенасыщенных участков пласта. Одним из современных недорогих полимерных систем являются составы на основе биополимеров (например, белок-полисахаридный гидрогель). Существенное увеличение вязкости вытесняющего водного состава при добавлении биополимеров позволит снизить скорость продвижения воды по более проницаемым участкам пласта и будет способствовать увеличению охвата пластов биополимерным заводнением [1].

Для решения задач вытеснения высоковязкой нефти из пласта требуется использовать модифицированные модели вытеснения, основанные на уравнениях механики взаимопроникающих континуумов с учетом многокомпонентности состава фаз. Был создан программный комплекс и проведена серия экспериментов, позволяющие определить характеристики вытеснения путем вариаций входных параметров, к которым относятся давления и потоки на границах, уравнения состояния всех фаз и уравнения реологии многофазного континуума с изменением реологических свойств от линейного до степенного предельного градиента вплоть до решения задачи по модели вязкопластической жидкости.

Сравнение этих моделей дает возможность оценить влияние реологических характеристик на параметры вытеснения. Данная модель была реализована на реальном промышленном эксперименте, описанном в патенте [1], способ повышения нефтеотдачи которой включает закачку в пласт гелеобразующего состава, содержащего водный раствор катионного белка желатина типа А и анионного полисахарида к-каррагинана, в котором гелеобразующий состав представляет собой дисперсию, содержащую водный раствор и армирующую добавку в виде многостенных углеродных нанотрубок.

Ларченко Валерия Павловна, студент, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина (Москва, Россия)

Кравченко Марина Николаевна, к.ф.-м.н, доцент, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина; МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Реализация модели производилась численно в собственном программном комплексе, написанном на языке Python. Результаты вычислений позволяют исследовать особенности процесса вытеснения на основе природных биополимерных систем.

Литература

1. Патент № 2793821 С1 Российская Федерация, МПК E21B 43/22, E21B 33/138, C09K 8/588. Способ применения биополимерных композитов, армированных углеродными нанотрубками для повышения нефтеотдачи пластов : № 2021136263 : заявл. 08.12.2021 : опубли. 06.04.2023 / А.О. Макарова, Ю.Ф. Зуев, О.С. Зуева [и др.].

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

В.А. Лукьяненко, А.А. Гребенева

art-inf@mail.ru, agrebenevaa@yandex.ru

УДК 517.957, 517.928.7

Рассматриваются модели спинового режима безгазового горения, предложенные Т.П. Ивлевой и Я.Б. Зельдовичем, в прямоугольной области. Исследованы спектральные задачи, соответствующие им квазинормальные формы и аттракторы. Доказана теорема о свойствах устойчивости стационарных решений квазинормальной формы задачи и вращающихся волн на начально-краевой задаче.

Ключевые слова: нелинейное уравнение спинового горения, нестационарные эффекты, вращающиеся волны, квазинормальная форма.

Ранее авторами была исследована обобщенная математическая модель Зельдовича, когда зона распространения реакции вся плоскость, тонкостенная цилиндрическая труба (окружность) [1], вещественная ось, а также толстостенная труба (кольцо) и круг с точки зрения теории бифуркации [2]. Дробная степень оператора Лапласа заменена на дробную степень $0 < \alpha < 1$ (в отличие от модели Зельдовича, где $\alpha = 1/2$).

Задача для тонкого кольца $R < r < R + \delta$ при $\delta \rightarrow 0$ сводится к задаче на окружности.

Модель, предложенная Т. П. Ивлевой и А. Г. Мержановым может быть записана в виде системы из двух уравнений

$$u_t = u_{xx} + \nu u_{yy} - \alpha u - \eta f(u), \quad \eta_t = -\gamma \eta f(u), \quad f(u) = \exp \left[\frac{u + u_n}{1 + \beta(u + u_n)} \right] \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = u_n, \quad u(x, y + l, t) = u(x, y, t), \quad \eta(x, y + l, t) = \eta(x, y, t), \\ u(0, y, t) = g(y, t), \quad u_x(L, y, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq l. \end{aligned} \quad (2)$$

Обобщающее, предложенное Я. Б. Зельдовичем, феноменологическое уравнение спинового горения является сингулярно возмущенным нелинейным параболическим уравнением ван-дер-полевского типа в прямоугольной области $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq l$ с соответствующими краевыми условиями и условием периодичности имеет следующий вид:

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

Лукьяненко Владимир Андреевич, к.ф.-м.н., доцент, Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт (Симферополь, Россия)

Гребенева Анастасия Андреевна, Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт (Симферополь, Россия)

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} + u &= 2\varepsilon \left[\dot{u} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}^2 \right) - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (-\Delta) \dot{u} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} (-\Delta)^\alpha \dot{u} \right], \quad 0 < \alpha < 1, \\
 u(x, y + l, t) &= u(x, y, t), \\
 u(0, y, t) &= g(y, t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,
 \end{aligned} \tag{3}$$

решение которого — пространственно неоднородные волны, описывающие движение фронта экзотермической реакции. Действие псевдодифференциального оператора $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ определено через спектральное разложение.

Собственные значения спектральных задач подобны, для (1)-(2):

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 + \nu \left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2 - \alpha, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots,$$

для (3):

$$\lambda_{nk} = \rho^{-2} \mu_{nk}^2 + \beta \rho \mu_{nk}^{2\alpha} - 1, \quad \mu_{nk} = \left(\frac{2k+1}{2L} \pi \right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2, \quad \rho = \frac{2\pi}{\lambda},$$

решения выражаются через собственные функции:

$$\begin{aligned}
 \psi_{nk}(x, y) &= \left\{ \cos \frac{2k+1}{2L} \pi x \cos \frac{2\pi n}{l} y; \cos \frac{2k+1}{2L} \pi x \sin \frac{2\pi n}{l} y; \right. \\
 &\quad \left. \sin \frac{2k+1}{2L} \pi x \cos \frac{2\pi n}{l} y; \sin \frac{2k+1}{2L} \pi x \sin \frac{2\pi n}{l} y \right\}.
 \end{aligned}$$

Автоколебательным режимам задачи (3) согласно [3] соответствует представление решения в виде

$$u = u_0(x, y, t, \tau) + \varepsilon u_1(x, y, t, \tau) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \tag{4}$$

где $u_j(x, y + l, t, \tau) = u_j(x, y, t, \tau)$, $u_j(x, y, t + 2\pi, \tau) = u_j(x, y, t, \tau)$, $j = 1, 2, \dots$, функция $u_0(x, y, t, \tau)$ определяется в соответствии с частным решением задачи (3) при $\varepsilon = 0$, то есть в виде семейства периодических по t функций вида

$$u_0(x, y, t, \tau) = \frac{1}{2} (v(x, y, \tau) e^{it} + \bar{v}(x, y, \tau) e^{-it}). \tag{5}$$

Из условий разрешимости в классе 2π -периодических по t функций, т. е. равенства нулю коэффициентов при $e^{\pm it}$ в неоднородности, получим квазинормальную форму задачи (3):

$$v_\tau = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi} (-\Delta)^\alpha v + v - |v|^2 v, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \tag{6}$$

Для модели Т. П. Ивлевой соответствующая квазинормальная форма может быть записана как:

$$v_t = \frac{1}{\omega_T} (Lv - (a_0 + a_2 |v|^2) \xi), \quad \eta_t = -\gamma \frac{1}{\omega_T} (a_0 + a_2 |v|^2) \xi, \tag{7}$$

где $Lv = v_{xx} + \nu v_{yy} - (\alpha + i\omega_T)v$, $u(x, y, t) = v(x, y, t) e^{it} + \bar{v}(x, y, t) e^{-it}$, $\eta(x, y, t) = \xi(x, y, t) e^{it} + \bar{\xi}(x, y, t) e^{-it}$; a_i — коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции $f(u)$.

Утверждение 1. Задача (6) является S^1 -эквивариантной, т. е. инвариантной относительно группы вращений окружности. Ее нетривиальное стационарное решение порождает окружность стационарных решений. При этом все ее точки имеют один спектр, содержащий нуль.

Утверждение 2. Задачи об устойчивости исходных начально-краевых задач эквивалентны устойчивости задач для их квазинормальных форм. Фазовые портреты качественно схожи.

Литература

1. Лукьяненко, В. А. Нестационарные режимы феноменологической модели спинового горения / В. А. Лукьяненко, Ю. А. Хазова, А. А. Гребенева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2023. – 4. – С. 86-98. – EDN LUMUSH.
2. Grebeneva, A., Lukianenko, V. Structure of solutions of the problem of spin combustion in the ring. J. Math. Sci., 2024. DOI 10.1007/s10958-023-06898-w
3. Мищенко Е. Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х Розов. – М.: Физматлит. – 2005. – 432 с.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЛЕВИТАЦИЯ ШАРОВОЙ МОЛНИИ ПОД ДИПОЛЬНЫМ ГАЗОВЫМ ОБЛАКОМ

С.А. Маслов, В.Л. Натяганов

sergm90@mail.ru, tensor-home@yandex.ru

УДК 532.5, 537.3

На основе обобщения задачи о левитации капли с поверхностным зарядом двойного слоя в вертикальном электрическом поле при учете силы тяжести рассматривается новый вариант электрокапиллярно-вихревой модели шаровой молнии, находящейся в состоянии квазиневесомости на определенном уровне высоты левитации и движущейся под действием касательного поля вдоль нижней границы грозового облака.

Ключевые слова: левитация, шаровая молния, сферический вихрь Хикса.

В работе рассматривается случай, когда кинематическая вязкость вещества шаровой молнии (ШМ) пренебрежимо мала в сравнении с вязкостью воздуха. При этом условия внутри ШМ может реализоваться течение не в виде широко известного вихря Хилла [1-3], а более сложная гидродинамическая структура в форме сферического вихря Хикса [4, 5]. Тогда в собственной цилиндрической системе координат (r, φ, x) гидродинамическая функция тока Ψ с учетом результатов [4] будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = r^2 \frac{dH}{d\Psi} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\Psi}, \quad (1)$$

где $H(\Psi) = |v|^2/2 + p/\rho$ – функция давления Бернулли, v – модуль скорости, p – давление, ρ – плотность, $\Gamma(\Psi) = rv_\varphi$ – некоторый аналог циркуляции для осесимметричного течения с закруткой по определению Бэтчелора [6]. Подробности вывода (1) и некоторые нюансы можно найти в [4, 5].

Здесь лишь отметим, что вихрю Хилла соответствует $H = A\Psi$ и $\Gamma = 0$ внутри сферы, а вне сферы, где $H = H_0$ и $\Gamma = 0$ (A и H_0 – некоторые константы), реализуется однородный потенциальный поток со скоростью $-V_* \mathbf{i}$. Подчеркнем, что тогда скорость V_* при $\eta' \ll \eta$ за счет $\eta' \rightarrow 0$ и $\rho \approx \rho'$ задается формулой

$$V_* = \frac{aq\sigma E_1}{q^2 + \sigma(2\eta + 3\eta')} \rightarrow \frac{aq\sigma E_1}{q^2 + 2\sigma\eta}, \quad (2)$$

где q – плотность заряда внешней обкладки двойного слоя, σ – электропроводность внешней среды, η и η' – динамические вязкости вне и внутри соответственно. В этой формуле V_* является частным случаем скорости электрокапиллярного движения для ШМ радиуса a во внешнем поле $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{i}$, полученной в [3] из системы полных уравнений Навье–Стокса в стационарном случае.

Для сферического вихря Хикса внутри и потенциального потока той же идеальной жидкости вне уравнение (1) можно решить, если выполняются условия [4, 5]:

$$R < a : H(\Psi) = H_0 + \lambda\Psi, \Gamma = \xi\Psi; \quad R > a : H(\Psi) = H_0, \Gamma = 0; \quad (3)$$

где H_0, λ, ξ — константы. С целью дальнейшего исследования для удобства перейдем в собственную сферическую систему координат (R, θ, φ) , связанную с центром ШМ.

Подчеркнем, что условия (3) гарантируют квазивязкую “сшивку” решений уравнения (1) для идеальной жидкости в виде потенциального потока вне и вихря Хикса внутри [4]:

$$\Psi = -\frac{1}{2}V_*R^2 \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3 \right] \sin^2\theta, \quad \Psi' = \left[b \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} J_{3/2}(\xi R) - \frac{\lambda}{\xi^2} \right] \sin^2\theta \quad (4)$$

с выполнением граничных условий при $R = a$ и соотношений для λ, ξ и V_* :

$$R = a : \Psi = \Psi' = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial R} = \frac{\partial\Psi'}{\partial R} = -\frac{3}{2}V_*a \sin^2\theta; \quad \frac{\lambda}{\xi^2} = bJ_{3/2}(\xi a), \quad V_* = \frac{2b}{3a}\xi J_{5/2}(\xi a), \quad (5)$$

где $J_{3/2}$ и $J_{5/2}$ — функции Бесселя дробного порядка.

В [4] выделены два особенных подсемейства решений для вихря Хикса: когда $J_{3/2}(\xi a) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ и тогда внутри реализуется винтовой поток, т.е. течение Громеки–Бельтрами [5] с коллинеарностью скорости и завихренности; а также при $J_{5/2}(\xi a) = 0 \Rightarrow V_* = 0$, т.е. когда вихрь Хикса неподвижен. В [5] через сферические функции Бесселя подсчитаны все интегральные инварианты для вихря Хикса: импульс, азимутальная и вертикальная составляющие момента импульса, кинетическая энергия и спиральность.

Выполнение соотношений (5) для функций тока (4) не только соответствует равенствам $v_R = v'_R = 0$ и $v_\theta = v'_\theta = -3/2 \cdot V_* \sin\theta$ на поверхности вихря Хикса, но и автоматически гарантирует совпадение давлений без учета капиллярных эффектов (в том числе переменного поверхностного натяжения) за счет общности H_0 в двух строчках соотношений (3) и $\Psi = 0$ при $R = a$, где лишь завихренность испытывает скачок.

Однако для ШМ в форме вихря Хикса внутри при $\eta' \rightarrow 0$ находится идеальная и хорошо проводящая жидкость, а вне — вязкая жидкость с $\eta \neq 0$ и $\sigma \ll \sigma'$. Тогда дальнейшая цель состоит в поиске решения на основе формул (4)–(5) новой задачи:

$$\begin{aligned} R > a : \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p &= \eta\Delta\mathbf{v}, \quad \text{div}\mathbf{v} = 0, \quad \Delta\Phi = 0; \\ R < a : \rho(\mathbf{v}'\nabla)\mathbf{v}' + \nabla p' &= 0, \quad \text{div}\mathbf{v}' = 0, \quad \Delta\Phi' = 0; \\ R = a : v_R = v'_R = 0, \quad v_\theta = v'_\theta, \quad \sigma \frac{\partial\Phi}{\partial R} - \text{div}_\theta(qv_\theta) &= 0, \quad ap_{R\theta} + q\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\theta} = 0, \\ a(p_{RR} - p'_{RR}) &= 2\gamma(\{\Phi\}), \quad \gamma(\{\Phi\}) = \gamma_0 - q\{\Phi\}, \quad \{\Phi\} = \Phi' - \Phi; \\ R \rightarrow 0 : |\nabla\Phi'|, |\nabla\mathbf{v}'|, |\nabla p'| &< \infty; \quad R \rightarrow \infty : \mathbf{v} \rightarrow -V_*\mathbf{i}, \quad \nabla\Phi \rightarrow -\mathbf{E}_1 = -E_1\mathbf{i}; \end{aligned} \quad (6)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости, p_{RR} и $p_{R\theta}$ — компоненты тензора вязких напряжений, Φ — потенциал электрического поля E , $\gamma(\{\Phi\})$ — поверхностное натяжение, зависящее от $q = \text{const}$ и скачка $\{\Phi\}$ электрического потенциала поперек тонкого двойного слоя, $\text{div}_\theta(qv_\theta)$ — поверхностная дивергенция конвективного поверхностного тока [3]. Здесь также предполагается, что $\eta' \rightarrow 0$ и $\sigma \ll \sigma'$.

Полученная система уравнений (6) отличается как от системы (1) в [1, 2] для задачи о левитации капель в вертикальном электрическом поле при учете силы тяжести, где уравнения гидродинамики были в приближении Стокса, так и от системы (1) в [3], где были использованы общие уравнения Навье–Стокса (как вне, так и внутри ШМ) без учета силы тяжести. В системе (6) вне ШМ с использованием уравнений Навье–Стокса рассматривается вязкая среда (и потенциальный поток вдали от ШМ), а внутри — идеальная на основе уравнений Эйлера. Некоторые отличия существуют и в граничных условиях для этих систем, что связано со спецификой рассматриваемых задач.

Полное решение системы (6) в предположениях $\eta' \rightarrow 0$ и $\sigma \ll \sigma'$ приводит к следующей формуле для скорости движения ШМ в виде сферического вихря Хикса:

$$V_* = \frac{2aq\sigma E_1}{4\sigma\eta + 3q^2} = \frac{aq\sigma E_1}{2\sigma\eta + 3q^2/2}, \quad (7)$$

что незначительно отличается от формулы (2) для ШМ в виде сферического вихря Хилла [3].

Однако главный результат этой работы заключается не в конкретном виде формулы (7), а в том факте, что скорость V_* удалось найти на основе формул (4) и (5) из решений [4] для вихря Хикса внутри и потенциального натекающего потока уже вязкой жидкости вне ШМ. Но в [5] говорится, что V_* можно определить без учета капиллярных эффектов лишь когда известны 2 из 5 (при заданном радиусе a) или 3 из 5 инвариантов: импульс, две компоненты момента импульса, кинетическая энергия и спиральность. Это существенно осложняет расчет V_* , если не учитывать электрокапиллярные граничные условия, которые и определяют как импульс, так и источник энергии для дрейфа ШМ вдоль нижней кромки дипольного грозового облака.

Литература

1. Maslov S.A., Natyaganov V.L. On the effect of giant dielectric permittivity in the process of tornado generation an accompanying phenomena // Fluid Dynamics, 2023. Vol. 58. No. 3. P. 497–509.
2. Маслов С.А., Натяганов В.Л. Электродинамические механизмы формирования каскада под опускающейся воронкой торнадо // Сб. тезисов докл. XIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике (в 4 томах). Том 4. Материалы симпозиумов и Исторической сессии. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, 2023. С. 694–696.
3. Натяганов В.Л. Ломоносов и загадки природного электричества. Часть 1. Парадоксы шаровой молнии // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2005. № 6. С. 42–49.
4. Moffatt H.K. The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid. Mech., 1969. Vol. 35. No. 1. P. 117–129.
5. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Ожолов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкостей. М: Мир, 1973.

МЕХАНИКА И СТРАТЕГИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Н.Н. Смирнов

mech.math.msu@inbox.ru

УДК 534.22

В докладе обсуждается роль механики в разработке современных стратегических информационных технологий Российской Федерации.

Ключевые слова: информационные технологии, механика, математическое моделирование, космический мусор, высокоскоростной удар.

Информационные технологии — это не только системы телекоммуникаций, хранения, обработки информации и принятия решений. Стратегические информационные технологии определяются созданием в государстве взаимоувязанной триады — инфраструктуры суперкомпьютеров и сетей, программных систем моделирования сложных технологических, природных, физиологических, экономических и социальных процессов, а также технологии использования этих двух компонент в повседневной деятельности ученых, конструкторов, технологов, врачей, экономистов, управленцев, нацеленной на достижение стратегических национальных приоритетов.

Создание программных систем для описания сложных технических, природных или социальных процессов требует разработки адекватных математических моделей. Механика — это наука о моделях различных сред и процессов. Методами механики создаются модели сред и процессов, которые лежат в основе используемых программных средств вычислительного моделирования и стратегических информационных технологий в целом.

В докладе будет рассмотрен один из примеров моделей сред — среды «космического мусора», которой не существовало до 1957 года. Приведены примеры математических моделей и обсуждены вопросы защиты объектов орбитальной инфраструктуры от воздействия космического мусора.

Также в докладе обсуждаются вопросы массивного распараллеливания вычислений при разработке современных информационных технологий.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ НЕСУЩЕЙ СРЕДЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСИ КОНТИНУАЛЬНОЙ МЕТОДИКОЙ ДИНАМИКИ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Д.А. Тукмаков

tukmakovda@imm.knc.ru

УДК 533.2, 51-72

В работе представлена континуальная математическая модель динамики неоднородной среды — газозвеси. Для газовой и дисперсной компонент газозвеси решалась полная гидродинамическая система уравнений движения. Проведено сопоставление численных расчетов динамики ударных волн в газозвезях в случае когда несущая среда описывается системой уравнений Навье-Стокса и системой уравнений Эйлера.

Ключевые слова: гидродинамика, численное моделирование, уравнение Навье-Стокса.

Одним из важных разделов механики жидкости и газа [1-16] является динамика неоднородных сред [1-13].

Движение аэрозоля описывается континуальной моделью динамики неоднородных сред, учитывающей обмен импульсом и теплом между компонентами смеси [1-3]. Несущая среда моделировалась как вязкий, сжимаемый и теплопроводный газ [14]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_1 V_1^k}{\partial t} + \nabla^i(\rho_1 V_1^k V_1^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) = -F_k + \alpha \nabla^k p, \quad (i, k = 1, 2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_2 V_2^k}{\partial t} + \nabla^i(\rho_2 V_2^i V_2^k) = F_{2k} - \alpha \nabla^k p, \quad (i, k = 1, 2), \tag{3}$$

$$\frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \nabla^i(V_1^i(e_1 + p - \tau_{ii}) - V_1^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) = -Q - |F_k|(V_1^k - V_2^k) + \alpha \nabla^k(p V_1^k), \quad (i, k = 1, 2), \tag{4}$$

$$\frac{\partial (e_2)}{\partial t} + \nabla^k(e_2 V_2^k) = Q_2, \quad (k = 1, 2), \tag{5}$$

$$p = (\gamma - 1) \left(e_1 - \rho_1 \frac{u_1^2 + \nu_1^2}{2} \right), \quad e_1 = \rho_1 I + \rho_1 \frac{u_1^2 + \nu_1^2}{2}, \quad \rho_2 = \alpha \rho_{20}, \quad e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$$

$\mathbf{V}_i = [u_i, \nu_i]$ — вектор скорости газа и дисперсной компоненты,

τ_{ij} — составляющие тензора вязких напряжений газа:

$$\tau_{11} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{22} = \mu \left(2 \frac{\partial \nu_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial \nu_1}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \nu_1}{\partial y}.$$

Уравнение (1) описывает непрерывность плотности несущей среды и «средней плотности» дисперсной фазы ($i > 1$). Уравнения (2) и (3) описывают законы сохранения импульса несущей среды и дисперсной фазы соответственно. Уравнения (4) и (5) описывают законы сохранения полной энергии газа и тепловой энергии дисперсной фазы. Введены обозначения: p, ρ_1 — давление и плотность газа; T_1, e_1 — температура и полная энергия газа; $\alpha, \rho_2, \rho_{20}, T_2, C_{p2}, e_2, r$ — объемное содержание дисперсной фазы, средняя плотность, физическая плотность, температура, теплоемкость, внутренняя энергия дисперсной фазы и радиус частиц.

Тукмаков Дмитрий Алексеевич, к.ф.-м. н., ФИЦ КазНЦ РАН ИММ, лаборатория механики сплошной среды (Казань, Россия)

Система уравнений дополнялась межфазным обменом импульсом (6) и замыкающими соотношениями (7) [1]:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_{d2} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (\nu_1 - \nu_2)^2} (u_1 - u_2) + \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \\
 &\quad + 0.5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \\
 F_2 &= \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_{d2} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (\nu_1 - \nu_2)^2} (\nu_1 - \nu_2) + \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial \nu_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial x_2} \right) + \\
 &\quad + 0.5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial \nu_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \nu_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial \nu_2}{\partial x_1} - \nu_2 \frac{\partial \nu_2}{\partial x_2} \right), \tag{6}
 \end{aligned}$$

$$C_{d2} = \frac{24}{Re_{21}} + \frac{4}{Re_{21}^{0.5}} + 0.4, \quad M_{21} = \frac{|V_1 - V_2|}{c},$$

$$Re_{21} = \rho \frac{|V_1 - V_2| 2r}{\mu}, \quad Pr = C_p \frac{\mu}{\lambda}, \tag{7}$$

$$Nu_{21} = 2 \exp(-M_{21}) + 0.459 Re_{21}^{0.55} Pr^{0.33},$$

$$Q = 6 \alpha \lambda Nu_{21} \frac{T_1 - T_2}{(4r^2)} \tag{8}$$

В формулах (6) F_k — составляющие вектора силового взаимодействия дисперсной фазы и несущей среды, $k = 1, 2$. Формула (8) — $Q(T_1, T_2)$ [1,2], функция теплообмена между газом и дисперсной компонентой аэрозоля, описывающая обмен тепловой энергией между компонентами смеси, имеющая размерность Вт/м³.

Значения скорости компонент смеси приравнивались нулю на неподвижных поверхностях. Для остальных динамических функций, на поверхностях ограничивающих объем акустического резонатора, приравнивались нулю конечно-разностные аппроксимации производных по направлению нормалей к поверхностям. Система уравнений динамики многофазной среды (1)-(5) решалась двухэтапным явным конечно-разностным методом Мак-Кормака, позволяющим получать решения второго порядка точности [14].

Алгоритм численного метода можно отобразить на примере нелинейного уравнения (9):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial b(f)}{\partial y} = c(f). \tag{9}$$

При реализации алгоритма последовательно выполняются действия (10) и (11) [14]:

$$f_{j,k}^* = f_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j+1,k}^n - a_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k+1}^n - b_{j,k}^n) + \Delta t c_{j,k}^n \tag{10}$$

$$f_{j,k}^{n+1} = 0.5(f_{j,k}^n + f_{j,k}^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j,k}^* - a_{j-1,k}^*) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k}^* - b_{j,k-1}^*) + 0.5 \Delta t c_{j,k}^* \tag{11}$$

Здесь Δx , Δy , Δt — шаги конечно-разностной сетки. Для подавления численных осцилляций, возникающих в процессе интегрирования уравнений методом Мак-Кормака, применялась схема нелинейной коррекции [15, 16].

Литература

1. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1 Наука, 1987. 464с.
2. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра. 2003, 284с.
3. Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газовзвешах частиц металлов. Новосибирск, 2015. 301с.
4. Пахомов М.А., Терехов В.И. Влияние испарения капель на структуру течения и тепломассобмен в ограниченном закрученном газок капельном потоке за его внезапным расширением // Теплофизика и аэромеханика. 2018. №6. С.865-875.

5. Абед А.Х., Щеклеин С.Е., Пахалуев В.М. Интенсификация теплообмена воздушных теплообменников аварийного расхолаживания и сухих градирен азс с использованием водо-воздушного аэрозоля (тумана) // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. 2019. №3. С.16-27.
6. Лисаков С.А., Сидоренко А.И., Сытин Е.В. Моделирование запыленности в тушиковой выработке угольной шахты // Южно-Сибирский научный вестник. 2019. № 4. С. 200-213.
7. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г. Собственные колебания акустического резонатора с локальной перегородкой // Доклады Академии наук. 2016. №3. С. 279-282.
8. Федорченко И.А., Федоров А.В. Математическое моделирование акустических и газодинамических процессов в канале установки акустоконвективной сушки // Инженерно-физический журнал. 2013. № 4. С. 685-688.
9. Тукмаков Д.А. Способ увеличения интенсивности колебаний газа, генерируемых в акустическом резонаторе // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, №3 2014, С.79-82.
10. Тукмаков Д.А. Увеличение интенсивности колебаний газа в акустическом резонаторе // Инженерно-физический журнал. 2015, Том 88, №3, С.638-641.
11. Тукмаков Д.А., Тукмакова Н.А. Методика численного исследования отражения ударной волны от твердой поверхности в запылённой среде // Вестник Воронежского государственного университета, Серия системный анализ и информационные технологии, 2019, №4, С.47-54.
12. Тукмаков Д.А. Численная модель течения аэрозоля, обусловленного взаимодействием частиц и газа // Сложные системы, 2021, №1, С.64-71.
13. Тукмаков Д.А., Тукмакова Н.А. Численное исследование влияния коагуляции капель на динамику двухфракционного аэрозоля в акустическом резонаторе // Российский технологический журнал. 2021. №2. С.96-104.
14. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей В 2-х томах, Т.2, Москва: Мир, 1991. 552с.
15. Тукмаков А.Л. Модель движения и осаждения заряженной газовзвеси в электрическом поле // Инженерно-физический журнал. 2014. №1. С.35-44.
16. Музафаров И.Ф., Утлюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. №3. С.74-83.

ЧИСЛЕННАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СМЫКАНИИ ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

Н.С. Хабеев, М.Ф. Теймуров

kh.nail@gmail.com

УДК 532.529

Настоящая работа посвящена численной верификации основного результата работы [1], где рассматривалось смыкание пустого пузырька в вязкой жидкости. В [1] было установлено что существует критическое значение числа Рейнольдса разделяющее два различных типа процесса смыкания. В настоящей работе приведены детали расчёта критического значения числа Рейнольдса, разделяющего два различных типа смыкания пузырька.

Ключевые слова: пузырёк, схлопывание, вязкая жидкость.

Пусть в вязкой жидкости имеется сферический пузырёк. Уравнение Рэлея, описывающее динамику его радиальных колебаний, широко известно и приведено, например в [2,3].

Рассматриваемая проблема имеет семейство решений, зависящих от числа Рейнольдса R . В случае идеальной жидкости, задачу впервые решал Рэлей [4]. С помощью специальных бета и гамма функций он установил время полного захлопывания пузырька [4].

В [1] показано, что существует критическое значение числа Рейнольдса $R = R_*$, разграничивающее два существенно различных класса решений. Путём численных расчётов установлено,

Хабеев Наиль Сулейманович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Теймуров Фархад, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова (филиал в г. Баку), факультет прикладной математики (Баку, Азербайджан)

что $R_* = 8,4$. Однако детали расчётов не приводятся. Нами была проведена численная верификация этого важного результата. Для нахождения критического значения $R = R_*$ мы, использовали полученные в [1] асимптотики. Было получено алгебраическое уравнение, которое было решено численно с использованием программы Mathematica. Мы получили критическое значение числа Рейнольдса $R_* \approx 8,397$.

В [1] отмечалось, что при $R < 8,4$ заполнение пузырька происходит медленно, радиус пузырька асимптотически стремится к нулю. При $R > 8,4$ заполнение пузырька происходит за конечное время и кривая “радиус — время” близка к классическому решению Рэлея о схлопывании пустой полости в идеальной жидкости.

Литература

1. *Е.И. Заббахин*, Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. Прикл. мат. мех. №6, 1960, с. 1129–1131.
2. *T. G. Leighton*, “The Acoustic Bubble,” Academic Press, London, (1994).
3. *Р.И. Нугматулин*, Динамика многофазных сред. М. Наука, 1987.
4. *Rayleigh, L.* (1917) On the Pressure Developed in a Liquid during the Collapse of Spherical Cavity. Philosophical Magazine, 34, 94-98.

О НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, СВЯЗАННОМ С ПЕРИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ ТЕПЛООБМЕНА

А.В. Юлдашева

a_v_yuldasheva@mail.ru

УДК 517.968.73

Перидинамика — это нелокальная теория, основанная на интегро-дифференциальных уравнениях, а не на уравнениях в частных производных как в классической теории, поэтому она больше подходит для моделирования процессов в областях с трещинами, повреждениями и т. д. В этой статье изучается процесс теплопередачи в теле с нелинейными свойствами на основе теории перидинамики.

Ключевые слова: перидинамика, интегро-дифференциальное уравнение, теплообмен, нелинейная деформация.

Введение

Поскольку механика сплошной среды опирается на уравнения в частных производных, то изучение процессов в разрывном физическом поле становится достаточно затруднительным. Причина этой проблемы в том, что механика сплошной среды предполагает, что только соседние материальные точки могут взаимодействовать друг с другом, поэтому уравнение равновесия точки в классической теории представляет собой некоторое уравнение в частных производных. Однако это уравнение не существует, если в исследуемой среде есть или возможны разрывы.

Теория перидинамики — очень хороший способ справиться с этими проблемами. Это нелокальная теория, предложенная Силлингом в 2000 году [1], в которой две несоседние точки могут напрямую взаимодействовать друг с другом. Это дальнедействующее взаимодействие превращает уравнение движения в форму интеграла, который очень подходит для моделирования проблем в разрывных средах.

Этот метод широко используется для моделирования различных видов разрывов, таких как деформация и разрушение мембраны с предтрещиной [2], удар шара о хрупкую мишень [1], тест Шарпи с V -образным надрезом [3], повреждение обычного бетона [4] и т. д. Перидинамика показала свою адаптируемость во многих областях.

Перидинамика также используется в других физических областях, таких как теплопроводность [5, 6], тепло-твердое взаимодействие, термоэлектрическая связь и так далее.

В данной работе мы провели моделирование теплопереноса в среде с нелинейными свойствами теплообмена.

Постановка задачи

Перидинамическая модель в среде с нелинейными и нелокальными свойствами упругости приводит к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\rho(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \int_{\Omega} F(u(x,t) - u(y,t), x - y) dy = f(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

где $\Omega \subset R^n$ — область с кусочно-гладкой границей.

Здесь предполагается, что $\rho(x) : \Omega \rightarrow R$ — плотность, а неизвестная функция $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^n$, ядро $F : (R^n \times [0, T]) \times R^n \rightarrow R^n$ и внешняя сила $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^n$ являются векторными функциями.

Мы предполагаем, что вектор-функция F имеет вид:

$$F(u, x) = Q(x)P(u), \tag{3}$$

где $P : R^n \rightarrow R^n$ — гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условию $P(0) = 0$, а $Q : R^n \rightarrow R^n \times R^n$ — матрица-функция, которая может иметь особенность в нуле, но должна быть интегрируема в некоторой степени.

Поскольку основной проблемой перидинамики является описание сильных разрывов решений, будем искать решение задачи (1)-(2) в $L_p(\Omega)$ классах.

Всюду ниже мы предполагаем, что плотность $\rho(x)$ является измеримой функцией, удовлетворяющей условию $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$.

Также предполагается, что функция $P \in L_p(\Omega)$, а ее якобиан $J(u) = \frac{\partial P(u)}{\partial u}$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\partial P(u)}{\partial u} \right| \leq \Phi(|u|), \tag{4}$$

где $\Phi: R_+ \rightarrow R_+$ — некоторая возрастающая функция.

Основной результат

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть для некоторого $q > 1$ функция $Q(x) \in L_q(\Omega)$. Тогда существует некоторое $T > 0$ такое, что при $\varphi(x) \in L_p(\Omega)$ и $f \in L_p(\Omega \times [0, T])$ задача (1)-(2) имеет единственное решение из класса $C^1([0, T], L_p(\Omega))$, где $p = \frac{q}{q-1}$.

Литература

1. S. A. Silling, E. Askari, A Meshfree Method Based on the Peridynamic Model of Solid Mechanics, Computers and Structures, 83(2005), 1526-1535.
2. S. A. Silling, F. Bobaru, Peridynamic Modeling of Membranes and Fibers, International Journal of Non-linear Mechanics, 40(2005), 395-409.
3. S. A. Silling, E. Askari, Peridynamic Modeling of Impact Damage, PVP-Vol.489, Problems Involving Thermal-Hydraulics, Liquid Sloshing, and Extreme Loads on Structures, July 25- 29, 2004, San Diego, Caledonia, USA.
4. W. Gerstle, N. Sau, S.Silling, Peridynamic Modeling of Plain and Reinforced Concrete Structures, 18th International conference on structural mechanics in reactor technology (SMIRT 18), Beijing, Chine, August 7-12 ,2005.
5. F. Bobaru, M. Duangpanya, A Peridynamic Formulation for Transient Heat Conduction in Bodies with Evolving Discontinuities, Journal of Computational Physics, 231(2012), 2764-2785.
6. F. Bobaru, M.Duangpanya, the Peridynamic Formulation for Transient Heat Conduction. International Journal of Heat and Mass Transfer, 53(2010), 4070-4059.

Секция 10

Математика в фундаментальных и прикладных космических исследованиях

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОСФЕР ПЛАНЕТ

И.И. Алексеев, Е.С. Беленькая, В.В. Калегаев

alexeev@dec1.sinp.msu.ru, elena@dec1.sinp.msu.ru, klg@dec1.sinp.msu.ru

УДК 550.383, 550.385

Рассмотрены механизмы формирования магнитосфер планет, обладающих собственным магнитным полем. Дан обзор магнитосфер планет солнечной системы: Земли, Меркурия, Юпитера и Сатурна. Сформулированы системы уравнений, описывающие магнитное поле в магнитосферах планет, в переходной области между магнитопаузой и ударной волной, и в области течения солнечного ветра и представлены способы их решения

Ключевые слова: магнитосфера, магнитопауза, солнечный ветер.

Магнитосферы планет формируются при взаимодействии солнечного ветра с их собственным магнитным полем. При этом возникает магнитопауза, которая отделяет область, структура которой определяется преимущественно собственным магнитным полем планеты, от области течения плазмы солнечного ветра. По магнитопаузе текут поверхностные токи, экранирующие магнитосферное магнитное поле — *токи Чепмена-Ферраро*. Форма и положение магнитопаузы определяются балансом динамического давления солнечного ветра и давления магнитосферного магнитного поля.

Под воздействием потока солнечного ветра происходит искажение силовых линий магнитного поля планеты и возникает специфическая магнитная конфигурация с силовыми линиями, вытянутыми в антисолнечном направлении: магнитосферный хвост. Хвост магнитосферы состоит из двух долей с противоположно направленными магнитными полями. Такая конфигурация поддерживается электрическим током поперек хвоста магнитосферы. Токи поперек хвоста замыкаются по северной и южной половине магнитопаузы, формируя структуру, напоминающую

Алексеев Игорь Иванович, д.ф.-м.н., зав. лабораторией, НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Беленькая Елена Семеновна, д.ф.-м.н., в.н.с, НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Калегаев Владимир Владимирович, д.ф.-м.н., зав. лабораторией, НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

сдвоенный соленоид; токовую систему хвоста магнитосферы. Токи на магнитопаузе и токи хвоста магнитосферы, а также, другие крупномасштабные токовые системы, возникающие при обтекании планеты, обеспечивают электродинамическое состояние магнитосферы. Интенсивности магнитосферных токовых систем, их расположение в магнитосфере и пространственные размеры обусловлены влиянием солнечного ветра и межпланетного магнитного поля, меняющихся под воздействием солнечной активности. Изменения межпланетной среды приводят к вариациям магнитосферных токов, которые проявляются в изменениях структуры магнитосферы и ее плазменных оболочек.

Для описания электродинамических процессов в окрестности планеты, обладающей собственным магнитным полем, в Московском государственном университете разработана обобщенная параболоидная модель магнитосферы. Магнитное поле внутри магнитосферы представляется в виде суммы собственного магнитного поля планеты и магнитных полей магнитосферных токов, которые являются решением задачи магнитостатики. Магнитное поле в области течения солнечного ветра описывается системой МГД-уравнений, которая содержит уравнения движения, уравнение неразрывности, уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома. На магнитопаузе заданной формы задаются граничные условия непрерывности нормальной компоненты магнитного поля. Модель зависит от небольшого набора физических входных параметров, характеризующих интенсивность и местоположение крупномасштабных систем магнитосферных токов. Эволюция магнитосферы описывается изменениями входных параметров, которые определяются из спутниковых измерений в солнечном ветре.

Модель работает в широком диапазоне условий в межпланетной среде, позволяя описывать электродинамические процессы в магнитосферах Земли, Сатурна, Юпитера и Меркурия при спокойных и возмущенных условиях в солнечном ветре.

НЕЙРОСЕТЕВАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ ОБЛАЧНОГО И СНЕЖНОГО ПОКРОВОВ ПО ДАННЫМ РОССИЙСКОГО СПУТНИКА «ЭЛЕКТРО-Л №2»

Н.В. Беляков

MSUBelyakovNV@yandex.ru

УДК 629.785

В докладе рассматриваются возможности решения задачи сегментации облачности и снежного покрова на снимках низкого разрешения с гидрометеорологического российского спутника «Электро-Л №2». Обсуждаются методы получения разметки для целевых снимков для обучения и валидации нейросетевых алгоритмов и эффективные стратегии обучения для полученных наборов данных.

Ключевые слова: сверточная нейронная сеть, метеорологический КА «Электро-Л №2», семантическая сегментация снега и облачности, съемочная аппаратура МСУ-ГС, низкое разрешение снимков..

Работа посвящена методике детектирования облачности и снежного покрова по мультиспектральным данным с аппаратуры МСУ-ГС геостационарного космического аппарата «Электро-Л №2» [1] с применением нейронной сети сверточного типа [2]. В качестве дополнительной информации используется географическая информация: широта, долгота и высота для пикселей снимков [3]. Результатами работы является два новых набора данных с метеорологических космических аппаратов GOES-16 [4], Meteosat-10 [5] и «Электро-Л №2» с масками облачного и снежного покрова, а также обученная модель сегментации Multi-Scale Attention Network (MANet) [2] на этих наборах данных. Продукты L2 с GOES-16 [4], Meteosat-10 [5] были использованы для

Работа выполнена при финансовой поддержке Некоммерческого Фонда развития науки и образования «Интеллект».

Беляков Никита Викторович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет космических исследований (Москва, Россия)

создания разметки облачных покровов для данных с МСУ-ГС путем их репроекции на точку стояния «Электро-Л №2». Таким же образом были получены маски снега, взятые с продуктов системы MODIS [6]. Главная проблема поставленной задачи - разработка алгоритма выделения снежного и облачного покровов в условиях отсутствия узких коротковолновых инфракрасных (ИК) каналов (1300 – 1600 нм), необходимых для реализации алгоритмов сегментации и разделения снега от облачности. При данных ограничениях на характеристики съемочной аппаратуры единственным возможным решением задачи выделения снега и облаков на мультиспектральных снимках является разработка нейросетевой модели, способной извлечь неявные признаки и закономерности, по которым возможно дифференцировать снег от облаков. Для максимальной репрезентативности снимки в выборке включают в себя все времена года и разные уровни освещенности (12.00 – 17.00 UTC). Обученная нейронная сеть для сегментации облачности и снега протестирована по метрикам F_1 , FAR и IoU:

$$F_1 = \frac{2TP}{2TP + FP + FN}, \quad (1)$$

$$FAR = \frac{FP + FN}{TP + TN + FP + FN}, \quad (2)$$

$$IoU = \frac{TP}{TP + FP + FN}, \quad (3)$$

Модель тестировалась в различных сценариях, включая зимний и летний периоды года в дневное время суток при разном уровне освещенности снимков применительно к данным с прибора МСУ-ГС для зоны съемки спутника «Электро-Л №2». Результаты сегментации модели на тестовой выборке составили: $F_1 = 0.7454$, $F_1 = 0.8773$ и $IoU = 0.7359$, $IoU = 0.7976$ для классов снега и облачности соответственно.

Разработанный алгоритм позволяет создавать маски облачности и снежного покрова для области, ограниченной значениями угла зенита Солнца в диапазоне от 0 до 80 градусов [7] для дневного времени. Однако возможны некоторые ошибки в мисклассификации снега во время облачности из-за специфики используемых данных и ошибок на краях изображений из-за геометрических искажений и дисторсий. Описываемый в работе метод может быть перенесен для сегментации снежного покрова и облачности на данных, полученных с других спутников дистанционного зондирования Земли.

Применение моделей нейронных сетей к рассматриваемой задаче при отсутствии коротковолновых ИК каналов позволяет осуществить ее решение, что представляется невозможным, если рассматривать применение классических пороговых или статистических алгоритмов, разработанных для решения схожих задач.

Литература

1. *ntsomz.ru* URL: <https://ntsomz.ru/elektro/> (дата обращения: 24.06.2023).
2. *Pavel Yakubovskiy* Segmentation-models-Pytorch документация: <https://github.com/qubvel/segmentation-models.pytorch> / (дата обращения: 27.06.2023).
3. *Xi Wu, Zhenwei Shi, Zhengxia Zou.* A geographic information-driven method and a new large scale dataset for remote sensing cloud/snow detection. 2021 International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Inc. (ISPRS). [10.1016/j.isprsjprs.2021.01.023](https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2021.01.023)
4. *Данные с КА GOES-16, 17, 18:* <https://home.chpc.utah.edu/~u0553130/Brian-Blaylock/cgi-bin/goes16-download.cgi>, <https://noaa-goes16.s3.amazonaws.com/index.html-ABI-L2-ACMF/2022/349/17/> (дата обращения: 27.04.2023).
5. *Martijn de Ruyter de Wildt, Gabriela Seiz, Armin Gruen.* Operational snow mapping using multitemporal Meteosat SEVIRI imagery. 0034-4257. 2007 Elsevier Inc. All rights reserved. [10.1016/j.rse.2006.12.008](https://doi.org/10.1016/j.rse.2006.12.008)
6. *Среднесуточные карты снежного покрова Terra/MODIS:* <https://neo.gsfc.nasa.gov/view.php?datasetId=MOD10C1-D-SNOW> / (дата обращения: 21.04.2023).
7. *William F. Holmgren, Clifford W. Hansen, and Mark A. Mikofski.* pvlb python: a python package for modeling solar energy systems. Journal of Open Source Software, 3(29), 884, 2018.

О ПОДХОДАХ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА НЕБЕСНОГО ТЕЛА

А.А. Буров, В.И. Никонов

jtm@narod.ru, nikon_v@list.ru

УДК 51-7

В докладе обсуждаются подходы к моделированию поля ньютоновского притяжения, порождаемого малыми небесными телами. Актуальность задачи продиктована интенсификацией современных научных исследований астероидов и комет в связи с проблемой астероидной опасности, а также разработкой и реализацией миссий для работы в окрестности таких небесных тел и на их поверхности

Ключевые слова: гравитационный потенциал, моделирование, притягивающие центры.

Вопросы, связанные с приближениями потенциалов притяжения малых небесных тел, являются активно обсуждаемыми в современном сообществе, поскольку от качества описания поля притяжения в конечном итоге зависит успех планируемых и реализуемых дорогостоящих космических миссий. Основные сложности, связанные с таким описанием, обусловлены прежде всего нерегулярностью форм тел в случае, когда они относительно малы, и отсутствием достаточных достоверных сведений относительно их внутренней структуры. Наиболее употребимым в настоящее время подходом является так называемый подход Вернера-Ширса ([1-3]). Это подход эффективен для численных расчётов в случае, когда небесное тело предполагается однородным или, что более общо, такое тело может быть представлено как совокупность однородных непересекающихся составляющих. Опирающийся на триангуляцию поверхности малого небесного тела, метод Вернера-Ширса позволяет представить потенциал как сумму потенциалов отдельных тетраэдров, выявляемых в качестве такой триангуляции. Такая сумма содержит достаточно много слагаемых: их число по порядку сопоставимо с числом элементов графа, определяющего триангуляционную сетку. Понятно, что такое приближение по существу непригодно для предварительного аналитического исследования движения в окрестности малого небесного тела.

Известен также подход, опирающийся на приближение поля притяжения небесного тела полем притяжения конечного числа гравитирующих точек, масконов. В случае, когда число точек велико, например, в случае, когда эти точки задаются как центры масс тетраэдров, получающихся в ходе триангуляции (см., например, [4,5]), определяемое масконами притяжение также оказывается непригодным для аналитического исследования динамики.

Подход для определения конечного, не очень большого числа притягивающих центров, приближающих поле притяжения малого небесного тела, был предложен в [6-8]. Этот метод, в идейном плане восходящий к исследованиям Х. Штейнгауза [9], в современной теории распознавания образов носит название метода К-средних. В работах [6-8] двойки, тройки и четвёрки шаров с помощью метода К-средних были определены для таких малых небесных тел как астероиды (2063) Бахус, (216) Клеопатра, (433) Эрос и (1620) Географ, а также для ядра кометы 67P/Чурюмова-Герасименко. Возникает естественный вопрос о верификации полученных результатов с помощью других методов. В настоящем докладе для тел, близких к динамически симметричным, выполняется сравнение полученных результатов с результатами, получаемыми с помощью методов, предложенных ранее [10-13] (см. также, например, [14]). Для некоторых астероидов, таких как (1620) Географ, (25143) Итокава, (433) Эрос, расположение таких притягивающих центров и величины сосредоточенных в них масс были определены в [15,16]. Остаётся открытым вопрос о верификации метода К-средних для четвёрок притягивающих точек в случае, когда небесное тело далеко от динамически симметричного. В этом случае оказывается подход, в идейном плане восходящий к Раусу [17]. Как оказалось ([18,19]), выбор четвёрки точек можно осуществить

Буров Александр Анатольевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ФИЦ "Информатика и управление" РАН (Москва, Россия)

Никонов Василий Иванович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ФИЦ "Информатика и управление" РАН (Москва, Россия)

таким образом, что компоненты тензора инерции тела будут в точности совпадать с компонентами тензора инерции четвёрки точек, и, кроме того, окажутся достаточно хорошо приближенными интегралы инерции третьего порядка, через которые выражаются компоненты тензоров Стокса. Решение возникающей задачи минимизации было выполнено так называемым роевым методом [20]. Установлено достаточно хорошее соответствие с результатами, получаемыми при использовании метода К-средних [8].

Литература

1. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 1994. V. 59, №3, 253–278.
2. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 1996. V. 65, №3, 313–344.
3. *Werner R.A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // *Comput. Geosci.* 1997. V. 23, №10, 1071–1077.
4. *Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V.* Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // *Monthly Not. Royal Astron. Society.* 2015. V. 450, №4, 3742–3749.
5. *Pearl J., Hitt D.* Mascon distribution techniques for asteroids and comets // *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 2022. V. 134. Artno. 58.
6. *Буров А.А., Герман А.Д., Распопова Е.А., Никонов В.И.* О применении К-средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел // *Нелинейная динамика.* 2018. Т. 14. №1, 45–52.
7. *Буров А.А., Герман А.Д., Никонов В.И.* Использование метода К-средних для агрегирования масс продолговатых небесных тел // *Космические исследования.* 2019. Т. 57. №4, 283–289.
8. *Burov A., Guerman A., Nikonova E., Nikonov V.* Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // *Acta Astron.* 2019. V. 157, 225–232.
9. *Steinhaus H.* Sur la division des corps mate?riels en parties // *Bull. Acad. Polon. Sci.* 1956. Cl. III, 4, 801–804.
10. *Кислик М.Д.* Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // *Искус. спутн. Земли.* 1960. №4, 3–17.
11. *Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г.* Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // *Астрономический журнал.* 1963. Т. 40. Вып. 2, 363–372.
12. *Дёмин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968.
13. *Vinti J.P.* Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy // *J. Res. Nat. Bur. Standards.* 1961. V. B65. №3, 169–201.
14. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. (Механика космического полета) М.: Наука, 1965.
15. *Буров А.А., Никонов В.И.* О приближении двумя шарами твёрдого тела, близкого к динамически симметричному // *Ж. выч. мат. и мат. физ.* 2022. Т. 62. №12, 2105–2111.
16. *Буров А.А., Никонов В.И.* Приближение поля притяжения тела, близкого к динамически симметричному, полем притяжения трех шаров // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки.* 2023. Т. 509, 45–49.
17. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983.
18. *Никонова Е. А.* Равногранный тетраэдр и система точечных масс, равномоментная твердому телу // *Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Астр.* 2023. Т. 10, №1, 155–164.
19. *Буров А.А., Никонова Е. А., Никонов В. И.* О приближении поля притяжения твёрдого тела полем притяжения четвёрки материальных точек одинаковой массы // *Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат. Мех. Астр.* 2024. Т. 11. №2 (в печати).
20. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle swarm optimization // *Proc. of ICNN'95 International Conference on Neural Networks, Perth, WA, Australia, 1995, vol.4, 1942–1948.*

ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАНТОВ ПОСТРОЕНИЯ ГРУППИРОВКИ КОСМИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВОЙ ПЛАТФОРМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

А.Ю. Комаровский, И.А. Самыловский, Т.В. Пшеничный, А.А. Филиппов

alexander.komarovskiy@cosmos.msu.ru, ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru,

alexander.filippov@cosmos.msu.ru

УДК 51-7

В докладе обсуждаются приложение цифровой платформы проектирования к проектному анализу группировок мониторинга околоземного пространства

Ключевые слова: математическое моделирование, сложное движение, дистанционное зондирование, мониторинг.

В настоящее время и государственные, и частные предприятия прилагают усилия к развёртыванию и поддержанию многоспутниковых группировок различного назначения, апеллируя как правило к большей по сравнению с небольшим числом более крупных спутников оперативности и “гибкости” в смысле реакции на выход отдельных элементов из строя. В связи с этим возникает две большие группы задач проектного анализа: выбор вариантов развёртывания группировки с точки зрения достижения целевых показателей, устойчивости орбитальной структуры и т.д. и собственно управление системой как минимум в смысле распределения целевых задач.

“Технологической” целью настоящей работы является дополнение цифровой платформы баллистического центра ФКИ [1] функциональностью по построению “терминальных” и “суб-оптимальных” (в смысле как минимум свёртки приоритетов объектов съёмки и количества отснятых целей) планов съёмки наземных и космических объектов группировкой околоземных спутников мониторинга. Второй целью является проектный анализ вариантов группировок малых космических аппаратов для мониторинга околоземного космического пространства. Подобные задачи представляют интерес и с точки зрения доработки и масштабирования систем слежения за опасными природными и техногенными объектами, и с точки зрения мониторинга перспективных многоярусных группировок мультиназначения (ДЗЗ, низкоорбитальная связь и широкополосный доступ в Интернет).

Мы ставим целью создание и мультиагентной платформы (см., например, [2]) для быстрого построения планов съёмки, связи и ретрансляции, и – шире – оптимизационного пакета с возможностью как перестраивать планы при корректировке критериев качества, так и строить экстремали задач, связанных с взаимодействием небольшого количества объектов (см., например, [3]). В рамках настоящей работы приводится несколько вычислительных экспериментов, связанных с мониторингом вариантов построения группировок ДЗЗ и связи. При этом демонстрируются возможности по варьированию параметров группировок и отдельных космических аппаратов и наземных станций.

Литература

1. *Sazonov V., Samylovskiy I., Filippov A., Abramova V., Tsaregorodtsev A., Bogachyova A.* MIDE — Instrumental environment for space missions modeling and analysis // XLV Academic space conference dedicated to the memory of academician S.P. Koorolev. AIP Publishing. 2023

2. *Скобелев П.О., Скурмунт В.К., Симонова Е.В., Жильев А.А., Травин В.С.* Планирование целевого применения группировки космических аппаратов дистанционного зондирования Земли с использованием мультиагентных технологий // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015, №10 (171), с. 60-70

3. *Samylovskiy I., Abramova V., Filippov A.* Optimal Control Problems and Cross-Platform Instrumental Software Related to Constellation Cooperative Control // 2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), IEEE Xplore. 2023

Работы выполнены при поддержке НОИШ “Фундаментальные и прикладные исследования космоса” МГУ имени М.В. Ломоносова. Работы А.А. Филиппова и И.А. Самыловского по моделированию группировок частично выполнены в рамках гранта РНФ 21-71-00076.

Комаровский Александр Юрьевич, программист, ФКИ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)
Самыловский Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент, ФКИ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)
Пшеничный Тимофей Витальевич, программист, ФКИ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)
Филиппов Александр Алексеевич, программист, ФКИ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ЦЕНТРЕ АНАЛИЗА КОСМИЧЕСКОЙ ПОГОДЫ НИИЯФ МГУ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЕОМАГНИТНОЙ И РАДИАЦИОННОЙ ОБСТАНОВКИ

И.Н. Мягкова, С.А. Доленко, В.Р. Широкий, И.М. Гаджиев

irina@srd.sinp.msu.ru

УДК 519.216.3, 51-7

В работе приводится краткий обзор моделей прогнозирования космической погоды, полученных на основе машинного обучения и функционирующих на сайте Центра анализа космической погоды НИИЯФ МГУ.

Ключевые слова: космическая погода, прогнозирования.

Центр анализа космической погоды НИИЯФ МГУ предоставляет информацию о текущем состоянии околоземного космического пространства (ОКП), а также оперативный прогноз данного состояния – а именно, амплитуды геомагнитных возмущений и потоков релятивистских электронов внешнего радиационного пояса Земли (РПЗ), осуществляемый при помощи методов машинного обучения.

Сильные геомагнитные возмущения, которые принято называть магнитными бурями, являются одним из наиболее общеизвестных и важных проявлений космической погоды. С практической точки зрения причины интереса к максимально возможно более точному и долгосрочному прогнозированию геомагнитных возмущений связаны с тем, что на Земле, особенно в высоких широтах, магнитные бури могут вызывать нарушения в работе линий электропередач и энергосетей, сбой радиосвязи, а также возникновение проблем при эксплуатации трубопроводов [1]. С другой стороны, многие десятилетия, начиная с работ Александра Чижевского [2], ученые исследуют вопросы влияния магнитных бурь на самочувствие людей [3]. Геомагнитную активность традиционно принято характеризовать специальными геомагнитными индексами Dst и Kp, поэтому прогнозирование амплитуды данных индексов является ключевой задачей.

Помимо того, магнитные бури могут опосредованно оказывать влияние на радиационные условия в околоземном космическом пространстве за счет того, что после примерно пятидесяти процентов магнитных бурь поток релятивистских электронов внешнего РПЗ возрастает на порядок и более (см., например, обзор [4] и ссылки там). Из экспериментов известно, что потоки релятивистских электронов РПЗ чувствительны к магнитным бурям независимо от их природы: источниками возмущений могут быть как корональные выбросы массы, связанные с солнечными вспышками, так и высокоскоростные потоки солнечного ветра из корональных дыр.

С прикладной точки зрения проблема прогнозирования потоков релятивистских электронов РПЗ также очень актуальна, поскольку данные частицы, называемые в англоязычной научной литературе «электроны-убийцы» («killer electrons») воздействуют на радиационные условия в космическом пространстве, в т.ч. на геостационарных орбитах. Они могут негативно влиять на работу космических аппаратов, повреждая чувствительные электронные компоненты спутников (см., например, [5]). Причем в условиях дальнейшей миниатюризации электроники на космических аппаратах негативное влияние релятивистских электронов будет только возрастать.

Поскольку причины изменений геомагнитных и радиационных условий в ОКП тесно связаны между собою – изменения параметров солнечного ветра и межпланетного магнитного поля влекут за собою как магнитные бури, так и возрастания потоков релятивистских электронов внешнего РПЗ, задачи их прогнозирования решаются аналогичными методами.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Научного фонда, проект № 23-21-00237, <https://rscf.ru/project/23-21-00237/>.

Мягкова Ирина Николаевна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Доленко Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., зав. лабораторией, НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Широкий Владимир Романович, инженер 2 категории, НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Гаджиев Исмаил Маратович, программист, НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

На портале Центра анализа космической погоды НИИЯФ МГУ (<https://swx.sinp.msu.ru/>) функционируют следующие операционные прогнозы, реализованные с помощью методов машинного обучения (МО):

- Прогноз геомагнитных индексов Dst [6] и Kp [7];
- Прогноз потоков релятивистских электронов ($E > 2$ МэВ) внешнего радиационного пояса Земли на геостационарной орбите [8];
- Прогноз суточных флюенсов релятивистских электронов ($E > 2$ МэВ) на геостационарной орбите с использованием прогноза скорости солнечного ветра [9].

Во всех перечисленных прогнозах помимо самих прогнозируемых величин наиболее важными входными параметрами являются скорость солнечного ветра, модуль и вертикальная составляющая межпланетного магнитного поля, а также синус и косинус с суточным периодом. Для прогнозирования потоков и флюенсов электронов внешнего РПЗ необходимы значения Kp и Dst.

Наиболее эффективными методами МО для решения перечисленных задач оказываются искусственные нейронные сети и градиентный бустинг. Помимо выбора оптимальных методов МО и подбора их оптимальных параметров для каждой конкретной задачи, весьма существенным этапом обработки является отбор существенных входных признаков задачи.

Кроме непосредственного прогнозирования величины геомагнитных индексов, ведутся также работы по прогнозированию уровня возмущённости геомагнитного поля по Kp-индексу с помощью методов МО, осуществляющих классификацию [10].

Литература

1. Лазутин Л. Л. Мировые и полярные магнитные бури. МГУ, 2012.
2. Чижевский А. Л. Земное эхо солнечных бурь. М.: Наука, 1973.
3. Владимирский Б. М., Темуриянц Н. А. Влияние солнечной активности на биосферу-ноосферу. – М.: МНЭПУ, 2000.
4. Reeves G.D. et al. Acceleration and loss of relativistic electrons during geomagnetic storms. // Geophys. Res. Lett. V.30. P.1529. 2003.
5. Белов А.В. и др., Влияние космической среды на функционирование искусственных спутников Земли // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 44. №4, 502-510. 2004.
6. Ефимов А.О. и др. Прогнозирование Dst-индекса, основанное на методах машинного обучения // Космические исследования. Т. 56. №6, 353-364. 2018.
7. Myagkova I. et al. Prediction of geomagnetic indexes with the help of artificial neural networks // E3S Web of Conferences. V. 20. Article 02011. 2017.
8. Мязгова И.Н. и др. Прогнозирование потока релятивистских электронов внешнего радиационного пояса Земли на геостационарной орбите с помощью адаптивных методов // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 57. №1, 10-18. 2017.
9. Kalegaev V., Kaportseva K., Myagkova I. et al. Medium-term prediction of the fluence of relativistic electrons in geostationary orbit using solar wind streams forecast based on solar observations // Advances in Space Research. V. 70. JASR 16172. 2022.
10. Gadzhiev I. et al. Use of classification algorithms to predict the grade of geomagnetic disturbance // Studies in Computational Intelligence. V. 1064, 426-435. 2023.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ВОЗДУХОЗАБОРНИКЕ СПУТНИКА НА СВЕРХНИЗКИХ ОРБИТАХ ЗЕМЛИ

А.Н. Якунчиков

art-ya@mail.ru

УДК 533.5, 533.6

Методом событийного молекулярно-динамического моделирования (EDMD) изучено течение разреженного газа в воздухозаборнике спутника в условиях сверхнизких орбит Земли (140 км). Воздухозаборник моделировался бесконечной периодической решеткой с каналами квадратного сечения. Изучено, как сужение эффективного аэродинамического сечения после такой решетки влияет на компрессию в ионизационной камере

Ключевые слова: аэродинамика, разреженный газ, сверхнизкие орбиты, EDMD.

Настоящая работа мотивирована идеей создания космических аппаратов (спутников) для сверхнизких орбит Земли, которые могли бы продолжительное время функционировать на орбите и делать это исключительно на возобновляемых ресурсах: рабочее тело (газ) для двигательной установки берется из атмосферы, а энергия вырабатывается солнечными батареями. Историю такой концепции и основные проблемы реализации таких устройств изложены в недавних обзорах [1–3]. Одна из ключевых проблем заключается в обеспечении двигательной установки достаточным количеством газа из атмосферы с заданной плотностью, которая на 2–3 порядка выше плотности атмосферы. Поэтому космический аппарат оснащается воздухозаборником, задача которого состоит в заборе газа из атмосферы и поддержании заданной плотности и расхода в ионизационной камере. Анализ и разработка геометрии таких воздухозаборников приводит к интереснейшей задаче динамики разреженного газа, решению которой и посвящена настоящая работа.

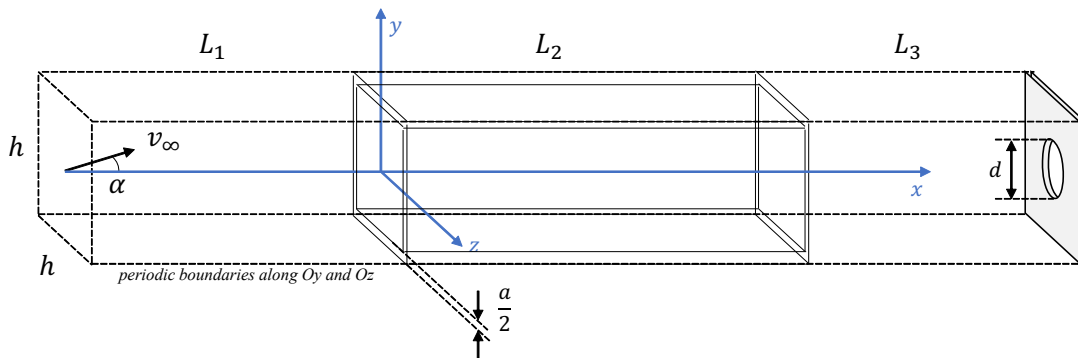


Рис. 1: Схема постановки задачи

Рассматривается бесконечная периодическая решетка (см. рис. 1) с каналами квадратного сечения. Позади решетки на некотором расстоянии располагается пластина с отверстиями, которая моделирует оптическую систему двигателя. На левой границе расчетной области задавался набегающий поток газа с заданной плотностью (для высоты 140 км) и скорости (порядка 8 км/с). На правой границе расчетной области ставилось условие полного поглощения молекул.

Задача решалась методом событийного молекулярно-динамического моделирования, развиваемого автором для решения широкого круга задач динамики разреженного газа [4–7]. Поле плотности для одного из вариантов геометрии решетки и нескольких размеров отверстий в задней пластине представлены на Рис. 2. Видно, что максимальной компрессии удастся достичь

Исследования проведены при финансовой поддержке в рамках программы Междисциплинарных научно-образовательных школ Московского университета (проект 23-Ш01-07)

Якунчиков Артём Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

в случае полностью перекрытого заднего сечения. Этот случай не имеет практической ценности, но удобен для проведения экспериментов. Чем больше отверстие в задней пластине, тем ниже компрессия будет в ионизационной камере. Начиная с $d/h = 0.4$, зависимости плотности от координаты перестают быть монотонными: максимум плотности формируется внутри канала воздухозаборника, а не в ионизационной камере. Также рассмотрен и предельный случай полностью открытой решетки (пунктирная линия). В этом случае плотная область образуется внутри канала решетки, газ растекается от нее в обе стороны.

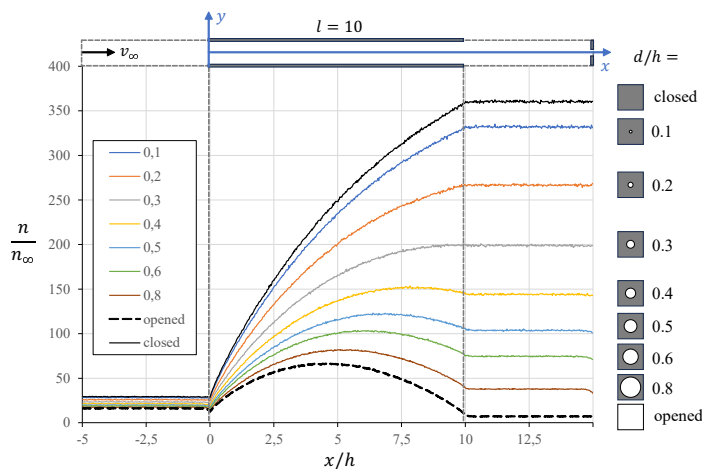


Рис. 2: Поле плотности в расчетной области для различных размеров отверстия $d/h=0.1-0.8$ (см. легенду) и двух предельных случаях – полностью закрытой (черная линия) и полностью открытой (пунктирная линия) решетки.

В результате проведенных исследований удалось сделать несколько практически важных выводов:

1. Поле течения в воздухозаборнике существенно зависит геометрии камеры за ним: чем меньше эффективное аэродинамическое сечение за камерой, тем выше компрессивное отношение.
2. Частичная проницаемость задней пластины качественно меняет характер зависимости компрессивного отношения от длины решетки воздухозаборника: с полностью закрытой решеткой эта зависимость монотонно возрастающая, с частичной проницаемостью зависимость имеет максимум.
3. Для рассмотренных геометрий влияние угла атаки на компрессивное отношение очень существенно. Угол атаки 5 градусов может снизить компрессию на четверть, угол атаки 10 градусов снижает компрессию вдвое.

Литература

1. A.S. Filatyev, A.A. Golikov, A.I. Erofeev, S.A. Khartov, A.S. Lovtsov, D.I. Padalitsa, V.V. Skvortsov, O.V. Yanova, Research and development of aerospace vehicles with air breathing electric propulsion: Yesterday, today, and tomorrow, Prog. Aerosp. Sci. 136 (2023) 100877. [10.1016/j.paerosci.2022.100877](https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2022.100877).
2. T. Andreussi, E. Ferrato, V. Giannetti, A review of air-breathing electric propulsion: from mission studies to technology verification, J. Electr. Propuls. 1 (2022) 31. [10.1007/s44205-022-00024-9](https://doi.org/10.1007/s44205-022-00024-9).
3. J. Wu, P. Zheng, Y. Zhang, H. Tang, Recent development of intake devices for atmosphere-breathing electric propulsion system, Prog. Aerosp. Sci. 133 (2022) 100848. [10.1016/j.paerosci.2022.100848](https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2022.100848).
4. A. Yakunchikov, V. Kosyanchuk, Application of event-driven molecular dynamics approach to rarefied gas dynamics problems, Comput. Fluids. 170 (2018) 121–127. [10.1016/j.compfluid.2018.05.002](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.05.002).
5. A. Yakunchikov, The outflow of gas mixture into vacuum, periodically interrupted by bodies moving towards the jet, Vacuum. 209 (2023) 111778. [10.1016/j.vacuum.2022.111778](https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2022.111778).
6. A. Yakunchikov, V. Kosyanchuk, A. Iuldasheva, Rotational relaxation model for nitrogen and its application in free jet expansion problem, Phys. Fluids. 32 (2020). [10.1063/5.0021704](https://doi.org/10.1063/5.0021704).
7. A. Yakunchikov, Heat transfer in a rarefied gas between profiled surfaces moving relative to each other, Int. J. Heat Mass Transf. 184 (2022) 122339. [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122339](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122339).

Секция 11

Актуальные проблемы преподавания математики в школе и в вузе

ИЗУЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА С ПОЗИЦИИ МЕТАПРЕДМЕТНОГО ПОДХОДА

Ю.В. Абраменкова, С.В. Барковская

abramenkovajulia@mail.ru, Sveta.barkovskaya@yandex.ru

УДК 372.851

В работе описано применение определённого интеграла в задачах из школьного курса физики, экономики, химии и географии. Приведены математические интерпретации представленных заданий. Выявлена трактовка неопределённого интеграла в рамках вышеперечисленных школьных предметов.

Ключевые слова: неопределённый интеграл, метапредметные результаты, практико-ориентированные задания.

Большинство обучающихся волнует вопрос применения знаний, полученных при изучении школьных предметов, в жизненных ситуациях или в будущей профессии. Отсутствие демонстрации указанной практической значимости предметных знаний на уроках негативно сказывается на мотивации к обучению.

Универсальным языком многих наук является математика, но вследствие сложности данного школьного предмета большинство времени урочной деятельности отводится для решения базовых математических заданий. А практико-ориентированные задания приводятся в программном учебнике, в основном, в небольших количествах [1].

Задачей современного образования является формирование целостного мировоззрения обучающегося, которое невозможно без изучения приложения математики в других школьных предметах.

Рассмотрим с позиции метапредметного подхода изучение определённого интеграла в школьном курсе алгебры и начал математического анализа. Согласно действующему образовательному

Абраменкова Юлия Владимировна, к.пед.н., доцент, Донецкий государственный университет (Донецк, Россия)

Барковская Светлана Вячеславовна, учитель математики, МБОУ «Школа No 4 города Дебальцево» (Дебальцево, Россия)

стандарту метапредметные результаты характеризуются освоением межпредметных понятий и формированием универсальных учебных действий [2].

Термин «интеграл» употребляется преимущественно в разрезе вышеуказанного школьного предмета, хотя прилагательное «интегральный» используется в общественном сознании для характеристики статуса, определяющего положение человека в обществе в целом, а также в информатике для обозначения типа данных. В предметах естественнонаучного цикла данный термин практически не употребляется, но использование этого математического аппарата достаточно обширно.

Чаще всего обучающиеся встречаются с применением определённого интеграла в физике. Приведём примеры таких заданий.

Задание 1. Скорость тела (м/с), движущегося прямолинейно, описывается уравнением $v(t) = 3t^2 - 2t$. Вычислить расстояние, пройденное телом за первые 5 секунд движения.

Задание 2. Сила тока в проводнике меняется со временем по закону $I = 4 + 2t$. Какое количество электричества проходит через поперечное сечение проводника за время от 2 до 6 секунд?

Вышеприведённые задачи не будут решены обучающимися без знаний таких физических понятий как прямолинейное движение, скорость тела, расстояние, пройденное телом (задание 1), сила тока в проводнике, электрический заряд (задание 2) и зависимостей между ними.

В данных задачах физический смысл интеграла определяется как обратное действие извлечению производной.

Такая же трактовка интеграла применима при решении экономических задач на вычисление выработки за определённый промежуток времени по заданному закону изменения производительности труда; среднего времени, затраченного на изготовление одного изделия по заданному периоду и функции, описывающей изменение затрат времени на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства.

Рассмотрим пример такого задания.

Задание 3. Найти объём продукции, которая выпущена работником за шестой час рабочего дня, если производительность его труда в этот период времени выражается формулой $f(t) = \frac{3}{4t+6} + 4$.

Решая данную задачу, обучающиеся повторяют из курса экономики такие понятия как объём выпущенной продукции, производительность труда. Также, зная экономический смысл производной (производительность труда — это производная объёма произведённой продукции по времени), старшеклассникам нетрудно будет догадаться, что решение задачи сводится к восстановлению функции по её производной. То есть требование задачи можно сформулировать математическим языком: найти значение определённого интеграла функции $f(t) = \frac{3}{4t+6} + 4$ на отрезке [5; 6].

В задачах из курса химии также есть место применению определённого интеграла: нахождение средней теплоёмкости в заданном интервале температур; тепла, расходуемого на нагревание тела на определённом температурном отрезке и т.д.

Как и в рассмотренных ранее примерах в химических задачах интеграл также используется как обратное действие дифференцированию.

Рассмотрим одно из заданий такого типа.

Задание 4. Определите количество тепла, необходимое для нагревания железной кастрюли массой 1 кг от 20 до 100°С, если теплоёмкость железа в этом температурном интервале определяется формулой $C = 0,441207 + 0,00059498t$ [3].

Исходя из того, что теплоёмкость — это производная от количества тепла, получаемого телом, по температуре, количество тепла, необходимое для нагревания котла равно определённому интегралу от функции C на отрезке [20; 100].

В школьном курсе географии также имеются задачи, которые решаются с помощью вычисления неопределённого интеграла.

Рассмотрим гидрологическую задачу.

Задание 5. Вычислить общую глубину проникновения воды в почву за период времени от 0,1 до 0,5 часа при условии, что скорость инфильтрации задана функцией $y = 15 + 5x^{-\frac{1}{2}}$, где y — скорость инфильтрации в мм/ч, а x — время в часах.

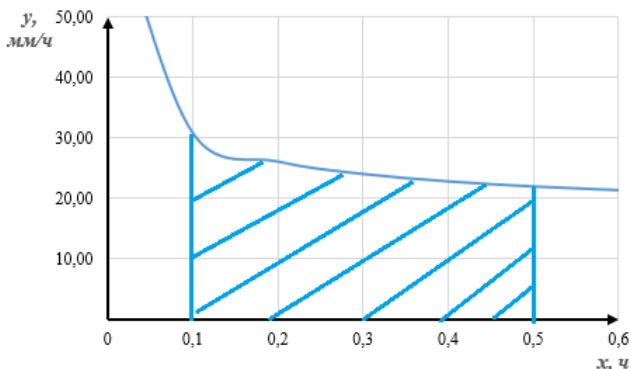


Рис. 1: Зависимость скорости инфильтрации от времени

Для наглядности изобразим график (рис. 1), выражающий зависимость скорости инфильтрации от времени: по оси x отмечено время проникновения воды в почву, а по оси y — скорость инфильтрации.

Площадь заштрихованной области — это искомая величина, т.е. общее количество воды, просочившееся в почву за промежуток времени от 0,1 до 0,5 часа.

Сформулируем математическую задачу, к которой сводится практико-ориентированная задача: найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,5$, осью Ox и графиком функции $y = 15 + 5x^{-\frac{1}{2}}$.

В данном примере имеет место геометрический смысл определённого интеграла.

Посредством решения практико-ориентированных задач у обучающихся формируются все виды универсальных учебных действий:

- *познавательные*, а именно видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других школьных предметах, выдвигать гипотезы при решении задачи, понимать необходимость их проверки, использовать математические закономерности, критически оценивать и интерпретировать информацию (накладывая ограничения на значения некоторых физических, экономических, химических величин);

- *коммуникативные* — участвовать в обсуждении хода решения задачи, грамотно аргументировать свою точку зрения;

- *регулятивные* — самостоятельно определять требования задачи и составлять алгоритм решения задачи, давать оценку приобретённому опыту.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что в большинстве рассмотренных случаев применения определённого интеграла для решения задач из предметов естественнонаучного цикла сводится к восстановлению функции, а затем вычислению её значения по известной производной. Обучающимся целесообразно предоставлять в урочной деятельности практико-ориентированные задания, так как их решение способствует не только демонстрации применения математического аппарата в других науках, но и достижению метапредметных результатов.

Литература

1. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и углублённый уровни. — Москва: Просвещение, 2022. — 384 с.

2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования [Электронный ресурс]: утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.05.2012 г. № 413. — Режим доступа: <https://docs.edu.gov.ru/document/bf0ceabdc94110049a583890956abbfa/>. — Заглавие с экрана. — Дата обращения 15.02.2024.

3. Е.Г. Евсева, Ю.В. Абраменкова, С.С. Попова. Математическое моделирование в химии: учебно-методическое пособие для студентов химических специальностей. — Донецк : ДонНУ, 2016. — 199 с.

КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ: ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА**В.В. Афанасьев, Е.И. Смирнов, С.А. Тихомиров***afvv2018@mail.ru, smiei@mail.ru, satikhomirov@mail.ru*

В докладе отражена история зарождения, становления и развития Международных Колмогоровских чтений под эгидой ЯГПУ им. К.Д.Ушинского.

Ключевые слова: Колмогоровские чтения, математика, школьное математическое образование, вузовское математическое образование, педагогический опыт учителей.

Хорошо известно, что родственники академика Андрея Николаевича Колмогорова по линии матери были выходцами из Ярославской губернии, а родовое имение Колмогоровых находилось в 20 км от Ярославля в поселке Туношна. В этой связи более 20 лет назад возникла инициатива проведения Колмогоровских чтений на Ярославской земле, приуроченных к его вековому юбилею и с целью отдать дань памяти, уважения, почёта выдающему учёному, педагогу, организатору. Примечательно, что вся сознательная жизнь А.Н.Колмогорова с юношеских лет была непрерывно связана с МГУ им. М.В.Ломоносова. Предтечей чтений явилась школа-семинар “Профессионализация предметной подготовки учителя математики в педагогическом вузе”, проводившаяся в Ярославском государственном педагогическом университете им К.Д.Ушинского в 2000-2002 гг.

Для участия в работе первых чтений, состоявшихся в апреле 2003 г., в ЯГПУ приехало свыше 100 учёных, педагогов, аспирантов, студентов из 40 регионов России. Особенностью конференции явилось и то, что она проходила в год 200-летия высшей школы г. Ярославля.

Самая представительная делегация во главе с ректором академиком РАН Виктором Антоновичем Садовничим и тогдашним деканом факультета педагогического образования членом-корреспондентом РАО Николаем Христовичем Розовым прибыла именно из МГУ. Вот почему обращение участников конференции к общественности о проведении таких чтений на регулярной основе в ЯГПУ получило всестороннюю поддержку.

В рамках пленарного заседания чтений В.А.Садовничий (рис. 1) обратился к участникам с приветственным словом. Виктор Антонович подчеркнул, что расцвет научно-педагогической деятельности А.Н.Колмогорова пришелся на 1950-1960-е гг., совпавшие с периодом мощного развития науки в стране, при этом научное и образовательное наследие Андрея Николаевича очень важно сохранить и приумножить для будущих поколений.

Среди многочисленных заслушанных после выступления Виктора Антоновича пленарных докладов стоит отдельно остановиться на докладах профессоров МГУ В.М.Тихомирова и Н.Х.Розова.

В своем докладе “Об Андрее Николаевиче Колмогорове. К 100-летию со дня рождения” прямой ученик А.Н.Колмогорова Владимир Михайлович Тихомиров подробно рассказал о величии академика Колмогорова как математика и как ученого с широчайшими интересами. Одним из многочисленных подтверждений этому служит хотя бы тот факт, что работы А.Н. Колмогорова по теории локального строения турбулентности были оценены в научных кругах, экспертным сообществом как достойные Нобелевской премии.

В свою очередь пленарный доклад Н.Х. Розова был посвящен в целом научно-педагогическому наследию А.Н.Колмогорова. В докладе Николай Христович резонно акцентировал внимание на том, что многие крупные научные результаты получили имя Колмогорова: “критерии Колмогорова”, “аксиоматика Колмогорова”, “теорема Колмогорова”, “КАМ – теория” и другие. Статьи, заметки, книги, вышедшие из-под пера Андрея Николаевича, по-прежнему очень актуальны, а по его учебникам обучаются математике тысячи учащихся. При этом изучение его неординарной биографии, разнопланового научно-педагогического и организаторского

Афанасьев Владимир Васильевич, д.пед.н., профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского (Ярославль, Россия)

Смирнов Евгений Анагольевич, д.пед.н., профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского (Ярославль, Россия)

Тихомиров Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского (Ярославль, Россия)



Рис. 1: Виктор Антонович Садовничий в Президиуме I Колмогоровских чтений

труда, ярких качеств его личности и нетривиальных жизненных взглядов находится далеко от полного завершения.

Затем с пленарными докладами выступили столь крупные ученые, педагоги как А.М. Абрамов, С.Н. Бычков, А.К. Кудрин, В.М. Монахов, В.А. Гусев и В.А. Тестов.

В последующие дни чтений успешно отработал целый ряд секций, посвященных современным проблемам математики и ее преподавания, вопросам истории и философии математики и математического образования.

Так более 20 лет назад на Ярославской земле было положено начало систематическому изучению жизни и деятельности, научных работ, а также воспоминаний учеников и коллег гениального педагога, математика и нашего земляка — Андрея Николаевича Колмогорова.

Судьба распорядилась таким образом, что А.Н. Колмогоров появился на свет 25 апреля 1903 года, и произошло это в Тамбове при возвращении семьи с Юга России в Ярославль. Мать Андрея Николаевича ушла из жизни буквально через считанные часы после рождения сына, ввиду чего воспитание маленького Андрея легло на плечи сестры матери — Веры Яковлевны Колмогоровой. Его детство прошло в посёлке Туношна, на берегах Волги под Ярославле — в имении деда Якова Степановича, а также в самом Ярославле — в доме на ул. Советской, 3. Вместе с сестрами Вера Яковлевна организовала в туношёнском доме “школу в миниатюре”, наладила издание детского семейного журнала “Весенние ласточки”, в котором мальчик заведовал математическим отделом. Именно в те времена и обнаружилось огромные способности ребенка к великой науке. Весьма символично и то, что последующие Колмогоровские чтения проводились в с. Лютово, по соседству от Туношны — на базе отдыха Ярославского педагогического. Тем самым, столь серьезный форум проводился практически на родине Колмогорова. Знаменательным событием стала публикация художественного произведения члена Союза писателей России, профессора В.С. Секованова о жизни и творчестве А.Н. Колмогорова [3].

Следует особо подчеркнуть, что во время работы первых чтений прошло также и торжественное открытие мемориальной доски на доме в Ярославле (рис. 2), в котором А.Н. Колмогоров жил в 1903-1910 гг., а через 3 года в соответствии с ходатайством ЯГПУ и решением городских властей началась подготовка к открытию в новом микрорайоне Ярославля улицы Академика Колмогорова (рис. 3).

С тех пор на базе ЯГПУ стали проходить ежегодные Международные Колмогоровские чте-



Рис. 2: Церемония открытия мемориальной доски с участием Виктора Антоновича Садовниченко на доме, в котором жил А.Н.Колмогоров в 1903-1910 гг.

ния, и проведены они были 13 раз. По результатам чтений были изданы труды, общим объемом 360 печ. л. при постоянной редакционной коллегии, в которую входили профессора МГУ Владимир Михайлович Тихомиров и Николай Христович Розов (см., например, [2]).

Примечательно, что второй приезд В.А. Садовниченко для участия в Колмогоровских чтениях состоялся в мае 2008 года, когда после пленарного заседания конференции и была торжественно открыта упомянутая выше улица Академика Колмогорова.

Необходимо подчеркнуть, что чтения быстро завоевали авторитет в научно-педагогическом сообществе, стали удачной площадкой для сотрудничества, взаимодействия специалистов из самых разных регионов России и зарубежья, утвердились как конференция широкого спектра направлений, предназначенная для активного обсуждения фундаментальных проблем современной науки и образования, а также содействия в подготовке кадров высшей квалификации, в том числе через апробацию исследований молодыми учёными. Огромную роль в этом сыграли ученики, коллеги и последователи Андрея Николаевича — Владимир Михайлович Тихомиров, Николай Христович Розов, Александр Михайлович Абрамов, Вадим Макариевич Монахов, Валерий Александрович Гусев, Геннадий Лаврович Луканкин, Сергей Николаевич Бычков, Валерий Васильевич Вавилов, а также такие выдающиеся учёные как Алексей Николаевич Паршин, Василий Алексеевич Исковских, Сергей Сергеевич Демидов, Валерий Борисович Алексеев, Владимир Петрович Одинец, Василий Яковлевич Перминов, Галина Павловна Матвиевская, Алла Ефимовна Малых, Галина Ивановна Сенкевич и другие. Имена многих из них так или иначе связаны с Московским государственным университетом. Неоднократно посещал форум и приемный сын А.Н. Колмогорова, ученый-математик, лауреат Ломоносовской премии МГУ Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов.

В 2016 г. основными постоянными организаторами, в число которых входят авторы доклада, было принято решение расширить географию проведения чтений и в дальнейшем проводить их в разных городах страны.

«Эстафетную палочку» от Ярославля первыми приняли коллеги из Коряжемского филиала Северного Арктического федерального университета имени М.В. Ломоносова (Архангельская



Рис. 3: Виктор Антонович Садовничий на торжественном открытии улицы Академика Колмогорова в Ярославле

область): XIV Колмогоровские чтения проходили там в сентябре 2017 г. и были приурочены к 100-летию выдающегося геометра Залмана Алтеровича Скопеца — основателя ярославской геометрической школы. Затем в г. Арзамасе Нижегородской области в филиале Национального исследовательского Нижегородского государственного университета имени Н.И.Лобачевского в сентябре 2019 года состоялись XV Колмогоровские чтения, посвященные памяти профессора Михаила Ивановича Зайкина. XVI Колмогоровские чтения «Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А.Н.Колмогорова» были организованы в декабре 2021 года в Костромском государственном университете. А в сентябре 2023 года по случаю 120-летия А.Н. Колмогорова в Вятском государственном прошли XVII Колмогоровские чтения. Огромную роль в плодотворном сотрудничестве с регионами России сыграла старший преподаватель кафедры геометрии ЯГПУ им. К.Д. Ушинского Ревекка Залмановна Гупель, дочь профессора З.А.Скопеца — соратника А.Н.Колмогорова по реформе математического образования.

Очередные XVIII Колмогоровские чтения запланированы на 2025 год в Тверском государственном университете [1], и славная традиция их проведения на всероссийском этапе будет непременно продолжена в будущем. Участие В.А. Садовничего как и всех представителей МГУ в чтениях, внёсшее существенный вклад в становление и развитие данного форума, всегда с душевным теплом вспоминается благодарными ярославцами и их коллегами.

Авторы доклада сердечно поздравляют Виктора Антоновича с наступлением знаменательного юбилея, искренне желают крепкого здоровья, долголетия, удачи и новых значимых успехов на всех направлениях многогранной деятельности во благо отечественной науки и образования!

Литература

1. *Афанасьев В.В., Вечтомов Е.М.* Международная научно-практическая конференция «XVII Колмогоровские чтения», посвящённая 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова // Математика в школе. 2024. №1. — 2024. — 63-66.

2. Труды X Колмогоровских чтений. Электронный ресурс. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29417423>

3. Секованов В.С. Академик АН СССР А.Н.Колмогоров: Жизнь в науке и наука в жизни гения из Туношны. URSS. // Серия: Наука в СССР: через тернии к звездам. — 2018. — 704 с.

УСВОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ

В.Ю. Бодряков

bodryakovyu@yandex.ru

УДК 372.851

В работе представлен инновационный коробочный образовательный продукт — система лабораторных работ по математике (ЛРМ) в качестве образовательного средства, способного обеспечить прочное усвоение математических понятий обучающимися на различных уровнях обучения; приведены и обсуждаются примеры таких работ.

Ключевые слова: ЛРМ, математические понятия, обучение математике.

В условиях неуклонного снижения уровня математической подготовки выпускников школ проблема усвоения фундаментальных математических понятий в процессе обучения математике приобретает всё большую остроту [6]. Снижение качества предметной подготовки абитуриентов с неизбежностью влечёт снижение качества профессиональной подготовки будущих учителей математики в педагогических вузах и приводит к дефициту учительских кадров [7], что ведёт к дальнейшему снижению качества массовой математической подготовки школьников. Уровень мотивации обучающихся к изучению математики низок. Петля математической некомпетентности затягивается всё туже [1]. Поиск новых, увлекающих подростков, средств и форм массового обучения математике стал ныне одной из наиболее важных задач исследований в области методологии обучения математике [2].

По мнению автора, лабораторные работы по математике (ЛРМ) являются одним из наиболее перспективных современных образовательных средств EdTech (Educational Technology), способных обеспечить IT-подкрепленное усвоение фундаментальных математических понятий при обучении математике, причём в естественной и гармоничной связи с другими контекстно связанными понятиями [3-5].

Цель настоящего сообщения — представить авторскую совокупность ЛРМ в качестве коробочного (цельного) инновационного образовательного продукта, и на конкретных примерах продемонстрировать возможности ЛРМ в обеспечении прочного усвоения математических понятий. Перечисленные ниже базовые ЛРМ реализуются автором в УрГПУ в течение более десяти лет при обучении будущих учителей математики и информатики математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистике, основам математического и компьютерного моделирования, и др.; число «респондентов» измеряется тысячами. ЛРМ как образовательный продукт является открытым и не только допускает, но и подразумевает постоянное обновление и пополнение. Темы проводимых базовых ЛРМ таковы.

ЛРМ-1. Определение геометрических характеристик участка земной поверхности с помощью мобильной геолокации (три памятника).

ЛРМ-2. Определение числа e путём оцифровки изображения свободно висящей цепи.

ЛРМ-3. Статистическое обоснование пиксельным методом формулы площади квадрата $S = a^2$.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства просвещения Российской Федерации по теме «Формирование исследовательских и предметно-методических умений учителей математики и информатики с применением цифровых лабораторных работ и симуляторов».

Бодряков Владимир Юрьевич, д.ф.-м.н., зав.кафедрой, Уральский государственный педагогический университет, Институт математики, физики, информатики (Екатеринбург, Россия)

ЛРМ-4. Статистическое обоснование пиксельным методом теоремы Пифагора: $S_c = S_a + S_b \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

ЛРМ-5. Определение числа π пиксельным методом.

ЛРМ-6. Определение формулы площади фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b .

ЛРМ-7. Изучение закона охлаждения тела путём теплообмена.

ЛРМ-8. Вероятность регистрации n ионизирующих частиц за время t счётчиком Гейгера (закон больших чисел).

Каждая из ЛРМ способствует усвоению фундаментальных математических понятий, таких как математическая модель, функция, мера множества, дифференциальное уравнение, закон больших чисел, и др.

Структура введения нового математического знания при использовании ЛРМ такова:

1. Предъявление обучающимся реального объекта, процесса, явления (прототипа) и описывающей его математической модели.
2. Введение фундаментальных понятий, связанных с моделью и прототипом, определение математического аппарата, необходимого для работы с моделью.
3. Поэтапное освоение компонентов необходимого математического аппарата с контролем достижения требуемого уровня.
4. Закрепление теоретического материала путем выполнения ЛРМ.

В качестве примера возможностей по расширению базового перечня ЛРМ приведем описание новой ЛРМ, не применяемой пока в практике массового школьного образования: ЛРМ «Определение радиуса Земли по характеристикам видимости морского маяка», которая может быть выполнена в период летнего отдыха. Целевая группа — учащиеся основной школы и старше, а также практикующие и будущие учителя различных направлений подготовки.

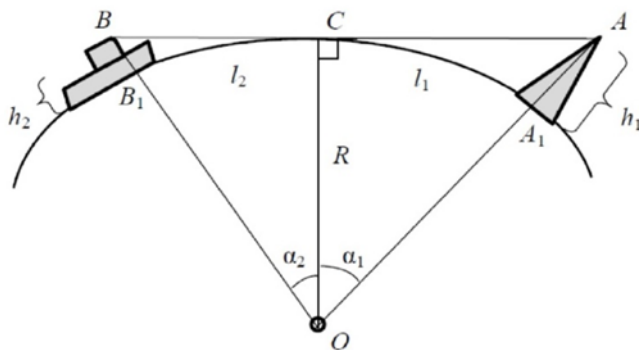


Рис. 1: Математическая модель задачи о расстоянии видимости маяка

Задача о расстоянии видимости морского маяка. К морскому маяку (объект A) с высотой огня над уровнем моря $AA_1 = h_1$ подплывает судно (объект B) с высотой рубки над уровнем моря $BB_1 = h_2$ (Рис. 1). Найдите расстояние l видимости маяка и по этим данным оцените радиус R Земли.

Решение. Как ясно из математической модели задачи в виде геометрического чертежа (Рис. 1), в момент появления огня маяка на линии горизонта для капитана в рубке корабля линия визирования BA становится касательной к поверхности земного шара. Пусть l_1 и l_2 — длины дуг CA_1 и CB_1 . Рассмотрим прямоугольный треугольник ACO . Для него очевидны соотношения:

$$\begin{cases} \frac{R}{R+h_1} = \cos \alpha_1; \\ l_1 = R\alpha_1. \end{cases} \quad (1)$$

С учетом того, что α_1 и $\frac{h_1}{l_1} = 1$ после преобразований для дуги CA_1 получим:

$$l_1 = \sqrt{2Rh_1}. \quad (2)$$

Аналогично, рассматривая треугольник BCO , для дуги CB_1 получим:

$$l_2 = \sqrt{2Rh_2}. \quad (3)$$

Из выр. (2) и выр. (3) для радиуса Земли получим соотношение:

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \right)^2,$$

где $l = l_1 + l_2$. Выбрав, в качестве прототипа построенной математической модели маяк в г. Сочи, для которого $l = 17 \pm 0,5$ морских миль; $h_1 = 35 \pm 0,3$ м; $h_2 = 5$ м, для радиуса Земли получим оценку $R = 7460 \pm 240$ км с относительной погрешностью 3,2%. Среднее оценочное значение R , против известного из астрономии $R_3 = 6370$ км, оказывается завышенным на $\approx 17\%$. Причина расхождения — наличие атмосферной рефракции (искривления) света, приводящей к отдалению линии горизонта для наблюдателя на Земле на $\epsilon = 7 \div 8\%$. Иными словами, вследствие рефракции света фактический (географический) путь на поверхности Земли удлиняется по сравнению с геометрическим (Рис. 1). Формула (4) с поправкой на рефракцию принимает вид:

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{l(1 - \epsilon)}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \right)^2.$$

Расчет по уточненному выр. (5) дает оценку $R = 6380$ км с погрешностью в 0,2%!

Таким образом, ЛРМ могут выполняться не только в классе, но и на местности, а в качестве лабораторного оборудования может служить весь земной шар! Глубоко интегрированные межпредметные связи ЛРМ (физика, география, история, и др.) и эмоциональное подкрепление в ходе выполнения делают усвоение фундаментальных математических понятий прочным. Одновременно формируются исследовательские умения и функциональная математическая грамотность обучающихся.

Литература

1. Бодряков В.Ю., Воронина Л.В. Проблемы качества математического образования в педагогическом вузе и пути их решения // Педагогическое образование в России. — 2018. — №2. — С.15-27.
2. Кузовкова А.А., Мамалыга Р.Ф., Бодряков В.Ю. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности // Математика в школе. — 2018. — №2. — С.35-42.
3. Бодряков В.Ю., Быков А.А. Цифровые лабораторные работы по математике как современный инструмент формирования обучающегося-исследователя // Педагогическое образование в России. — 2022. — №3. — С.148-159.
4. Бодряков В.Ю. Цифровые лабораторные работы по математике как воплощение когнитивно-деятельностного подхода к обучению будущих учителей // Вестник ОшГУ. Педагогика. Психология. — 2023. — №1(2). — С. 42-53.
5. Бодряков В.Ю. Усвоение фундаментальных математических понятий в процессе выполнения лабораторных работ по математике // Математика в школе. — 2023. — №7. — С.20-28.
6. Концепция развития математического образования в РФ. Утв. расп. пр-ва РФ от 24.12.2013 № 2506-р; с изменениями, утв. расп. Пр-ва РФ от 08.10.2020 № 2604-р.
7. Концепция подготовки педагогических кадров для системы образования на период до 2030 года. Утв. расп. Пр-ва РФ от 24.06.2022 № 1688-р.

НОВЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В КЛАССИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ РОССИИ

А.В. Булинский

alexander.bulinski@math.msu.ru

УДК 51(470)

Рассматриваются задачи, стоящие перед профессорско-преподавательским составом университетов в связи с актуализацией концепции развития математического образования в России.

Ключевые слова: обновленная концепция математического образования.

Президент РФ В.В. Путин в 2023 году поручил отказаться от Болонской системы образования и создать свою, основанную на «синтезе лучших практик СССР и опыта последних десятилетий». Различные задачи, связанные с процессом намеченных преобразований, были рассмотрены 23-24 ноября 2023 года на Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики. Кроме того, в декабре 2023 года ректор МГУ академик РАН В.А. Садовничий провел в МГУ совещание, в котором приняли участие Министр науки и высшего образования РФ В.Н. Фальков и Министр просвещения РФ С.С. Кравцов. В результате было решено разработать обновленный вариант концепции развития математического образования в России, а также другие важные документы.

Автор не предполагает дублировать свой пленарный доклад [1], в котором, в частности, говорилось о формальной и содержательной составляющей процесса обучения, а планирует сосредоточиться на задачах преподавания математики в классических университетах, которые вытекают из актуализированной концепции математического образования. При этом представляется важным обсудить и формы организации учебно-образовательной среды, поскольку наряду с фундаментальностью образования растет значение междисциплинарности подготовки молодых специалистов. Следует отметить, что для дальнейшего успешного движения в области образования необходимо проанализировать этапы развития университетского образования, выявить ошибки и отметить достижения. В этой связи мы рекомендуем обратиться к трудам академика РАН В.А. Садовничего (см., например, [2]), который подчеркивает, что в процессе обучения «главное – научить мыслить, рассуждать, доказывать».

В современных условиях, когда усилия руководства России направлены на обеспечение технологического суверенитета страны, очень важным является выбор, действительно, важных тем научной работы студентов и аспирантов, а также профессорско-преподавательского состава. Как указано в проекте концепции математического образования, на передний план выходит подготовка специалистов для работы в таких важнейших областях как информационные технологии, анализ больших баз данных, моделирование в машиностроении, энергетике и экономике, прогнозирование природных и техногенных явлений, разработка новых материалов, развитие биотехнологий и медицины, искусственный интеллект. Достижения в этих областях, опирающихся на математику, обеспечат прочное положение России в современном мире, укрепят ее авторитет. Существенную роль при этом могут играть Математические центры мирового уровня, созданные в РФ в последние годы.

Для реализации эффективного процесса обучения требуется помочь студентам научиться самостоятельно работать с научной литературой. Заслуживают внимания и вопросы «цифровизации преподавания». Следует добиваться высокой научности и ясного изложения материала на лекциях и семинарских занятиях, показывать, как применяется изучаемая теория в заданных направлениях подготовки студентов. Глубокое понимание студентами изучаемого материала является залогом того, что они смогут самостоятельно решать задачи, которые отличаются от предлагавшихся на занятиях, а также, спустя годы, сумеют вспомнить нужные результаты и методы. Поэтому требуется тщательно продумать, какие основные положения той или иной дисциплины и в какой форме надо предлагать для контроля успеваемости. Необходимо увязывать обучение с воспитанием молодежи, обращаясь к ярким примерам творчества выдающихся ученых на благо Родины. Нельзя забывать и о ценном классическом наследии в области педагогики вообще и преподавания математики, в частности, см., например, книгу [3].

В данном докладе будет затронут ряд проблем современного образования, в том числе связанных с выбором содержания изучаемых дисциплин. Следует подчеркнуть, что задача подъема уровня как среднего, так и высшего математического образования носит общегосударственный характер, поскольку математика лежит в основе целого ряда дисциплин.

Литература

1. Булинский А.В. Совершенствование учебно-методической работы в области университетской математики. Пленарный доклад на Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики и информатики (Москва, 23-24 ноября 2023 г.), <https://event.msu.ru/mct2023#live>
2. Садовничий В.А. Университет XXI века. Размышления об университетском образовании. Изд. 2-е, переработанное. М.: Издательство Московского государственного университета. 2018.
3. Хинчин А.Я. Педагогические статьи: вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами, 3-е изд. URSS, 2013.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ У ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ: ОТ ПРОСТЕЙШИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ ДО ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ В МГУ

А.П. Голуб

golub.ap@irlc.msu.ru

УДК 373.851

Рассмотрены особенности преподавания математики для иностранных учащихся, обучающихся в Институте русского языка и культуры (ИРЯиК) МГУ и поступающих на технические факультеты МГУ (механико-математический, физический, ВМиК).

Ключевые слова: математика, преподавание, иностранные учащиеся.

В работе представлены особенности преподавания курса “Математика” для иностранных учащихся.

Математика — одна из ключевых дисциплин для студентов естественно-технического отделения ИРЯиК МГУ. Специфика обучения заключается в том, что у студентов не просто разный уровень знания самого предмета, но и разный уровень владения русским языком.

Одной из основных задач является найти баланс между математикой и русским языком в математике. В первой половине обучения упор делается на русский язык и начинается с вводного курса [1]. Во второй половине больший упор ставится на математику, так как студент должен в итоге сдать вступительный экзамен по математике в МГУ.

Обучение проходит по учебникам [2,3]. Предмет имеет немало слов иностранного происхождения. В некоторой степени это облегчает и ускоряет обучение. Уделено внимание подаче материала в начале обучения, а также важность письменных контрольных работ на более поздних стадиях. Студенты должны понять условие задачи, решить её и объяснить последовательность действий. Приветствуется обсуждение всех операций среди студентов на русском языке, что позволяет лучше усваивать материал и применять его в дальнейшем. Уделяется особое значение постоянного повторения пройденного материала, так как предмет достаточно специфичен и преподаётся на русском языке для иностранцев. Важно непосредственное участие преподавателя в учебном процессе. В начале обучения необходимо чётко разъяснять пройденный материал и уделять больше внимание на произношение. Далее рекомендуется переходить на обычный темп речи, чтобы учащиеся понимали преподавателей на факультетах, которые работают с русскоязычной аудиторией.

Курс математики, один из этапов подготовки иностранных студентов к обучению на факультетах, является важным и интересным предметом в учебной программе.

Литература

1. Лазарева Е.А., Зверев Н.И. Математика. Вводный курс.
2. Лазарева Е.А., Пацей И.П., Буньяк Л.Н. Алгебра. Учебное пособие по математике для студентов-иностранцев подготовительных факультетов.
3. Лазарева Е.А., Зверев Н.И., Пацей И.П. Степени. Логарифмы. Тригонометрия.

Голуб Андрей Петрович, к.ф.-м.н., преподаватель, МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт русского языка и культуры (Москва, Россия)

МОНЕТНЫЙ НАБОР ДЛЯ ПРОФИЛАКТИКИ ДИСКАЛЬКУЛИИ У МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

О.А. Гузев

oleg.coin@mail.ru

Преодоление трудностей усвоения понятия числа и счетных операций — ключевая стадия профилактики детской дискалькулии. Некорректное введение цифр и операций с числами вначале обучения младших школьников может приводить к преждевременной перестройке интуитивной системы усмотрения количества, служащей эволюционной основой способностей к математике.

Чтобы процесс усвоения азов арифметики проходил успешно, необходимо его преобразить в игровую деятельность, направленную на гармонизацию сенсорной сферы ребенка и создание атмосферы детских открытий. Достичь такого преобразования можно посредством набора монет, развивающего способность соотносить образы разных модальностей восприятия количества.

Анализ многовекового использования обычных монет в психолого-педагогической практике показывает, что монеты способствуют привлечению внимания к учебному материалу, позволяют начать знакомство с цифрами, служат набором ценностей для изучения качества восприятия, выполняют функции средства повышения мотивации к познанию [1-3].

Однако набор обычных монет не может служить достаточно эффективным средством для профилактики дискалькулии у младших школьников. Для повышения эффективности использования такого средства предлагается воплотить в монетные диски, пользуясь термином К. Малевича, «прибавочные элементы» [4], перестраивающие монеты в полимодальные счетные конструкции.

По словам Г. Лейбница, «познание есть не что иное, как восприятие связи и соответствия» [5]. Воплотив в диски монет прибавочные элементы в виде зевов, пробоин и зубьев, получим набор монет-ключей, монет-мишеней, монет – мерных колес. Каждая монета предлагаемого набора характеризуется соответствием номинала количеству прибавочных элементов (например, количеству гексагональных зевов рис.1) или тесной связью номинала с такими элементами.



Рис. 1: Монеты-ключи разных номиналов

Кроме того, часть монет набора предложено выполнить в виде миниатюрных ударных музыкальных инструментов. Количество звуков, издаваемых каждой монетой с отличительным перезвоном (имеющей внутреннюю ступенчатую полость и бубенцовую дробинку) соответствует ее номиналу. Высота звука, издаваемого каждой монетой — музыкальной тарелкой также соответствует ее достоинству. По сути, номиналы таких звонких монет предстают «звучащими числами» рис.2.

Таким образом, номиналы монет (нумералы) предлагаемого набора представлены посредством визуального, тактильного и аудиального кодов. Поликодовое различие нумералов обеспечивается за счет конструктивных (инструментальных) особенностей монет. Профилактику детской дискалькулии у младших школьников посредством предлагаемого монетного набора можно разделить на три основных модуля.

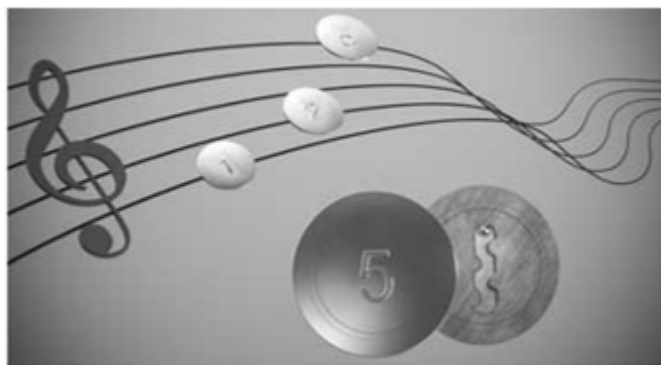


Рис. 2: Монета с отличительным перезвоном и монеты – музыкальные тарелки

Первый модуль направлен на актуализацию у ребенка перцептивных каналов восприятия количества. Ощущения, полученные ребенком в ходе полимодального обследования монет-ключей и звонких монет, служат базисом для формирования психологического образа числа. Чувственные образы числа формируются на основе интермодальных и интрамодальных сочетаний монетной информации о количестве.

Идентифицируя и сравнивая номиналы монет зрительно, тактильно и аудиально, ребенок постепенно приходит к пониманию того, что числа выражают количества единиц во множествах. Учащийся начинает осознавать, что количество может быть выражено как разными одноименными нумералами (например, цифрой номинала или последовательностью графем — числительным в монетной легенде), так и множествами элементов-единиц (например, множествами монетных зевов или звонов).

Математические игры с монетами-ключами и звонкими монетами, позволяющие акцентировать внимание на ту или иную модальность репрезентации количества, будут способствовать гармонизации сенсорных каналов восприятия ребенком концепта числа. Межсенсорное сравнение и распознавание монетных номиналов дает возможность ребенку расширить инструментарий для наблюдений за числами и катализировать формирование целостного представления о природе чисел.

Второй модуль направлен на осознание младшим школьником принципа позиционности — поместного значения цифр в записи числа. Распознавая путем мономодального (визуального) и полимодального (визуального и тактильного) восприятия номиналы монет-мишеней, ребенок усваивает такие понятия как фигура, соответствие, местоположение. Учащийся, идентифицируя номинал каждой монеты-мишени рис. 3, формирует зрительно-пространственные числовые представления.



Рис. 3: Монета-мишень

Третий модуль профилактики дискалькулии направлен на формирование у ребенка представлений о мере и простейших относительных измерениях. Данный модуль включает оценивания (определения) с помощью монет – мерных колес длины линий. Для этого каждую такую монету ребенок катит как миниатюрное мерное колесо вдоль извилистой или прямой линии, подсчиты-

вая вслух количество полных оборотов монеты и число «пройденных» зубьев при завершающем обороте монеты рис. 4. Диаметр каждой монеты – мерного колеса соответствует ее номиналу, как и число зубьев, размещенных равномерно вдоль гурта монеты.

Использование монеты-мерного колеса позволяет объективизировать счет. Развивая способности к оценке протяженности линий, ребенок соотносит зрительный, слухоречевой, тактильный и моторный опыт.

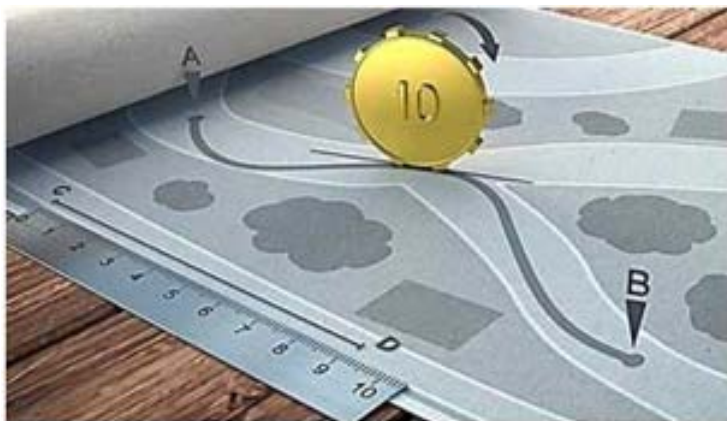


Рис. 4: Монета – мерное колесо для измерения длины линий на плане или карте

Использование монетного набора в профилактике детской дискалькулии может рассматриваться в контексте теории воплощенного познания. Перцептивный количественный и мерный опыт, получаемый младшими школьниками в процессе занимательных математических игр-занятий с монетами предлагаемого набора, может изучаться применительно к уточнению причин возникновения дискалькулии.

Применение монетных конструкций числа позволит проще отслеживать ход познавательного процесса, связанного с формированием у ребенка представлений о союзе знака числа и его понятийного содержания. Предлагаемый монетный набор может использоваться для коррекционно-развивающего обучения детей со слабым зрением или слухом.

Здесь параметр *scale* (число в виде десятичной дроби) подбирается вручную так, чтобы Ваш рисунок не вылезал на поля и не был, в то же время, слишком мелким.

Литература

1. *Montessori M., Gutek G.L.* : the origins of an educational innovation: including an abridged and annotated edition of Maria Montessori's *The Montessori method.* // Lanham, Md: Rowman & Littlefield Publishers. – 2004. P. – 233.
2. *Евтушевский В.* Методика арифметики. Пособие для родителей, учителей и учительских семинарий. Издание пятое. – Санкт-Петербург, 1874. – 156.
3. *Брунер Дж.* Ценности и потребности как организующие факторы восприятия // Хрестоматия по общей психологии. Выпуск III. Субъект познания / – В.В. Петухова, Ю.Б. Дормашева, С.А. Капустина.(ред.). – Москва, 1998. – 253-255.
4. *Малевич К.* Мир как беспредметность. Ч. 1. Введение в теорию прибавочного элемента в живописи // Малевич К. Собр. Соч. // Собр. Соч., 1998. – Т.2, 55-105.
5. *Лейбниц Г. В.* Сочинения: в 4-х т.// 1983. – Т.2, 270.

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО
МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ****А.И. Дзундза, И.И. Моисеенко, И.А. Моисеенко, В.А. Цапов***alladzundza@mail.ru, m3030103@yandex.ru, dekan.fmit.donqu@mail.ru, tsapva@mail.ru*

УДК 372.851

Изучается воспитательный потенциал прикладных задач при организации мировоззренчески ориентированного математического обучения будущих специалистов, анализируется общекультурная ценность математического знания.

Ключевые слова: прикладные задачи, мировоззренческое обучение математике.

Проблема усиления мировоззренческого потенциала математического обучения является особенно актуальной при проектировании содержания высшего образования на вновь присоединенных регионах РФ. Особого внимания ученых требуют вопросы разработки специальных методов и средств формирования патриотических, гражданских, нравственных ценностей у будущих специалистов. Безусловно, наиболее широкие возможности формирования мировоззренческих ориентиров личности имеют гуманитарные учебные дисциплины. Но, на наш взгляд, математическое обучение тоже имеет значительный потенциал при реализации целей мировоззренческого воспитания студентов, что подтверждается общекультурной ценностью математического знания и актуализирует задачи специального мировоззренчески ориентированного проектирования содержательно-дидактических и организационно-методических основ математического обучения.

Эффективным средством мировоззренческого обучения математике является применение прикладных задач с целью формирования у студентов таких морально-волевых качеств, как целеустремленность, настойчивость, ответственность, самостоятельность, основанных на важных навыках практико-ориентированной деятельности, требующей самостоятельного выполнения необходимых измерений, тождественных преобразований, графических построений, поиска специальных сведений в современных источниках информации. Мы широко применяем на занятиях задачи из области архитектуры и строительства, направленные на формирование эстетического вкуса, образного мышления и логической культуры; задачи, предполагающие геометрическую интерпретацию аналитических объектов; задачи на применение методов математического моделирования социальных процессов и явлений; занимательные задачи и задачи из литературных источников; перевернутые задачи; задачи социально-экономического содержания [1,2]. В фабулу таких задач мы включаем экономические категории (доходность бизнеса, распределение ресурсов, эластичность спроса и предложения, особенности продаж на маркетплейсах и пр.), социальные и политологические понятия и явления (анализ предпочтений избирателей, статистику доходов населения, влияние рекламы на потребительское поведение, анализ рисков при проведении избирательных кампаний и пр.), экологические и медицинские проблемы (параметры загрязнения окружающей среды, статистику и количественные характеристики распространения вирусных инфекций и пр.), обсуждаем физические и химические законы. Поскольку на первом этапе решения прикладной задачи предполагается формулирование условия на формальном математическом языке, то перед студентами раскрываются возможности использования математических теорий при анализе мировоззренческих основ окружающей действительности и в других естественнонаучных дисциплинах. В процессе решения прикладных задач студенты приходят к выводу о том, что современные математические теории глубоко проникают в общекультурные процессы жизнедеятельности человеческого общества, поэтому значительно углубляется мировоззренческая сущность математических законов.

Дзундза Алла Ивановна, д.пед.н., профессор, Донецкий государственный университет, факультет математики и информационных технологий (Донецк, Россия)

Моисеенко И.И., аспирант, Донецкий государственный университет, факультет математики и информационных технологий (Донецк, Россия)

Моисеенко Игорь Алексеевич, д.ф.-м.н., доцент, Донецкий государственный университет, факультет математики и информационных технологий (Донецк, Россия)

Цапов Вадим Александрович, д.пед.н., доцент, Донецкий государственный университет, факультет математики и информационных технологий (Донецк, Россия)

Заметим, что использование прикладных задач целесообразно и в школьном курсе математики. Поэтому с будущими учителями математики мы обсуждаем возможности применения в задачах с практическим содержанием действий с дробями, процентами; пропорций; арифметической и геометрической прогрессий и пр. Студенты — будущие учителя с интересом самостоятельно составляют такие задачи и впоследствии применяют их во время прохождения педагогической практики.

Итак, при проектировании учебно-воспитательного процесса в высшей школе необходимо активно заниматься вопросами разработки и внедрения различных форм, методов и средств всестороннего развития личности студента. Наряду с формированием у будущих специалистов глубоких знаний в соответствующей предметной области важно уделять особое внимание мировоззренческому воспитанию молодого поколения.

Литература

1. *Дзундза А.И.* Мировоззренчески ориентированные задачи как средство мировоззренческого обучения математическим дисциплинам будущих специалистов / А.И. Дзундза, И.А. Моисеенко, В.А. Цапов // Математический вестник Вятского государственного университета. — 2022. — № 3 (26). — С.33-37.
2. *Дзундза А.И.* Профессионально-педагогические ориентиры в структуре системы мировоззренческих ориентиров будущих специалистов / А.И. Дзундза, В.А. Цапов // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. — Вып. 39: Серия «Педагогика» (История и теория математического образования). — Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2018. С. 58-68.

ПРИНЦИПЫ СОЗДАНИЯ ЦИФРОВЫХ ОБУЧАЮЩИХ ТРЕНАЖЕРОВ ДЛЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯ И КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Н.В. Дударева, Е.А. Утюмова

dudareva-geom@yandex.ru, utyumovaea@mail.ru

УДК 378.147

В статье рассматриваются вопросы создания цифровых образовательных тренажеров. Описываются принципы построения цифровых тренажеров, способствующих закреплению и контролю знаний учащихся в процессе обучения математике в основной и старшей школе.

Ключевые слова: цифровизация образования, цифровые образовательные ресурсы, обучение математике, цифровые обучающие тренажеры.

Основные тенденции развития общества связаны с информатизацией и цифровизацией всех сфер деятельности индивидуума. Доступность, свобода поиска информации и коммуникации между людьми приводит к изменениям не только времяпровождения человека, общения, профессиональной деятельности, но и образовательного процесса. Сочетание реальных и цифровых, интерактивных образовательных ресурсов и средств обучения предполагает множество вариантов проектирования образовательного процесса и создания индивидуальных траекторий обучения.

В настоящее время электронные образовательные ресурсы в учебном процессе используются достаточно активно. Однако, неопределенность и изменчивость современного мира требует постоянного совершенствования процесса их разработки для поддержания актуальности и востребованности данных цифровых средств обучающимися.

Существует большое количество исследований (О.В. Блинова, Н.А. Сеногноева [1], Е.А. Волкова [2], Л.И. Долинер, В.Л. Назаров [3], А.В. Искандерова [4], Б.И. Ким [5], Е.А. Кокшарова [6],

Исследование выполнено при поддержке Научно-методического центра сопровождения педагогических работников ФГБОУ ВО «УрГПУ» в рамках реализации университетского гранта «Цифровые тренажеры по математике как средство устранения дефицитов педагогов в области предметных знаний».

Дударева Наталия Владимировна, к.пед.н., доцент, Уральский государственный педагогический университет, Институт математики, физики, информатики и технологий (Екатеринбург, Россия)

Утюмова Екатерина Александровна, к.пед.н., доцент, Уральский государственный педагогический университет, Институт педагогики и психологии детства (Екатеринбург, Россия)

О.А. Бессонова, Л.И. Миронова [7], М.В. Худжина [8] и др.), посвященных организации образовательного процесса с использованием цифровых, интерактивных образовательных ресурсов и средств обучения. Ученые отмечают повышение учебных результатов за счет визуализации обучающего материала, интенсификации образовательного процесса, активизации познавательной деятельности, вовлеченности обучающихся.

Согласно исследованиям В.В. Артемьевой, Л.В. Ворониной, Е.А. Утюмовой [9], Н.В. Дударевой [10] цифровые тренажеры представляют собой цифровые образовательные ресурсы, регламентирующие самостоятельную работу обучающихся, предполагающие посредством удаленного взаимодействия с пользователем многократное решение похожих заданий для осмысления, закрепления пройденного материала и формирования умений применять усвоенные знания при решении учебных, профессиональных и практико-ориентированных задач. Цифровые образовательные тренажеры являются компонентом информационно-методического обеспечения образовательного процесса, применяемого чаще всего на этапе закрепления и контроля знаний и умений обучающихся по конкретной дисциплине.

Теоретический анализ литературы по проблеме разработки электронных образовательных ресурсов, в частности цифровых тренажеров, обучающих тестов, а также обобщение практики их использования в процессе обучения математике в средних и старших классах позволяют определить принципы создания цифровых тренажеров для выстраивания индивидуальных образовательных маршрутов у учащихся в процессе обучения математике:

1) принцип модульности, который определяет логику построения обучающего материала; содержание должно быть разбито на разделы, состоящие из модулей, минимальных по объему и целостных по содержанию, чтобы поддерживать на должном уровне мотивацию и темп обучения;

2) принцип полноты определяет структуру каждого модуля, входящего в состав цифрового тренажера; модуль должен содержать теоретическое ядро, контрольные теоретические вопросы, задачи и упражнения для самостоятельного решения;

3) принцип системности, предполагающих целостное построение учебного материала, где модули содержательно и структурно связаны между собой;

4) принцип интерактивности, позволяет обеспечить выстраивание обратной связи между обучающимся и преподавателем (как послеоперационной, так и отсроченной), а также наличие возможности для создания индивидуальной последовательности прохождения тренажера и перехода из одного модуля в другой;

5) принцип открытости, согласно которому цифровой тренажер должен предусматривать возможность дополнения образовательной информацией, новыми типами заданий, в соответствии с требованиями федеральной рабочей программы и изменяющимся содержанием итоговой аттестации по математике;

6) принцип самостоятельности, под которым подразумеваются самоорганизация обучающихся, самостоятельный подбор необходимого материала и осуществление рефлексии и самооценки.

Созданный с учетом данных принципов цифровой тренажер позволит организовать познавательную деятельность обучающегося по самостоятельному совершенствованию знаний и приобретению умений использовать изученный материал для решения конкретных задач в изучаемой им предметной области.

Литература

1. *Блинова О.В., Сеногноева Н.А.* Формирование общих и профессиональных компетенций при обучении математике в учреждениях среднего профессионального образования тестами учебной деятельности // Инновации в профессиональном и профессионально-педагогическом образовании: материалы 24-й Международной научно-практической конференции, Екатеринбург, 23-24 апреля 2019 года / Под научной редакцией Е. М. Дорожкина, В. А. Федорова. — Екатеринбург: Российский государственный профессионально-педагогический университет, 2019. — С. 171-178. — EDN HORFKS.

2. *Волкова Е.А.* Некоторые аспекты оценки качества разработки обучающих тестов по математике // Образовательные технологии и общество. — 2015. — Т. 18, № 2. — С. 555-567. — EDN TTIDHX.

3. *Назаров В.Л., Долинер Л.И.* Влияние цифровой трансформации школьного образования на успеваемость школьников в условиях пандемии COVID-19: опыт Свердловской области: монография. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2023. — 110 с. — ISBN 978-5-7996-3744-6. — EDN PUEVVK.

4. *Искандерова А.Б.* Проектирование адаптивных контрольно-обучающих тестов для студентов бака-

лавриата в техническом вузе: специальность 13.00.08 “Теория и методика профессионального образования”: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. — Ижевск, 2011. — 22 с. — EDN QHGRFD.

5. *Ким Б.И.* Инновационная система знаниевых тестов и учебно-обучающего тестирования в достижении качества образования // Теоретические и прикладные аспекты современной науки. — 2015. — № 8-5. — С. 54-59. — EDN TLIAOR.

6. *Кокшарова Е.А.* Выбор критериев эффективности для педагогической экспертной системы, осуществляющей оценку качества обучающих тестов // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 3: Педагогика и психология. — 2009. — № 4. — С. 60-63. — EDN KYLHDJ.

7. *Бессонова О.А., Миронова Л.И.* Электронный образовательный ресурс по дисциплине «Организация, планирование и управление в строительстве» // Педагогическое образование в России. — 2023. — № 5. — С. 96-105. — EDN LFSJUV.

8. *Худжина М.В., Горлова С.Н., Баталкина А.Г.* Особенности содержания обучающих тестовых заданий по математике для студентов учреждений среднего профессионального образования // Вестник Нижневартковского государственного университета. — 2021. — № 4(56). — С. 37-47. — DOI: [10.36906/2311-4444/21-4/04](https://doi.org/10.36906/2311-4444/21-4/04). — EDN QJBTSM.

9. *Воронина Л.В., Артемьева В.В., Утюмова Е.А.* Формирование информационной грамотности в процессе обучения математике // Педагогическое образование в России. — 2023. — № 5. — С. 51-61. — EDN WXDWKW.

10. *Дударева Н.В., Лаптева П.А.* Методические аспекты разработки обучающих тестов для использования в учебном процессе // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. — 2023. — № 8. — С. 39-46. — EDN QREJLS.

ПОДГОТОВКА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В МАГИСТРАТУРЕ К ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Е.Г. Евсеева

e.evseeva.dongu@mail.ru

УДК 372.851

Рассмотрена проблема подготовки преподавателей математики для работы в условия онлайн и дистанционного обучения. Рассмотрено развитие в магистратуре профессиональной цифровой компетентности будущего учителя математики, позволяющей ему осуществлять обучение математике в цифровой образовательной среде. Соответствующая структура этого феномена отображена в модели тремя компонентами: математико-цифровым, методико-цифровым, и проектно-цифровым.

Ключевые слова: подготовка учителя математики, магистерская программа «Математическое образование», цифровая образовательная среда, профессиональная цифровая компетентность.

В последние годы актуализировалась проблема подготовки нового поколения учителей математики. По мнению С.Л. Атанасяна, И.С. Сафуанова и Н.В. Чуйковой, сегодня растет спрос на магистерские программы по математическому образованию в силу того, что магистры математического образования должны обладать более глубокими знаниями в области математики, а также в области педагогических наук и уметь применять эти знания в практической и исследовательской работе. Учеными предложены новые подходы к подготовке учителей математики в образовательных программах магистратуры, которые учитывают компетентностные модели обучения [1].

Последние годы возросла доля он-лайн обучения в образовательном процессе на всех уровнях образования. В Донецкой Народной Республике обучающиеся образовательных организаций как

Евсеева Елена Геннадиевна, д.п.н., профессор, Донецкий государственный университет, факультет математики и информационных технологий, кафедра высшей математики и методики обучения математики (Донецк, Россия)

общего, так и среднего профессионального, а также высшего образования, уже 4 года находятся на дистанционном обучении, не имея возможности приступить к традиционному, контактному учебному процессу. В связи с этим учителю математики приходится решать проблемы математического образования, связанные с электронным обучением, такие как снижение уровня математической подготовки абитуриентов, низкая учебная мотивация, сложности в организации учебной деятельности в условиях цифровой образовательной среды.

Под цифровой образовательной средой понимается совокупность условий для реализации образовательных программ с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, с применением электронной информационно-образовательной среды, которая включает в себя цифровой образовательный контент, электронные информационные и образовательные ресурсы, технологические средства и объединяет всех участников образовательного процесса. В цифровой образовательной среде в качестве средств обучения используются цифровые образовательные ресурсы (ЦОР), среди которых образовательные платформы, сайты, педагогические блоги, различные электронные методические и дидактические материалы, а также программы, ресурсы, приложения, разработанные с использованием цифровых, облачных, мобильных и других технологий и т.п. [2].

По нашему мнению, современные магистры математического образования должны иметь фундаментальную математическую подготовку в сочетании со сформированной методической компетентностью, быть способными к осуществлению обучения в цифровой образовательной среде. В связи с этим формирование цифрового компонента профессиональной компетентности учителя приобретает все большее значение. Рассматривая профессиональную деятельность учителя математики и основываясь на Европейской модели компетенций педагога DigCompEdu [3], разработана модель его профессиональной цифровой компетентности (ПЦК), в которой данный феномен рассматривается как часть профессиональной компетентности учителя и трактуется как интегративное качество его личности, характеризующееся знанием, пониманием, готовностью и способностью к выполнению с применением цифровых инструментов: математической деятельности; организации учебной деятельности обучающихся по математике; проектирования обучения математике, включая разработку собственных цифровых средств обучения. Соответствующая структура этого феномена отображена в модели тремя компонентами: математико-цифровым, методико-цифровым, и проектно-цифровым [4].

Формирование ПЦК учителей математики в Донецком государственном университете ведется в процессе профессиональной подготовки по программе бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (Профиль: математика и информатика), а дальнейшее развитие – в рамках магистерской программы «Математическое образование» по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование.

В магистратуре предусмотрено развитие ПЦК учителей математики за счет формирования у них способности и готовности к выполнению способов профессиональной деятельности в цифровой образовательной среде с использованием ЦОР. При этом развитие у будущих учителей каждого из компонентов профессиональной цифровой компетентности в магистратуре происходит при изучении определенных дисциплин. Так, математико-цифровой компонент ПЦК формируется при изучении таких дисциплин: «Избранные разделы высшей математики»; «Логика и методология математического моделирования»; «Элементы финансовой математики»; «Компьютерный эксперимент в обучении математике»; «Реализация математической деятельности посредством информационных технологий» и др.

Так, изучение этих дисциплин позволяет сформировать у студентов навыки использования в обучении пакетов компьютерной алгебры, разработки и внедрения компьютерных экспериментов в учебный процесс при изучении школьниками различных разделов математики на базовом и углубленном уровне. Таким разделом, например, является стохастика, введенная в последние годы в обучение математике в 7-11 классах основной и средней школы как отдельный учебный предмет «Вероятность и статистика». В связи с этим магистранты должны владеть способами вычислений, моделирования и реализации математической деятельности с использованием MS Excel, Mathcad и других инструментов.

Методико-цифровой компонент ПЦК совершенствуется при изучении дисциплин методического цикла таких, как «Интерактивные средства дистанционного взаимодействия с обучающимися»; «История и методология математики»; «Методика обучения математике в услови-

ях реализации ФГОС»; «Достижение метапредметных результатов в обучении математике в школе»; «Мировоззренческий потенциал математического образования»; «Нестандартные методы решения математических задач»; «Методика обучения решению олимпиадных задач». При изучении этих дисциплин студенты осваивают методику комплексного использования электронных средств учебного назначения (ЭСУН) для проектирования и организации обучения математике на уровнях общего и дополнительного образования. При этом предполагается использование различных программных средств (обучающих, контролирующих, информационно-справочных, информационно-поисковых, моделирующих, демонстрационных, учебно-игровых, тренажерных), а также систем дистанционного обучения. Главной задачей является развития методико-цифрового компонента ПЦК формирование у будущих учителей математики умений определения оптимального ЭСУН для каждого этапа обучения и вида учебной деятельности. Особую актуальность эта задача приобретает при развитии методической компетентности учителя математики по проектированию обучения курсу «Вероятность и статистики», поскольку обучающиеся часто испытывают трудности при усвоении его содержания, а учителя математики испытывают потребность в инструментах повышения эффективности обучения.

Развитие проектно-цифрового компонента ПЦК учителя математики возможно в процессе изучения дисциплин «Электронные ресурсы и цифровые технологии в образовании», «Проектирование учебной деятельности по математике», «Проектирование дополнительного математического образования»; «Исследовательская и проектная деятельность учащихся по математике»; «Педагогические измерения»; «Управление проектно-эвристической деятельностью обучающихся». Особое значение для развития этого компонента имеет освоение студентами приёмов разработки собственных электронных средств учебного назначения: программ из серии эвристико-дидактических конструкций (ЭДК); мультимедийных тренажеров и других электронных средств учебного назначения, онлайн курсов.

Так, при обучении дисциплине «Педагогические измерения» студентам могут быть предложены проекты по проведению педагогического эксперимента, направленные на формирование компетенций в области аналитики образовательных данных. Экспериментальной базой для проведения педагогического эксперимента выступают образовательные организации, которые являются базами для прохождения практики студентами во время обучения в магистратуре. Магистранты приобретают опыт выполнения таких видов деятельности как обработка результатов тестирования; мониторинг качества математической подготовки учащихся; применение компьютерных средства для измерения и контроля результатов обучения; применение современных методов сбора, анализа и обработки информации; планирование, организация, и реализация педагогического эксперимента; применение пакетов прикладных программ для статистической обработки экспериментальных данных (Statistica, SPSS и др.).

Таким образом, подготовка учителя математики к проектированию и организации обучения в цифровой образовательной среде является необходимым условием успешности его профессиональной деятельности и определяет его конкурентоспособность на современном рынке труда. Формирование математико-цифрового компонента профессиональной цифровой компетентности происходит за счет применения цифровых инструментов при изучении математических дисциплин, методико-цифрового — освоения способов действий по организации обучения математике в школе с применением цифровых инструментов, а проектно-цифрового — за счет освоения приёмов разработки электронных средств учебного назначения по математике.

Литература

1. Атанасян С.Л., Сафуанов И.С., Чуйкова Н.В. Новые подходы к магистерской подготовке учителей математики // Наука и Школа. 2021. №2. С. 147-152. [10.31862/1819-463X-2021-2-147-152](https://doi.org/10.31862/1819-463X-2021-2-147-152).
2. Карпенко, А.С., Павлова С.М. Цифровая образовательная среда в России: проблемы, опыт внедрения и перспективы / А. С. Карпенко, // Человеческий капитал. — 2021. — №12(156). Том 2. — С. 43-52. [10.25629/НС.2021.12.40](https://doi.org/10.25629/НС.2021.12.40).
3. McGarr, O. & McDonagh, A. (2019) Digital Competence in Teacher Education, Output 1 of the Erasmus+ funded Developing Student Teachers' Digital Competence (DICTE) project. — URL: <https://dicte.oslomet.no/>.
4. Евсеева Е.Г., Скворцова Д.А. Моделирование цифровой компетентности учителя в контексте математического образования // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2023. Вып. 2 (58). С. 29-36. [10.24412/2079-9152-2022-58-29-36](https://doi.org/10.24412/2079-9152-2022-58-29-36).

ИЗ ПРАКТИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ НА ПРЕДВУЗЕ ДЛЯ БУДУЩИХ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ-БАКАЛАВРОВ. ОПЫТ ИРЯИК МГУ

В.М. Ермаков

ermakov.vm@irlc.msu.ru

УДК 811.161.1, 378.14

Доклад посвящён практическим вопросам преподавания математики слушателями, поступающими в МГУ на бакалавриат. Кратко изложены некоторые методические приёмы, наиболее существенные организационные вопросы

Ключевые слова: Предвуз, иностранные студенты, студенты-бакалавры.

В докладе речь пойдёт о занятиях на предвузе со слушателями, поступающими в МГУ на бакалавриат.

Практическими задачами, вытекающие из целей данного курса, являются:

– обучить русской математической терминологии, лексическим конструкциям (в рамках элементарной математики);

– дополнить знания иностранных студентов темами, отсутствующими в их Программе по школьной математике или слабо усвоенными слушателями, но которые необходимо или желательно знать при освоении математических курсов бакалавриата по Программам МГУ.

Следует подчеркнуть, что довольно большой фактический материал следует освоить за сравнительно небольшой срок, при первоначальном, как правило, очень слабом или даже просто нулевом знании русского языка. При желательно, чтобы математическая лексика была освоена хотя бы в том минимальном объёме, который при дальнейшем обучении на бакалавриате сможет послужить основой для понимания математических дисциплин как непосредственно на занятиях, так и для работы с учебной математической литературой.

Занятия в данном курсе по математике для иностранных граждан начинается со знакомства слушателей с азами математической лексики на примерах простейшего раздела – Арифметики. Дальнейшее изучение математической терминологии даётся в рамках обычной школьной программы.

Сделан ряд замечаний относительно китайских слушателей, особенностях их подготовки.

Не самой сильной стороной подготовки студентов, в частности, китайских, можно считать всё, что касается, условно говоря, формальной логики, хотя, с основными логическими понятиями и символами большинство из них хорошо знакомы. Например, многие студенты недостаточно твёрдо знают, что такое необходимый и достаточный признаки; прямая и обратная теорема и т.д.

Несколько слов сказано и о применении в практике обучения традиционных средств символической наглядности (чертежи, схемы, таблицы и т.п.), а также наглядных моделей (координатная прямая, координатная плоскость, графики функций и т.п.), что позволяет свести к минимуму словесные разъяснения, что снижает влияние языкового барьера и повышает доступность обучения.

Для закрепления русской терминологии и характерных оборотов, оказалась полезной неоднократно опробованная практика тестирования на знание математической лексики по методике, много лет практикующейся в Институте русского языка и культуры.

Несколько слов посвящено организации учебного процесса: используемых методах контроля качества освоения материала, домашним заданиям.

Литература

1. Лазарева Е.А., Пацей И.П., Вуколова Т.М. Алгебра // Учебное пособие по математике для студентов-иностранцев подготовительных факультетов. — Москва: Ред.-изд. Совет МОЦ МГ, 2015.

Ермаков Вячеслав Михайлович, ст. преп., Институт русского языка и культуры МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

2. *Ермаков В.М.* Преподавание математики на русском языке для студентов-иностранцев, поступающих в магистратуру и аспирантуру естественнонаучных направлений. Преподавание общеобразовательных предметов на русском языке в иноязычной аудитории. // Сборник материалов. Международный практический семинар, 22 мая 2014 г. — Москва: 2015. — 173-180.

СИСТЕМА РАННЕГО ВЫЯВЛЕНИЯ НЕСФОРМИРОВАННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ НА ОСНОВЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Н.И. Зотова

zotka.nat@mail.ru

УДК 372.851

Качественное математическое образование – успешность ученика в будущей профессии, даже если она с математикой не связана. На основе современных информационных технологий, не создавая дополнительной нагрузки на учителя, можно эффективно выявлять несформированность математических знаний.

Ключевые слова: методика, система, технологии.

В современной системе среднего общего образования предмет математика занимает особое место. Это первый из учебных предметов в изучении которого Федеральными государственными образовательными стандартами основного общего образования предусмотрена возможность в 7 – 9 классах освоение содержания на углубленном уровне.

Такое внимание к математике ставит очень важную методическую задачу: создать систему позволяющую выявлять несформированность математических знаний на самых ранних этапах изучения каждого раздела школьного курса. С одной стороны, это позволит избежать, на основе объективных сведений об успеваемости, зачисления в классы с углубленным изучением математики неподготовленных учащихся. С другой стороны, своевременно выявлять ситуации, когда такое обучение может оттолкнуть ученика от занятий математикой. Кроме того, наличие системы позволит не сводить выявление неуспешности к регистрации неудовлетворительных результатов, или различных динамик, путем проведения контрольных работ (мониторингов, независимых оценок и т.д.).

В основе системы лежат информационные технологии, которые не требуют от учителя никаких дополнительных действий, а, наоборот, позволяют видеть какая тема не усвоена (тематическое оценивание), какие знания и на каком этапе впервые оказались не сформированы. Достаточно использовать всего две платформы: «электронная школа» и «гиперматика». Важно отметить, что нет необходимости в разработке каких – то специальных тестов или контрольных работ, заменяющих или наоборот – включенных дополнительно, для того, чтобы выявить несформированность математических знаний.

В изучении любой темы школьного курса математики (тематического оценивания) можно увидеть, что несформированность знаний в одном неизменно ведет к невозможности сформировать знания в другом. Например, если ученик не научился решать линейные уравнения, то научится решать задачи на составление линейных уравнений, систем линейных уравнений, исследовать линейную функцию он уже не сможет. Такая особенность и позволяет с использованием информационных технологий своевременно выявлять несформированность знаний.

Система состоит из следующих действий учителя:

- при внесении календарно – тематического планирования (КТП) в «электронную школу» маркируются взаимосвязанные темы (как в примере с линейным уравнением),
- в рабочей тетради платформы «гиперматика» задания также маркируются как на КТП и синхронизируются;

– учитель, вносит в электронный журнал оценки за устный ответ, самостоятельную или контрольные работы, т.е. выполняет обычную работу;

– при выполнении заданий, или тематических тренингов на платформе «гиперматика» происходит фиксирование уровня достигнутого результата, в том числе сколько раз ученик ошибся, сколько раз использовал подсказку или сколько раз обращался к решению аналогичной задачи;

– в синхронизации результатов, при запросе темы или фамилии ученика, а для администратора или методиста – класса, учитель видит усвоена ли тема и где впервые произошла несформированность соответствующих математических знаний.

Следует заметить, что система позволяет увидеть, какие действия были предприняты учителем и достаточно ли их было, когда у ученика впервые было зафиксировано, что тема не освоена. Таким образом, на каждом этапе изучения математики в школе, можно видеть будет ли каждым обучающимся достигнут результат, обозначенный в Федеральных государственных образовательных стандартах.

Использование современных информационных технологий помогает учителю сделать не только интересный урок, но и обеспечить качество системы уроков (освоения каждой конкретной темы). Хорошее математическое образование должно быть доступно каждому ученику в каждой школе!

ПРЕОДОЛЕНИЕ ПРЕПЯТСТВИЙ: ПУТЬ К УСПЕШНОМУ ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ НА УРОВНЕ ОБЩЕГО И СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Е.А. Кабанова

katkab@mail.ru

УДК 372.851

В докладе рассматриваются различные стратегии и подходы, которые помогают преодолеть трудности преподавания математики в общеобразовательной организации.

Ключевые слова: преподавание математики, НТИ, повышение интереса к математике.

В настоящее время многие ученики испытывают трудности с освоением математики. Низкий уровень математического образования в школе отмечается как специалистами, так и общественностью в целом. Эта ситуация вызывает особую тревогу, поскольку качество математической подготовки текущего поколения школьников будет оказывать влияние на процессы модернизации в нашей стране, определяя ключевой фактор научно-технического прогресса — человеческий фактор. Вопреки различным предложениям по улучшению ситуации в области обучения математике, продолжаются дискуссии, и ситуация остается незначительно измененной.

Преподавание математики становится вызовом для многих учителей. Этот предмет часто воспринимается как сложный и абстрактный, вызывая трудности как у учеников, так и у преподавателей. Математические концепции и операции, абстрактный характер могут быть сложными для понимания среднестатистического школьника, особенно, если нет практического применения в реальной жизни. «Непонятность», монотонность, страх перед ошибками, отсутствие навыков в основных операциях, «сухой» подход в обучении — все это вызывает негативные эмоции в образовательном процессе. Однако, с правильным подходом и стратегиями, преодолеть эти трудности возможно. Рассмотрим несколько методов, которые помогут учителям преодолеть трудности в преподавании математики и сделать этот предмет более доступным и интересным для своих учеников.

Создание поддерживающей и инклюзивной атмосферы. Один из ключевых аспектов успешного преподавания математики — это создание атмосферы, в которой каждый ученик чувствует себя уверенно и принятым. Это может включать в себя использование положительного

подкрепления, поощрение учеников высказывать свои мысли и вопросы, а также поддержку их индивидуальных потребностей и стилей обучения.

Использование визуальных и конкретных примеров. Математика может быть абстрактной и труднопознаваемой, поэтому использование визуальных и конкретных примеров может помочь ученикам лучше понять материал. Это может быть в виде рисунков, диаграмм, моделей или даже физических предметов, которые помогут иллюстрировать математические концепции.

Применение интерактивных методов обучения. Использование интерактивных методов обучения, таких как игры, задачи, головоломки и групповые проекты, может сделать уроки математики более увлекательными и привлекательными для учеников. Эти методы не только помогают ученикам лучше усвоить материал, но и развивают их навыки сотрудничества, коммуникации и критического мышления.

Индивидуализация обучения. Ученики имеют разные темпы обучения, стили обучения и уровни понимания математики. Поэтому важно индивидуализировать обучение, предоставляя дополнительную поддержку и материалы тем ученикам, которым это необходимо, а также предоставляя дополнительные вызовы и задания для более продвинутых учеников.

Поддержка внеурочной деятельности. Изучение математики не должна ограничиваться стенами класса. Поддержка внеурочной деятельности, математических клубов, соревнований и проектов, помогает ученикам углубить свои знания и навыки в математике, а также вдохновить их на дальнейшее изучение этого предмета.

Обратная связь и рефлексия. Важно предоставлять ученикам обратную связь о их прогрессе и достижениях, а также позволять им рефлексировать над своими усилиями и стратегиями обучения. Это помогает лучше понять свои сильные и слабые стороны, а также определить области, в которых необходима дополнительная поддержка.

Рассмотрим более подробно организацию внеурочной деятельности в общеобразовательной организации с целью повышения интереса к математике и инженерному направлению.

Включение обучающихся в Кружковое движение Национальной технологической инициативы (далее — НТИ) дает положительную динамику повышению интереса к математике по ряду следующих причин.

1. Интересные задачи. Задачи и проекты, представленные в рамках НТИ, часто требуют использования математических концепций для их решения. Эти задачи могут быть увлекательными, вызывающими и позволяющими применить знания математики на практике.

2. Практическое применение. Участие в НТИ позволяет школьникам и студентам увидеть, как математика используется в реальной жизни для решения конкретных проблем и задач. Это может помочь им понять практическую значимость математических концепций и развить интерес к ним.

3. Коллективная работа. В рамках НТИ участники часто работают в команде над проектами, где каждый может внести свой вклад, в том числе и в области математики. Коллективная работа может быть стимулирующей и помогать развивать интерес к математике через взаимодействие с коллегами.

4. Поощрение творчества и самостоятельности. НТИ часто поощряют творческий подход к решению задач и самостоятельное исследование. Это может подтолкнуть студентов к исследованию математических концепций и развитию своего интереса к этой науке.

Участие в НТИ создает стимул для школьников и студентов углубить свои знания в математике и привить им любовь к этой науке через интересные задачи, их практическое применение, коллективную работу и поощрение творчества. Подготовка к НТО в ГБОУ Лицей №344 интегрирована в образовательную программу внеурочной деятельности, так как ОО заинтересована в развитии инженерно-технических компетенций у обучающихся.

Наличие лабораторий с высокотехнологичным оборудованием (робототехники, 3D-моделирования, аэрокосмического моделирования и спутниковых систем, когнитивных исследований, современного производства, искусственного интеллекта и др.), позволило лицейю стать перспективной площадкой для подготовки учащихся к НТО.

После активного участия в КД НТИ, инженерно-технологический профиль стал очень востребован в лицее, увеличился запрос на кружки технической направленности, которые включают в себя треки НТИ.

Преодоление трудностей в преподавании математики может быть сложной задачей, но с правильным подходом и стратегиями это возможно. Создание поддерживающей атмосферы, использование визуальных примеров, интерактивных методов обучения, индивидуализация обучения, поддержка внеурочной деятельности и обратная связь — все эти методы могут помочь учителям сделать математику более доступной и увлекательной для своих учеников. Кроме того, важно помнить, что каждый ученик уникален, и подход к их обучению должен быть индивидуализированным и адаптированным под их потребности и способности.

Литература

1. Кузюра Т.А., Насонов А.Д., Хаустова Г.А. Из опыта работы с одаренными детьми. Мир науки, культуры, образования. 2017; Т. 63, № 2: 47 – 49
2. Сортъяков Е.Д., Насонов В.А. Исследовательский принцип в образовании. Психодидактика высшего и среднего образования. Барнаул, 2018; Ч. 1: 376 – 378
3. Национальная технологическая инициатива. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://nti2035.ru/> (Дата обращения 18.02.2024).

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ БУДУЩИХ ФИЗИКОВ НА ОСНОВЕ ФУЗИОНИСТСКОГО ПОДХОДА

Ю.Ю. Коняева

konyaeva.y@inbox.ru

УДК 372.851

Проанализированы особенности проектирования методической системы обучения теории вероятностей и математической статистике будущих физиков на основе фузионистского подхода. Отмечается роль фузионистского подхода, как средства повышения эффективности освоения будущими физиками способов действий их будущей профессиональной деятельности.

Ключевые слова: методическая система обучения, фузионистский подход, обучение теории вероятностей и математической статистике, студенты физико-технических направлений подготовки.

Модернизация российского образования на сегодняшний день является основой экономического роста и развития общества. Тенденции развития высокотехнологичных предприятий в условиях современной России формируют запрос на специалистов физико-технического профиля нового поколения.

По мнению А.Е. Варшавского [1] и Е.В. Кочетковой [1] дефицит инженерно-технических кадров может стать существенным препятствием экономическому, и в особенности инновационному развитию. Принципиальное значение в контексте развития инновационных компонентов профессиональной компетентности приобретает стохастическая подготовка будущего физика, выступая одним из главных ресурсов обеспечения и развития качества прикладной математической подготовки. Математическая подготовка бакалавров физико-технических направлений подготовки является фундаментом для дальнейшего изучения профессиональных инженерных дисциплин. С нашей точки зрения, одной из важнейших задач высшей технической школы является усиление профессиональной направленности стохастической подготовки студентов физико-технических направлений подготовки за счет использования интегративного потенциала дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» (ТВ и МС).

Анализ современного состояния подготовки физиков в системе высшего инженерного образования позволяет констатировать недостаточный уровень готовности будущих физиков к

решению задач профессиональной деятельности [3]. По нашему мнению, разработка научно-обоснованной методической системы обучения теории вероятностей и математической статистике на основе фузионистского подхода позволит обеспечить качественную стохастическую подготовку специалистов физико-технических направлений. Фузионистский подход к обучению ТВ и МС будущих физиков рассматривается нами как развитие интегративного подхода в направлении слитного изучения стохастики с физикой. При этом учебный материал в условиях цифровизации образования должен изучаться как взаимосвязанный материал по теории вероятностей и по физике в рамках дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» [2].

Проектирование методической системы обучения ТВ и МС необходимо осуществлять на методологической основе фузионистского подхода к обучению, сочетая его применение с компетентностным и деятельностным подходами. Эти подходы позволят студентам освоить способы действий их будущей профессиональной деятельности, лежащие в основе формирования их профессиональной компетентности.

Разработка методической системы обучения ТВ и МС будущих физиков на основе деятельностного и фузионистского подходов предусматривает трансформацию всех ее составляющих: целей, содержания, методов, организационных форм и средств обучения. Цели обучения, определяемые согласно ФГОС ВО в терминах компетенций, с позиций деятельностного подхода конкретизируются через способы математической деятельности, подлежащие освоению. Применение фузионистского подхода требует дополнения этих целей формированием способов действий по стохастическому моделированию в физике. Цели обучения математического образования в условиях цифровизации предполагают использование современных образовательных информационно-коммуникационных технологий. Так, использование многомерных мультимедийных электронных образовательных ресурсов (МЭОР) в учебном процессе позволит обеспечить потребности высшего образования в создании условий для реализации фузионистского и деятельностного подходов в обучении, формировании предметных и метапредметных компетенций. Данный образовательный ресурс представляется в электронно-цифровой форме и включает в себя структуру, предметное содержание и метаданные о них, реализует возможности информационно-коммуникационных технологий и, в том числе, технологии «Виртуальная реальность», то есть технологии неконтактного информационного взаимодействия. Моделирующие программы позволят будущим физикам не только наблюдать и изучать явления и процессы, но и исследовать их. В некоторых программах в ходе занятия обучаемый имеет возможность внести изменения в условия протекания процесса, провести анализ полученной стохастической модели и количественные измерения.

Содержание обучения обогащается понятиями, методами стохастического анализа физических явлений и процессов (численными методами вероятностно-статистических расчетов (метод Монте-Карло), методом Байеса, методом наименьших квадратов, методом обработки экспериментальных данных, методом стохастической молекулярной динамики, методом статистической линеаризации и др.) и межпредметной системой понятий, устанавливающей соответствие между стохастическими и физическими понятиями. При этом предусматривается формирование понятий метапредметного характера, как по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» (вероятность, среднее арифметическое, функции распределения, плотности распределения и др.), так и по дисциплине «Физика» (наиболее вероятная скорость, средняя кинетическая энергия частиц, симметричное случайное блуждание частиц, функция распределения Максвелла, квантово-механическая и статистическая вероятность и др.).

Методы обучения ТВ и МС включают модификации методов, характерных применению деятельностного подхода. Так, метод математического моделирования, как один из исследовательских методов обучения, применяется к эмпирическим исследованиям стохастических явлений и процессов; метод профессионально-ориентированных деловых игр, имитационная модель которых отражает способы действий по стохастическому моделированию в будущей профессиональной деятельности студентов. На наш взгляд, в условиях трансформации высшего образования предпочтение следует отдавать активным методам обучения, среди которых особое место занимают эвристические методы (метод эвристического прогнозирования, основанный на вероятностных соотношениях и экспертных оценках; частично-поисковый метод и др.). Применение частично-поисковых методов обучения, например, метода проектов, реализуется путем выполнения студентами фузионистских проектов по изучению свойств физических явлений и процессов

с позиций стохастики.

Организационные формы обучения дополняются виртуальными лабораторными работами с использованием прикладных программ аналитического или имитационного моделирования. Отметим также необходимость для студентов физико-технических направлений подготовки обращения к программному обеспечению с учетом оценки надежности и вероятности безотказной работы. С нашей точки зрения, применение виртуальных лабораторий в условиях цифровой образовательной среды как дополнительного дидактического средства открывает новые возможности для более эффективного усвоения будущими физиками основополагающих понятий стохастической науки, представленных в дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» (например, экспериментальные данные, полученные в результате наблюдения случайного блуждания частицы по прямой, могут быть обработаны в виртуальной лаборатории Random). Специализированные интернет-ресурсы должны быть ориентированы на формирование понятий, способов действий изучаемой дисциплины, а также на проведение вероятностно-статистических экспериментов.

Средства обучения дополняются учебно-методическим комплексом (УМК) по стохастическому анализу физических явлений и процессов. УМК включает в себя: учебное пособие, разработанное для будущих физиков на основе деятельностного и фузионистского подходов; пакеты прикладных программ по статистическому анализу данных для стохастического моделирования в предметном поле физики (Matlab, Mathcad, MS Excel, Statistica, Statgraphics Plus и др.); авторские мультимедийные тренажеры по формированию способов действий стохастического анализа физических явлений и процессов. Одним из важнейших средств обучения в условиях цифровизации образования являются когерентно-стохастические задачи при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», которые способствуют согласованию элементов стохастики и различных разделов физики и направлены на укрепление внутрипредметных связей [4]. В качестве примера может быть предложена следующая **когерентно-стохастическая задача**: электрон вылетает из случайной точки нити накала и движется по перпендикуляру к нити. С какой вероятностью он свободно пройдет через сетку, окружающую нить и имеющую вид винтовой линии радиуса R , толщины равной d и шага h .

Таким образом, проектирование методической системы обучения ТВ и МС студентов физико-технических направлений подготовки на основе деятельностного и фузионистского подходов позволяют развивать у обучающихся способы математической деятельности по стохастическому моделированию физических явлений и процессов, а также обеспечить эффективную интеграцию математики и физики в системе высшего образования.

Литература

1. Варшавский А. Е., Кочеткова Е. В. Моделирование показателей спроса и предложения инженерно-технических специалистов // Экономический анализ: теория и практика. — 2018. — Т. 17, № 5. — С. 886-905.
2. Коняева Ю. Ю. Обучение теории вероятностей и математической статистике будущих физиков на основе фузионистского подхода // Дидактика математики: проблемы и исследования: Междунар. сборник научных работ. — 2022. — Вып. 55. — С. 56-65. DOI: [10.24412/2079-9152-2022-55-56-65](https://doi.org/10.24412/2079-9152-2022-55-56-65)
3. Чигиринская Н. В., Андреева М. И., Горелик Р. Е. Использование ИКТ-технологий в математической подготовке специалиста инженерного вуза // Информационные технологии в управлении, автоматизации и мехатронике. — 2017. — С. 175-178.
4. Чигиринская Н. В. Стохастическая компетенция будущего инженера как предпосылка развития стохастической культуры инженера: сущность, проблема формирования, перспективы // Современные наукоемкие технологии. — 2022. — № 3. — С. 196-200.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ

Н.Н. Костина, А.В. Костин, М.В. Королёва, М.А. Овчинников
natnikost@mail.ru

УДК 13.00.02

В докладе предполагается рассмотреть различные аспекты имитационного моделирования при подготовке будущих учителей. Часть вопросов связана с подбором учебного материала для тренировочных уроков при подготовке к педагогической практике. Другие вопросы относятся к выработке профессиональных навыков методического и социального характера.

Ключевые слова: имитационное моделирование, подготовка учителей, компьютерные тренажёры.

При подготовке к первой педагогической практике многие студенты испытывают трудности, вызванные отсутствием опыта изложения материала обучающимся. Для этой цели можно на первых пробных уроках, которые студенты проводят в своих же группах, заменять школьный материал близким по методам, но незнакомым однокурсникам материалом. Например, при подготовке учителей математики материал из элементарной евклидовой геометрии можно заменить на соответствующие задачи и теоремы из сферической или гиперболической геометрии [1]. Ряд навыков можно отрабатывать на цифровых симуляторах. В частности, навыки проверки решений задач [2]. У многих студентов-практикантов возникают проблемы при подведении учеников к самостоятельному поиску решений задач и сопровождении их в этом процессе. Полностью избавиться от этих проблем вряд ли возможно, но для сглаживания их также можно использовать компьютерные тренажёры. Некоторые версии алгоритмов для таких тренажёров имеются в [3,4]. Серьёзной проблемой является также то, что значительная часть молодых учителей уходит из школы в первые годы работы. Одной из причин этого является низкая стартовая зарплата начинающего педагога. Другой важной причиной является неумение начинающих учителей взаимодействовать со всеми участниками образовательного процесса: учениками, коллегами, администрацией, родителями. Часть навыков такого взаимодействия также можно отрабатывать на компьютерных тренажёрах. Нами разрабатывается игровой тренажёр, в который закладываются различные педагогические ситуации и варианты последовательных действий учителя в этих ситуациях. В течение игры отслеживаются рейтинги по взаимодействию с каждой из категорий участников образовательного процесса, а также рейтинг личного времени педагога. После действий игрока некоторые рейтинги меняются коррелированно. Например, если при плохом усвоении учеником материала учитель выбирает вариант остаться с ним на дополнительное занятие и объяснить материал лично, рейтинг учителя у учеников повышается, но понижается показатель личного времени. Для рейтингов в каждой области устанавливаются граничные значения, выход за которые означает либо предупреждение с указанием обратить внимание на проблемы, либо окончание игры, эквивалентное увольнению.

Литература

1. Костин А.В., Костина Н.Н., Миннегулова Е.О. Использование имитационных технологий при подготовке будущих учителей. Интернет-журнал "Мир Науки", 2016, Т. 4, №. 1, С. 1–7.
2. Kostin A.V., Kostina N.N., Minkin A.V., Anisimova E. S. Modelado de simulacion en la formacion de futuros profesores de matematicas/. Revista Dilemas Contemporaneos: Educacion, Politica y Valores. <http://www.dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/> Aco: VII Numero: Edicion Especial Artículo no.:30 Periodo: Octubre, 2019.
3. Костина Н.Н., Костин А.В., Минкин А.В. Компьютерные тренажёры для подготовки будущих учителей Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского Социология. Педагогика. Психология., 2022, Т. 8(74), С. 36–46.

Костина Наталья Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета, кафедра математики и прикладной информатики (Елабуга, Россия)

Костин Андрей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт Казанского федерального университета, кафедра математики и прикладной информатики (Елабуга, Россия)

Королёва М.В., Елабужский институт Казанского федерального университета (Елабуга, Россия)

Овчинников М.А., Елабужский институт Казанского федерального университета (Елабуга, Россия)

4. *Kostin A.V., Kostina N.N., Minkin A.V.* On Algorithms of Digital Simulators in Education. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2022, Vol. 275, pp. 45–52.

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ПРОЕКТОВ СТУДЕНТАМИ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

И.Г. Лебо, С.А. Розанова

lebo@mirea.ru, srozanova@mail.ru

УДК 004.9:539.17

Обсуждается роль математического моделирования в процессе фундаментальной подготовки студентов технических университетов (на примерах выполнения исследовательских проектов в МИРЭА).

Ключевые слова: математическое моделирование, студенческие проекты.

Современная стратегия развития высшей технической школы в России ориентирована на необходимость повышения качества фундаментальной подготовки студентов. О важности сохранения фундаментальности образования, математического образования в технических вузах в частности, неоднократно говорили В.А. Садовничий, Л.Д. Кудрявцев в своих публичных выступлениях и публикациях [1]. Реализацией этого важнейшего педагогического принципа в технических университетах занимался Научно-методический совет по математике под руководством С.В. Емельянова и Л.Д. Кудрявцева [2]. Математическое моделирование — один из важнейших методов, непосредственно влияющих на повышение качества не только фундаментальной, но и профессиональной подготовки студентов. Эффективнее всего это достигается при выполнении исследовательских проектов. Для овладения этим методом студенту необходимо:

- интегрировать полученные по разным фундаментальным предметам знания (математика, физика, информатика), профессиональные навыки и умения, и др., углубить их до уровня понимания постановки исследуемой задачи, как части более общей проблемы, и составления ее адекватной математической модели;
- совершенствуя поисковые умения, владение информационными технологиями, изучить историю, современное состояние и достижения в решении других частей общей проблемы, полученные исследователями до него;
- разработать свой алгоритм решения или выбрать и доработать наиболее подходящий алгоритм;
- усовершенствовать наиболее подходящую среди имеющихся программ или создать свою, проверив на ней тестовую задачу;
- дать научное объяснение полученным результатам;
- по возможности, обосновать экономическую эффективность своих предложений.

Этот метод получен авторами в результате их большого опыта в качестве научных руководителей студентов РТУ-МИРЭА при выполнении ими НИРС, ВКР [3], математических курсовых работ, привлечения студентов к участию в научно-исследовательских работах по грантам. Ядром такого расширенного методического подхода является «Триада Самарского» [4].

Ниже приведены два примера студенческих проектов.

С помощью методов математического моделирования и разработанной ранее программы NUT [5], студентами РТУ-МИРЭА решались задачи об особенностях гиперзвуковых вихревых течений газов и распространения ударных волн. В основу алгоритма решения двумерных и трехмерных

Лебо Иван Германович, д.ф.-м.н., с.н.с, МИРЭА – Российский технологический университет, Институт искусственного интеллекта (Москва, Россия)

Розанова Светлана Алексеевна, д.лед.н., профессор, МИРЭА – Российский технологический университет, Институт искусственного интеллекта (Москва, Россия)

уравнений газовой динамики по программе NUT положены TVD разностные схемы повышенной аппроксимации.

1. В дипломном проекте представлены результаты расчетов взаимодействия одного/двух вихрей с падающей, и с отраженной от стенки ударной волной в газе Ar при начальном давлении 0.5 атм [6]. Газодинамические параметры на момент времени $t = 0$ были заданы по закону Бернулли. Параметры ударной волны задавалась из соотношений Гюгонио при числе Маха $Mx=3.5$ [7]. Приводится сравнение расчетов с аналогичной программой, разработанной на основе метода крупных частиц [8, 9]. Показано, удовлетворительное согласие результатов расчетов, выполненных по разным методикам.

Показано, что взаимодействие между собой разнонаправленных вихрей в случае падения ударной волны не приводит к их взаимной компенсации. При этом область взаимодействия вихрей (зона турбулентности) приобретает сложную форму.

Обсуждается возможность проведения натуральных экспериментов на ударных трубах, и с помощью лазерной ударной трубы [10]. Такие исследования позволили бы сравнить экспериментальные данные с результатами численных расчетов, и на их основе развить более совершенные модели турбулентных движений.

2. Рассмотрены две методики распараллеливания процессов при решении системы уравнений гиперзвуковой газовой динамики. На примере конкретной задачи проведено сравнение эффективности этих методик. Развита параллельный алгоритм и модернизирована программа NUTCY для решения двумерных уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах (координаты r, z, t — время). Проведены численные расчеты, моделирующие: 1) падение и отражение от металлического экрана ударной волны; 2) прохождение ударной волны через отверстие в экране; 3) прохождение ударной волны через цилиндрический канал и ее отражение от дна канала, взаимодействие с падающей волной.

Моделировалось распространение сильной ударной волны (число Маха равнялось 20) в инертном газе аргоне. Представлены результаты тестовых решений на параллельном суперкомпьютере с использованием различного числа процессоров. Показано, что при использовании 16 процессоров удается сократить время расчета тестовой задачи приблизительно в 12 раз. Показано, что при взаимодействии падающей и отраженной под углом ударной волны формируются области с пониженной и повышенной плотностью газа, а также вихревые течения [11].

Приведенные примеры выполнения исследовательских проектов студентами технического университета иллюстрируют роль математического моделирования в их фундаментальной и профессиональной подготовке.

Работа выполнена в рамках программы Национального центра физики и математики «Газодинамика и физика взрыва», тема «Исследование физических процессов при управляемом термоядерном синтезе и в звездных системах».

Литература

1. Образование, которое мы можем потерять. // Сборник под общей редакцией ректора МГУ имени М.В. Ломоносова В.А. Садовниченко. — Москва, МГУ, 2002, — 288.
2. Розанова С. А., Ягола А.Г. Лев Дмитриевич Кудрявцев и Научно — методический совет по математике Минобрнауки России. // Елец, Continuum . Математика. Информатика. Образование. 2023 № 1. — ЕГУ им. И. А. Бунина, 2023 — 100-111.
3. Розанова С.А., Исмагилова Е.И. «Математика +» в интегративной образовательной системе «Технический университет – предприятие – заказчик». — Елец, Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2023 № 2. — ЕГУ им. И. А. Бунина, 2023 — 35-48.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. — Москва: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1997. — 304.
5. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах ЛТС. — Москва: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 304.
6. Лебо И.Г., Симанов А.И. Моделирование развития вихревых структур в сверхзвуковом газовом потоке. // Российский технологический журнал. — 2018. — 45-54.
7. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — Москва: Наука, 1966. — 687.
8. Лебо И.Г., Ажолов М.Ж. Моделирование взаимодействия ударной волны с вихревыми структурами в газе. // Вестник МГТУ МИРЭА №2(7). — Москва, 2015. — 687.

9. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. — Москва: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1982. — 391.

10. Зворыкин В.Д., Лебо И.Г. Применение мощного КгF-лазера для исследования сверхзвуковых течений газа и развития гидродинамических неустойчивостей в слоистых средах // Квантовая электроника, 30(6) — Москва, 2000. — 540-544.

11. Лебо И.Г., Обручев И.В. Моделирование двумерных вихревых течений в цилиндрическом канале с помощью параллельных вычислений на суперкомпьютере. // Российский технологический журнал, 10(1) — Москва, 2022. — 60-67.

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕЛОСТНОЙ КАРТИНЫ МИРА СТАРШЕКЛАССНИКА

Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко

lobantchik@yandex.ru

УДК 372.851

В данной работе рассмотрена Модель формирования целостной картины мира (ЦКМ), в направлении социальной составляющей (выбор профессии, понимание сути процессов, умение прогнозировать, предвидеть, обосновывать, доказывать – моделирование).

Ключевые слова: модель, сформированность целостной картины мира, старшекласник.

Проектируя учебный процесс в информационной образовательной среде, педагог не просто подбирает методы, технологии, средства обучения, обеспечивающие работу с конкретным фрагментом содержания образования, а создает единый дидактический комплекс, тем самым обеспечивая одну из важнейших характеристик информационной образовательной среды — целостность [1].

Старшекласник имеет представление об устройстве окружающего мира — природы и социума, их взаимодействии, осознает свое место в мире (это все от дифференциальных уравнений (ДУ)), отсюда его сознательные действия (выбор профессии, нормы поведения).

Сформированности целостной картины мира:

1. Сформированность междисциплинарности знаний (целостности);
2. Сформированность мыслительных операций — это анализ, синтез, индукция, дедукция, абстрагирование, обобщение, умение обосновывать, доказывать и т. д.;
3. Развитость адекватного видения (не только смотреть, но и видеть) — наблюдение, измерение, лабораторно-практические работы;
4. Сформированность операций предвидения, прогнозирования (предсказания), понимание сути процессов.

Лобанова Наталья Ивановна, «Центр внешкольной работы г. Зеленокумск Советского района» (Зеленокумск, Россия)

Яремко Наталья Николаевна, д.пед.н., доцент, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Институт базового образования (Москва, Россия)

Диагностика сформированности ЦКМ осуществлялась в соответствии с критериями, позволяющими определить её уровни адекватно полученным знаниям, освоенным навыкам активной творческой деятельности, изменениям в эмоционально-ценностной и личностной сфере в виде приобретённых ориентаций, установок, убеждений, отношения, оценки и осознания своего места в мире.

Показатели критериев: модель разных ситуаций из жизни и деятельности человека, найти решение с помощью математических знаний (ДУ) (*информированность, представления, отражение в сознании*); применение мыслительных операций (*проявление отношения к ситуации; оценка явлений действительности и человеческой деятельности*); сбор данных для разрешения ситуации из окружающей действительности (*деятельное погружение в ситуацию, применение, преобразование, наличие опыта*); формулировка предположения, высказывание гипотезы и умение обосновывать, доказывать (*понимание сути процесса*).

Критерии проверяются с помощью математических тестов или самостоятельных и контрольных работ по материалу ДУ, а также — с помощью резюме, эссе, мини-рефератов, защиты проектов.

Модель формирования целостной картины мира в сознании (целостная, динамичная модель-образ окружающей природы и взаимодействия с ней человека), формирование происходит переходом по уровням.

На основе критериев, показателей определены уровни сформированности ЦКМ старшеклассника:

I — низкий, II — средний, III — высокий.

Разработка уровней сформированности ЦКМ старшеклассника при изучении ДУ в настоящей работе была осуществлена с опорой на

– определение понятия ЦКМ старшеклассника на основе изучения ДУ, данное в работе [2],
– и авторскую методику исследования категориальных структур мировосприятия С.В. Тарасова, т. е. была проведена адаптация/модификация методики С.В. Тарасова к оценке результативности изучения старшеклассниками ДУ с целью формирования ЦКМ.

ЦКМ школьника относится к категориальным структурам мировосприятия, поэтому считаем целесообразным адаптировать требования к уровням сформированности ЦКМ Тарасова С.В. [3].

Полученные данные позволяют сделать вывод, что предложенная методика изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования способствует повышению уровня сформированности ЦКМ. Статистическая обработка результатов измерений приводит к положительной оценке изменений показателей сформированности ЦКМ старшеклассников при изучении ДУ в системе дополнительного образования в условиях построенной Модели [4].

Литература

1. Жигулин, А.А. Самоопределение как результат личностного развития человека / А.А. Жигулин // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Серия: Педагогика, психология. — 2012. — № 2(9). — С. 117-119. — EDN OZFRKD.

2. Лобанова Н.И., Яремко Н.Н. Естественно-научные законы как основа математического моделирования при формировании целостной картины мира школьника в системе доп.образования // Актуальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования : материалы междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 120-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова (25–27 мая 2023 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Тихоокеанский государственный университет; редколлегия: Е. Г. Агапова (отв. ред.) [и др.]. — Хабаровск : ОЭПИ РИОЦ ТОГУ, 2023. — Текст : электронный. — 405, [1] с. — <https://pnu.edu.ru/ru/library/elektronnye-izdaniya/collections/#digest>. — Дата публикации: 10.07.2023. — ISBN 978-5-7389-3758-3. С. 214-224.

3. Тарасов С.В. Образ мира : Опыт изучения категор. структур мировосприятия школьников / С.В. Тарасов; Рос. акад. образования. Ин-т образования взрослых. - СПб., 1996. - 72 с.

4. Лобанова, Н.И. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в рамках дополнительного образования / Н.И. Лобанова // Мир науки. Педагогика и психология. — 2023. — Т 11. — №2. — URL: <https://mir-nauki.com/PDF/56PDMN223.pdf> (дата обращения: 07.02.2024).

РАСЧЕТ ОШИБОК РАНЖИРОВАНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТЕСТИРОВАНИЯ

М.М. Луценко

ML4116@mail.ru

УДК 519.234, 519.832, 378

Исследуются новые возможности модели тестирования Раша и ее расширения для политомических заданий. Найденные латентные параметры модели (уровни знаний тестируемых и трудности заданий теста) используются в имитационной модели тестирования. Причем последняя используется для оценки ошибок ранжирования по результатам тестирования и выделения тех групп тестируемых, для которых сдвиг ранга больше. В качестве примера используются данные ЕГЭ по математике по Санкт-Петербургу за 2011 год, где тестировалось около 21000 школьников. Оценки уровней знаний тестируемых школьников и трудности заданий найдены из решения нелинейной, неопределенной системы уравнений, для решения которой минимизируется сумма квадратов невязок. Все вычисления выполнены в Excel с использованием надстройки „Поиск решений“. По результатам расчетов оказалось, что примерно треть латентных параметров лежат за пределами традиционного промежутка (-5; 5). По результатам моделирования ЕГЭ, с использованием найденных параметров для 21000 чел., у 25% тестируемых сдвиг их ранга оказался более, чем на 2000 позиций, а у 850 чел. сдвиг ранга был более, чем на 4000 позиций (свыше 4% среди всех тестируемых).

Ключевые слова: теория параметризации педагогических тестов, модель Раша, имитационная модель тестирования, оценка ошибок ранжирования.

Введение

Управление системой образования — сложный и дорогостоящий процесс. Создание системы оценки качества образования призвано обеспечить обучающихся и их родителей, педагогические коллективы, органы управления образованием и т. д. надежной информацией о состоянии всей системы. Правильно собранные и проанализированные данные об учебных достижениях учащихся нужны на всех уровнях принятия решений.

Среди всех инструментов оценки уровня знаний важнейшим является тестирование и, в частности, ЕГЭ. К сожалению, тестирование, как всякий измерительный инструмент, имеет определенные точность, надежность, разрешающую способность, допустимый интервал измерения, которые необходимо учитывать при принятии управленческих решений. Важными отличительными особенностями тестирования, как оценочной процедуры, являются однократность и массовость. А поэтому применение классических статистических методов оказывается затруднительно.

При всем разнообразии критики тестирования и, в частности, ЕГЭ, практически никто не критикует точность и надежность тестирования, а процедуру обработки результатов тестирования обсуждают лишь специалисты. У этого феномена есть несколько причин.

Во-первых, традиционная система оценки уровня знаний учащихся основана на текущем контроле (опрос, домашние и контрольные работы) и заключительном экзамене (как правило, устном). В рамках такого подхода никто не пытался сравнивать оценки с истинным уровнем знаний, так как последний никак кроме как через экзамен не мог быть определен. Современные же подходы, основанные на ИРТ моделях [11], предлагают разнообразные методы оценки точности получаемых результатов.

Во-вторых, математический аппарат, используемый в современных моделях, настолько сложен, что лишь узкий специалист способен разобраться в предположениях и выводах теории.

В-третьих, современная методология обработки результатов пришла с Запада, где, как это принято считать в России, она прошла длительную апробацию и, следовательно, высоко надежна.

В России ИРТ теория активно использовалась на начальных этапах обработки результатов ЕГЭ для учета трудностей различных заданий и корректировки числа набранных баллов тестируемых.

Одна из целей тестирования — принятие управленческих решений ЛПП. Например, если бы истинные уровни знаний тестируемых по дисциплине были бы известны, то абитуриентам с большим рангом (уровнем знаний) предоставлялись бы большие возможности при выборе вуза, работы и т.д., а тестируемые с низким рангом были бы направлены в те вузы, на те предприятия, где эта дисциплина используется мало.

В настоящее время абитуриенты ранжируются по результатам ЕГЭ, а после этого принимаются управленческие решения. В работе [5] показано, что точность и надежность оценки уровня знаний тестируемого могут быть довольно низкие, а, следовательно, результаты ранжирования тестируемых содержат ошибки. Поэтому вместо изучения ошибок оценивания мы решили изучать ошибки ранжирования группы тестируемых. Автору не известны аналитические формулы, позволяющие измерить степень искажения априорного ранга, вызванного процедурой тестирования, а поэтому было принято решение о создании имитационной модели.

Для создания такой модели мы решили воспользоваться теорией параметризации педагогических тестов или IRT теорией и, в частности, моделью Раша. Исторически IRT разработана для дихотомной системы оценок заданий теста [3, 11]. Существует несколько приемов переноса этой теории для политомических заданий, то есть оцениваемых из нескольких первичных баллов. Однако эти приемы (Partial Credit Model и др.) разрабатывались, для психологических тестов, а получаемые результаты плохо интерпретируются для педагогических заданий [9]. Поэтому мы создали специальное расширение для обработки тестов с политомическими заданиями, которое существенно отличается от рекомендованного для обработки результатов ЕГЭ [10, 13].

Точность и надежность процедуры тестирования обсуждается достаточно часто [1, 9, 10, 13]. Существует много методов оценки валидности теста [3, 10] однако все они основаны на проверке некоторых гипотез и используют нормальную аппроксимацию, что затрудняет их вероятностную интерпретацию. В работе [13] приводятся расчеты ошибок оценивания баллов ЕГЭ, однако модельные расчеты эти результаты не подтверждают [1, 2, 5].

Мы приведем здесь результаты расчета латентных параметров (уровней знаний и трудностей заданий) для ЕГЭ по математике проведенного в Санкт-Петербурге. Исходные данные взяты из аналитического отчета предметной комиссии, подготовленного В. Б. Некрасовым, Г. И. Вольфсоном, и опубликованного на ее сайте [14]. (За более поздние годы данных, приспособленных для такого анализа, нет).

Для нахождения значений латентных переменных необходимо решить систему неопределенных, нелинейных уравнений с числом неизвестных примерно равным удвоенному числу заданий теста. В литературе предложены специальные методы решения подобных систем уравнений [11]. В этой работе мы покажем, как решать подобные задачи стандартными инструментами в Excel даже, если число переменных более 60. Для этого мы последовательно минимизировали сумму квадратов невязок с помощью надстройки "Поиск решений".

Хотя уровни знаний и трудности заданий определяются неоднозначно, но их можно использовать при моделировании процедуры тестирования. Выбирая тестируемых случайно в соответствии с априорным распределением, мы можем наблюдать процесс выполнения заданий предложенного теста. Например, для 1000 случайно выбранных тестируемых представлены результаты моделирования выполнения ими теста и возникающие ошибки их ранжирования по результатам тестирования. Оказывается, что лишь 75% тестируемых имели отклонения от априорного ранга менее чем на 10%, а около 5% тестируемых имели отклонения более чем на 30%.

Предложенный здесь подход к оценке точности и надежности тестирования может быть использован при оценке вероятностных характеристик любого теста и, следовательно, поможет оценить надежность принимаемого решения по его результату.

Другие подходы к оценке трудности заданий см. в работах [10, 12]. Некоторые из предлагаемых здесь результатов были опубликованы автором в [6, 7]. В работах [4, 5] обсуждаются рандомизированные решения принимаемые по результатам тестирования.

Обоснование модели педагогического тестирования

Краеугольным камнем теории параметризации педагогических тестов (Item Response Theory, IRT) является однопараметрическая модель Раша, построенная для заданий с дихотомическим исходом. В этой модели отношение вероятности справиться с некоторым заданием p к вероятности не справиться с ним $1 - p$ равно отношению уровня знания экзаменуемого Z к трудности

этого задания T . Две последние величины сами по себе неопределимы, и возможно оперировать только их отношением. В дальнейшем, переходят к логарифмической мере — логитам знаний $\theta = \ln Z/W$ и трудностей $\tau = \ln T/W$, где W — некий опорный уровень. Его выбор, равно как и выбор основания логарифма, несущественен [9]. Таким образом, уровень знаний тестируемого θ и трудность задания τ нельзя определить независимо друг от друга, но можно определить вероятность $p(\theta, \tau)$ того, что тестируемый с уровнем знаний θ выполнит задание трудности τ . Функция $p(\theta, \tau)$ называется характеристической функцией выполнимости задания (Item characteristic curve, ICC). Из приведенных выше рассуждений мы можем ее написать

$$p(\theta, \tau) = [1 + \exp(\tau - \theta)]^{-1} \quad (1)$$

Мы видим, что характеристическая функция $p(\theta, \tau) = p(\theta - \tau)$ зависит лишь от разности $\theta - \tau$, которую можно интерпретировать как степень превышения уровня знаний θ над трудностью задания τ . Так как $p(0) = 1/2$, то при равенстве уровня знаний тестируемого трудности, выполняемого им задания, вероятность выполнения этого задания равна $1/2$. При этом единицы измерения, как уровня знаний, так и трудности задания называются логитами.

Для того чтобы лучше ориентироваться в единицах измерения приведем несколько примеров. В частности, если уровень знаний тестируемого θ превышает трудность задания τ на $\ln 2 \approx 0,7$ логит, то вероятность выполнения такого задания этим тестируемым равна $2/3$. Если уровень знаний тестируемого θ меньше трудности задания τ на $\ln 2$ логит, то вероятность выполнения такого задания этим тестируемым равна $1/3$ и т.д.

Математическая модель педагогического тестирования

Оценка уровня знаний тестируемого обычно происходит по результату выполнения им теста, содержащего N заданий, каждое из которых выполняется независимо от других заданий.

Обозначим через $X(\theta, \tau_j)$ — результат выполнения j -го задания теста тестируемым с уровнем знаний θ . Таким образом, $X(\theta, \tau_j)$ — случайная величина, значение которой равно единице, если j -е задание выполнено верно и нулю в противном случае. Для теста, содержащего N заданий, случайная величина $X(\theta, \tau)$ равна числу выполненных заданий теста тестируемым с уровнем знаний θ , где через τ обозначен с вектор $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ трудностей заданий теста. Случайную величину $X(\theta, \tau)$ можно записать в виде суммы случайных величин

$$X(\theta, \tau) = X(\theta, \tau_1) + X(\theta, \tau_2) + \dots + X(\theta, \tau_N).$$

Если трудности всех заданий одинаковы и равны τ_0 , то случайная величина $X(\theta, \tau)$ будет биномиально распределенной случайной величиной $B(N, p_0)$, с вероятностью $p_0(\theta) = (1 + \exp(\tau_0 - \theta))^{-1}$.

Математическое ожидание $M[X(\theta, \tau)]$ (неслучайную функцию аргумента θ) называют функцией сложности теста. Так как математическое ожидание случайной величины $X(\theta, \tau_j)$ равно $p(\theta - \tau_j)$, то математическое ожидание сумм случайных величин примет вид

$$M[X(\theta, \tau)] = \sum_{k=1}^N p(\theta - \tau_k), \quad (2)$$

Расширение модели Раша для политомических заданий

Исторически модель Раша (1) разработана для заданий, оцениваемых по дихотомному принципу. Однако к ней можно свести и некоторые задания, оцениваемые более сложно. Пусть некоторое задание Z состоит из l частей, выполняемых последовательно, и пусть за выполнение каждой из частей тестируемый получает один балл, тогда за все задание тестируемый может получить l баллов.

Обозначим через Z^k случайную величину равную единице, если при выполнении задания тестируемый выполнил k -ю часть задания. Заметим что случайные величины Z^1, Z^2, \dots, Z^l зависимые, причем $P(Z^j = 1 | Z^k = 1) = 1$ при $j < k \leq l$. Кроме того, общее число набранных баллов равно $Z = k$ тогда и только тогда, когда $Z^k = 1$, а $Z^{k+1} = 0$.

В соответствии и с предположениями модели будем считать, что части всего задания являются самостоятельными заданиями с трудностями $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_l$ и вероятностями их выполнения

$p(\theta - \tau_1), p(\theta - \tau_2), \dots, p(\theta - \tau_l)$ тестируемым с уровнем знаний θ . Заметим, что для всего задания мы будем иметь формулу аналогичную формуле (2):

$$M(Z) = \sum_{k=1}^l M(Z^k) = \sum_{k=1}^l p(\theta - \tau_k).$$

Таким образом, каждое подзадание получает свой уровень трудностей, причем трудность каждого следующего подзадания больше чем предыдущего. Полученное представление политомического задания позволяет использовать метод моментов для оценки параметров.

Предлагаемая модель существенно отличается от Partial Credit Model (PCM), принятой при обработке результатов ЕГЭ и позволяет интерпретировать трудности подзаданий, как долю тех тестировавшихся, решивших это подзадание. Учет того, что для выполнения каждой новой части (нового подзадания) тестируемый должен был выполнить все предыдущие части, приводит к тому, что сложности подзаданий будут расти, что и соответствует логике задания в целом. Это свойство отсутствует у PCM, и поэтому может оказаться, что выполнение, например, второй части задания будет проще, чем выполнение первой его части, хотя вторую часть задания Z нельзя выполнять без первой.

Расчет латентных параметров в модели Раша

Рассмотрим теперь базовую модель массового тестирования. Обозначим через n количество участников тестирования, а их уровни знаний через θ_i ; $i = \overline{1, n}$. Мы считаем, что каждому участнику тестирования предлагается один и тот же вариант теста, состоящий из N заданий трудностей τ_j , где $j = \overline{1, N}$. Предполагается, что выполнение каждого задания оценивается по дихотомному принципу.

Если уровень знания i -го тестируемого равен θ_i , а уровень трудности задания есть τ_j , то в соответствии с характеристической функцией выполнимости заданий (1) мы получим

$$p_{i,j} = p(\theta_i, \tau_j) = [1 + \exp(\tau_j - \theta_i)]^{-1}.$$

Обозначим через c_j — наблюдаемое число тестируемых, решивших задание с номером j из N заданий теста (число первичных баллов j -го задания); через b_i — количество тестируемых верно выполнивших ровно i заданий теста. Оценки $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ и $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_N$ соответствующих параметров модели могут быть получены по методу моментов из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N p_{i,j} = b_i; & i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n p_{i,j} = c_j; & j = \overline{1, N}; \end{cases} \quad (3)$$

Так как тест содержит только заданий N , то мы можем считать, что вся группа тестируемых разбита на $N + 1$ подгруппу, в каждой из которых один и тот же уровень знаний. Обозначим через n_k число тестируемых набравших ровно k баллов, тогда система уравнений (3) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N p_{k,j} = k; & k = \overline{0, N}; \\ \sum_{k=0}^N n_k p_{k,j} = c_j; & j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что $\sum_{k=0}^N n_k = n$.

Неопределенная нелинейная система (4) содержит $2N + 1$ уравнение и $2N + 1$ переменную. Ее решения $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N$ будут оценками уровней знаний для каждой из $N + 1$ подгрупп тестируемых, а величины $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_N$ оценками уровней трудностей заданий теста. Так как вероятности выполнения заданий зависят лишь от разности значений переменных, то любой набор

$(\xi_1 + \Delta, \xi_2 + \Delta, \dots, \xi_N + \Delta, \tau_1 + \Delta, \tau_2 + \Delta, \dots, \tau_N + \Delta)$ будет решением системы (4), если набор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ — решение той же системы, для любого $\Delta \in \mathbb{R}$.

Существует несколько методов решения системы (4). Например, в работе [11] предлагается использовать метод Ньютона. Мы же будем минимизировать сумму квадратов невязок, и, таким образом, решать следующую экстремальную задачу:

$$f(\theta, \tau) = \alpha \sum_{k=0}^N \left(\sum_{j=1}^N p_{k,j} - k \right)^2 + \beta \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=0}^N n_k p_{k,j} - c_j \right)^2 \rightarrow \min, \quad (5)$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$, $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$, а α, β — произвольные числа.

Множественность решения системы (4) и экстремальной задачи (5) существенно усложняют их численные решения. Кроме того, некоторые вероятности становятся очень малыми, и поэтому точности, найденных больших и малых уровней знаний тестирувавшихся ($|\theta| > 7$), оказываются невысокими. Более того из свойств характеристической функции заданий теста (1) можно сразу сказать, что $\theta_0 = -\infty$ и $\theta_N = +\infty$. Таким образом, уровень знаний тестирувавшегося, набравшего ноль баллов равен $-\infty$, а уровень знаний тестирувавшегося, выполнившего все задания равен $+\infty$, что говорит о том, что предложенный тест не подходит этим тестирувавшимся для оценки их знаний или их знания лежат за границами применимости этого теста.

Расчет латентных параметров для модели ЕГЭ

Рассчитаем латентные параметры τ, θ , для заданий теста и участников ЕГЭ по математике в Санкт-Петербурге в 2011 году [14]. Экзаменационная работа состояла из двух частей. В первой части было 12 заданий и за правильный ответ на задание части 1 ставился один балл, а за неверный ответ — ноль баллов. Часть 2 содержала 6 заданий за правильное выполнение которых ставилось от 2 до 6 баллов, причем каждый следующий балл начислялся лишь при выполнении предыдущей части задания. В экзамене участвовало (обрабатывалось тестов) $n = 20908$ чел.(шт.) и каждый участник мог получить от нуля до $N = 30$ баллов. Таким образом, мы можем говорить о 30 заданиях, трудности которых мы обозначим через $\tau_j, \quad j = \overline{1, 30}$.

Учитывая, что каждый тестирувавшийся мог получить от нуля до тридцати баллов, разобьем всех тестирувавшихся на 31 группу по количеству набранных баллов. Обозначим через θ_k (средний) уровень знаний тестирувавшихся в k -й подгруппе $k = \overline{0, 30}$, а через n_k — число тестирувавшихся, выполнивших k -е заданий теста (получивших k первичных балла).

Решение системы нелинейных уравнений (5) найдем из решения следующей экстремальной задачи.

$$f(\theta, \tau) = \alpha \sum_{k=0}^{30} \left(\sum_{j=1}^{30} p_{k,j} - k \right)^2 + \beta \sum_{j=1}^{30} \left(\sum_{k=0}^{30} n_k p_{k,j} - c_j \right)^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{30})$, $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{30})$, а α, β — произвольные постоянные.

Для решения задачи (6) мы воспользовались надстройкой, „Поиск решений“ в Excel. Оказалось, что стандартный алгоритм решения этой задачи не обеспечивает необходимую точность при $\alpha = \beta = 1$. Поэтому мы обращались к надстройке многократно, последовательно меняя значения параметров α, β и используя предыдущие значения как начальные для новой итерации.

Результаты решения системы (5) приведены на рис. 1, причем значение целевой функции на этом решении равно $2.0 \cdot 10^{-4}$ при $\alpha = \beta = 1$ а вторая сумма в целевой функции равна $1.0 \cdot 10^{-9}$. При записи ответов следует учитывать точность представления результатов, так как сумма квадратов невязок существенно возрастает при записи результатов, например, с тремя знаками после запятой.

Из представленных результатов видно, что уровни знаний тестирувавшихся распределены примерно равномерно (разрешающая способность теста $\simeq 0,5$ логит), кроме как у наиболее (15 логит) и наименее (−14 логит) подготовленных тестирувавшихся. Понятно, что уровни знаний примерно равные +15 и -14 логит соответствуют теоретическим $\theta_{30} = +\infty, \theta_0 = -\infty$. Заметим, что примерно треть уровней знаний тестирувавшихся, представленных на рис. 1, лежат за пределами промежутка (−5; 5), который рассматривается как основной в работе [11]. Таким образом,

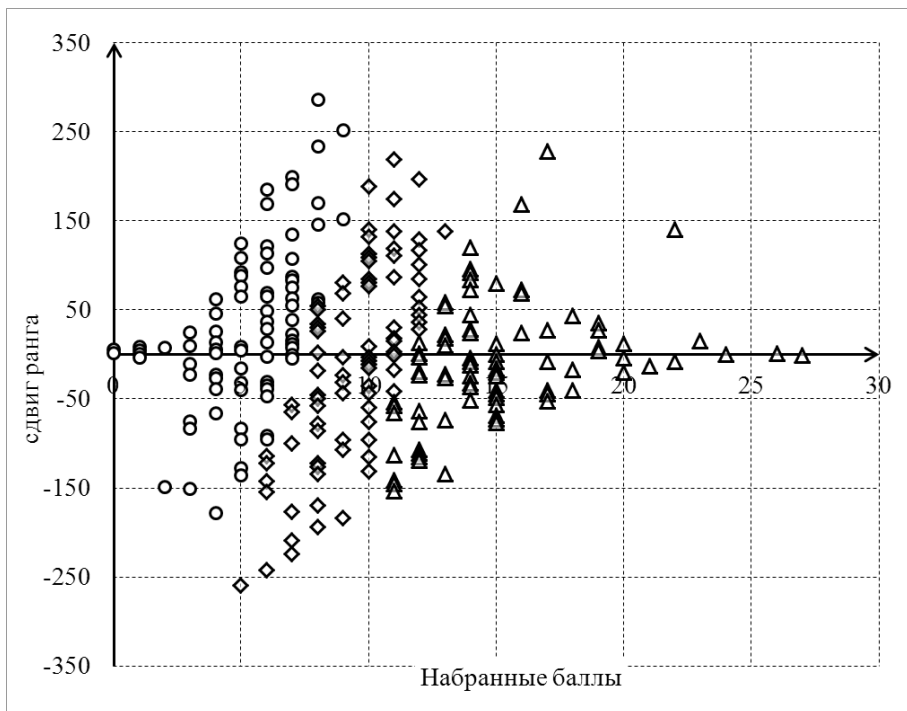


Рис. 1: Латентные параметры теста в логитах: уровни знаний тестируемых (θ) — \square , трудности заданий (τ) — \circ .

повышение точности расчетов приводит к существенному расширению множества допустимых уровней трудности.

Анализ уровней трудностей заданий показывает, что найденные трудности имеют сгущения в окрестностях точек $-3,8$ логит и $-1,9$ логит, а также на промежутке от 5 до 6 логит. Следовательно, разрешающая способность теста наибольшая для этих же уровней знаний. Кроме того, примерно треть уровней трудностей заданий лежат также за пределами промежутка $(-5; 5)$.

Заметим, что ЕГЭ был составлен так, что сильные учащиеся смогли выполнить все задания теста. И хотя модель Раша плохо оценивает уровни знаний за предельными значениями трудностей заданий, однако, можно с уверенностью сказать, что уровни знаний сильных учащихся существенно превосходят знания основной группы учащихся. Для учащихся набравших 98 баллов (29 первичных баллов) вероятность выполнения самого сложного задания равна 0,610. Уровни знаний тестируемых, набравших менее 24 баллов (менее 4 первичных баллов) оказались менее чем $-5,30$ логит, а учащиеся набравшие 24 и более баллов имели уровень знаний превышающий $-3,94$ логита. Иными словами учащийся, выполнивший 4 и более заданий, выполнял самое простое задание В2 с вероятностью более чем 0,896, и следующее по сложности задание В5 с вероятностью 0,683.

Построение априорного распределения и результаты моделирования

Обозначим через ξ_0 случайную величину равную уровню знаний тестируемого случайно выбранного из данной группы тестируемых, а через $F_0(\theta)$ ее функцию распределения. Эта случайная величина задает априорное распределение уровней знаний в группе тестируемых. Мы будем считать, что эта случайная величина непрерывна.

Для каждого числа k нам известно число тестируемых n_k , набравших ровно k баллов, а из решения системы (5) мы знаем их средний уровень знаний θ_k . Эти данные позволяют нам строить эмпирическую функцию распределения: $\hat{F}_0(\theta) = \hat{\mu}_n(\theta)/n$, где $\hat{\mu}_n(\theta)$ — число тестируемых, имевших уровень знаний меньше чем θ .

В виду непрерывности случайной величины ξ_0 построим кусочно линейную аппроксимацию

$\tilde{F}_0(\theta)$ кусочно постоянной функции $\hat{F}_0(\theta)$ по формуле

$$\tilde{F}_0(\theta) = \sum_{j=0}^{30} \hat{F}_0(\theta_j) \varphi_j(\theta),$$

где φ_j специально подобранные непрерывные базисные функции.

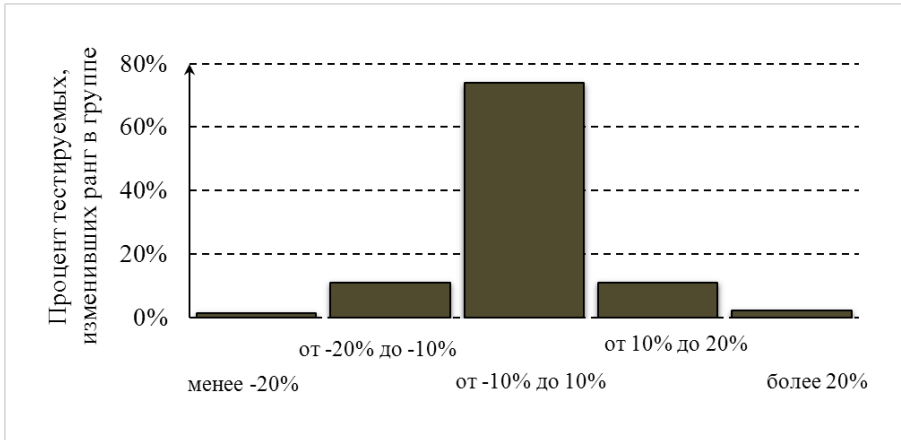


Рис. 2: Доли тестируемых, изменивших свой ранг

Опишем теперь процедуру имитационного тестирования. Выберем тестируемого в соответствии с априорным распределением $\tilde{F}_0(\theta)$. Значением этой случайной величины — уровень знаний θ . В дальнейшем мы считаем, что тестировавшийся с уровнем знаний θ выполняет тест, трудности заданий которого составляют $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_{30})$, найденные нами ранее. Обозначим, через $X(\theta, \hat{\tau})$ число набранных этим тестируемым баллов в соответствие с вероятностями модели (1).

В частности, пусть $\xi \sim R[0, 1]$ — случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, а $p_1 = p(\theta, \hat{\tau}_1)$ — вероятность выполнения задания B_1 тестировавшимся с уровнем знаний θ , тогда число полученных им баллов за первое задание равно

$$X(\theta, \hat{\tau}_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi \in [0, p_1]; \\ 0, & \text{если } \xi \notin [0, p_1]. \end{cases}$$

Похожие формулы верны и для политомических заданий. Например, за первое такое задание C_1 начислялось 2 балла. Обозначим через $p_{13} = p(\theta, \hat{\tau}_{13}), p_{14} = p(\theta, \hat{\tau}_{14})$ вероятности выполнения первой и второй части задания C_1 тестировавшимся с уровнем знаний θ , тогда число полученных им баллов за это задание равно

$$X(\theta, \hat{\tau}_{13}) + X(\theta, \hat{\tau}_{14}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \notin [0, p_{14}]; \\ 1, & \text{если } \xi \in [0, p_{13}]; \\ 2, & \text{если } \xi \in [p_{13}, p_{14}], \end{cases}$$

где ξ , как и ранее, случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

По результатам численного моделирования была построена гистограмма 2. На ней видны доли тестируемых, имевших различные сдвиги рангов. Учитывая, что в Санкт-Петербурге в 2011 году тестировалось около 20900 школьников, мы можем сказать, что примерно 2700 чел. получили завышенные оценки, а 2700 заниженные оценки (на 2 первичных балла и более), более того у 850 чел. оценка искажена не менее, чем на 4 первичных (12 итоговых) балла.

Более детальный анализ ошибок ранжирования для 1000 тестируемых можно провести с помощью рис. 3. На приведенном графике по горизонтальной оси отложены баллы, набранные тестирующимися, а по вертикальной оси отложен сдвиг их ранга (отображены только 250

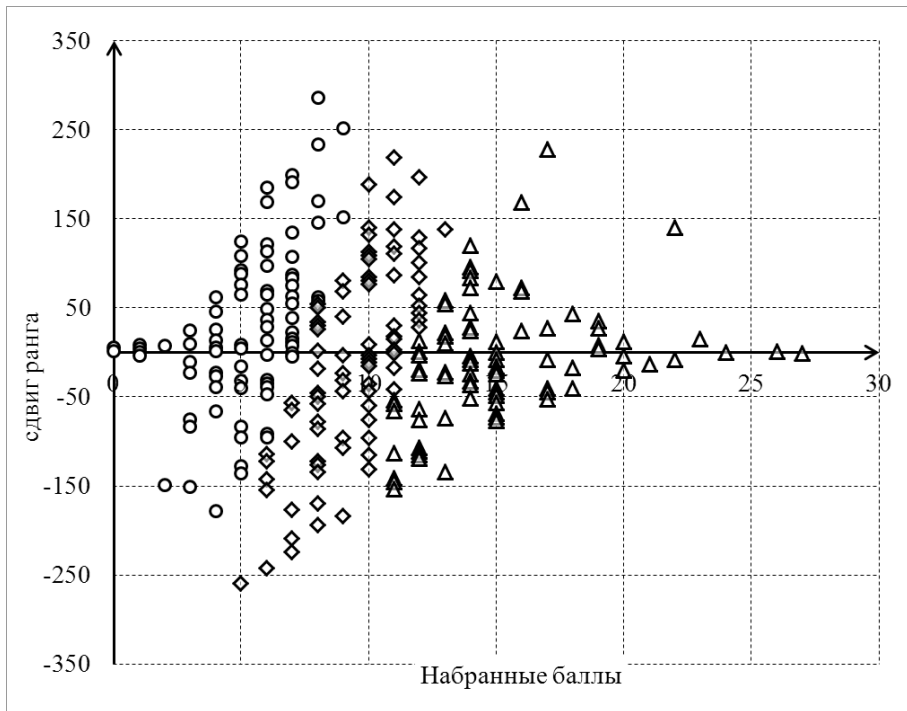


Рис. 3: Сдвиги рангов для нижней трети — \circ ; средней трети — \diamond ; верхней трети — \triangle для 1000 ранжированных (показано только 250 чел.).

точек). Например, точка на графике с координатами (5; -265) говорит о том, что некоторый тестирующийся, набравший 5 баллов, ухудшил свой ранг на 265 позиций; а точка на графике с координатами (8; 271) говорит, что другой тестирующийся, набравший 8 баллов, улучшил свой ранг на 271 позицию.

Если разбить всех тестирующихся на три группы в соответствии с их начальными рангами, а потом посмотреть насколько изменился ранг тестирующегося после выполнения теста и нанести эти результаты на график видно, что первый школьник был из средней группы ранжированных, а второй школьник был из нижней группы. В целом мы видим, что как самые лучшие, так и самые худшие тестирующиеся школьники изменили свой ранг незначительно.

Выводы

Для расчета латентных параметров тестирования (трудностей заданий и уровней знаний тестирующихся школьников) достаточно тех неполных данных, которые публиковались вплоть до 2013 г. на сайте [14]. Значения латентных переменных можно рассчитать с помощью электронной таблицы Excel MS Office. Разрешающая способность, а следовательно, и точность получаемых результатов существенно неравномерны. Для расчета надежности получаемых оценок можно провести математическое моделирование процесса тестирования.

Найденные значения латентных параметров и эмпирическая функция распределения уровней знаний тестирующихся могут быть использованы для моделирования входного потока тестирующихся, для расчета доли правильно оцененных, для задач принятия решений об возможности дальнейшего обучения.

Литература

1. Деменченко О.Г. Погрешность баллов Единого государственного экзамена, Педагогические измерения. 2011. вып. 4. С. 3-17.
2. Карнаухов В.М. Точность оценок ЕГЭ для различных методик, Открытое и дистанционное образование. 2015. Т. 2. вып. 58. С. 20-27.
3. Крокер Л., Алгина Дж. Введение в классическую и современную теорию тестов: Учебник. — М.: Логос, 2010.

3. *Луценко, М.М.* Теория статистических решений. Ч. 1: учеб.пособие. — СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2011.
4. *Луценко М.М., Шадринцева Н.В.* О точности педагогического тестирования // Известия Петербургского университета путей сообщения, СПб.: Петербургский гос. Ун-т путей сообщения, 2011. — Вып 4(29), сс. 250-258.
5. *Луценко М.М., Кенесбай М.Н.* Ошибки при ранжировании по результатам тестирования // VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2017): Москва, Труды. Том 2/ Отв. ред. Е.З. Мохонько. — М.: Изд-во ФИЦ ИУ РАН, 2016, с. 46-47
6. *Луценко М.М.* ЕГЭ по математике. Расчет ошибок ранжирования, Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2018. Т. 1. С. 180-183.
7. *Луценко М.М., Сейтманбитов Д.А., Барановский А.М.* Расчет надежности решений, принимаемых по результатам тестирования, Интеллектуальные технологии на транспорте. 2020. вып. 1 (21). С. 56-61.
8. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* ЕГЭ как катализатор кризиса российского образования // Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. — 2011. — вып.3. — С. 18-59
9. *Маслак А. А.* Теория и практика измерения латентных переменных в образовании: монография. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 255 с. — (Образовательный процесс). — ISBN 978-5-534-01451-8.
10. *Нейман Ю.М., Хлебников В.А.* Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. — М: Прометей, 2000, 168 с.
11. *Попов А. П.* Проблема оценки трудности тестовых заданий, Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: технические науки, 2012. — вып.4. — С. 115-120
12. *Хлебников В. А.* Краткий анализ технологии и результатов единого государственного экзамена, Школьные технологии, 1/2009, изд. Народное образование
13. www.ege.spb.ru/ege/statistika-i-analitika/ege-2013 (Официальный информационный портал ЕГЭ, Санкт-Петербург).

ИММЕРСИВНОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

В.А. Матвеева

matveeva89.ru@mail.ru

УДК 372.851

В условиях стремительно развивающейся информационно-образовательной среды иммерсивное обучение становится трендом современного образования. Интерактивное взаимодействие с математической моделью является сложной педагогической задачей. Применение систем компьютерной алгебры позволяет пронаблюдать свойства математической модели, что можно определить как слабое иммерсивное обучение.

Ключевые слова: иммерсивное обучение, система компьютерной алгебры.

Под иммерсивным обучением мы чаще всего понимаем применение иммерсивных технологий, прежде всего, это технологии виртуальной и дополненной реальности (AR и VR технологии). При обучении математике ключевым аспектом является изучение математической модели. Но также следует понимать, что оцифровка математической модели не является весомым дидактическим материалом, способствующим формированию абстрактного представления реального или идеализированного явления [1].

Оцифровка, например, геометрической фигуры не обеспечивает более эффективное и интерактивное обучение. А вот если появляется возможность поработать с оцифрованной моделью: повернуть, посмотреть различные развертки, рассмотреть под разными углами, тогда мы получаем тот самый эффективный симбиоз технологий и дидактики. Наблюдение математической модели «со стороны» часто оказывается более эффективным приемом нежели погружение в рассматриваемый процесс или объект. Осознать тип движения объекта, наблюдая со стороны, легче, чем являясь непосредственно участником движения. Наблюдать со стороны развертку

многогранника в динамике легче, чем с позиции объекта, находящегося в многограннике. «Испортишь» обучение с помощью технологий легко! Моментов в обучении любой дисциплины, где технологии неуместны и даже вредны, очень много. Таким образом, наша цель заключается в грамотном обучении с применением технологий!

Современная математика достигла колоссального уровня абстракций. И показать студентам высоко формализованные, абстрактные математические модели, которые не имеют прямой связи с физическим миром, становится сложной задачей. Прежде всего, это касается разделов алгебры [2].

При иммерсивном обучении, демонстрации математической модели недостаточно, необходимо, прежде всего, интерактивное взаимодействие субъектов образовательного процесса в искусственно созданном виртуальном окружении.

Обучая теории чисел студентов педагогического образования, профиль математика и физика, приходится сталкиваться с необходимостью демонстрации математической модели, ее практического применения. Доказательство теорем является неотъемлемой частью математического образования, поскольку именно математические доказательства являются теми самыми строго формализованными абстрактными математическими моделями, которые позволяют устанавливать истинность утверждений на основе логических выводов и определенных правил и законов. Но доказательство теорем Эйлера и Ферма не дает представления о применении этих математических моделей в современных реалиях.

Выходом в данной ситуации может послужить рассмотрение модели ассиметричного шифрования RSA с применением системы компьютерной алгебры Maxima. Система позволяет генерировать простые числа, находить их сравнения. Студенты могут исследовать свойства чисел, проводить эксперименты, изменяя параметры, и наблюдать закономерности в реальном времени, поскольку подобные вычисления без применения технологий являются очень трудоемкими или невозможными. Таким образом, студенты включены в работу с самой математической моделью и имеют возможность наблюдать ее.

Следует отметить, что речь не идет о погружении студентов в изучаемую тему или среду. Все-таки необходимо знать математическую модель в соответствии с которой требуется вызывать определенные функции, после чего происходит наблюдение результатов. Конечно, это помогает не изучить модель, а пронаблюдать её свойства, что также является положительным моментом в обучении. Представленный подход в обучении можно определить как слабое иммерсивное обучение, позволяющее создавать визуальные эффекты, демонстрировать математические модели путем взаимодействия с учебным материалом.

Литература

1. *Муравьева А. А., Олейникова О.Н.* Иммерсивное обучение - технология будущего или временное увлечение? // Казанский педагогический журнал. 2023. – № 1(156). — Казань, 2023, 120-129. [10.51379/KPJ.2023.158.1.012](https://doi.org/10.51379/KPJ.2023.158.1.012).
2. *Матвеева В. А., Воронюк Ю.Д.* Моделирование как смыслообразующий феномен при решении задач по математике // Ребенок в современном образовательном пространстве мегаполиса. // Материалы VIII Международной научно-практической конференции (25–26 марта 2021 года). — Москва: Московский городской педагогический университет, 2021 — 205-209.

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Д.С. Миндыла
darya.mindyła@mail.ru

УДК 372.851

В данной статье рассматриваются актуальные проблемы, связанные с подготовкой будущих учителей математики. Также рассматриваются ключевые аспекты, такие как методология обучения, использование современных технологий, исследования в области педагогики, а также меры по улучшению качества подготовки будущих учителей математики.

Ключевые слова: подготовка учителей математики, методология обучения, современные технологии, качество математического образования.

Обеспечение качественного математического образования является ключевым аспектом формирования интеллектуального потенциала общества. В этом контексте, роль учителей математики становится важной, и подготовка квалифицированных педагогов становится актуальной проблемой. Настоящая статья посвящена рассмотрению современных вызовов, с которыми сталкиваются будущие учителя математики, и предлагает анализ ключевых аспектов их профессиональной подготовки.

Один из важных аспектов подготовки будущих учителей математики — это разработка современных методов обучения. Современные требования к образованию требуют активного использования интерактивных методов, интеграции технологий в обучение и стимулирования творческого мышления учащихся.

Применение проблемно-ориентированных методов обучения, где учащиеся сталкиваются с реальными математическими проблемами и активно участвуют в их решении, становится более приоритетным. Интерактивные методы, такие как использование игр, групповые проекты и обсуждение математических концепций, способствуют более глубокому пониманию материала.

Однако, помимо этого, важно находить баланс между использованием технологий и традиционными методами, учитывая индивидуальные потребности учеников. С учетом разнообразия стилей обучения, профессиональные программы должны обеспечивать будущих учителей математики навыками гибкого подхода к обучению, адаптируя свой методологический подход к конкретным ситуациям в классе.

Современные технологии играют ключевую роль в эффективной подготовке будущих учителей математики. В контексте становления цифровой эпохи, применение технологий в обучении математике становится неотъемлемой частью образовательного процесса.

Интерактивные доски, программные средства для создания учебных материалов, виртуальные лаборатории и онлайн-ресурсы — все это предоставляет широкие возможности для создания увлекательных и эффективных уроков. Важно, чтобы будущие учителя математики не только владели этими технологиями, но и понимали, как интегрировать их в учебный процесс с максимальной пользой для обучения.

Тем не менее, при внедрении технологий в обучение необходимо учесть, что они должны быть средством, а не целью. Важно, чтобы будущие учителя различали моменты, когда традиционные методы более эффективны, и умели гибко применять технологии в соответствии с образовательными целями.

Профессиональная подготовка учителей должна акцентировать внимание на разработке методик оценки знаний и навыков учащихся, а также адаптации учебных программ для разнообразных потребностей учащейся аудитории. Важно регулярно оценивать результаты обучения, анализировать их и внедрять корректировки в образовательный процесс.

Таким образом, разработка и внедрение мер по повышению качества математического образования становится неотъемлемой частью профессиональной подготовки будущих учителей.

Для эффективного решения выявленных проблем и обеспечения высокого уровня подготовки будущих учителей математики требуются целенаправленные и системные меры:

- 1) Пересмотр учебных программ.
- 2) Обновление квалификационных требований.
- 3) Внедрение инновационных форм обучения.
- 4) Поддержка профессионального развития.
- 5) Стимулирование преподавателей.

Современные учителя математики должны быть готовыми к гибкому адаптированию своего подхода к обучению, уметь успешно интегрировать современные технологии и применять результаты педагогических исследований в своей практике. Они играют ключевую роль в формировании математической грамотности будущих поколений, влияя на качество образования и его соответствие требованиям современного общества.

Профессиональная подготовка учителей математики должна постоянно совершенствоваться в ответ на вызовы современного образования. Это включает в себя разработку инновационных методик, интеграцию передовых технологий и постоянное обновление содержания образовательных программ. Только таким образом можно обеспечить качественное математическое образование, способствующее развитию учащихся как мыслящих, критически мыслящих и компетентных граждан.

Литература

1. *Шанявский Я.М.* Профессиональная подготовка учителя математики в контексте современных образовательных технологий. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: История образования, 21(3), 180-190, 2015 г.
2. *Глазунов А.А.* Современные технологии в обучении математике: проблемы и перспективы. Математика в школе, 2, 3-8. 2012 г.
3. *Бойлер Д.* Математические мировоззрения: раскройте потенциал студентов через креативную математику, вдохновляющие идеи и инновационное обучение. Пер. с англ. М.: Альпина Паблишер.
4. Школа-Студия «Перспектива». (2019). Исследования в области математического образования: применение результатов в практике. М.: Просвещение.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

О.В. Митина, А.В. Райков

omitina@inbox.ru, raykoffff@yandex.com

УДК 512.56

Описываются методы и подходы к обучению студентов математическим методам в психологических исследованиях. Подчеркивается важность организации уяснения и отработки материала, использование различных методов демонстрации и объяснения, а также стимулирование интереса и мотивации студентов. Обращается внимание на необходимость усиленного внимания к базовым понятиям и методам анализа данных, а также на важность схематизации и алгоритмизации материала для улучшения понимания. Предлагаются практические рекомендации для эффективного обучения студентов в данной области.

Ключевые слова: Обучение студентов, когнитивная сфера, организация уяснения материала, стимулирование интереса, эффективное обучение.

Митина Ольга Валентиновна, к.псих.н., доцент, в.н.с. МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии, лаборатория психологии общения (Москва, Россия)

Райков Александр Вадимович, ст.инж., психолог, АКБ «ТВС bank» (Ташкент, Узбекистан)

Для студентов-психологов изучение математики необходимо в первую очередь для того, чтобы овладеть методами статистической обработки данных и умениями строить математические модели для анализа психологических феноменов. Изучение математических методов в гуманитарных дисциплинах вещь очень полезная. Математику можно сравнить с новым языком, а овладение еще одним языком – это дополнительный шаг на пути развития человека. («Человек столько раз человек, сколько языков он знает» (А.П. Чехов). Подобно тому как бег полезен любому спортсмену, развивает и тренирует его физические способности, математика полезна любому исследователю – развивает его когнитивные способности.

Овладение математическими методами в большинстве случаев вызывает у студентов психологических специальностей особые трудности. Причина этих трудностей лежит главным образом в обыденном представлении о психологии как гуманитарной дисциплине, а о деятельности психолога – как о профессии «человек – человек» по классификации Е.А. Климова. Поэтому многие студенты-психологи относятся к предметам, связанным с математикой, как к чуждым психологии. Очень часто студент воспринимает математические методы как практически бесполезные для психолога, а себя как неспособного к математике. «Такого рода точка зрения характеризуется недооценкой, даже пренебрежительным отношением к самой возможности применения количественных методов исследования» (Климов 2011, с. 123).

Можно выделить объективные трудности изучения математики: высокая информационная насыщенность математических дисциплин; от учащегося требуется освоить многочисленную специальную терминологию; большое разнообразие статистических методов, множество правил и процедур. Содержание обучения слабо перекликается с личным опытом студентов и уже пройденными дисциплинами. Привлечение математического аппарата неизбежно повышает строгость и однозначность излагаемых идей: математика требует четкого, зачастую единственно верного ответа, а не пространных рассуждений и дискуссионных мнений. В результате становится невозможным получить хорошую оценку при поверхностном знании, дополняя его собственными и общежитейскими соображениями, выводами тривиального характера.

Основные педагогические принципы, применяемые нами в ходе преподавания математических методов: включенность новых знаний и умений в осмысленную для студента профессионально значимую деятельность, многократное повторение действий для формирования навыка, постоянная обратная связь от преподавателя студенту. Эти принципы основаны на теории планомерного формирования умственных действий и понятий, в частности концепции третьего типа ориентировки в предмете (Гальперин 1985; Талызина 1980; Подольский 1987).

В исследованиях Д.А. Леонтьева (2018) показано, что академическая успешность выше, когда в процессе учебы человек достигает «состояния оптимального переживания», компоненты которого: осмысленность, необходимость прилагать усилия и чувство удовлетворения. Важно, чтобы студенты понимали, зачем им нужен тот или иной курс (математика в данном случае), предмет должен быть сложным, но сам процесс учебы нужно максимально разнообразить, сделать увлекательным и доступным. Новый материал лучше осваивается через формат действия, желательно игрового. Необходимо постоянно поддерживать связь со студентом, не допуская «провалов» в непонимание, и как следствие отставание от сокурсников.

Приведем примеры конкретных педагогических средств, облегчающих процесс усвоения математических курсов студентами-психологами.

Когнитивная сфера – организация уяснения и отработки материала. В процессе обучения мы используем большой банк заданий, каждое из которых связано с необходимостью провести анализ набора данных, полученных в реальном психологическом исследовании. Таким образом студент сразу имеет возможность ощутить себя исследователем, перед которым стоит психологическая задача. Большую роль играет демонстрация исследовательских возможностей метода. Важно приводить примеры ценных, любопытных научных или диагностических результатов, полученных благодаря математическому инструменту. Потенциал метода целесообразно обрисовать в начале изложения, формируя познавательную привлекательность дальнейшего материала, желание его освоить. В ходе объяснения эффективны аналогии, сравнения, метафоры, уподобляющих изучаемый материал реалиям повседневной жизни или содержанию известных художественных произведений. Лёгкий, экспрессивный стиль языка в разъяснениях снижает напряженность в аудитории. Для усиления наглядности можно использовать гротеск (ситуацию предельного случая).

Важно привлекать усиленное внимание к базовым понятиям, обуславливающим выбор нужного метода анализа и вывода (тип задачи, типы шкал, виды выборок, способы оценки нормальности, р-значение). Многие принципиальные для количественного анализа обстоятельства являются универсальными и пронизывают всю учебную программу. Владение данными понятиями позволяет вести направленный поиск средств, успешно и оперативно ориентироваться в их соответствии целям и условиям, умело пользоваться инструментом.

Полезно стремиться к схематизации и алгоритмизации развёрнутого материала, даже ценой некоторого учебного упрощения. Дополнительная информация, осложняющая реальность, может быть подключена после изучения базовой структуры действий. Здесь на помощь приходит составление схем-алгоритмов последовательности действий в случае многоступенчатого и/или вариативного (в зависимости от конкретной ситуации) решения. Необходимо добиваться уяснения учащимися оптимального (или же единственно верного) порядка работы. Мы используем графы операций, которые сводят процедуру к серии тривиальных выборов. Снабжение материала схематической пошаговой инструкцией выступает стимулом-средством, позволяя ориентироваться в новой деятельности, облегчая запоминание, а также снижая когнитивную нагрузку в целом. Важно также стимулировать сознательную ориентировку в математических методах при помощи вопросов о смысле отдельных операций. Это поможет избежать риска ошибки из-за неспособности отличить один метод от другого или одну логику вывода от альтернативной. Необходимо закрепление связи конкретных методов с общими основаниями посредством проверочных вопросов. Особым полезным эффектом обладают вопросы о плане действий в слегка видоизменённой ситуации. Ответы на них не только выступают надёжным индикатором осознанности и обобщенности усвоения (конкретную модификацию задания трудно угадать и выучить заранее), но и позволяют отвечающему осмысленно сопоставить разные части процедуры решения.

Полезно демонстрировать студентам искажения, к которым может привести использование метода при нарушенных ограничениях на этот метод. Нужно приучать студента не бояться совершить ошибку при анализе данных, а для этого учить его распознавать нарушение логики в результатах.

Мотивация учения. При обучении студентов-психологов математическим знаниям и умениям считаем полезным задействовать разные виды мотивации: познавательную (исследовательскую), соревновательную и игровую, а также «помогающую» мотивацию (мотивацию сотрудничества).

Поскольку большинство проверочных работ включает выполнение студентом определенного квазинаучного¹ исследования, предполагающего, что студент пройдет все основные этапы эмпирического исследования и выполнит этап математического анализа данных, как одну из необходимых составляющих исследовательского процесса. Прохождение предваряющих статистический анализ данных и следующих за ним этапов исследования позволяют осознать интегрированные требования к сбору данных, их обработке, анализу и интерпретации. Студент сталкивается с задачей освоения новых методов анализа для получения более интересных результатов, проверке и (или) установлению более нетривиальных фактов.

Помимо учебно-познавательной мотивации мы стремимся создать мотивацию соревнования. При проведении проверочных работ различного уровня моделируются условия конкуренции, поощряющие студентов активнее, плодотворнее, качественнее работать в течение семестра, не откладывая всю подготовку на время сессии. Тут уместно вспомнить уже упомянутую спортивную метафору: во время соревнования по бегу люди показывают более высокие результаты по сравнению с тем, как они бегут без соперников. Включение студентов в соревновательную группу превращает учебу в своего рода «игру». В итоге все выигрывают: знания увеличиваются, участники получают «новый потенциал» для академического и профессионального роста.

Не менее важным средством повышения эффективности обучения выступает «помогающая» мотивация. Создаются условия, поощряющие студентов объяснять своим коллегам темы, вызывающие затруднения: дополнительное объяснение, проговаривание помогают и самому объясняющему лучше усвоить материал.

Проведенные анонимные опросы студентов по окончании курса свидетельствуют об удовлетворенности большинства опрошенных полученными знаниями и учебным опытом. Приобрете-

¹ Не ставится задача достижения полноценной научной новизны результатов исследования.

ние студентами, прошедшими обучение, хорошего потенциала для академического и профессионального роста подтверждается данными наблюдений за их дальнейшей учебной и профессиональной карьерой, которую мы имели возможность отследить.

Литература

1. *Климова Е.А.* Психолог. Введение в профессию // Климова Е.А. (ред.). — Москва: Академия, 2011.
2. *Гальперин П.Я.* Методы обучения и умственное развития ребенка. — Москва: Изд-во МГУ, 1985.
3. *Талызина Н.Ф.* Методика составления обучающих программ. — Москва: Изд-во МГУ, 1980.
4. *Подольский А.И.* Становление познавательного действия: научная абстракция и реальность. — Москва: Изд-во МГУ, 1987.
5. *Леонтьев Д.А., Клейн К.Г.* Качество мотивации и качество переживаний как характеристики учебной деятельности // Вестник Московского университета. Сер. 14: Психология. 2018. №4. — Москва, 2018.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ: УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА И ПОСОБИЯ

С.Н. Мошков

moshkov.sn@irlc.msu.ru

УДК 51, 371.3

В докладе представлена программа по высшей математике для иностранных студентов. Программа составлена на основе опыта преподавания в ИРЯиК МГУ и соответствует программам вступительных испытаний по математике факультета ВМиК и механико-математического факультета МГУ

Ключевые слова: иностранные студенты, высшая математика, учебная программа, учебные пособия.

Учебная программа и учебные пособия направлены на достижение основных учебных целей преподавания высшей математики для иностранных студентов – подготовка к вступительному испытанию на факультет и последующему обучению [1].

Программа по высшей математике для иностранных студентов.

Программа курса по математике для иностранных граждан-магистров направления математика и информатика используется несколько лет в предвузовской подготовке студентов ИРЯиК МГУ, поступающих в магистратуру факультетов МГУ: ВМиК, мех-мат и др.

Данная программа соответствует программе вступительного испытания по математике факультетов ВМиК и мех-мата МГУ для иностранцев, поступающих в магистратуру по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и математическое моделирование».

При составлении программы использовались опыт преподавания в ИРЯиК МГУ [2], а также замечания специалистов факультета ВМиК и мех-мата МГУ. Программа рассчитана на 184 часа (с учетом контроля по каждой теме, см. Таблица 1) часа и содержит 3 части:

1. вводный курс — арифметика;
2. алгебра, степени, логарифмы, тригонометрия;
3. введение в высшую математику: линейная алгебра; аналитическая геометрия; линейные и евклидовы пространства, линейные операторы, квадратичные формы; введение в математический анализ; комплексные числа и функции комплексного переменного; неопределенные, определенные, кратные и поверхностные интегралы; функции нескольких переменных; дифференциальные уравнения; числовые, степенные и функциональные ряды.

С учётом уровня подготовки слушателей и ограниченного времени программа по высшей математике включает только самые основные понятия, а учебные пособия содержат ядро языка специальности.

В программе предусмотрены систематический промежуточный контроль, а также итоговый контроль. Систематический промежуточный контроль позволяет учитывать степень усвоения материала и корректировать учебный процесс.

Большой объём материала требует соответствующее количество часов самостоятельной работы (объём аудиторных занятий не менее 50 процентов) [3]. Отдельной строкой выделены часы для подготовки к экзамену – экзамен является для слушателей большим стрессом и необходимо подготовить их к испытанию.

Пособия и учебно-методические материалы.

В частях 1 и 2 используются учебные пособия ИРЯиК из курса математики для студентов, поступающих на 1 курс [4 - 7].

По высшей математике подготовлены пособия: Линейная алгебра; Векторная алгебра; Линейные пространства, подпространства, операторы и квадратичные формы; Аналитическая геометрия на плоскости; Аналитическая геометрия в пространстве, Введение в математический анализ. Для остальных разделов подготовлены поурочные учебные материалы.

Пособия и учебные материалы комплекса написаны в едином стиле, это упрощает разработку новых материалов и облегчает восприятие. Лексика и грамматические конструкции изменяются от простого к сложному, чтобы подготовить студентов к языку реальных неадаптированных университетских учебников. Пособия и планы уроков имеют одинаковую структуру и оформление.

Первый раздел – это Новые слова. Студенты получают слова к уроку, чтобы перевести их на свой язык и выучить.

Следующий раздел – Грамматические конструкции. Это конструкции, которые используются при изложении материала. Они помогут студентам построить свои предложения.

Далее – Слушаем, читаем. Здесь даём примеры словосочетаний с новыми словами. На уроке преподаватель читает их вместе со студентами.

Затем – Основной текст (материал урока).

Для объяснения новых терминов или сложных понятий используются пояснения и сноски. Они выделяются курсивом и имеет меньший размер шрифта.

Основные материалы содержат примеры, определения, блоки Внимание, теоремы.

При изложении материала приводятся исторические справки про ученых и исторических фактах, используются цвет, пиктограммы и рисунки, чтобы сделать более ярким и привлекательным [8].

В конце резюме – краткое изложение темы. Это важно для повторения и «взгляда на тему с другой стороны».

Вопросы и упражнения. В материалах используются задачи, упражнения и вопросы по теории в разной форме, например: *Что такое матрица? Матрица – это . . .* На уроке студенты выполняют задания и отвечают на вопросы. Часть упражнений – это домашнее задание.

Слова и словосочетания. Это последний раздел для закрепления лексики.

Формат пособий. В пособиях используется формат А4 и большие поля. Это необходимо, чтобы пособие было рабочей тетрадью, на которой можно сделать пометки и не отвлекаться на тетрадь.

Цвет. В материалах используются следующие цвета – черный (основной текст), жирный черный (основная мысль), серый (пояснения, справка), зеленый (определение), синий (теорема), красный (внимание, важная информация). Цвет позволяет управлять вниманием студента. На уроке для записи на доске также можно использовать эти цвета. Можно использовать проекцию материалов на экран.

В пособиях используется один шрифт Times New Roman, с засечками, что хорошо для печатных материалов, а также небольшое количество стилей оформления (большое количество стилей усложняет восприятие материала).

Для привлечения внимание используется размер шрифта, например, размер шрифта примеров меньше, чем размер шрифта основного текста.

Пиктограммы. Для выделения разделов текста и привлечения внимания также используются

пиктограммы на левом поле страницы:  — новые слова, ! — внимание.

Рисунки. В материалах активно используются различные рисунки и иллюстрации: графические системы, маленькие рисунки, векторная графика, наглядные иллюстрации и просто рисунки. Программа предусматривает необходимость согласования с курсом по информатике для экономии учебного времени, совместного использования новых слов, понятий, теорем и примеров.

Таблица 1: Программа курса математики (184 часа)

| № | Тема | Часы |
|----|--|------|
| 1 | Вводный курс. | 21 |
| 2 | Алгебра | 23 |
| 3 | Степени. Логарифмы. Тригонометрия | 25 |
| 4 | Линейная алгебра и аналитическая геометрия | 23 |
| 5 | Введение в математический анализ | 17 |
| 6 | Комплексные числа | 3 |
| 7 | Неопределённый интеграл | 3 |
| 8 | Определённый интеграл | 9 |
| 9 | Функции нескольких переменных | 8 |
| 10 | Дифференциальные уравнения | 13 |
| 11 | Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы | 9 |
| 12 | Числовые ряды | 7 |
| 13 | Степенные ряды | 5 |
| 14 | Функции комплексного переменного | 11 |
| 15 | Функциональные ряды | 5 |
| 16 | Общий контроль, подготовка к экзамену | 2 |
| | Всего часов | 184 |

Литература

1. Вуколова Т.М. Особенности преподавания математики в иноязычной аудитории. // Международный научно-практический семинар “Преподавание общеобразовательных предметов на русском языке в иноязычной аудитории”. Москва. 2014.
2. Ермаков В.М. Преподавание математики на русском языке для студентов-иностранцев, поступающих в магистратуру естественнонаучных направлений. // Международный научно-практический семинар “Преподавание общеобразовательных предметов на русском языке в иноязычной аудитории”. Москва. 2014.
3. Приказ Министерства науки и высшего образования РФ от 18 октября 2023 г. № 998.
4. Лазарева Е.А., Зверев Н.И. Математика. Вводный курс. Арифметические операции. М.: Ред.-изд. совет МОЦ МГ. 2010.
5. Лазарева Е.А., Пацей И.П., Вуколова Т.М. Алгебра. М.: Ред.-изд. совет МОЦ МГ. 2015.
6. Лазарева Е.А., Зверев И.П., Пацей И.П. Степени. Логарифмы. Тригонометрия. М.: Ред.-изд. совет МОЦ МГ. 2003.
7. Зверев Н.И., Лазарева Е.А., Вуколова Т.М. Начала математического анализа (предел, производная, интеграл). М.: ЦМО МГУ. Москва. 2013
8. Садовничий В.А. О преподавании математики и информатики. // Всероссийский съезд учителей и преподавателей математики и информатики. Москва. 2021.

МЕТОД ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПРЕДИКАТНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

М. Нугмонов, А.Ш. Собиров

nugmonov@mail.ru, sobirov.abdusabur@mail.ru

УДК 510.6(072)

Разрешимость проблемы обучения и воспитания по всем его направлениям год за годом становится актуальной и трудной для всех родителей, педагогических и научно — исследовательских учреждений. В связи с этим, авторы посвящают эту статью в качестве помощи в области учебно-воспитательной работы ряда ценных рекомендаций с помощью логического изложения начальной теории симметрических многочленов для выделения области истинности и области ложности предикатных смешанных систем уравнений. Действительно, если школьники и студенты возьмут во внимание все высказанные учёными предложения по поводу педагогической деятельности в области воспитания и обучения, тогда процесс жизни найдёт свой алгоритм. Поэтому, всем родителям и преподавателям необходимо взяться за поведение своих детей, школьников и студентов, чтобы они по существу поняли содержание и использование истины в своей жизни.

Ключевые слова: предикат, симметрические многочлены, методы обучения и воспитания, источник радости, перестановка рабочих сил, элементарные симметрические многочлены, смешанные системы уравнений, рекуррентные формулы, проблемы разрешимости, симметрия и красота природы.

1. Методы обучения и воспитания

Воспитание, обучение, трудолюбие и владение хорошим поведением среди детей, школьников, студентов и населения всегда являются актуальной и неотложной задачей. Методы обучения и воспитания у каждого родителя, преподавателя и руководителя предприятия отличаются. Результативным методом обучения и воспитания некоторого коллектива является то, что его изложение мысли и рекомендации руководителя слушают внимательно, действуют уверенно, распространяют в других коллективах и успешно применяют.

Методы обучения, воспитания и экспериментирования на физико-математических и других естественных студенческих группах проходят наглядно, успешно и результативно, так как в большей мере они вызывают практический интерес у подопечных и исследователей.

Методы обучения и критерии воспитания, многозначные функции как предикаты в логике и их качество вырабатываются в личностях и отражаются в виде знания, выражения мысли, словосочетания, способности управления рабочим коллективом, аудиторией, классом, повышением урожая, качеством продукции, победой на соревнованиях, выздоровлением организма, завершением стройки, успешного применения техники и других подобных явлений.

Физико-математические формулы и другие естественные науки являются источником процессов природы и их числовые и функциональные взаимосвязи, что изучают студенты, исследователи, преподаватели и получают техническое образование и практическое применение.

2. Симметрический закон в жизни и в науке

Действительно, многие жизнеспособные существа и предметы созданы симметрично. Например, организм человека, животных, птиц с их разнообразными красивыми узорами, рыбы, овощи, фрукты, листья однородных деревьев, многие знаменитые дворцы, например, здания МГУ имени М.В. Ломоносова, машины, поезда, самолёты, корабли и многие другие. Эта симметрия относительно позвоночника или некоторой твёрдой линии организма сохраняется в живых существах и других названных предметах. Поэтому, равновесие, которым управляет симметрия — это большое человеческое богатство, красота и аксиома всей жизни. Жизнь, труд и практика освещают деятельность человека и помогают развитию общества. Симметрия — это физическое слово, о

Нугмонов Мансур, д.п.н., профессор, Педагогический университет имени С. Айни (Душанбе, Таджикистан)
Собиров Абдусабур Шукурович, к.ф.-м.н., доцент, Таджикский национальный университет (Душанбе, Таджикистан)

котором иногда говорят «зеркальное отражение». Например, симметричность фокальных точек в оптических линзах. Действительно, это симметрия обеспечивает и повышает видимость зрения человека. Это заслуга человеческой науки в разделе знаменитой физики. В физических экспериментах, исследованиях, станках, приборах и деталях помощь закона симметрии для равновесия и регулярности работы очень велика в пользу развития техники и производства. Аналогично симметрических законов в физике, в учебном плане высшей алгебры физико-математических отделений вузов имеется теория симметрических многочленов, которая начинается со следующего определения:

Определение 1. Многочлен от n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется симметрическим, если он не изменяется при любой перестановке переменных.

Пример 1.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ f(x_4, x_2, x_3, x_1) &= x_4x_2 + x_4x_3 + x_4x_1 + x_2x_3 + x_2x_1 + x_3x_1, \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(x_4, x_2, x_3, x_1). \end{aligned}$$

Пример 2.

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Определение 2. Многочлен $f(x, y)$ называется симметрическим, если выполняется равенство $f(x, y) = f(y, x)$.

Пример 1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3y + xy^3, \\ f(y, x) &= y^3x + yx^3 = xy^3 + x^3y = x^3y + xy^3, \\ f(x, y) &= f(y, x). \end{aligned}$$

Определение 3. Многочлен от трёх переменных $f(x, y, z)$ называется симметрическим, если выполняются следующие равенства:

$$f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x).$$

Пример 1.

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^3yz + xy^3z + xyz^3 + 10, \\ f_1(z, y, x) &= z^3yx + zy^3x + zyx^3 + 10 = x^3yz + xy^3z + xyz^3 + 10, \\ f_1(x, y, z) &= f_1(z, y, x). \end{aligned}$$

Пример 2.

$$f_2(y, x, z) = y^4 + x^4 + z^4 = x^4 + y^4 + z^4 = f_2(x, y, z).$$

Теперь составим примеры, подобные симметрическим многочленам.

1. При перестановке расположения книг, содержание книжного шкафа не меняется, а привычное пользование книг может отличаться.

2. При перестановке в классе места сиденья школьников и в аудитории мест студентов, содержание посещения в помещении и степень их подготовки к урокам и занятиям не меняется.

3. От перестановки рабочих сил в коллективе и преподавателей по специальностям возможно отличаются результаты производства, отношения, результативность учёбы и воспитания. В некоторой степени, наука развивается больше, чем состояние управления обществом. Поэтому, всегда надо ссылаться на науку и передовую технику и технологию, за справедливость и хорошее отношение. В этой статье ниже будем говорить о применении симметрических многочленов в элементарной алгебре.

Симметрические многочлены $\sigma_1 = \sigma_1(x, y) = x + y$ и $\sigma_2 = \sigma_2(x, y) = xy$, являются самыми простыми, где их называют элементарными симметрическими многочленами от x и y . Кроме σ_1 и σ_2 часто будут встречаться степенные суммы симметрических многочленов: $S_1 = x + y$, $S_2 = x^2 + y^2$, $S_3 = x^3 + y^3, \dots, S_n = x^n + y^n$.

3. Основная теорема о симметрических многочленах от двух переменных

Существует простой метод (алгоритм), позволяющий получить симметрические многочлены. Возьмём любой многочлен $F(\sigma_1, \sigma_2)$ и поставим в него вместо σ_1 и σ_2 их выражения через x и y . При этом, получим симметрический многочлен от x и y . Например, из многочлена $F(\sigma_1, \sigma_2) = 3\sigma_1^3 + 2\sigma_1\sigma_2 + 5$ получим следующий симметрический многочлен: $\phi(x, y) = 3(x + y)^3 + 2(x + y)xy + 5 = 3x^3 + 3y^3 + 11x^2y + 11xy^2 + 5$.

Например, степенные суммы: S_1, S_2, S_3 преобразованием выражаются через σ_1 и σ_2 :

$$S_1 = x + y = \sigma_1,$$

$$S_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$S_3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Таким образом, примеры приводят нас к предположению о справедливости следующей теоремы:

Теорема. Любой симметрический многочлен $f(x, y)$ можно представить в виде многочлена от $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$.

Доказательство проведём в двух частях: сначала докажем теорему для $S_n = x^n + y^n$. Умножим обе части равенства $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ на $\sigma_1 = x + y$ и получим

$$\sigma_1 S_{k-1} = x^k + x^{k-1}y + y^{k-1}x + y^k = S_k + \sigma_2 S_{k-2},$$

таким образом

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2}, \quad k \geq 2. \quad (1)$$

Можно последовательно находить выражения степенных сумм через σ_1 и σ_2 .

Ниже составлены таблицы выражения степенных сумм $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ через σ_1 и σ_2 .

$$S_1 = \sigma_1;$$

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2;$$

$$S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2;$$

$$S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2;$$

$$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3.$$

Так как, любой симметрический многочлен от x и y содержит слагаемые двух видов:

а) Встретятся одночлены, вида $ax^k y^k$, а это есть $ax^k y^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k$;

б) Могут встретиться двучлены, вида $b(x^k y^l + x^l y^k)$. Предполагаем для определённости $k < l$, тогда преобразуя, получим: $b(x^k y^l + x^l y^k) = bx^k y^k (y^{l-k} + x^{l-k}) = b\sigma_2^k S_{l-k}$.

Согласно первой части доказательства теоремы S_{l-k} представляется в виде многочлена от σ_1 и σ_2 . Теорема полностью доказана.

Пример 1. Решить смешанную систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x - xy + y = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 19 \\ \sigma_1 - \sigma_2 = 7, \end{cases}$$

ответ: $(3, -2), (-2, 3), (1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}), (1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$.

Преобразуем третье уравнение:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 1 + z^3, \quad (7 + z)(z^2 - 7z + 31) = 1 + z^3, \quad -18z = -216, \quad z = 12.$$

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ x^2 + y^2 = 181 \\ x^3 + y^3 = 1729, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 19 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 181 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1729, \end{cases} \quad \text{ответ данной системы: } (9, 10, 12), (10, 9, 12),$$

Пример 2. Решить уравнение шестой степени: $\left(\frac{x+a}{2}\right)^6 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^6 = a^6$.

Обозначим: $\frac{x+a}{2} = u, \frac{x-a}{2} = v$, тогда получим:

$$\begin{cases} u + v = a \\ u^6 + v^6 = a^6, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 = a^6, \end{cases} \quad \sigma_2(-6a^4 + 9a^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2) = 0.$$

Отсюда: I. $\sigma_2 = 0$ и II. $2\sigma_2^2 - 9a^2\sigma_2 + 6a^4 = 0$.

Теперь составим $\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = 0, \end{cases}$ и второе уравнение решим относительно σ_2 : $\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = a^2 \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4} \end{cases}$

Составим $u - v = x$ и преобразуем $x^2 = (u + v)^2 - 4uv = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$.

Поэтому $x^2 = a^2$ кроме того $x^2 = a^2 - a^2(9 \pm \sqrt{33})$
 $x = \pm a$ $x^2 = -8a^2 \pm \sqrt{33}a^2$.

Таким образом, получим шесть решений исходного уравнения:

$$x_{1,2} = \pm a, \quad x_{3,4} = \pm ia\sqrt{8 - \sqrt{33}}, \quad x_{5,6} = \pm ia\sqrt{8 + \sqrt{33}}.$$

Пример 3. Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5.$$

Исследование: $\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ 89+x \geq 0 \end{cases}$ поэтому $-89 \leq x \leq 8$.

$$\sqrt[4]{8-x} = u, \quad \sqrt[4]{89+x} = v$$

$$8-x = u^4, \quad 89+x = v^4$$

$$\begin{cases} u+v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ S_4 = 97 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases}$$

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0, \quad \sigma_{2(1,2)} = \frac{50 \pm 38}{2}, \quad \sigma_{2(1)} = 44, \quad \sigma_{2(2)} = 6.$$

а) $\begin{cases} u+v = 5 \\ u \cdot v = 44, \end{cases}$ эта система имеет комплексные решения. б) $\begin{cases} u+v = 5 \\ u \cdot v = 6, \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1 = 2, & v_1 = 3, \\ u_2 = 3, & v_2 = 2. \end{matrix}$

$$\sqrt[4]{8-x} = 2, \quad 8-x = 16 \quad x_1 = -8,$$

$$\sqrt[4]{8-x} = 3, \quad 8-x = 81 \quad x_2 = -74,$$

ответ: $x_1 = -8, x_2 = -73$ — удовлетворяют условиям исследования.

Пример 4. Решим тригонометрическое уравнение $\cos^3 x + \cos x \sin x + \sin^3 x = 1$. С другой стороны, присоединим этому уравнению тождество: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и обозначим $\cos x = u, \sin x = v$.

$$\begin{cases} u^3 + uv + v^3 = 1 \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} S_3 + \sigma_2 = 1 \\ S_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 = 1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \end{cases}$$

Обе части второго уравнения умножим на σ_1 :

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 = 1 \\ \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1 \end{cases} \quad \text{теперь составим разность этих уравнений:}$$

$$-\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 = 1 - \sigma_1,$$

$$\sigma_2(1 - \sigma_1) = 1 - \sigma_1,$$

$$(1 - \sigma_1)(\sigma_2 - 1) = 0,$$

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.$$

$$\begin{cases} u+v = 1 \\ u \cdot v = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x + \sin x = 1 \\ \cos x \cdot \sin x = 1 \end{cases} \quad \text{со второго уравнения можно написать}$$

$2 \cos x \cdot \sin x = 2, \sin 2x = 2$, а это уравнение не имеет решения.

Далее решим первое уравнение $\cos x + \sin x = 1, \cos 45^\circ \cos x + \sin 45^\circ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, отсюда $\cos(x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: а) $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Заключение

Решённые задачи являются основным содержанием настоящего исследования, которые имеют предикатную форму. Действительно, найденные наборы решения уравнений и систем уравнений образуют область истинности предикатов. Другие наборы чисел не являющиеся решениями уравнений и их системы образуют область ложности предикатов. Такое логическое и математическое обсуждение раздела теории и практики симметрических многочленов расширяет кругозор школьников и студентов. Таким образом, роль математической логики, алгебры, геометрии и других естественных наук при решении теоретических, практических и экспериментальных задачах жизни, велика.

Литература

1. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. М. — Наука. — 1967. — 284с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. — Наука. — 1968. — 432с.
3. Нугмонов М. Теоретико-методологические основы системы методической подготовки учителя математики в педвузе. — М. — Прометей. — 1999. — 237с.
4. Собиров А.Ш., Собиров И.А., Собирова Г.А. Дискретная математика и логика. (На таджикском языке.) — Душанбе. — 2022. — 234с.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В.С. Панфёров

vsp50@bk.ru

УДК 512.6, 514.1

Понимая, что для большей части первокурсников разрыв между школьным и вузовским образованием неустраим, факультетам нужно обратить особое внимание на совершенствование организации преподавания математики, особенно на младших курсах.

Ключевые слова: непрерывность математического образования.

Эмиль Борель на конференции по математическому образованию (Париж, 1914 г.) в своём докладе: «Как согласовать преподавание в школе с прогрессом науки» отмечает, что медленный ход эволюции преподавания математики в средней школе имеет серьёзные и глубокие основания.

В настоящее время математическое содержание школьной математики основано на геометрии от Евклида до Эйлера, т.е. от д.н.э. — до начала XVIII века, а алгебре, математическом анализе и вероятности — на результатах, в лучшем случае до Франсуа Виета, Галилео Галилея, Рене Декарта, Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма Лейбница, т.е. тоже от XVI до начала XVIII века.

Содержание школьного математического образования и его реформы неизменно вызывают жаркие споры. В России первая общегосударственная образовательная программа была создана во времена Петра I (1701), при Екатерине II (1861) была принята другая программа. После реформы 1861 г. школьные программы сильно меняются. В 30-е годы двадцатого века происходит значительная реформа школьного образования, на этих программах была воспитана блестящая плеяда, время которых называют «золотым периодом московской математической школы». Далее «Колмогоровская реформа» 1970–1978 гг. В последние годы (мировая) цивилизация вступила в очередной очень сложный период. Новые информационные технологии приводят к последствиям, равным по значению революции. Поэтому насущно необходима чёткая концепция математики как предмета преподавания.

Тем самым, школьная математика основана на вчерашних достижениях, а вузовская должна ориентироваться на завтрашние потребности развития. Поэтому разрыв между школьным и вузовским образованием хотелось бы сказать, не уменьшается, а на самом деле только увеличивается. Однако, не только этим обусловлен разрыв. Преподаватели вузов отмечают неуклонное снижение уровня подготовки большей части первокурсников для дальнейшего изучения ими, в частности, математики. Многие первокурсники не подготовлены к работе по изучению вузовской математики, не отличают необходимые условия от достаточных, признаки от критериев и, что гораздо хуже, не умеют давать определения и формулировать утверждения, не говоря уже о доказательствах теорем. Не владеют навыками простейших комбинаторных рассуждений и решений целочисленных задач. О геометрии вообще говорить не приходится. Пожалуй, самое важное — это отсутствие навыков работы с учебником и вообще изучения учебной литературы.

Подтверждением этому являются результаты первой сессии. Так, например, из числа первокурсников факультета ВМК чуть меньше половины студентов получили удовлетворительные,

или неудовлетворительные оценки по курсу «алгебра и геометрия». Зачастую получившие двойку по курсу «алгебра и геометрия», получили оценки два или три по курсу «математический анализ».

Что же делать: снижать требования; упрощать лекционную программу? Конечно, такой способ решения проблемы недопустим, и вузы, факультеты действуют по-разному. Например, так как не все в полной мере овладевают преподаваемыми курсами, выделяют группы лучших студентов и организывают их обучение по особым (углублённым) программам. Преподаватели готовят видеозаписи лекций и семинаров, пишут методические пособия, проводят коллоквиумы, организывают факультативы по решению задач. Понимая, что разрыв между школьным и вузовским образованием неустраим, факультетам нужно обратить особое внимание на совершенствование организации преподавания математики, особенно на младших курсах.

К ВОПРОСУ О ФОРМИРОВАНИИ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ПРИЕМОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОНЛАЙН-СЕРВИСОВ

В.С. Прач, В.Д. Хазан

v-prach@mail.ru, v_hazan_dongy2023@mail.ru

УДК 372.8:51

В данной статье рассмотрено формирование эвристических приемов при решении задач по математике с использованием сервиса Online Test Pad. Такое программированное обучение дает возможность осуществить деятельность обучаемого при формировании умственных действий и приемов эвристической деятельности.

Ключевые слова: эвристически-ориентированные задачи, эвристические приемы, эвристическое обучение, сервис Online Test Pad.

В системе эвристического обучения математике главным является формирование эвристических приемов для подготовки будущего выпускника общеобразовательного учреждения к современному восприятию мира, поэтому теория учебно-познавательной эвристической деятельности является основой для построения эвристического обучения математике.

Характерными признаками учебно-познавательной эвристической деятельности являются:

- 1) обусловленность содержания эвристической деятельности личностными мотивами, целями и особенностями обучающегося;
- 2) наличие ситуации затруднения или проблемы;
- 3) создание обучающимся собственного образовательного продукта.

Организовывать эвристическую деятельность обучающихся нужно начинать с познавательной мотивации, к приемам организации которой можно отнести: эффект удивления от чего-то неожиданного, необычного; создание проблемной ситуации; эвристическую беседу; использование аналогии, сравнения, противопоставления; создание ситуации свободного выбора обучающимся учебного задания; создание ситуации увлеченности; использование метода анализа жизненных ситуаций; использование исторического материала, в том числе и истории математики; использование прикладных и практических задач и др.

В систему школьных задач целесообразно включать системы эвристически-ориентированных задач, которые оказывают содействие актуализации эвристических ситуаций и формированию у обучающихся умений правильно применять логические связи между понятиями, аксиомами, теоремами [1].

В работе рассмотрен опыт применения веб-сервиса Online Test Pad, который разработан для создания опросников, тестов, кроссвордов, диалогов, логических игр и комплексных заданий, при проведении практических занятий по математике [2]. Такое программированное обучение дает

возможность осуществить деятельность обучаемого при формировании умственных действий и приемов эвристической деятельности.

Педагогическое взаимодействие в процессе решения эвристических задач, направленное на стимулирование эвристической деятельности обучающегося включает четыре этапа [3].

На первом этапе эвристические задачи используются ситуативно для достижения различных дидактических целей урока (актуализация знаний, побуждение к лучшему восприятию нового материала, дифференциация процесса усвоения новых знаний, контроль) и стимулирования познавательного интереса обучающихся, активизации их познавательной активности.

Например, для формирования умения по графику «читать» свойства функции можно использовать такие эвристики как анализ, сравнение, распознавание, систематизация и др. Для подготовки обучающихся к сознательной работе с функциями предлагаем дидактическую игру «Математические портреты». Обучающиеся объединяются в пары. Каждая пара получает конверт с заданиями, например: распознать, какую жизненную ситуацию описывает приведенный на рис.1 график.

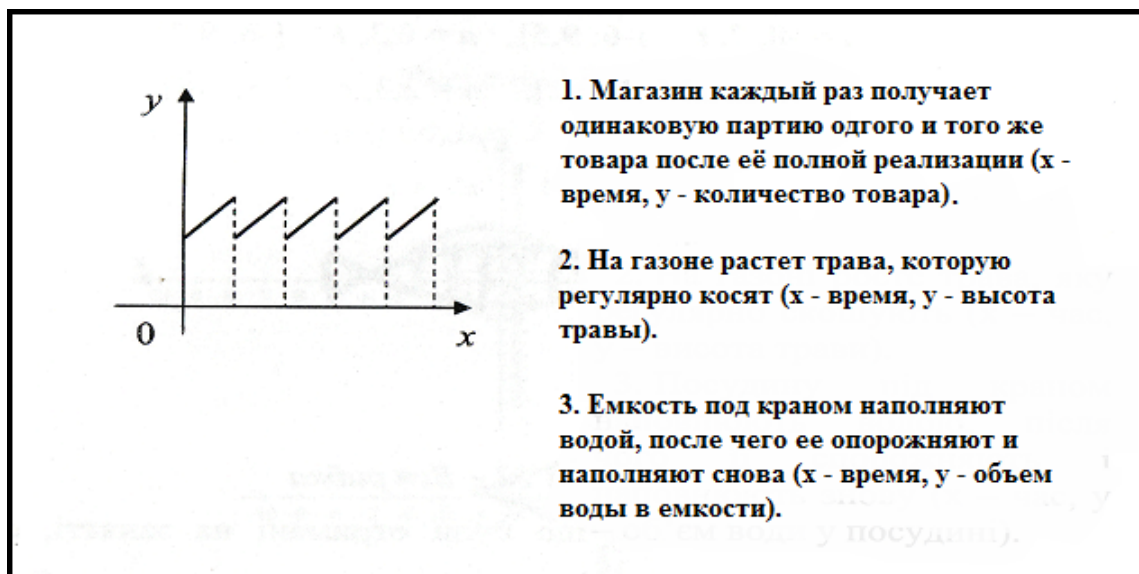


Рис. 1: Дидактическая игра «Математические портреты»

Эвристическая подсказка:

- 1) количество товара уменьшается, а не увеличивается;
- 2) промежутки времени между поставками не обязательно должны быть равными;
- 3) реализация товара происходит неравномерно [4].

На втором этапе для стимулирования познавательной самостоятельности обучающихся используются различные формы организации процесса решения эвристической задачи.

Так, для развития задачи предлагаем построить график функции $y=x$ и изучить свойства данной функции.

Эвристическая подсказка: примените различные виды онлайн-сервисов для построения графика функций (например, графический калькулятор Desmos).

На третьем этапе активно используется принцип «развития» задачи, стимулирующий проявление познавательной активности обучающихся.

Четвертый этап предполагает творческое применение методики, адаптацию ее к особенностям стиля работы учителя, дальнейшее ее совершенствование.

Например, по теме «Уравнения» можно предложить задания:

Задание 1. Являются ли равносильными уравнения. Выбираем тип вопроса в Online Test Pad *установление соответствий*, в режиме конструктора отображаются правильные ответы рис.2. Предложена эвристическая подсказка: *анализируйте условие задачи.*

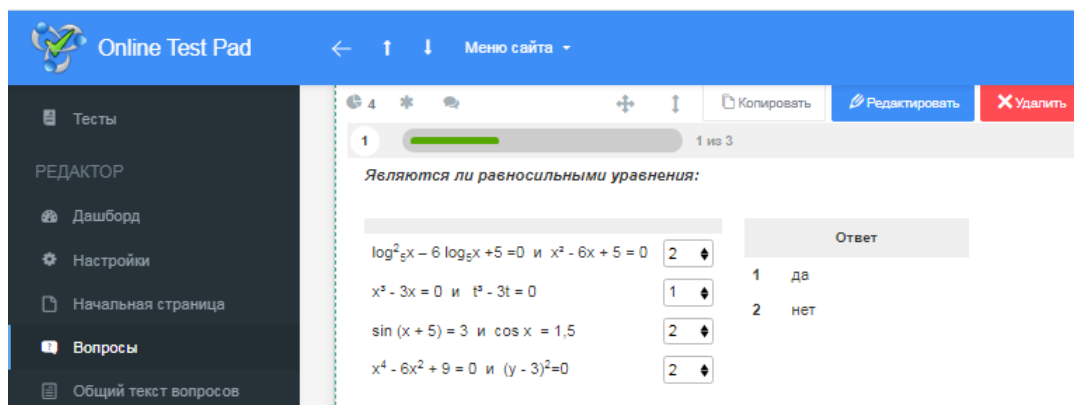


Рис. 2: Отображение задания в конструкторе

Задание 2. Нужно указать, сколько решений имеет уравнение рис.3.

Выбираем тип вопроса в Online Test Pad ввод числа, предложена эвристическая подсказка: *модифицируйте, используйте разбиение целого на части.*

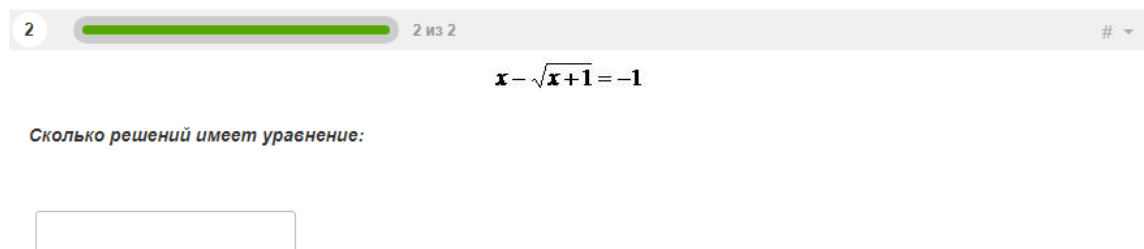


Рис. 3: Отображение задания в режиме выполнения

Задание 3. Необходимо решить уравнение рис.4.

Выбираем тип вопроса в Online Test Pad ввод текста, предложена эвристическая подсказка: *модифицируйте, преобразуйте уравнение, используйте равносильный переход.*

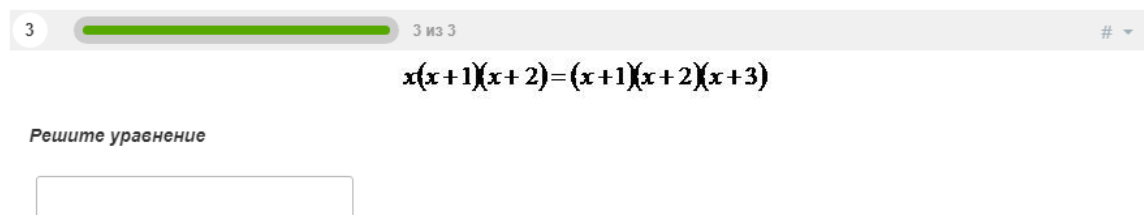


Рис. 4: Отображение задания в режиме выполнения

Обучающиеся после выполнения тестов сразу могут видеть свои результаты, которые представлены следующим образом: в виде таблицы, где отображаются данные участника тестирования, процент выполнения и оценка; таблица с подробными результатами ответов на каждое задание; графические отчеты по оценкам, по количеству правильных ответов и в процентном соотношении от общего количества.

Таким образом, программированное обучение дает возможность развернуть, проанализировать логику обучаемого при решении задач с использованием эвристических приемов, создает

возможность повышения уровня сознательности усвоения материала. Применение сервиса Online Test Pad позволяет существенно облегчить работу учителя, автоматизировать проверку домашних заданий, контрольных и проверочных работ не только при дистанционном обучении, но и при проведении традиционной формы урока. Обучающиеся же получают возможность выполнения разнообразных по форме, содержанию и уровню сложности заданий, что поддерживает значительный интерес к уроку.

Литература

1. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология // Е. И. Скафа монография. — Донецк: ДонНУ, 2004. — 439.
2. Образовательный портал Online Test Pad. URL <https://onlinetestpad.com/> (дата обращения : 01.02.2024).
3. Власенко К. В. Формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках геометрії в класах з поглибленим вивченням математики // автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук // 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» Катерина Володимирівна Власенко. — К., 2003. — 20.
4. Прач В. С. Уроки з евристичною складовою для учнів гуманітарного напрямку // метод. посібник. — Донецьк: Ноулідж, 2012. — 96.

ПОВЫШЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ ПУТЁМ ФОРМИРОВАНИЯ АКАДЕМИЧЕСКОЙ РЕЗИЛЬЕНТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ В СИСТЕМЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Л.Б. Райхельгауз

jikol_85@mail.ru

Формирование академической резильентности в процессе изучения наиболее сложной для большинства обучающихся предметной области – математики – позволяет обучающимся системно преодолевать различного уровня трудности для достижения образовательных и личностных целей и связанных с ними задач

Ключевые слова: академическая резильентность, синергетика, метакогнитивность, математическая тревожность.

Одной из актуальных тенденций образования является необходимость применения получаемых при обучении знаний, умений и навыков для решения сложных комплексных задач, требующих интеграцию различных учебных дисциплин через призму применения синергетического подхода и диалога культур (Дворяткина С.Н., Смирнов Е.И., Щербатых С.В., 2021).

В связи с этим весьма важным представляется формирование академической резильентности как педагогического феномена, позволяющего обучающимся системно преодолевать различного уровня трудности для достижения образовательных и личностных целей и связанных с ними задач.

Так, в частности, на примере изучения математики автором был сформулирован принцип академической резильентности с точки зрения интеграции процессов усвоения обучающимся необходимого содержания образования и развития индивидуального познавательного опыта.

Поскольку при усвоении новых знаний и выполнении различных познавательных задач обучающиеся развивают свои умственные силы и необходимые навыки мышления, они, соответственно, формируют и необходимую комплексную базу теоретических знаний, практических умений и навыков.

Поэтому академическая резильентность напрямую отражает сознательный подход к познанию окружающей действительности. Ведь при реализации образовательного процесса обучающийся должен не зазубривать, а сознательно усваивать конкретный материал. И осмысленность,

личностное восприятие, целостное понимание путем выполнения учебных заданий различного уровня сложности формируют эффективную базу продуктивной деятельности.

Таким образом, обучающийся, совершая необходимые учебные усилия, в дальнейшем получает эмоциональное и экзистенциальное удовлетворение от итога выполненной образовательной деятельности. И это, в свою очередь, активизирует его дальнейшую учебную деятельность (Райхельгауз Л.Б., 2019).

Феномен академической резильентности универсален, поскольку формируется в процессе изучения любой учебной дисциплины.

Однако автор счел необходимым рассмотреть содержание наиболее сложной для большинства обучающихся предметной области – математики. Кроме того, именно в математике наблюдается явное противоречие между сформированной в процессе школьного изучения предметной комплексной базы знаний, умений и навыков и отсутствием понимания роли данных образовательных компонентов для решения прикладных и профессионально-ориентированных задач (математическая грамотность).

В процессе исследования было выявлено, что на формирование личностной или системной академической резильентности (конкретного обучающегося или множества обучающихся) влияют внешние и внутренние факторы.

Так, среди всех факторов следует особо выделить эпистемологические. Они связаны со сменной типа научной рациональности с неклассической на постнеклассическую, отражающую значимый переход от по сути статических моделей описания процессов и явлений окружающего нас мира к синергетической картине мира с присущими для нее динамическими переходами и трансформациями (Смирнов Е.И., Богун В.В., Уваров А.Д., 2016).

Весьма существенным также является фактор метакогнитивности, суть которой заключается в увеличении роли отдельно взятого субъекта в виде обучающегося.

С точки зрения изучения и преподавания математики отдельно необходимо отметить важность учета факторов, связанных с внутренними индивидуально-психологическими особенностями обучающихся и их сочетаниями (темперамент, мотивации, потребности, уровень познавательной активности, настойчивость, упорство, концентрация).

Именно на данном этапе исследования академической резильентности было проанализировано значение математической тревожности и ее взаимосвязь с результативностью обучения математике. В частности, было выявлено, что повышенная математическая тревожность напрямую влияет на получение более низкого результата при сдаче ОГЭ или ЕГЭ в частности и математического образования в целом.

В заключение следует отметить, что академическую резильентность с точки зрения организации процесса обучения математике школьников и студентов необходимо рассматривать в системе преемственности «школа-вуз». Именно такой подход позволит сформировать и развить высокую степень самоорганизованности молодого поколения, мотивации и целеустремленности в решении как учебных, так и прикладных или профессионально-ориентированных задач.

Литература

1. *Дворятжина С.Н., Смирнов Е.И., Щербатых С.В.* Интеллектуальное сопровождение проектно-исследовательской деятельности школьников в гибридной среде обучения математике // монография, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина — Елец, 2021
2. *Райхельгауз Л.Б.* Резильентность образовательных результатов как новый принцип современной дидактики. Ярославский педагогический вестник // Серия: Общая педагогика, история педагогики и образования. 2019. №4 (109). — Ярославль: Мир, 1968. — 8-14.
3. *Смирнов Е.И., Богун В.В., Уваров А.Д.* Синергия математического образования педагога: Введение в анализ. — Ярославль: Канцлер, 2016.

“МЫСЛИТЕЛЬНАЯ МАТРИЦА” И ЕЕ РОЛЬ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

К.В. Руновский, О.А. Шпырко, Н.В. Лактионова

k_runov@mail.ru, shpyrko@mail.ru, k_laktionova07@mail.ru

УДК 372.851

Предложена методика обучения школьников решению нестандартных математических задач разного уровня сложности, основанная на формировании выделенного, систематизированного и осознанного набора подходов, идей, принципов и логических схем в совокупности с навыками их практического применения.

Ключевые слова: методика преподавания математики, задачи математических олимпиад.

Задачи повышенной сложности не имеют готовых алгоритмов решения. Каждая из них требует своего специального подхода. Тем не менее, весь применяемый многообразный набор подходов, идей, принципов и логических схем все-таки конечен и, следовательно, может быть осознанно выделен, проанализирован и систематизирован. Такой набор, своего рода «мыслительная матрица», должен пополняться по мере накопления опыта в процессе обучения.

По сути, «мыслительная матрица» — это «секреты профессии», имеющиеся в каждом виде деятельности. Типичный пример её применения — деятельность знаменитого сыщика Шерлока Холмса. Ошибочно считать, что секрет его успеха состоит только в умении оперировать правилами дедуктивного вывода. Они, сами по себе, не так уж и сложны. Суть же состоит в сформированной в голове сыщика самой базе дедукции, которая в сочетании с накладываемой на него фактурой конкретного дела и позволяет ее носителю делать эффективные умозаключения. Идея необходимости формирования «мыслительной матрицы» в процессе обучения решению сложных математических задач также не является новой. В этой связи отметим знаменитые книги Д. Пойа ([1], [2]). В них автор как раз и пытается сформировать «сетку» из общих рекомендаций, полезных для решения сложных неалгоритмических задач.

Приведем некоторые примеры — элементы «мыслительной матрицы», выделенные авторами в процессе подготовки школьников по программе «Ломоносовские классы», реализуемой на базе Филиала МГУ в г. Севастополе, а также первым автором в процессе подготовки школьников из Центра одаренных детей «Альтаир» г. Севастополя к участию в различных математических олимпиадах.

1. При решении задач, связанных с перемещениями по полям, имеющим клеточную структуру, иногда бывает полезно раскрасить поле так, чтобы при одном ходе менялся цвет клетки. В задачах же связанных с расстановкой фигур на таких полях (темы «тетриса» или «морского боя») нередко помогает разбиение поля на одинаковые блоки и/или подсчет задействованных при расстановке узлов решетки.

2. В задачах, в которых фигурирует расстановка объектов по окружности, в частности, в задачах про рыцарей и лжецов, полезно проанализировать условия с целью обнаружения периодичности.

3. В задачах с наборами чисел и содержащими квантор всеобщности и отношения порядка условиями сравнения полезно упорядочить данный набор, что позволит заменить множественные условия одним единственным условием на числа, стоящие в начале и конце соответствующего вариационного ряда.

4. В олимпиадных геометрических задачах большую роль играют стандартные конфигурации. Они, с одной стороны, должны быть достаточно продвинуты от базового уровня, а, с другой, — применимы к широкому кругу задач. В частности, представляются полезными, например,

Руновский Константин Всеволодович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, филиал в г. Севастополе, кафедра вычислительной математики (Севастополь, Россия)

Шпырко Ольга Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, директор филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

Лактионова Наталья Владимировна, ст. преп., МГУ имени М.В. Ломоносова, филиал в г. Севастополе, кафедра вычислительной математики (Севастополь, Россия)

конфигурации, связанные с условиями принадлежности четырех точек окружности, свойствами ортоцентра, темой угла 60^0 в треугольнике и окружности пяти точек, темой равных дуг, и.т.д..

Знание как вышеперечисленных, так и многих других подобных общих утверждений, взятое само по себе, конечно же не дает гарантии решения задачи. Тем не менее, оно может дать «цепку», существенно помочь в выборе стратегии и необходимого для решения инструментария.

Литература

1. *Пойа Д.* Как решать задачу. Москва: Учпедгиз, 1961.
2. *Пойа Д.* Математическое открытие. Москва: Наука, 1976.

ПРОФЕССИОНАЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ИНФОРМАТИЗАЦИИ СОВРЕМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Н.А. Самсикова

n.samsikova@mail.ru

УДК 378

В докладе представлена информация об использовании информационно-коммуникационных технологий в процессе профессионально-методической подготовки будущих учителей математики, приведены примеры их использования.

Ключевые слова: профессионально-методическая подготовка, видео-уроки.

Специфика профессионально-методической подготовки будущего учителя заключается в том, что студенты имеют свой накопленный опыт обучения в школе, а в ходе педагогической практики осваивают опыт профессиональной деятельности учителя математики. Поэтому во время занятий по методике обучения часто приходится обращаться к этим двум составляющим учебной-профессиональной деятельности.

Современная профессионально-методическая подготовка не представляется без активного внедрения информационно-коммуникационных технологий (ИКТ). Во-первых, будущие учителя должны овладеть навыками работы с интерактивными досками, онлайн-ресурсами и программным обеспечением, которые стали неотъемлемой частью процесса обучения школьников. Во-вторых, современный учитель математики должен быть готов к активному применению ИКТ на своих уроках математики. Грамотное применение ИКТ на уроках позволяет учителю осуществлять дифференцированный и индивидуальный подход к обучению, создать условия для развития критического мышления, творческих способностей и коммуникативных навыков обучающихся и др. Немаловажно и формирование у обучающихся положительного отношения к предмету. Этому может способствовать активное использование электронных образовательных ресурсов, специальных математических программ и редакторов (например, программы GeoGebra, Mathcad, редактор MathType).

Таким образом, современный выпускник должен уметь реализовывать процесс обучения в целом и на отдельных уроках с активным внедрением компьютерных и телекоммуникационных средств.

В связи с этим, целесообразно в процессе методической подготовки формировать у студентов представления о способах осуществления образовательной деятельности в школе. С этой целью при организации образовательной деятельности студентов необходимо широко использовать фрагменты практической деятельности учителя математики, анализ которых может стать источником вопросов студентов. Таким образом, логика осуществления профессионально-методической подготовки будущего учителя математики заключается в переходе от изучения чужого опыта к собственной стратегии реализации процесса обучения математике в школе.

С целью изучения опыта практикующих учителей студенты посещают их уроки, разбирают различные методические ситуации, представленные в учебниках методики обучения математике но, как показывает практика, этого недостаточно для качественной профессионально-методической подготовки выпускников. У студентов возникают трудности «в установлении межпредметных связей математики с другими предметами, с использованием математики в повседневной жизни, ... сложным моментом является оценивание учеников» [1]. Проведенное «Исследования уровня предметных и методических компетенций учителей общеобразовательных организаций с низкими образовательными результатами и/или функционирующих в неблагоприятных социальных условиях» по Сахалинской области показало, что и у начинающих учителей (от 0,5 до 1 года) возникают трудности с применением активных и интерактивных подходов в преподавании; с организацией самостоятельной работы учащихся (с использованием ИКТ и др. ресурсов); с проектированием этапов занятия [2].

Внедрение цифровых технологий в процесс подготовки будущих учителей математики имеет ключевое значение для повышения уровня профессионально-методической подготовки будущего учителя математики. На занятиях по методике обучения математике можно воспользоваться следующими способами.

Так, например, использование интерактивных образовательных платформ, на которых представлены интерактивные задания, уроки и тесты, помогают студентам лучше понимать материал и применять полученные знания на практике. При этом у студентов появляется возможность преодолеть затруднения в оценивании школьников, учитывать их активность при фронтальном опросе.

Эту проблему студенты решают следующим образом. Готовясь к уроку, студенты активно используют информационно-коммуникационные технологии кроме стандартных слайдов, для фронтального опроса используют интерактивное тестирование. Если у студента-практиканта есть доступ к цифровому образовательному ресурсу школы «ЯКласс», то у него появляется возможность для индивидуального контроля знаний учащихся, для качественного анализа выполненных работ.

Для формирования умения комментировать ошибки учащихся:

<https://onlinetestpad.com/ru/tests/for-teachers>.

Тест предназначен для тренировки по оцениванию задания с развернутым ответом повышенного уровня сложности формата ЕГЭ.

Готовясь к уроку, студенты в заданиях по математике стараются использовать анимированные рисунки, организуют работу учащихся со схемами, чертежами, составлением диаграмм, с использованием таблиц и т. д.

Еще в планирование уроков студенты вставляют деятельность по работе с различными программами (например, GeoGebra, Math10.com) для организации исследовательской деятельности обучающихся.

На занятиях по методике обучения математике необходимо проводить обучение студентов по использованию интерактивных досок, планшетов и других гаджетов в учебном процессе.

Рассмотрим пример. Студентка-практикантка на интерактивной доске подготовила различные средства к теме «Измерение углов». На них представлены и виды углов, и «нарезки» из учебника с определениями, и часы с подвижными стрелками, и рекомендации по работе с транспортиром и др. При этом ей было предложено еще три теста, из которых один был «гиперактивный» (руками показать разные виды углов). Второй тест – определить величину угла. Но при выполнении 3-ей практической работы по измерению углов у школьников возникли затруднения по применению транспортира, студентке надо было подойти ко многим ученикам, чтобы показать, как же все-таки, правильно приложить транспортир для измерения угла. Таким образом, мы видим, что переизбыток информационных технологий не приводит к положительным результатам.

Для организации более продуктивной деятельности возникает необходимость активного использования на занятиях по методике системы учебных видео-уроков (видеофильмов).

Так, например, для того, чтобы провести анализ фрагмента урока, его необходимо посмотреть. Но здесь возникают определенные трудности. Так как нет записанной (отснятой) системы уроков (фрагментов уроков), которые можно было бы использовать в учебных целях на занятиях по методике обучения математике. В своей практике мы пытались работать с фрагментами

уроков, которые записывались в рамках прохождения учителями аттестационных мероприятий.

Такие «идеальные» уроки далеки от реальной школьной практики, где в классе мало учеников, при этом от каждого из них учитель получает наиболее желаемый ответ.

В дальнейшем стали использовать уроки, записанные студентами во время прохождения ими педагогической практики, или же описывали ситуации, возникавшие на уроках с практикантами. Занятия с фрагментами уроков способствуют развитию профессионально-методических навыков в области преподавания математики. Но необходима система взаимосвязанных учебных фильмов, которые содержали бы не только фрагменты уроков, но и различные методические задания к ним. Например, для глубокого изучения одной из основных тем общей методики «Методика работы с задачей», полезно было бы рассмотреть несколько фрагментов уроков, содержащих различные методические ошибки по работе с задачей, с целью проведения их анализа. Хорошо было бы посмотреть «урок одной задачи», на котором показана организация учебной деятельности школьников по применению различных методов решения математической задачи, по отысканию различных способов решения задачи и т.п.

И в завершении хотелось бы еще раз озвучить проблему, связанную с формированием общей видеотеки с фрагментами реальных уроков, которая будет отсмотрена, отобрана экспертами, которая бы способствовала бы более эффективному формированию профессионально-методической компетентности будущих учителей математики.

Литература

1. Стефанова Н. Л. Предметно-методическая составляющая готовности бакалавров к профессиональной деятельности учителя математики // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2019. № 191. С. 80-90. EDN TBSKXP

2. Анализ исследования уровня предметных и методических компетенций учителей общеобразовательных организаций с низкими образовательными результатами и/или функционирующих в неблагоприятных социальных условиях. <https://cnppmsakh65.ru/2023-2/>

МАТЕМАТИКА КАК ОСНОВА ШКОЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ XXI ВЕКА

А.Л. Семенов

alexei.semenov@math.msu.ru

УДК 372.3, 372.4

Советский Союз в 1930-1950 гг. достиг значительных успехов в школьном математическом образовании, ориентированном на две различные задачи:

- индустриализация страны и инженерное образование — в массовой школе; базовая математическая грамотность всего населения как побочный эффект;
- развитие способностей учащихся к творческой математической деятельности — в кружках и олимпиадах; интерес и значительный приток молодежи в науку как основной эффект.

Конечно, решение двух указанных задач шло не изолировано. Деятельность математического кружка опирается на школьную математику. Интерес к математике, возникший на занятиях кружка, иногда удается развить и использовать на регулярных школьных занятиях.

Тем не менее, две указанные линии в работе учащихся — можно назвать их «технологическая» и «исследовательская» — существенно различались:

- Чтобы быть успешным на уроках математики, надо хорошо усвоить (выучить) способы деятельности, предлагаемые учителем, и научиться надежно и быстро их применять. Это органично

Семенов Алексей Львович, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского (Казань, Россия); Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия)

соответствовало работе инженера, технолога, экономиста, счетовода, бухгалтера. Те, кто «отставал» по объему пройденного материала, скорости и надежности в решении задач, объявлялись и чувствовали себя «неспособными к математике».

- Кружок — это место, где ученик постоянно сталкивается с задачами, которые «неизвестно-как-решать». Когда он пытается такую задачу решить, он часто оказывается в тупике, допускает ошибки; промежуток времени, когда он не знает, что делать дальше, может измеряться не секундами и минутами, а днями и неделями. Это по психологическим установкам и процессам совпадает с работой профессионального математика, открывающего новое в науке. Обсуждение своих идей и решений с учителем более напоминает атмосферу научного семинара, или разговора студента с научным руководителем.

В 1960-е гг. вторая линия была интегрирована в общеобразовательную школу. Развитие началось и по сей день идет в системе общеобразовательных матшкол (физматшкол), в том числе — школ-интернатов (подробнее см. в [1]). Наряду с этим продолжается и развивается линия кружков и олимпиад. Важнейшим и наиболее масштабным примером кружка (тысячи офлайн участников) является Малый мехмат [2]. Важнейшим и наиболее масштабным примером олимпиады для начальной школы (миллионы участников) является олимпиада «Кенгуру» [3]. Наиболее важным с точки зрения влияния на всю систему образования и экономику страны является система Российского совета олимпиад школьников [4].

Ситуация в XXI веке состоит в следующем:

- Цифровая реальность во все большей степени определяет физический, социальный, психологический мир, в котором мы живем. Ее объекты и процессы исходно созданы, запрограммированы человеком, оперирующим математическими объектами и процессами, получающими непосредственное отражение в поведении электронов и фотонов. Эта человеческая деятельность — математическая. Занятие этой математической деятельностью, как и понимание ее результатов, требует от человека математической квалификации, компетенции. Эта деятельность больше сходна с работой на занятиях математического кружка, чем на уроке в классе — она включает в себя решение новых неожиданных задач, широко опирается на обратную связь от цифровой и физической реальности, самостоятельный поиск и исправление ошибки, а также «улучшение продукта» — отладку результата.

- В России, как и во многих других странах, среди учащихся снижается интерес к математическому образованию. Довольно правдоподобно, что это во многом связано с тем, что ту математическую деятельность, которую ученику предлагается освоить в школе, в окружающем школу мире выполняется компьютером. И если понимание того, как компьютер работает, или проектирование этой работы (программирование) может быть увлекательным для многих, то тренировка механических навыков, почти не имеющих уже практической ценности, может захватить лишь небольшую долю учеников.

- Проектирование новых математических процессов (программирование и шире — ИТ-проектирование, инженерия знаний и т. п.) стало деятельностью, которой занята доля людей, большая, чем в любой инженерной профессии, имеющей дело с объектами реального мира. Такое проектирование многие осваивают в школьном возрасте, в значительной степени — вне школы, или переходя из общего образования в профессиональное — в систему СПО. Таким образом, фактически может происходить не падение интереса к школьной математике, а «перетекание» его в математическую часть информатики, в математическое моделирование и т. п. Рамки школьных предметов и стандартов, подготовки учителей не успевают за этим процессом. Государственная итоговая аттестация и другие формы регулирования закрепляют устаревшие рамки предмета математики, минимизирует элемент неожиданности, делает критически важным фактор решения стандартных простых задач «на скорость».

- Для большинства людей и для человечества в целом все большую важность приобретает умение решать неожиданные задачи, не похожие на те, которые встречались для этого. Это умение в своей наиболее сложной и наиболее конструктивной части часто опирается на математику — моделирование, оценка, визуализация и пр. Но при этом оно намного шире. Примером могут служить математические модели и прогнозы, строящиеся в работах [5–7].

- Все более важную роль приобретает олимпиадное и кружковое движение, в том числе — в области математики, программирования и применения цифровых технологий (искусственный интеллект). Благодаря деятельности В. А. Садовниченко, поддержанной Российским союзом

ректоров, который он возглавляет, законодательно зафиксирована роль олимпиад как альтернативы ЕГЭ при поступлении в вуз. Тем самым в правовом поле выделены «исследовательская» и «технологическая» линии. На наиболее востребованные и высококонкурсные направления подготовки большинство из принятых выпускников — «олимпиадники» (в ряде важных случаев это верно даже без разделения мест приема на «бюджетные» и «платные»).

В этих условиях возможным и необходимым является перестройка школьного математического образования, исходящая из следующих принципов [8, 9]:

- Исследовательская линия математического образования расширяется: переходит из кружков и спецшкол в массовую школу; эта линия составляет основную часть математического образования для каждого ученика. Для каждого ученика поддерживается оптимальный уровень новизны решаемых задач в зоне ближайшего развития, в процессе работы учащийся формирует для себя «большие идеи» математики. Тем самым открывается возможность привлечения в исследовательскую математику большей доли учащихся.

- Цели «инженерного» математического образования в части решения уравнений и неравенств, исследования функций и т. п. достигаются за счет использования каждым учеником компьютера для решения внутриматематических задач и моделирования явлений окружающего мира. Тем самым расширяется круг учащихся и выпускников, готовых идти в инженерную профессию, в ИТ, использовать математическое и компьютерное моделирование в своей будущей деятельности.

При этом существенно возрастает роль школьной математики, не только как важнейшего, но и как центрального, «системообразующего» школьного предмета:

- В других школьных предметах осваиваются и используются математические и компьютерные модели, например, школьник строит математическое описание небольшого фрагмента грамматики иностранного языка, большие языковые модели используются в системах автоматизированного перевода. Примеры в физике, экономике, экологии (и соответствующих школьных предметах) еще более очевидны.

- Навык решения неожиданных задач оказывается полезным в других предметах, где он дополнительно развивается, при определенной разгрузке запоминания сведений и повышении важности самостоятельного формирования «больших идей» различных областей знания, помогающих ориентации в мире.

Проблемы на этом пути очевидны. Важно, однако, понимать, что консервативное решение, а тем паче буквальный «возврат к лучшей в мире советской школе» сегодня невозможен.

Описанный подход развивается нами в рамках Института математического анализа сложных систем МГУ, возглавляемого академиком В.А. Садовничим.

Литература

1. Константинов Н. Н., Семенов А. Л. Результативное образование в математической школе. — Чебышёвский сборник, т. XXII, вып. 1(77), 2021. — С. 413–446. [10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446) Eng.: Konstantinov N. N., Semenov A. L. Productive Education in Mathematical Schools. — Dokl. Math., 2022, 106 (Suppl 2) . — P. S270–S287. [10.1134/S1064562423700369](https://doi.org/10.1134/S1064562423700369)
2. Малый мехмат МГУ. — <http://mmmf.msu.ru/> (дата обращения: 8.02.2024).
3. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников. — <https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru> (дата обращения: 8.02.2024).
4. Российский совет олимпиад школьников. — <https://rsr-olymp.ru/> (дата обращения: 8.02.2024).
5. Akaev A.A., Sadovnichiy V.A. Revisited Economic Theory or How to Describe the Processes of Disequilibrium and Instability of Modern Economic Systems. — The Economics of Digital Transformation. Eds. Devezas T., Leitão J., Sarygulov A. — Springer, 2021. — P. 25-43.
6. Садовничий В.А., Акаев А.А., Ильин И.В., Алешковский И.А., Андреев А.И., Билога С.Э., Гринин А.Л., Гринин Л.Е., Давыдова О.И., Кортаев А.В., Ковалева Н.О., Малков С.Ю., Мусиева Д.М. Преодолевая пределы роста. Основные положения доклада для Римского клуба. — Изд-во МГУ, 2023. — 99 с. ISBN: 978-5-19-011875-9.
7. Садовничий В.А., Акаев А.А., Ильин И.В., Малков С.Ю., Гринин Л.Е., Кортаев А.В. С надеждой на будущее: наш взгляд на проблемы, пределы и возможности. — История и современность, № 2, 2022. — С. 109–123. [10.30884/iis/2022.02.05](https://doi.org/10.30884/iis/2022.02.05).
8. Семенов А.Л. О продолжении российского математического образования в XXI веке. — Доклад на спецсеминаре «Время, хаос и математические проблемы» (руководитель – ректор МГУ академик

В.А. Садовничий), Москва, МГУ, 30 ноября 2022 г. — <https://expert.msu.ru/haos22-4> (дата обращения: 8.02.2024).

9. Семенов А.Л. О продолжении российского математического образования в XXI веке. — Вестник Московского университета. 20 серия. Педагогическое образование, 2023, т. 21, № 2. — С. 7-45. [10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45](https://doi.org/10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45).

ПОДГОТОВКА БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ К ФОРМИРОВАНИЮ ПАТРИОТИЗМА У ОБУЧАЮЩИХСЯ СРЕДСТВАМИ МАТЕМАТИКИ

Е.И. Скафа

e.skafa@mail.ru

УДК 378.147.091.32,51,172.15

Использование на уроках математики заданий краеведческой и патриотической тематики, владение приемами и методами, расширяющими кругозор и формирующими патриотические чувства школьников, является актуальным в деятельности современного учителя. В работе представлен опыт Донецкого государственного университета овладения будущими учителями математики такого вида деятельности.

Ключевые слова: обучения математике, патриотизм, математические задачи краеведческой тематики, мотивация, будущий учитель математики.

Ключевыми приоритетами развития Российского государства на современном этапе являются обеспечение потребностей рынка труда, обеспечение технологического приоритета, формирование патриотического мировоззрения молодежи и передача опыта. В этих условиях важнейшей задачей образовательных учреждений является развитие патриотизма и гражданской позиции детей и учащейся молодежи.

В наши дни в образовательных организациях воспитанию у обучающихся чувства долга, патриотизма, гражданственности, ответственности за судьбу своего родного края и всей Великой страны уделяется должное внимание во внеурочной работе со школьниками. Однако и учебный процесс по основным школьным предметам, в том числе и по математике, не может стоять в стороне.

Как отмечали известные математики и методисты Б.В. Гнеденко, Ю.М. Колягин, В.А. Крутецкий, А.Я. Хинчин и др. математика имеет огромный воспитательный потенциал. Традиционно учителям предлагается сосредоточить внимание на использовании элементов истории математики [1]. Акцент в учебной работе на уроках математики необходимо делать на применении специальных приемов и методов, формирующих социально активную личность [2]. В рамках задачного подхода к обучению важно использовать практические задачи краеведческого характера, которые способствуют развитию патриотических ценностей обучающихся [3, 4, 5] и др.

Однако, говоря о важности и необходимости организации работы по патриотическому воспитанию школьников на уроках математики, нужно отметить, что существует противоречие между необходимостью полноценного патриотического воспитания детей и учащейся молодежи средствами математики и недостаточной готовностью будущих учителей математики осуществлять воспитательную работу подобного рода. Проблема связана с нехваткой учебно-методического инструментария, обеспечивающего процесс подготовки студентов — будущих учителей к воспитательной работе на уроках математики.

Таким образом, целью нашего сообщения является представление опыта работы Донецкого государственного университета по подготовке будущих учителей математики к работе по формированию патриотизма у обучающихся.

Содержание и организация уроков математики дают большие возможности для осуществления задач воспитания патриотизма и гражданственности учащихся. Обучение будущих учителей в Донецком государственном университете (ДонГУ) в этом направлении осуществляется в нескольких дисциплинах, а также в период организации научно-исследовательской работы студентов.

Например, использование исторических математических сведений при изучении математики студенты овладевают в дисциплинах «История математики» и «История математического просвещения». Будущим учителям предлагаются специальные средства для формирования гражданской культуры и патриотизма учащихся, в число которых входят электронные средства, такие как слайды-визуализации к историческим фактам, мультимедийные игры на историческую тематику, отражающие роль выдающихся ученых России в развитии мировой науки. С целью дополнения традиционного содержания курса математики 5-11 классов историческими сведениями под руководством преподавателей в рамках курсовых и дипломных проектов, индивидуальных заданий студентами ДонГУ осуществляется подбор исторических фактов ко всем темам курса математики. В частности разработаны следующие специальные средства: исторические факты к вводным урокам математики 5-11 классов; высказывания известных ученых к урокам математики; слайды-визуализации к историческим фактам; мультимедийные игры на историческую тематику; исторические задачи по различным темам математики 5-11 классов [7].

Повышению роли математики в реализации патриотического воспитания способствует использование математических задач, с патриотической фабулой. Например, в дисциплине «Методика обучения математике», акцентируя внимание на формирование учебной мотивации школьников, студентам, выполняя индивидуальную работу, предлагается найти материал о роли ученых-математиков в укреплении оборонной мощи нашей страны в годы Великой Отечественной войны, составить задачи с использованием военной тематики и др. В результате такой работы будущими учителями разработаны: система задач «Великая Отечественная война в цифрах»; урок обобщения и систематизации знаний для 5 класса «Великая Отечественная война в числах и фактах»; военно-патриотическая игра «Дорогами войны» и др.

Студенты понимают, что решение сюжетных задач, которые включают исторические сведения, помогает развитию кругозора учеников и познавательного интереса к предмету. При освоении дисциплины «Дополнительные разделы методики обучения математике» студентам предлагается разработать конспекты уроков различных форм (комбинированные, уроки-лекции, интегрированные, уроки обобщения и систематизации знаний, с применением дидактической игры и др.) с включением практических и краеведческих задач. То есть формированию у школьников чувства любви к родному краю, уважению к истории своих предков студенты — будущие учителя обучаются путем решения задач краеведческого содержания. Например, знакомясь с системой задач краеведческого и патриотического содержания [5; 6], студенты пытаются строить подобную систему для 7-9 классов, возникает желание создавать на основе таких задач игры, кроссворды, викторины и др.

Задача. *В нашем крае есть удивительные озёра естественного происхождения. Самые крупные из них — Репное, Слепное и Вейсово. Они представляют значительный научный интерес, ведь нигде в Европе не встречаются солёные озёра так далеко от моря. Вода в озерах имеет лечебные свойства. Площадь озера Репное — 32 га, глубина — до 7,5 м, площадь Слепного озера — 30 га, глубина — около 2,5 м, площадь Вейсового озера — 16 га, глубина — 19 м. Найдите общую площадь этих озёр.*

В настоящее время в период специальной военной операции, проходящей на территории нашей Донецкой Народной Республики, особо актуальными являются задачи современной военной тематики. Их содержание дает возможность проявить гордость за победу в боях наших военных сегодня. Особенно после общения со студентами, участвующими в боевых действиях, которые вернулись с поля сражения в университет, будущие учителя осмысленно составляют различные задания, развивающие не только кругозор школьника, но и оставляющие яркое впечатление в душе обучающегося.

Например. *Решите уравнение: $45241 : x = 23$. Корень уравнения показывает, в каком году был открыт мемориальный комплекс Саур-Могилы — одна из самых высоких точек Донецкого края. Это место является священным для всех жителей Донбасса. Здесь проходили самые ожесточенные бои за Донбасс в 1943 году, а также в наше время в 2014 году в период осво-*

божденія нашего края от укронацистов.

Задача. В ремонтном цехе, изготавливавшем детали для танков, были заготовки, из которых вытачивали деталь, и при обточке оставалась стружка. Из этой стружки от 6 деталей можно было путем переплавки получить ещё одну заготовку. Сколько деталей таким образом можно было сделать из имевшихся исходно 36 заготовок?

Задача. Две швейные мастерские г. Донецка получили важное задание по пошиву 1500 комплектов обмундирования для участников СВО. Первая мастерская может выполнить эту работу за 10 дней, а вторая — за 15 дней. За сколько дней выполнят эту работу мастерские, если будут работать вместе?

В дальнейшем в дисциплине «ИКТ в профессиональной деятельности», овладевая приемами конструирования тестов, компьютерных игр на основе цифровых инструментов, студенты включают в них задания патриотической и краеведческой тематики. Расширяется и тематика курсовых работ исследовательского характера, наиболее востребованными стали темы: «Формирование патриотизма у обучающихся 5-6 классов средствами математики»; «Методические приемы патриотического воспитания обучающихся 7-9 классов средствами математики»; «Цифровые средства формирования патриотизма у обучающихся 7-9 классов в процессе обучения математике» и др.

Таким образом, овладение будущими учителями математики приемами, методами и средствами формирования у школьников патриотических чувств способствует расширению их педагогической компетентности. Такой учитель будет готов к поиску содержательного материала для конструирования математических заданий, в том числе с использованием цифровых инструментов, которые позволят обучающимся развить патриотические чувства.

Литература

1. Саввина О.А. Патриотическая направленность курса «История отечественного математического образования» // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2023. Вып. 57. С. 54–59. DOI: [10.24412/2079-9152-2023-57-54-59](https://doi.org/10.24412/2079-9152-2023-57-54-59).

2. Куц В.В. Патриотизм на уроках математики, или как прививать любовь к Родине // Образовательный альманах. 2023. № 5 (67). Часть 1. URL: <https://f.almanah.su/2023/67-1.pdf>. (дата обращения: 23.12.2023).

3. Гридунова О.А. Патриотическое воспитание учащихся на уроках математики средствами краеведения // Аспекты и тенденции педагогической науки: материалы I Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, декабрь 2016 г.). Санкт-Петербург: Свое издательство, 2016. С. 109–111. URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/209/11377/> (дата обращения: 10.01.2024).

4. Донецкая математика: 5 класс: методический комплекс // сост. Полищук И.В., Федченко Л.Я., Борзенко А.А. и [др]; ГОУ ДПО «Донецкий РИДПО». Донецк: Истоки, 2018. 146 с.

5. Донецкая математика: 6 класс: методический комплекс // сост. Полищук И.В., Федченко Л.Я., Борзенко А.А., Галка Т.Г и [др]; ГОУ ДПО «Донецкий РИДПО». Донецк : Истоки, 2023. 146 с.

6. Гончарова И.В. Формирование математической культуры обучающихся путем использование исторических сведений при изучении математики // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2021. № 54. С. 104–112.

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ ИНОСТРАННЫМ СТУДЕНТАМ НА ПОДГОТОВИТЕЛЬНОМ ОТДЕЛЕНИИ: ПРОБЛЕМЫ И РЕШЕНИЯ. ОПЫТ ИРЯИК МГУ

А.С. Смирнов

smirnov.as@irlc.msu.ru

УДК 811.161.1, 378.14

В докладе представлена актуальная проблематика преподавания математики иностранным студентам на подготовительном отделении с акцентом на опыт Института русского языка и культуры МГУ. Демонстрируются основные трудности, с которыми сталкиваются студенты при изучении математики в неродном языковом контексте, предложены подходы для их преодоления.

Ключевые слова: педагогика, иностранные студенты, преподавание математики.

В современном обществе наблюдается все более активное стремление студентов в разных странах мира получить высшее образование за рубежом, и все больше стран принимает участие в гонке за привлечение таких студентов. Российская Федерация занимает шестое место в мире по количеству иностранных студентов и не отстает от мировых тенденций. Данные Министерства образования и науки подтверждают, что количество иностранных учащихся за последние три года увеличилось на 26 тысяч человек [1].

Большинство образовательных организаций в России предлагают иностранным студентам программы на русском языке, что имеет несколько преимуществ [2]. Одно из главных преимуществ состоит в том, что подобный подход способствует формированию профессиональной лексики и языковых навыков, необходимых для работы и исследовательской деятельности в русскоязычной среде. Это открывает для студентов новые перспективы и возможности для карьерного роста, так как многие организации и учебные заведения в России работают на русском языке. Необходимо также отметить, что преподавание на русском языке должно быть доступным и понятным для иностранных студентов, а для этого требуется обеспечить качественные языковые программы, а также поддержку и сопровождение студентов в процессе обучения.

Если рассмотреть временную составляющую целостной образовательной траектории иностранного гражданина, то можно заметить, что подготовительный этап является самым коротким, но в то же время самым важным и ответственным. Именно на этом этапе студенты знакомятся с культурой и научными традициями России, формируется фундамент для дальнейшего обучения в университете и институте.

Однако иностранные студенты сталкиваются с некоторыми проблемами, особенно при изучении математики на подготовительном отделении. В данном докладе мы рассмотрим эти проблемы и предложим некоторые решения, опираясь на опыт Института русского языка и культуры МГУ.

Литература

1. Министерство науки и высшего образования Российской Федерации — URL: <https://minobr-nauki.gov.ru/> (дата обращения: 14.02.2024)
2. Сидорова М.Ю. «Говорить о науке на родном языке: социолингвистический и когнитивный аспекты проблемы» // XXVIII Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», секция «Русский научный язык», 2020 г.

РЕАЛИЗАЦИЯ ЦЕЛОСТНОГО ПОДХОДА К ОБУЧЕНИЮ НАЧАЛАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТАРШЕКЛАССНИКОВ

М.В. Солдаева

soldaevamv@gmail.com

Создание условий для повышения уровня понимания учащимися математического содержания — одна из первоочередных задач обучения математике в школе. Психологические исследования показали, что понимание повышается, когда новая информация становится частью субъективного опыта учащегося, а также установлены связи между аспектами новой информации и различными способами ее представления. Факт осмысления включает в себя умение строить работающую ситуационную модель и тем самым становится важным средством решения математических задач. В докладе описывается целостный подход к обучению математике, направленный на решение основных задач такого обучения; в частности, проблема понимания учащихся.

По существу, целостный подход состоит в: 1) установлении связей между характеристиками понятия: смыслом, значением и термином; 2) учете компонентов субъективного опыта учащегося — ценностно-эмоциональный, контекстуальный, операциональный и коммуникативный — в образовательном процессе; 3) объединение различных способов представления математической информации; 4) выявление и использование взаимосвязей между реальным, перцептивными и концептуальными (научными) математическими пространствами путем применения моделирования реальных ситуаций. В докладе описаны подходы к практическому использованию этих основополагающих понятий.

ОТКРЫТЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ФУНКЦИЯ» В 7 КЛАССЕ

Е.М. Степанова

elizavetka.stepanova.97@bk.ru

События в мире постоянно и очень быстро меняются, мы все чаще сталкиваемся с нестандартными задачами, которые требуют нешаблонного подхода к их решению. Поэтому способность креативно мыслить сейчас нужна не только представителям творческих профессий, но и многим другим специалистам. Современному обществу необходима творчески активная личность, способная предлагать нестандартные идеи и проекты, а также находить нетривиальный способ решения задач. Возникает вопрос, как можно на уроках математики помочь учащемуся в развитии умений и качеств, перечисленных выше. На самом деле не только в математике, но и в других науках при изучении используют открытые задачи, являющиеся средством развития креативного мышления. Доклад раскрывает содержание понятия «открытая задача» и дает методические рекомендации по их созданию. А также представляет разработки по обучению теме «Функция» в 7 классе с использованием открытых задач. Разработкой является рабочая тетрадь на печатной основе для учащихся 7 классов.

Учебный материал представлен нетрадиционно — ребята вместе с учителем отправятся в путешествие по планете «Математика», а именно по континенту «Математический анализ» в страну функций. Там они узнают, как появилась эта страна и познакомятся с «жителями» этой страны.

Помимо открытых задач в тетради сформулированы задания, направленные на выявление субъектного опыта и создание учебной доминанты урока. Также решение задач подразумевает необходимость перевода информации из одного способа представления в другой, что способствует формированию целостного представления о математическом понятии.

Солдаева Мария Владимировна, к.пед.н., доцент, Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена, факультет математики (Санкт-Петербург, Россия)

Степанова Елизавета Михайловна, студент, Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена, факультет математики (Санкт-Петербург, Россия)

Тетрадь поможет не только с тренировкой решения разного типа задач, но и в закреплении знаний теории с помощью создания опорных конспектов, представленных в конце параграфов.

Мы предполагаем, что использование нашей тетради при изучении темы «Функция» в 7 классе будет являться одним из средств развития креативности учащихся на уроках математики. Ведь одним из штрихов к портрету выпускника школьника по ФГОС является креативный и критически мыслящий, активно и целенаправленно познающий мир, осознающий ценность образования и науки, труда и творчества для общества человек.

ОБУЧЕНИЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ КОМАНД ДЛЯ РАЗВИТИЯ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НЕФТЕГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ НА ПРИМЕРЕ РАБОТЫ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА ПАО «НК «РОСНЕФТЬ» И МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

А.В. Ступакова, А.П. Антонов, Р.С. Сауткин, А.А. Суслова, М.Ю. Карпушин,
С.А. Афонин

alexey.p.antonov@gmail.com

УДК 517.55

Доклад посвящен истории создания научно-образовательного центра ПАО «НК «РОСНЕФТЬ» по цифровым технологиям в нефтегазовой отрасли, задач, с которыми столкнулась команда и методы их решения, в том числе: создание междисциплинарной команды, учебной программы и образовательного процесса, отбора студентов.

Ключевые слова: цифровые технологии, нефтегазовая отрасль, подготовка кадров.

В 2020 году в Московском государственном университете был открыт научно-образовательный центр ПАО «НК «РОСНЕФТЬ» по цифровым технологиям в нефтегазовой отрасли (НОЦ ЦТ). Центр базируется на геологическом факультете в структуре кафедры геологии и геохимии горючих ископаемых, занимающейся задачами поиска и разведки месторождений нефти и газа, а также сопутствующих минеральных ресурсов для нужд энергетического сектора экономики. Привлечение цифровых технологий для реализации научно-производственных программ энергетических компаний в настоящее время является актуальной задачей, решение которой невозможно без создания и подготовки принципиально новых кадров, обладающих компетенциями как в области геологии, так и навыками по цифровизации. НОЦ ЦТ, созданный в МГУ, состоит из сотрудников геологического и механико-математического факультетов, Института механики МГУ и сотрудников ведущих нефтегазовых компаний. Основной целью деятельности НОЦ ЦТ является создание научной школы для подготовки кадров мирового уровня в области цифровых технологий нефтегазовой отрасли, а сам центр является первым претендентом в сфере подготовки специализированных цифровых кадров по геологическим специальностям. НОЦ ЦТ создает технологии, которые позволяют эффективно решать производственные задачи. Среди таких задач можно выделить создание серии программных продуктов для геологического 4D-моделирования, которые уже успешно реализованы, прошли

Ступакова Антонина Васильевна, д.г.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, геологический факультет; Институт перспективных исследований нефти и газа, НОЦ ЦТ ПАО «НК «Роснефть» (Москва, Россия)

Антонов Алексей Петрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет; Институт перспективных исследований нефти и газа, НОЦ ЦТ ПАО «НК «Роснефть» (Москва, Россия)

Сауткин Роман Сергеевич, к.г.-м.н., с.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, геологический факультет; Институт перспективных исследований нефти и газа, НОЦ ЦТ ПАО «НК «Роснефть» (Москва, Россия)

Суслова Анна Анатольевна, к.г.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, геологический факультет; Институт перспективных исследований нефти и газа, НОЦ ЦТ ПАО «НК «Роснефть» (Москва, Россия)

Карпушин Михаил Юрьевич, к.г.-м.н., ведущий специалист, МГУ имени М.В. Ломоносова, геологический факультет; Институт перспективных исследований нефти и газа, НОЦ ЦТ ПАО «НК «Роснефть» (Москва, Россия)

Афонин Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет; НОЦ ЦТ ПАО «НК «Роснефть» (Москва, Россия)

тестирование на производстве и активно развиваются. Применение программных продуктов позволило автоматизировать процессы обработки данных и построения региональных и зональных моделей для различных бизнес-процессов: лицензирования, наращивания ресурсной базы, геологоразведочных работ, поискового и эксплуатационного бурения.

Для подготовки специалистов нового поколения в области цифровых технологий необходимо создавать новые междисциплинарные команды преподавателей, готовых работать в тесной связке друг с другом, а также привлекать студентов к решению актуальных прикладных задач на самых ранних этапах обучения.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ ОТБОРА УЧАЩИХСЯ И РАЗРАБОТКИ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ПРИМЕРЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ГИМНАЗИИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА И ПЕРВОГО УНИВЕРСИТЕТСКОГО ЛИЦЕЯ ИМЕНИ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Р.М. Туркменов, Ю.В. Садовничий

robert.turkmenov@school.msu.ru, sadovnichiy.yu@gmail.com

Перед руководством и педагогическим коллективом любой школы-интерната или школы, приём в которую осуществляется на конкурсной основе, не раньше, чем в 5-ый класс, перманентно возникают, возникают и будут возникать две ключевые проблемы: проблема отбора учащихся и проблема разработки учебной программы для учащихся с повышенным образовательным запросом.

Проблема отбора — ключевая, так как при её неправильном решении, разработка учебной программы будет уже бессмысленной. С одной стороны, для минимизации ошибок при отборе, ещё в 60-е годы прошлого века, был разработан, в первую очередь для школ-интернатов, и неоднократно апробирован — вариант двухступенчатых экзаменов, который применяется в подавляющем большинстве школ-интернатов до сих пор.

Однако многолетняя практика его применения показывает, что при теоретической безупречности данного вида отбора, непосредственно в «полевых» условиях, часто возникают нюансы, которые способны свести на нет, всю эффективность данного метода. На наш взгляд, для того чтобы ликвидировать все возникающие «узкие места», необходимо дать исчерпывающие ответы на три ключевых вопроса:

- 1) Чем первая ступень отбора должна принципиально отличаться от второй?
- 2) Как с помощью только двух ступеней отобрать действительно одаренных и способных детей, а не просто «натасканных»?
- 3) Как правильно расставить «нижние» и «верхние» границы при таком варианте отбора?

Проблема разработки учебной программы состоит в том, что за отведённое время на изучение курса математики, которое в самом расширенном варианте не превышает в совокупности (с учётом модулей) 12 академических часов в неделю, дать не только весь материал предусмотренный ФГОС, но и расширить его таким образом, чтобы он включал в себя весь дополнительный материал, который необходим для решения задач повышенной сложности, которые есть в ЕГЭ, ДВИ и перечневых олимпиадах. Также необходимо разработать и специальную учебную программу для подготовки самых способных учеников к участию во ВСОШ. Здесь также появляется необходимость ответов на три ключевых вопроса:

- 1) Как этого добиться за отведённое учебной программой время?
- 2) Какие темы и когда изучать?
- 3) Как и на каких темах эффективнее всего организовывать тренировки для повышения учебной «выносливости»?

Туркменов Роберт Муратович, учитель математики высшей категории, Университетская гимназия МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Садовничий Юрий Викторович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

В данном докладе мы попытались ответить на все поставленные вопросы и поделиться опытом преодоления указанных проблем.

ОТ ЛИЦ ЧЕРНОВА К ГИЛЬБЕРТОВУ ПРОСТРАНСТВУ: О ВИЗУАЛИЗАЦИИ В НАУКАХ О ЗЕМЛЕ. КУРС МНОГОМЕРНОЙ СТАТИСТИКИ НА КАФЕДРЕ ГИДРОГЕОЛОГИИ МГУ

Б.А. Шмагин

Shmagin@outlook.com

УДК 551.49:311.001.2

Представлен философский взгляд на преподавание многомерной статистики для студентов гидрогеологов. Курс был подготовлен и преподавался как исследовательский семинар по обработке данных, собранных для дипломных работ. Визуализация дается от Лиц Чернова к использованию гильбертова пространства, в котором, как координатах выявляется “симметрия земных тел” по В.И. Вернадскому.

Ключевые слова: визуализация в преподавании многомерной статистики, пространство и симметрия природных тел и процессов, электронный учебник.

Представлен философский взгляд на преподавание многомерной статистики для студентов гидрогеологов на примере развития визуализации за время прошедшее более, чем за полвека от публикации статьи Германа Чернова [1]. В статье описана классификация нуммулитов, окаменелостей используемых для стратификации карбонатных отложений, которая выполнена с использованием изображений упрощенных лиц. Классификации не получилась, но статья сыграла большую роль, т. к. при постановке задачи окаменелости и лица рассматривались и моделировались, как взаимно заменяющиеся многомерные природные объекты. В последующем Гильбертово пространство было принято в качестве координат для получения структур и симметрии природных тел и объектов вплоть до масштаба Вселенной [2].

Курс «Введение в статистический анализ многомерных данных» был одним из двух разделов «Практикума по математической гидрогеологии» проводившийся на десятом семестре на кафедре Гидрогеологии, подготовлен и преподавался сотрудниками кафедры, как исследовательский семинар по обработке данных, собранных для дипломных работ. Курс базировалась на публикациях членов кафедры, самостоятельно изучивших и использовавших методы многомерной статистики для решения гидрогеологических задач (см. напр. 3), консультациях математиков (Вострикова, Л.Ю., Терехин, А.Т.) и последовательной поддержке заведующих кафедрой профессоров В.М. Шестакова и В.А. Всеволожского. Автор вел курс в период 1986–1996 гг., в курсе год от года принимало участие от одного до трех десятков студентов и аспирантов, хотя понятно, что число может быть много больше при специальной организации семинаров.

Сопровождавшие курс книга [3] и электронный учебник позволяли преподавать студентам понятия, модели и алгоритмы статистики, а, главное, их использование в контексте гидрогеологии (концепции, исследовательские задачи, моделирование процессов и объектов, получение и интерпретация результатов). Это отличает курс от курсов, базировавшихся на традиционном формате учебного пособия по статистике (см. напр., [4]).

Методологической сердцевиной курса был практикум, т. е. освоение нескольких ключевых понятий (эмпирические наблюдения, как исходная матрица, выборка, а для неё мода, среднее значение, дисперсия, и затем корреляция и регрессия входящих в выборку переменных) и понятий, моделей и алгоритмов многомерного анализа данных (многомерная и пошаговая регрессии, кластерный, компонентный и факторный анализы) на специально разработанном учебном массиве данных относительно небольшого размера (100x8).

Переход в начале 90-х на персональные компьютеры значительно улучшил возможности преподавания и освоения материала. Разработанный электронный учебник, позволял студентам

осваивать статистику в ходе занятий и самостоятельно осваивать материал непосредственно необходимый для их исследовательской работы.

Преподаватель привлекался только как консультант, когда студенты работали с учебным материалом. Анализ собственных данных начинался с доклада формулирующего исследовательские задачи на семинаре курса, затем следовал выбор и обоснование метода многомерной статистики, работа с которым уже была освоена в практикуме. После обработки данных результаты также докладывались на семинаре. Такой алгоритм проведения курса позволял всем участникам не только лучше подготовиться к защите диплома, но и всем принимавшим участие в курсе познакомиться со всеми решенными задачами. Кроме этого, преподаватель был вовлечен и персонально взаимодействовал на всех этапах с каждым участником.

Проблема мотивированности студентов на занятиях была снята стадийностью, которая заключалась в последовательном усложнении осваиваемых понятий, что закреплялось упражнениями в практикуме, затем применялись к индивидуальным данным, и результаты обсуждались по мере анализа последовательно по каждому методу. Таким образом освоение новых понятий из статистики и умение ими пользоваться было наглядно для всех и обсуждалось участниками, что, по сути, снимало необходимость традиционного зачета или экзамена, делая уместным заключительное собеседование.

Науки о Земле изначально основывались на картах. Одним из трёх ведущих направлений кафедры Гидрогеологии с момента её создания (О.К. Ланге, в 1953) была региональная гидрогеология: разработка методики и подготовка карт с количественной характеристикой ландшафтных условий на происхождение, залегание и участие подземных вод в круговороте воды суши. Наиболее полно системный подход с использованием статистики был использован для оригинальных, изначально разрабатываемых на кафедре гидрогеологии карт подземного стока [5]. Карты отражали пространственно-временную изменчивость континентального стока рек в изменяющихся ландшафтных условиях и климатической зональности.

Введенное В.И. Вернадским понятие многомерного пространства для естественных объектов и процессов (см. [6]) с использованием методов многомерной статистики получило свою визуализацию, были получены иерархии многомерных нечетких структур пространственно-временной изменчивости (годы, сезоны и месяцы), было сформулировано понятие неопределённости получаемых моделей, вначале для построения карт подземного стока, а затем и некоторых других направлений геологических исследований [6]. Многомерная статистика (Statistical Learning) является очень важным современным инструментом анализа данных, без знания которого невозможна работа с литературой практически во всех разделах естествознания.

Время прошедшее после преподавания описанного выше курса и продолжавшиеся исследования региональных речных систем позволило автору разобраться с философскими вопросами образования в науках о Земле [7].

Преподавание отдельного предмета (курса), происходящего с введением и использованием профессионального языка, является частью образовательного процесса, должно рассматриваться и может быть понято в контексте философии, оперирующей наиболее абстрактными понятиями, общими для предметных областей знания, и позволяющей междисциплинарное общение (взаимодействие через высказывание – восприятие) естественным языком в общекультурном контексте.

Философия охватывает все области знания, отделившись от сравнительно недавно появившейся естественной науки, оставаясь отдельной самостоятельной областью знания. В отдельных областях знания философия по-прежнему присутствует как история их концептуального развития. Математику и философию объединяет их использование для улучшения взаимопонимания участников интеллектуальной деятельности, обеспечивая формализованные языки при общении.

Эволюция мысли, о которой писал В.И. Вернадский (см. [5]), не происходит сама по себе. Исследователи в отдельных науках должны получать математическое образование, позволяющее знакомиться с литературой во многих областях знания. Понятно, что для каждого факультета должен иметь кафедру (лабораторию) философии с семинаром для сотрудников и студентов. История отдельной науки, описываемая, как развитие идей и концепций может явиться базой для философских дискуссий в предметной области наук о Земле. Такая деятельность поможет формализовать в каждой области знания критерии, используемые при оценке успешности академической деятельности от студента до матерого исследователя.

Электронный учебник был создан в рамках Научного Парка МГУ «стартапом» Brain Educom, учрежденный сотрудниками МГУ (Ф.С. Поляков, С.М. Чесалов, О.Н. Тараканова, Б.А. Шмагин) с участием фирмы Диалог. Учеба и затем работа автора в МГУ (студент – с. н. с., 1965–1997) последовательно совпало со всеми ректорами возведённого комплекса МГУ на Ленинских горах от И.Г. Петровского до В.А. Садовниченко. У автора «деловое пересечение» произошло только с Виктором Антоновичем Садовничиным. Научный Парк МГУ проводил первую выставку и это произошло это у стенда электронного учебника. Здесь автору уместно поздравить юбиляра. Необходимая графика по адресу: <https://www.researchgate.net/profile/Boris-Shmagin/research>

Литература

1. Chernoff H. The use of faces to represent points in k-dimensional space graphically // Journal of the American statistical Association 68 (342) — 361-368.
2. Tegmen, M. Consciousness as a state of matter. Chaos, Solitons & Fractals.76, July 2015. — 238-270.
3. Чесалов С.М., Шмагин Б.А. Статистические методы решения задач на ЭВМ. — Москва: Недра, 1989. — 174.
4. Тюрин, Ю.Н., Макаров, А.А. Анализ данных на компьютере. Финансы и статистика //Фигурнова В. Э. (ред.). — Москва: Инфра, 1995.
5. Кудемин Б.И. Принципы региональной оценки естественных ресурсов подземных вод. — Москва: Изд-во МГУ, 1960. — 344.
6. Поляков А.С., Соколов В.Н., Шмагин Б.А. Вероятностные модели взаимодействия геосфер В.И. Вернадского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4, Геология. 1988. № 1. — Москва, 1999.
7. Shmagin, B. Hydrology as a Regional Science: Ontology and Semantic of Quantitative Cartography // .STANU 2023 13-th International Workshop Statistical Hydrology, — Boston, 2023. — https://www.researchgate.net/publication/376173275_Hydrology_as_a_Regional_Science_Ontology_Semantic_of_Quantitative_Cartography

РОССИЙСКИЙ СОВЕТ ОЛИМПИАД ШКОЛЬНИКОВ И РАЗВИТИЕ ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ В РОССИИ

И.В. Яценко

ivan@mccte.ru

УДК 51, 371.3

В докладе рассматривается развитие олимпиадного движения в области математики и роль в указанном развитии Российского совета олимпиад школьников. Показан рост массовости олимпиадного движения, качества проведения олимпиад и их методического обеспечения.

Ключевые слова: преподавание математики, математические олимпиады.

История математических олимпиад в России началась с проведенных в Ленинграде в 1934 году [1] и Москве в 1935 году [2] городских математических олимпиад. В 60-е годы начали проводиться Всесоюзные математические олимпиады [3], и вскоре математические олимпиады среди студентов [4,5]. Важными событиями в истории олимпиадного движения стали основание, по инициативе Н.Н.Константинова в 1978 Турнира имени Ломоносова [6] и в 1980 Турнира Городов [7]. Затем стал происходить бурный рост количества олимпиад, их стали проводить как группы энтузиастов, так и многие крупные ВУЗы, начала распространяться пагубная практика платных олимпиад. При этом начал размываться изначальный смысл математических олимпиад — показать школьникам красоту математики, путем решения ярких нестандартных задач, мотивировать их к углубленным занятиям в кружках и специализированных классах. Распространившаяся неупорядоченная практика зачисления в ВУЗы по результатам собственных олимпиад создавала серьезные, в том числе коррупционные риски и ставило под угрозу развитие массового олимпиадного движения.

Создание в 2007 году по инициативе В.А.Садовниченко Российского совета олимпиад школьников [8] позволило создать общественный экспертный механизм не просто контроля, а методического взаимодействия организаторов олимпиад.

Многие организаторы олимпиад смогли убедиться, что проведение олимпиады требует серьезных научно-методических и организационных ресурсов. В частности, если относится к составлению олимпиадных заданий, аналогично составлению заданий вступительных экзаменов, то невозможно получить варианты, которые будут отвечать высоким критериям творческого характера заданий, их оригинальности; а если не уделять внимание честности проведения, то, у олимпиады будет, статистически значимое количество дипломантов. Не подтвердивших свои результаты на Едином государственном экзамене.

Проводимая экспертиза заданий, научно-методические семинары совета олимпиад позволили существенно расширить географию олимпиад и качество их проведения. Победители и призеры математических олимпиад средний балл по ЕГЭ превышающий 85 баллов, а процент подтверждения порога ЕГЭ превышает 90%.

Существенно выросло и качество олимпиадных заданий. Сейчас в Перечень входят не только старейшие задающие планку олимпиады — Санкт-Петербургская и Московская математические олимпиады, Турнир городов, олимпиады ведущих университетов Москва и Санкт-Петербурга — Московского, Санкт-Петербургского, МФТИ, ГУ ВШЭ, но и олимпиады, проводимые ведущими региональными ВУЗами.

При этом, сложность олимпиадных заданий сочетается с их красотой — так как главные трудности, которые стоят перед участниками олимпиады при выполнении заданий не технические, вызванные, например, трудоемкими выкладками, а именно творческие, состоящие в нахождении пути решения в новой для школьника ситуации. Методический анализ олимпиадных заданий, представляемых на экспертизу, позволяет выявить следующие свойства, большинству из которых удовлетворяют хорошие олимпиадные задания:

1. Наличие понятной и привлекательной формулировки.
2. Наличие возможности попробовать различные пути решения и получить частичные продвижения.
3. Наличие возможности для школьника проверить верность решения и полученного результата.
4. Наличие возможности развития, наличие связи с интересными учебными или научными сюжетами.
5. Наличие нестандартного шага в решении, выполнение которого, по сути, становится для ребенка его маленьким открытием, чувство радости от которого будет мотивировать к решению других математических задач.

Развитие искусственного интеллекта бросает вызов олимпиадному движению в области математики, как в части потенциального использования ИИ нечестными участниками, так и в смысле естественного вопроса о нужности развития математического мышления в век ИИ. Пока не можем предсказать, как быстро будут разеваться возможности ИИ, но следует отметить, что в настоящее время олимпиадные задачи в том числе уровня международной олимпиады, в которых основная сложность — техническая, уже вполне поддаются решению с помощью искусственного интеллекта [9], в тоже время решения большинства заданий Математического праздника 6-7 классов (входящего в Московскую математическую олимпиаду) пока оказываются не под силу современному искусственному интеллекту [10]. Возможно, в перспективе, как один из критериев уровня творческого характера комплекта олимпиадных заданий можно рассматривать успешность выполнения его с помощью искусственного интеллекта.

Литература

1. *И.И. Чистяков*. Итоги Ленинградской математической олимпиады. — «Математика и физика в средней школе», 1934, № 4.
2. *В.М. Тихомиров*. «Размышления о первых московских математических олимпиадах», Матем. про-св., сер. 3, 2 (1998), 41–51.
3. *Н.Б. Васильев, А.А. Егоров*. «Задачи всесоюзных математических олимпиад». М.: Наука, 1988.
4. *В.И. Арнольд, А.А. Кириллов, В.М. Тихомиров, М.А. Шубин*. «О первой Всесоюзной математической олимпиаде студентов», УМН, 30:4(184) (1975), 281–288.

5. В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. Задачи студенческих олимпиад по математике, Изд-во Моск. ун-та, М., 1987.

6. В.О. Бугаенко. «Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике». МЦНМО-ЧеРо. 1998.

7. Л.Э. Медников, А.В. Шаповалов. «Турнир городов: мир математики в задачах», М., МЦНМО, 2017.

8. Приказ Минобрнауки России от 22 октября 2007 г. № 285 <http://base.garant.ru/192232/>

9. Quoc V. Le He He Trieu H. Trinh, Yuhuai Wu and Thang Luong. Solving olympiad geometry without human demonstrations. Nature volume 625, pages 476–482 (2024)

10. Математический праздник 2024 М. МЦНМО 2024 <https://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/image/24/book.pdf>

Секция 12

Вычислительная математика и математическое моделирование физических процессов

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА К ПОСТРОЕНИЮ М-МАТРИЦ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев, Г.А. Джээнбаева, М.М. Шаршенбеков

asan_baizakov@mail.ru, mir_83_25@list.ru

УДК 517.968

В данной работе сообщается роль членов арифметической прогрессии в построении М-матриц высокого порядка.

Ключевые слова: М-матрицы высокого порядка, декомпозиция.

В работе [1–3] был предложен способ построения М-матриц высокого порядка, применяя метод декомпозиции. Отметим, что множество значений констант квадратов моделируется разностным уравнением второго порядка вида

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 1 \quad (1)$$

с соответствующими начальными условиями. Согласно методу Эйлера общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(n) = c_1 + c_2 n \quad (2)$$

так как корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ совпадают. Отметим, что разностное уравнение (1) является характеристическим свойством арифметической прогрессии. Константы квадратов М-матриц появляющиеся по методу декомпозиции образуют арифметическую прогрессию и строятся по формуле (2). Постоянные c_1, c_2 подбираются в зависимости от размера рассматриваемой М-матрицы. Далее, члены арифметической прогрессии

Байзаков Асан Байзакович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики Национальной Академия Наук Кыргызской Республики

Айтбаев Кубат Асаналиевич, Институт математики Национальной Академия Наук Кыргызской Республики
Джээнбаева Гулгаакы Абдыкааровна, Институт математики Национальной Академия Наук Кыргызской Республики

Шаршенбеков Мирлан Маликович, Институт математики Национальной Академия Наук Кыргызской Республики

выступают как идентификаторы, показывающие координаты М-матриц низшего порядка, имеющее данную константу квадратов.

В силу этого, в данном способе построения М-матриц высокого порядка отправной точкой является наличие М-матриц низшего порядка. Поэтому в данном методе возникает необходимость наличие базы данных М-матриц низшего порядка. Применяя этот метод, авторам удалось построить М-матриц высокого порядка (~ 100).

Авторы считают необходимость такой работы возможностью ее применения к информационной безопасности. Применение М-матриц при передаче данных обладает свойством устойчивости, т.е. имеется возможность восстановления потерянных данных. Результаты данного исследования является дополнением [4–6].

Литература

1. Байзаков А.Б., Момбеков А.Д., Айтбаев К.А. О разнообразии констант квадратов в подблоках при декомпозиции матриц // Доклады НАН КР, Бишкек, 2017.— №2.— С. 19–24.
2. Байзаков А.Б., Момбеков А.Д. О некоторых свойствах квадратных матриц, сохраняющих симметрию // Известия НАН КР, Бишкек, 2018.— С. 1–14
3. Байзаков А.Б., Айтбаев К.А., Шаршенбеков М.М. Magic square: Terms of arithmetic progression — identifiers // Авторское свидетельство №5075 Кыргызпатента об авторском праве.— 21.12.2022.
4. Чебраков Ю.В. Теория магических матриц. Выпуск ТММ-1.— С.-Петербург, 2008
5. Гантмахер Ф.Т. Теория матриц.— М.: Наука, 1988.— 552с.
6. Ланкастер П. Теория матриц (пер. с англ).— М.: Наука, 1978.— 280с.

СИНГУЛЯРНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ РЕБРА ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, М.М. Шушарин

bogan7@yandex.ru, imogilevsky@mail.ru, nirashush1999@gmail.com

УДК 537.874.6

Исследуется сингулярная часть электромагнитного поля в окрестности ребра границы цилиндра произвольной формы сечения для различных видов граничных условий. С помощью метода, предложенного в работах В.А. Кондратьева, построено представление поля в виде суммы явно полученной сингулярной части и гладкой добавки.

Ключевые слова: задача дифракции на клине, поведение вблизи ребра.

При математическом моделировании безэховых камер нередко встречаются задачи дифракции на телах сложной формы, на границе которых присутствуют рёбра или другие особые точки. Известно [1], что вблизи особых точек границы у электромагнитного поля может наблюдаться сингулярность, из-за чего численные расчёты необходимо производить на очень густых сетках. Для того, чтобы повысить точность численных методов необходимо иметь априорную информацию о виде сингулярной части решения в окрестности ребра границы.

В работе проводится теоретическое исследование сингулярной части электромагнитного поля в окрестности ребра цилиндра с произвольной формой поперечного сечения. Рассматриваются случаи идеально проводящего, импедансного и диэлектрического цилиндров. Предполагается, что граница $\partial\Omega = S$ может быть задана зависимостью угловой координаты от радиальной, то есть рассматриваемая область в полярных координатах имеет вид:

$$\Omega = \{(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) : \varphi \in (\varphi_1(r), \varphi_2(r))\}. \quad (1)$$

Боголюбов Александр Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

Могилевский Илья Ефимович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

Шушарин Михаил Максимович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

На форму границы наложены следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \varphi_i &\in C^2(0, d] \cap C[0, d], \\ \varphi_1(0) &= 0, \quad \varphi_2(0) = \omega_0 \in (0, 2\pi), \\ \varphi_i' &= \underline{O}(r^{\alpha-1}), \quad \varphi_i'' = \underline{O}(r^{\alpha-2}), \quad \text{при } r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр α может принимать значения $\alpha > 1$ для всех рассматриваемых типов граничных условий, а для условий Дирихле (ТМ-поляризация в случае идеальной проводимости), условие можно ослабить до $\alpha > 0$.

Для выделения сингулярной части решения в работе используется метод, впервые предложенный в работах В.А. Кондратьева [2], позволяющий представить решение уравнения Гельмгольца вблизи ребра в виде суммы сингулярной части решения, которая может быть получена явно, и гладкой добавки, которую можно оценить через норму соответствующего функционального пространства из семейства пространств $V_\gamma^l(\Omega)$ с нормами, удобными для оценок гладкости вблизи ребра:

$$\|f\|_{V_\gamma^l(\Omega)}^2 = \sum_{j+k \leq l} \iint_{\Omega} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi. \quad (3)$$

Для применения этого метода рассматриваемая область отображается на бесконечный сектор с помощью преобразования координат. Так, например, для задачи дифракции на идеально проводящем цилиндре продольная компонента напряжённости электрического поля в новых координатах может быть представлена в следующем виде:

$$E(r, \varphi) = \chi(r) \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < \alpha} C_n r^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} + R(r, \varphi), \quad (4)$$

где $R \in V_{1-\alpha}^2(\Omega)$ — гладкая добавка, а срезающая функция $\chi(r) \in C^\infty(0, r)$ такова, что вблизи ребра $\chi(r < \frac{d}{2}) \equiv 1$, а вдали $\chi(r > d) \equiv 0$. Главное слагаемое сингулярной части будет иметь такую же особенность и после обратного преобразования координат. Для импедансных граничных условий асимптотическое представление решения имеет схожий вид, а для диэлектрического цилиндра показатели степени в сингулярной части могут быть найдены из соответствующего алгебраического уравнения.

Показано, что главная особенность электромагнитного поля вблизи ребра при некоторых ограничениях на форму боковых поверхностей цилиндра имеет такой же вид, что и для клина с тем же углом раствора боковых граней. Полученный вид сингулярной части решения позволяет модифицировать метод конечных элементов для повышения скорости сходимости [3].

Литература

1. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Избранные математические задачи теории дифракции. — М. Физический факультет МГУ. 2012.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московского Математического Общества, Т. 16, 1967, С. 227–313.
3. Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е., Светкин М. И. Гибридный метод решения уравнения Пуассона в области с металло-диэлектрическими углами // Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2017. No. 1. С. 17–22.

ЛАГРАНЖЕВА ФОРМАЛИЗАЦИЯ, МЕТОДЫ ЧАСТИЦ

С.В. Богомолов

bogomo@cs.msu.su

УДК 517.518

Системы дифференциальных уравнений, описывающие эволюцию траекторий микроскопических объектов, являются наиболее подробным способом моделирования больших систем. и служат основой построения методов частиц. Переход к сплошной среде, альтернативному представлению о рассматриваемых явлениях призван упростить их изучение. Мы приводим схему, позволяющие связать эти подходы на примере задач газовой динамики. Цепочка сквозных, многомасштабных микро – мезо – макро моделей возникает в соответствии с разными значениями малого параметра – числа Кнудсена.

Ключевые слова: уравнения Больцмана, Колмогорова – Фоккера – Планка, Навье – Стокса, магнитной гидродинамики и квазигазодинамики, сила Лоренца, случайные процессы, СДУ по пуассоновской и винеровской мерам, метод частиц..

Рассмотрим переход от лагранжевой (микро) к эйлеровой (макро) модели процесса линейного переноса в системе, состоящей из N материальных точек. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающих траектории их движения $x_i(t)$ с заданными скоростями $v(x, t)$, является микромоделью процесса переноса:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v(x_i(t), t), \quad i = 1, \dots, N, \quad x_i(0) = x_i^0. \quad (1)$$

Определим плотность их распределения $u(x, t)$: для любой финитной дифференцируемой функции $\phi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) u(x, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i(t)), \quad \text{or} : u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)). \quad (2)$$

Продифференцировав это определение по времени, получим уравнение переноса, сначала обобщённое, а затем в частных производных

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [v(x, t) u(x, t)]}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (3)$$

Если вместо $v(x_i(t), t)$ в правой части микро – задачи взять $\frac{1}{2} u(x_i(t), t)$, то придём к задаче Коши для уравнения Хопфа в дивергентном виде.

Традиционно уравнение переноса получают из представлений о сплошной среде как описание баланса потока массы через эйлерову ячейку. Другими словами, строится консервативная разностная схема, приводящая к уравнению в частных производных при стремлении объёма ячеек к нулю.

Лагранжева формализация порождает альтернативный класс численных методов — методы частиц.

Более содержательным примером лагранжевой формализации является система стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), описывающая поведение газа из твёрдых сфер, приводящая по описанной выше схеме к уравнению Больцмана.

Явная разностная схема для этой системы СДУ даёт численный метод, метод Монте – Карло, алгоритм которого часто интерпретируется как имитационная модель.

Микро. Положения и скорости частиц будем считать случайными величинами, что совершенно оправдано по физическим соображениям. **Столкновения** частиц (твёрдых сфер диаметра D) порождают процессы диффузии, вязкости и теплопроводности.

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= v_i(t)dt, \\ dv_i(t) &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} f(v_i, v_j, \omega) p_{ij} d\omega \times dt, \\ \lambda_{ij} &= N_{ij}^{collisions} / N, \quad N_{ij}^{collisions} = N_{ij}^{reached}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где $x_i(t)$, положения, и $v_i(t)$, скорости частиц, являются 3D случайными процессами, $f(\cdot)$ — функция скачка, или приращение скорости v_i из-за столкновения с частицей скорости v_j (для твёрдых сфер $f(v_i, v_j, \omega) = \omega(\omega, v_i - v_j)$, ω — единичный вектор, направленный между центрами частиц), p_{ij} — считающие независимые пуассоновские меры (с интенсивностями λ_{ij}), которые указывают на факт столкновения или его отсутствие. Подсчёт числа столкновений — совершенно такой же, как и при выводе уравнения Больцмана. Здесь же отражена идея о том, что число ударивших по i -частице j -частиц равно их числу $N_{ij}^{reached}$, успевших до неё долететь за время dt .

С вычислительной точки зрения, определение $N_{ij}^{reached}$ на каждом шаге по времени — сложная алгоритмическая задача. Как и в кинетической теории, она преодолевается переходом к сплошной среде в фазовом пространстве. Но только для вычисления λ_{ij} . СДУ по скачкообразной мере остаётся прежней. Возникает новая ступенька в иерархии.

Если для вычисления $N_{ij}^{reached}$ ввести «функцию распределения» $F(\cdot)$, которая определяется как обобщённая случайная функция:

$$\forall \varphi(x, v) : \int \varphi(x, v) F(x, v, t) dx dv = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i(t), v_i(t)), \quad F(\cdot) \text{ — плотность меры, порождённой процессом } (x(t), v(t)),$$

$\lambda_{ij} = \frac{1}{Kn} \frac{1}{2} F(x_i, v_j, t) \Delta x_i \Delta v_j$, $\Delta x_i = |(\omega, v_i - v_j)| dt D^2 d\omega$ — объём цилиндра для вычисления λ_{ij} . Здесь мы перешли к безразмерным величинам. $Kn(x, t) = 1/D^2 n_* x_*$ — число Кнудсена, параметр обезразмеривания. В областях с большими Kn наша модель может быть записана (здесь мы делать этого не будем) в виде уравнения Больцмана (с учётом флуктуаций) для F , которая случайна так же, как и λ_{ij} . Это — главное отличие от традиционной кинетической теории.

Мезо. При умеренных числах Кнудсена следующая ступень нашей иерархии между молекулярным описанием и представлением о газе как о сплошной среде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} dx(t) &= v(t)dt, \\ dv(t) &= -\frac{1}{Kn} a(c)(v(t) - V)dt + \frac{1}{\sqrt{Kn}} \sigma(c)dw(t), \end{aligned}$$

где c — модуль безразмерной тепловой скорости $c \equiv v(t) - V$, $V(x, t)$ — макроскопическая скорость.

Эта модель получена благодаря замене нашего скачкообразного процесса диффузионным, определяемым первыми двумя моментами процесса исходного. Её можно интерпретировать как описание движения частицы в среднем самосогласованном поле. Реализации этого процесса (набор траекторий) порождают меру, плотность $F(x, v, t)$ которой удовлетворяет уравнению типа уравнения Колмогорова — Фоккера — Планка в фазовом пространстве.

Макро. Более точные, чем система уравнений Навье — Стокса, уравнения газовой динамики, вытекают из сохранения как можно большей микроскопической информации. Выразим $v(t)$ через $x(t)$ из второго уравнения и подставим в первое, получив тем самым уравнение только относительно $x(t)$:

$$\begin{cases} dx(t) = Vdt + \sqrt{Kn} \tilde{\sigma} (dw + d\tilde{w}), \\ dv(t) = -\frac{1}{Kn} a(c)(v(t) - V)dt + \frac{1}{\sqrt{Kn}} \sigma(c)dw, \end{cases}$$

где v понимается как $v(x)$. Отсюда следует система макроскопических уравнений, в правой части которой присутствует «след», оставляемый тепловым движением молекул, или самодиффузией.

Магнитогидродинамическая иерархия строится схожим образом введением в исходную модель сил Кулона и Лоренца.

Литература

1. Богомолов С. В., Захарова Т. В. Уравнение Больцмана без гипотезы молекулярного хаоса // Матем. моделирование, **33**:1(2021), 3–24; // Math. Models Comput. Simul, **13**:5(2021), 743–755.

МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ COMRNER ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И РАСПАДА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ НА КОЛЛАЙДЕРАХ Э.Э. Боос, В.Е. Буничев, Л.В. Дудко, М.Н. Дубинин, В.Ф. Еднерал, А.П. Крюков, В.И. Саврин

*boos@theory.sinp.msu.ru, bunichev@theory.sinp.msu.ru, dudko@sinp.msu.ru,
dubinini@theory.sinp.msu.ru, edneral@theory.sinp.msu.ru, kryukov@theory.sinp.msu.ru,
savrin@theory.sinp.msu.ru*

УДК 519.6

Представлена программа ComrNER, использующая современные аналитические и численные математические методы для моделирования процессов столкновения и распада элементарных частиц.

Многочисленные эксперименты со столкновениями и распадами элементарных частиц привели к созданию единой теории, описывающей наблюдаемый спектр частиц, а также их взаимодействие. Эта теория, объединившая электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия получила название Стандартная Модель (СМ) взаимодействия элементарных частиц. Для проведения вычислений в рамках этой модели используются методы квантовой теории поля. При этом, основной вычисляемой характеристикой, которая несет информацию о процессе взаимодействия частиц, является квантовомеханическая амплитуда. Амплитуду представляют в виде ряда теории возмущений с разложением по величине констант взаимодействия частиц. Наиболее эффективным и популярным методом вычисления в рамках теории возмущений является метод диаграмм Фейнмана. В этом подходе члены ряда разложения амплитуды по теории возмущений представляются в виде графов, составными элементами которых являются волновые функции входящих и выходящих частиц, корреляционные функции, а также вершинные функции взаимодействия частиц. В общем случае, эти элементы являются сложными тензорными функциями от компонентов импульсов взаимодействующих частиц, поэтому вычисление квантовомеханических амплитуд сопряжено с вычислительными трудностями и требует автоматизации. Кроме того, для оценки вероятности определенного процесса требуется вычислить его сечение рассеяния. Для этого нужно вычислить квадрат модуля амплитуды процесса и проинтегрировать его

Исследование проводится в рамках научной программы Национального центра физики и математики, проекта «Физика элементарных частиц и космология».

Боос Эдуард Эрнстович, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (Москва, Россия)

Буничев Вячеслав Евгеньевич, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (Москва, Россия)

Дудко Лев Владимирович, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (Москва, Россия)

Дубинин Михаил Николаевич, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (Москва, Россия)

Еднерал Виктор Федорович, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (Москва, Россия)

Крюков Александр Павлович, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (Москва, Россия)

Саврин Виктор Иванович, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына (Москва, Россия)

по всем возможным значениям импульсов выходящих частиц. Для процессов с количеством конечных частиц больше трех возможно только численное интегрирование. В 1989 году группой физиков-теоретиков НИИЯФ МГУ под руководством Э.Э. Бооса, В.А. Ильина и В.И. Саврина был создан пакет автоматизированных вычислений CompHEP [1], который стал одной из первых в мире программ для моделирования процессов рождения и распада элементарных частиц в коллайдерных экспериментах. CompHEP реализован на языке программирования Си и адаптирован для Unix-подобных операционных систем. CompHEP использует метод диаграмм Фейнмана и позволяет проводить полную цепочку моделирования от введения лагранжиана модели и вычисления квадрата модуля амплитуды до численного расчета сечений рассеяния, построения распределений по кинематическим переменным и создания Монте-Карло генераторов для процессов взаимодействия частиц. Вычислительный комплекс CompHEP основан на современных математических методах. Для построения диаграмм Фейнмана используется аппарат теории графов, для символического вычисления квантовомеханических амплитуд используются методы теории функций комплексного переменного, линейной алгебры, теории групп, тензорного анализа. Так как функция амплитуды имеет сингулярности, то для численного интегрирования квадрата модуля амплитуды по фазовому пространству используется метод адаптивного численного Монте-Карло интегрирования, который позволяет автоматически регулировать решетку интегрирования, уплотняя её в особых точках, и вычислять многомерные интегралы быстро и с высокой точностью. CompHEP имеет дружественный пользователю оконный графический интерфейс (Рис. 1), что выгодно отличает его от других аналогичных программ. По этой причине CompHEP также используется для обучения вычислительным методам теории поля студентов-физиков в ряде университетов мира, в том числе, на физическом факультете МГУ, а также в филиале МГУ в г. Саров. Помимо графического, в CompHEP есть оптимизирован-

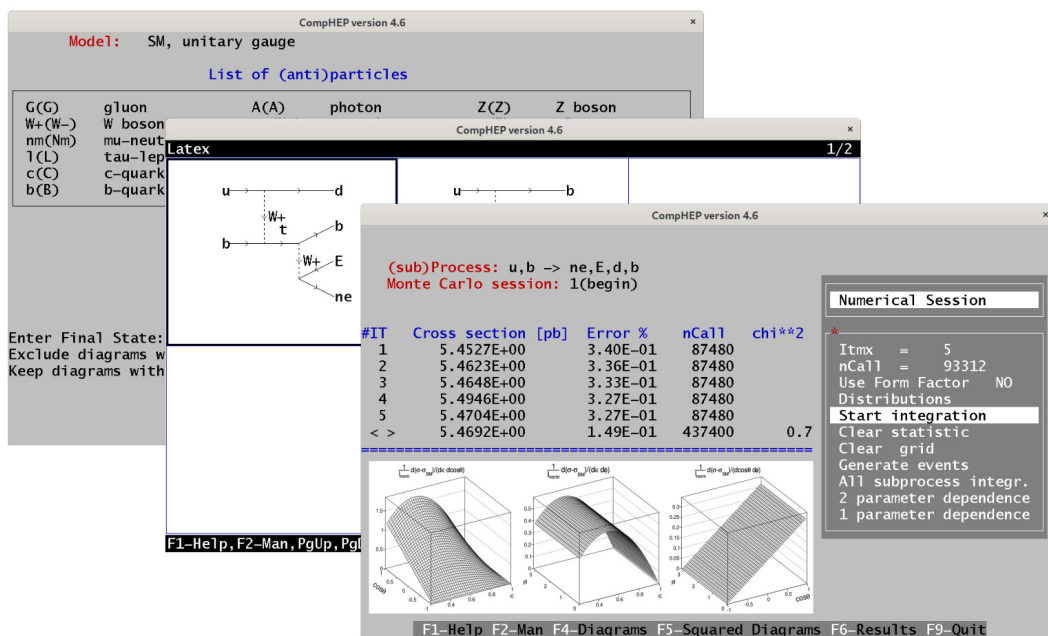


Рис. 1: Графический пользовательский интерфейс программы CompHEP

ный командный интерфейс, предназначенный для запуска вычислений на многопроцессорных кластерах ЭВМ, в том числе, на международной распределённой системе вычислений в физике высоких энергий GRID. Разработчиками CompHEP был предложен и внедрён формат записи Монте-Карло событий LHA, который стал международным общепризнанным стандартом записи событий для процессов взаимодействия элементарных частиц. Это позволяет использовать результаты моделирования CompHEP для дальнейшей обработки и моделирования в других программах, таких как Pythia для моделирования процессов адронизации и партонных ливней, а также в программе Delphes для моделирования отклика детекторов частиц. Также в CompHEP

реализован интерфейс с пакетом анализа ROOT для статистической обработки и графического представления результатов. Помимо вычислений в рамках Стандартной Модели, CompHEP имеет возможность проводить вычисления для других моделей, в том числе, для различных расширений СМ, включающих новые частицы и вершинные функции взаимодействия. Для этих целей создан дополнительный модуль LanHEP, который использует методы вариационного исчисления и позволяет в автоматическом режиме выводить правила Фейнмана из лагранжиана любой заданной модели и использовать их в пакете CompHEP.

Благодаря своей универсальности, высокой автоматизации вычислений и простоте использования CompHEP получил большую популярность и широко используется для вычислений и моделирования как теоретиками так и экспериментаторами в таких научных центрах как: НИИЯФ (Москва), ИЯИ (Москва), ОИЯИ (Дубна), ИФВЭ (Протвино), ИЯФ (Новосибирск), FERMILAB (Чикаго), DESY (Гамбург), КЕК (Цукуба), CERN (Женева) в различных коллаборациях на коллайдерах LEP, TEVATRON, LHC/HL-LHC, а также будущих коллайдерах FCC и ILC. С помощью CompHEP получено много новых физических результатов, а также совершён ряд открытий. Так в 2007 году, с помощью созданного под руководством Э.Э. Бооса Монте-Карло генератора SingleTop [2], впервые состоялось открытие процессов электрослабого рождения t -кварка в эксперименте D0 на коллайдере TEVATRON [3]. За это открытие учёные НИИЯФ МГУ Э.Э. Боос, Л.В. Дудко и М.М. Меркин были награждены премией Ломоносова. Также с помощью CompHEP ведётся поиск проявлений новых физических явлений за пределами СМ: так в эксперименте CMS(LHC) с помощью CompHEP были получены наиболее точные на сегодняшний день ограничения на параметры аномального взаимодействия t -кварка [4]; получены оценки доступных для измерений на будущем коллайдере ILC областей параметров аномального взаимодействия бозона Хиггса [5]; получены оценки доступных для измерений на коллайдере LHC областей параметров модели с дополнительными измерениями пространства – времени [6]; проведена оценка потенциала будущего Российского электрон – позитронного коллайдера для поиска частиц тёмной материи [7]; проведена оценка возможности наблюдения тау-лептонов и измерения их характеристик в эксперименте SPD на Российском коллайдере НИКА [8].

Программа CompHEP продолжает активно развиваться. Подготовлена к выходу новая версия CompHEP 4.6, в которой добавлен функционал, существенно расширяющий возможности CompHEP: так добавлена возможность использовать в вершинных функциях модели сложные формфакторы, зависящие от импульсов входящих частиц, которые возникают при вычислениях в следующем за лидирующим порядке по теории возмущений; добавлена возможность автоматических последовательных вычислений ширин и сечений на многомерных решётках из значений параметров модели; также добавлен модуль статистической обработки вычислений и построения доверительных областей в многомерном пространстве параметров с помощью использования экспериментальных данных, добавлены функции для алгебраических манипуляций с решетками вычисленных значений ширин и сечений и представления результатов в популярных графических форматах.

Литература

1. *E. Boos et al.* [CompHEP], Nucl. Instrum. Meth. A **534**, 250–259 (2004) doi:[10.1016/j.nima.2004.07.096](https://doi.org/10.1016/j.nima.2004.07.096)
2. *E.E. Boos, V.E. Bunichev, L.V. Dudko, V.I. Savrin and A.V. Sherstnev*, Phys. Atom. Nucl. **69**, 1317–1329 (2006) doi:[10.1134/S1063778806080084](https://doi.org/10.1134/S1063778806080084)
3. *V.M. Abazov et al.* [D0], Phys. Rev. Lett. **98**, 181802 (2007) doi:[10.1103/PhysRevLett.98.181802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.181802)
4. *V. Khachatryan et al.* [CMS Collaboration], JHEP **1702**, 028 (2017) doi:[10.1007/JHEP02\(2017\)028](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2017)028)
5. *E. Boos, V. Bunichev, M. Dubinin and Y. Kurihara*, Phys. Lett. B **739**, 410–415 (2014) doi:[10.1016/j.physletb.2014.11.015](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.11.015)
6. *E.E. Boos, V.E. Bunichev, M.A. Perfilov, M.N. Smolyakov and I.P. Volobuev*, Phys. Rev. D **92**, no.9, 095010 (2015) doi:[10.1103/PhysRevD.92.095010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.095010)
7. *E.E. Boos, V.E. Bunichev and S.S. Trykov*, Phys. Rev. D **107**, no.7, 075021 (2023) doi:[10.1103/PhysRevD.107.075021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.075021)
8. *V.V. Abramov, A. Aleshko, V.A. Baskov, E. Boos, V. Bunichev, O.D. Dalkarov, R. El-Kholy, A. Galoyan, A.V. Guskov and V.T. Kim, et al.* Phys. Part. Nucl. **52**, no.6, 1044–1119 (2021) doi:[10.1134/S1063779621060022](https://doi.org/10.1134/S1063779621060022)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ И КОМПОЗИЦИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

П.Н. Вабищевич

vab@cs.msu.ru

УДК 519.63

Устойчивые вычислительные алгоритмы приближенного решения задачи Коши для нестационарных задач строятся на основе неявных аппроксимаций по времени. Вычислительные затраты удается уменьшить при аддитивной декомпозиции оператора задачи и композиции приближенного решения за счет использования специальных явно-неявных аппроксимаций по времени. Предложен общий подход к построению таких схем расщепления на основе разложения единичного оператора в соответствующих пространствах.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, задача Коши, расщепление оператора, аппроксимация по времени.

При численном решении нестационарных краевых задач для уравнений с частными производными чаще всего используют неявные аппроксимации по времени, которые обеспечивают безусловную устойчивость решения по начальным данным и правой части [1,2]. Явные схемы, которые более просты для нахождения приближенного решения на новом слое по времени, имеют жесткие ограничения на шаг сетки по времени. Мы бы хотели строить схемы, которые были бы устойчивыми, как неявные схемы, и простыми при вычислительной реализации, как явные схемы.

При использовании неоднородных аппроксимаций по времени оператор задачи расщепляется на два операторных слагаемых с выделением приемлемого для вычислительной реализации слагаемого, которое берется с верхнего слоя по времени, а другое слагаемое — с нижнего слоя. Например, в работе [3] строятся явно-неявные двух- и трехслойные операторно-разностные схемы для эволюционного уравнения первого порядка как для стандартного расщепления основного оператора задачи, так и для расщепления оператора при производной решения по времени.

Схемы расщепления [4,5] базируются на известном аддитивном представлении оператора задачи. При этом переход на новый слой по времени осуществляется решением эволюционных задач для отдельных операторных слагаемых. Во многих нестационарных задачах вычислительно приемлемые подзадачи имеет смысл строить на основе декомпозиции решения, когда более простые задачи формулируются для отдельных составляющих решения. Такие новые схемы расщепления решения построены в работах [6,7] для приближенного решения задачи Коши в конечномерном гильбертовом пространстве для эволюционных уравнений первого и второго порядка.

Схемы расщепления при приближенном решении нестационарных задач мы можем рассматривать как вычислительную технологию декомпозиции (анализа) задачи и композиции (синтеза) решения. На этапе декомпозиции выполняется аддитивное представление оператора(ов) задачи на более простые операторы, а на этапе композиции — строится приближенное решение задачи из решений задач для отдельных операторных слагаемых на основе специальных аппроксимаций по времени. В настоящее время построены различные классы двух- и трехслойных аддитивных операторно-разностных схем (схем расщепления) [5] при заданном аддитивном расщеплении оператора задачи. Наиболее просто строятся явно-неявные аппроксимации при двухкомпонентном расщеплении. Для общего многокомпонентного расщепления используются схемы покомпонентного расщепления (схемы суммарной аппроксимации), регуляризованные аддитивные схемы и векторные схемы расщепления.

В вычислительной практике наибольшее внимание уделяется схемам расщепления по переменным или по физическим процессам, когда декомпозиция оператора(ов) задачи проблем не вызывает. При построении схем декомпозиции области для нестационарных задач расщепление чаще всего базируется [5] на разбиении единицы для области. Мы развиваем общий подход к построению аддитивной декомпозиции операторов задачи при приближенном решении задачи

Коши для эволюционных уравнений в гильбертовых конечномерных пространствах. Ключевая идея связана с использованием аддитивного представления единичного оператора в соответствующих пространствах. На этапе композиции используются аддитивные операторно-разностные схемы.

Литература

1. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes.— New York, 2001.
2. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач.— М., 2021.
3. *Vabishchevich P.N.* Explicit–implicit schemes for first-order evolution equations // *Differential Equations*. 2020, Vol. 56, No. 7, P. 882–889.
4. *Marchuk G.I.* Splitting and alternating direction methods // *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. I, North-Holland, 1990. P. 197–462.
5. *Vabishchevich P.N.* Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes.— Berlin, 2014.
6. *Efendiev Y., Vabishchevich P.N.* Splitting methods for solution decomposition in nonstationary problems // *Applied Mathematics and Computation*. 2021, Vol. 397, No. 125785, P. 1–10.
7. *Vabishchevich P.N.* Solution Decomposition Schemes for Second-Order Evolution Equations // *Differential Equations*. 2021, Vol. 57, No. 7, P. 848–856.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

А.В. Лапин

avlapine@mail.ru

УДК 519.63

Построена сеточная аппроксимация вариационного неравенства (задачи о препятствии) с квазилинейным оператором диффузии и дробной по времени производной. Обосновано существование единственного решения сеточной схемы и установлены априорные оценки в различных нормах. В частном случае получена оценка точности при естественных предположениях о геометрии коинцидентного множества и гладкости решения дифференциальной задачи.

Ключевые слова: вариационное неравенство, дробная производная, аппроксимация.

Явления аномальной диффузии наблюдаются в различных процессах физики, биологии, экологии, экономики и т.д. Это мотивировало разработку новых математических моделей в виде дифференциальных уравнений с дробными производными, которые более точно отражают «аномальные» особенности, чем уравнения с целочисленными производными. Значительное развитие получил теоретический и численный анализ субдиффузионных уравнений с дробной производной по времени, моделирующих явления с «памятью». Изучались субдиффузионные уравнения с дробными производными как постоянного порядка $\alpha \in (0, 1)$, так и переменного порядка $\alpha = \alpha(x, t)$. Обзор использования дробного исчисления в различных приложениях представлен в [1]. Классификация моделей дробной диффузии переменного порядка представлена в [2]. Обзор литературы по этой теме, включая основные определения, модели и их приложения можно найти в [3]. В статьях [4]–[6] для задач с оператором диффузии-конвекции введено новое понятие дробной материальной производной, моделирующей эффекты памяти вдоль траектории движения частиц в потоке, построены и изучены неявные сеточные схемы.

В данном докладе приведены результаты, обобщающие результаты [4]–[7] на случай сеточных аппроксимаций вариационного неравенства с монотонным оператором диффузии по пространственным переменным, дробной производной по времени и поточечным ограничением на решение (задача о препятствии).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект № 22-71-10087.

Лапин Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, Институт вычислительной математики РАН; Институт компьютерных наук и математического моделирования Сеченовского университета

Более точная постановка одномерной по пространству дифференциальной задачи такова. Пусть $Q = (0, X) \times (0, T]$, функция $\alpha(x, t) : [0, X] \rightarrow (0, 1]$ непрерывна и функция $y(x, t)$ непрерывна по x и абсолютно непрерывна по t , $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Дробная производная по t от $y(x, t)$ порядка $\alpha(x, t)$ в фиксированной точке $(x, t) \in Q$ равна:

$$D_t^{\alpha(x,t)} y(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(x, t))} \int_0^t (t - s)^{-\alpha(x,t)} \frac{\partial y(x, s)}{\partial s} ds.$$

Определим казилинейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = -g'_{1x}(x, t, u'_x) + g'_0(x, t, u),$$

где функции $g_i(x, t, q)$, $i = 0, 1$, непрерывны по всем аргументам и монотонны по q . Ограничение на искомое решение: $u(x, t) \leq \varphi(x, t)$ в Q при заданной непрерывной функции $\varphi(x, t)$. Теперь можно дать формальное поточечное определение вариационного неравенства в виде задачи дополнителности: найти $u(x, t)$ такую, что для $(x, t) \in Q$

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha(x,t)} u(x, t) + Lu(x, t) - f(x, t) &\leq 0, \quad u(x, t) - \varphi(x, t) \leq 0, \\ (D_t^{\alpha(x,t)} u(x, t) + Lu(x, t) - f(x, t))(u(x, t) - \varphi(x, t)) &= 0 \end{aligned}$$

с соответствующими граничными и начальным условиями.

Для рассматриваемой задачи построена неявная сеточная аппроксимация, доказано существование единственного решения и получены априорные оценки в различных сеточных нормах. Так, в общем случае дробной производной переменного порядка $\alpha(x, t) \in (0, 1]$ доказана оценка в сеточной максимум-норме через максимум-норму правой части. В случае производной постоянного порядка α и равномерно монотонного оператора диффузии ($(Lu, u) \geq c_0 \|u\|_{H^1}^2$) доказана оценка устойчивости сеточной задачи с $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ -нормой правой части. Эта оценка позволяет оценить точность разностной схемы при достаточно естественных предположениях: достаточной гладкости решения в области $\{(x, t) \in Q : u(x, t) < \varphi(x, t)\}$ и простой геометрии коинцидентного множества $\{(x, t) \in Q : u(x, t) = \varphi(x, t)\}$.

Литература

1. H. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, and Y. Chen A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering // Commun. Nonlinear. Sci. Num. Simul. **64**, 213–231 (2018).
2. H. Sun, W. Chen, and Y. Chen Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **388** (21), 4586–4592 (2009).
3. H. Sun, A. Chang, Y. Zhang, and W. Chen A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications // Fract. Calc. Appl. Anal. **22**, 27–59 (2019).
4. A. Lapin, and V. Shaydurov A diffusion–convection problem with a fractional derivative along the trajectory of motion // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling **36** (3), 157–163 (2021).
5. A. Lapin, and R. Yanbarisov A new model of the problem with a fractional derivative along the trajectory of motion // Lobachevskii J. Math. **43** (8), 1956–1967 (2022).
6. A. V. Lapin, V.V. Shaydurov, and R. M. Yanbarisov Finite difference scheme for a non-linear subdiffusion problem with a fractional derivative along the trajectory of motion // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling **38** (1), 23–35 (2023).
7. A. V. Lapin, and R. M. Yanbarisov Numerical solution of a subdiffusion equation with variable order time fractional derivative and nonlinear diffusion coefficient // Lobachevskii J. Math. **44** (7) 2790 – 2803 (2023).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ В ГЛАЗУ ЧЕЛОВЕКА

В.С. Лапонин, С.А. Складчиков

lap@cs.msu.ru, sklادتchikov@mail.ru

УДК 532.1-3

В работе рассматриваются гидродинамические процессы, протекающие внутри полости человеческого глаза. Построена трехмерная нестационарная модель течения внутриглазной жидкости, учитывающая температурные, физические и геометрические особенности строения человеческого глаза. Проведена серия численных экспериментов, демонстрирующих структуру течения.

Ключевые слова: математическое моделирование, глаз, поток.

Математическое моделирование течения внутриглазной жидкости представляет значительный интерес для медиков, поскольку в современном мире отсутствует возможность наблюдать динамику такого течения ввиду несовершенства медицинского оборудования и сложности протекающих процессов. Однако понимание структуры течения внутриглазной жидкости может дать ответы на причины повышения внутриглазного давления, приводящего к возникновению таких заболеваний как например глаукома и дать возможность выбрать наиболее эффективный метод лечения в конкретном случае.

Глаз состоит из передней и задней камер, соединенных между собой узкой областью переточка жидкости по границе хрусталика. В передней камере расположена кольцеобразная область оттока жидкости через Шлеммов канал. В задней камере расположена также кольцеобразная область притока жидкости. Внутри задней камеры располагается стекловидное тело. Это проникаемая структура, которая имеет другие физические свойства, такие как плотность и вязкость, по сравнению с остальной полостью глаза. Также в задней камере глаза отмечены области пульсации основных кровеносных сосудов, расположенных по поверхности глаза. Внутреннее пространство, помимо стекловидного тела, глаза заполнено жидкостью, по своим характеристикам, соответствующим воде. Внутренняя область глаза расположена внутри тела человека, поэтому температура по границе внутренней области задается как 36 градусов Цельсия. Граница наружной области глаза в данной постановке соответствует 20 градусам Цельсия. Жидкость в область притока поступает с частотой человеческого пульса, пульсация кровеносных сосудов на внешней стенке задней камеры глаза также происходит с частотой человеческого пульса с небольшим смещением по времени по отношению к области притока.

Общий вид математической постановки задачи представляет собой двухфазную (фаза внутриглазной жидкости и фаза лекарства) четырех мерную в пространстве-времени математическую модель гидродинамики, описывающую перемещение и взаимодействие жидкостей во времени. Математическая модель, учитывает тензор вязких напряжений, силу тяжести, условия оттока и притока жидкости, фокусировку (кумуляцию) и диссипацию (распыл) конвективных потоков, а также температурные особенности среды. Для проведения моделирования внутри расчетной области строится трехмерная неравномерная шестигранная сетка, то есть вся расчетная область разбивается на элементарные объемы, в каждом из которых на каждом шаге по времени производится численное решение системы уравнений математической модели. Количество ячеек сетки для данной задачи составляет порядка 400 000 ячеек. По результатам проведения математического моделирования получены следующие результаты, отображающие структуру течения внутриглазной жидкости. Вблизи поверхности наблюдается формирование множественных вихревых структур, обведенных красным, а также выделено основное направление течения стрелкой. Структура течения жидкости в задней камере глаза представляет собой тороидальное вихревое образование. Также внутри глаза имеется множество более мелких вихрей, периодически формирующихся и саморазрушающихся. В передней камере глаза также формируются вихревые

Лапонин Владислав Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

Складчиков Сергей Андреевич, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

образования, оказывающие влияние на интенсивность оттока внутриглазной жидкости. Понимание структуры течения жидкости для конкретного пациента с его особенностями строения и иных физических характеристик может позволить врачам более точно выбрать метод лечения.

Литература

1. С.А. Складчиков, Н.П. Савенкова, Ф.И. Высикайло и др., 4d-исследование вихревых движений жидкостей внутри глаза // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки.— 2021.— № 5.— С. 73–88.
2. V.S. Laponin, S.A. Skladchikov, N.P. Savenkova, V.V. Novoderezhkin, Investigating the causes of glaucoma: Mathematical modeling of the hydrodynamics of fluid outflow through schlemm's canal // Computational Mathematics and Modeling.— 2018.— Vol. 29, no. 2.— P. 146–152.
3. Д.В. Липатов, С.А. Складчиков, Н.П. Савенкова, В.В. Новодережкин, Некоторые аспекты движения жидкости внутри глазного яблока при математическом моделировании интравитреальной инъекции // Современные технологии в офтальмологии.— 2021.— №3.— С. 106–109.

ТРЕХМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЭЛАСТОГРАФИИ: «СУПЕРБЫСТРОЕ» РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

А.С. Леонов, Н.Н. Нефедов, А.Н. Шаров, А.Г. Ягола

asleonov@mephi.ru, nefedov@phys.msu.ru, scharov.aleksandr@physics.msu.ru,
yagola@physics.msu.ru

УДК 519.632.4

Рассматриваются прямая и обратная задачи трехмерной квазистатической эластографии — нового метода онкологической диагностики. Решения этих задач выписываются в виде простых формул с использованием метода малого параметра. Расчеты по формулам требуют лишь несколько десятков миллисекунд на персональном компьютере средней производительности для достаточно мелких сеток, и поэтому предлагаемый подход может быть применен при онкологической диагностике в реальном времени.

Ключевые слова: трехмерная эластография, обратные задачи, малый параметр.

1. В последние годы для онкологической диагностики все чаще используют новые методы медицинской визуализации, получившие название *эластография*. Методы основаны на различиях в механических характеристиках здоровых и опухолевых биологических тканей. Они позволяют найти распределения модулей упругости в ткани по ее смещениям в результате внешних сжатий. Тем самым выделяются подозрительные на онкологию области с повышенными значениями модулей упругости. Для такой диагностики в реальном времени требуется адекватная математическая модель исследуемой ткани и «быстрый» метод решения обратной задачи: «по смещениям найти модули упругости». Однако, для общепринятой трехмерной модели изучаемой ткани, как упругого тела (см., например, [1]), решение обратной задачи на среднем по характеристикам персональном компьютере (ПК) требует десятков часов. Для реальной диагностики это неприемлемо.

2. В докладе изучается схема квазистатической эластографии с моделью ткани как линейно-упругого слоя $\Omega = R_x^1 \times R_y^1 \times [0, c] \subset R_{xyz}^3$. Его граница $z = 0$ закреплена, а граница $z = c$ находится под давлением $F_0 = \text{const}$. Остальные границы свободны. Упругие свойства ткани задаются модулем Юнга $E(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$, и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.495$. Смещения ткани $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x})$ по осям Ox , Oy , Oz можно найти по данным модулям упругости из известной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Леонов Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ

Нефедов Николай Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

Шаров Александр Николаевич, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

Ягола Анатолий Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

краевой задачи для системы уравнений в частных производных (см., например, [1]). Это составляет прямую задачу. Обратная задача заключается в нахождении распределения модуля Юнга $E(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$ по известным вертикальным смещениям ткани $w(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$. Особенностью прямой задачи является фигурирующий в ней малый параметр $\varepsilon = 0.5 - \nu \approx 0.005$. Решая прямую задачу методом малого параметра для регулярных возмущений уравнений в частных производных, можно при определенных предположениях получить связь вертикальных смещений и модуля Юнга:

$$w(x, y, z) = F_0(1 + 2\varepsilon\nu^{-1}) \int_0^z E^{-1}(x, y, \zeta) d\zeta. \quad (1)$$

Эта формула позволяет трактовать обратную задачу как одномерное интегральное уравнение Вольтерры первого рода относительно неизвестной $E^{-1}(x, y, z)$ для каждого набора параметров $(x, y) \in R_{xy}^2$. Оно решалось с помощью метода регуляризации А.Н.Тихонова для каждого такого набора.

3. На модельных примерах показано, что решение обратной задачи эластографии с помощью формулы (1) достаточно хорошо воспроизводит точное решение, несмотря на сравнительно жесткие предположения, при которых эта формула выведена. Решение обратной задачи на ПК требует 20–25 миллисекунд для достаточно подробных сеток. Поэтому предлагаемый подход может быть применен при онкологической диагностике в реальном времени.

Литература

1. *Леонов А.С., Нефедов Н.Н., Шаров А.Н., Ягола А.Г.* «Быстрое» решение трехмерной обратной задачи квазистатической эластографии с помощью метода малого параметра // ЖВМ и МФ, **63**:3 (2023), 449–464.

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАЛОРАНГОВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ТТ-ФОРМАТЕ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ КОАГУЛЯЦИИ

С.А. Матвеев

matseralex@cs.msu.ru

Данная работа посвящена исследованию и тестированию эффективных алгоритмов построения малоранговых представлений неотрицательных тензоров в ТТ-формате [1]. В настоящее время для решения данной задачи известны алгоритмы на основе метода переменного проектирования на выпуклое множество неотрицательных тензоров и множество малоранговых тензорных поездов на основе квазиоптимального по точности алгоритма TT-SVD и его более эффективной рандомизированной версии [2]. В докладе будет продемонстрирована применимость этих методов для сжатия синтетических данных, мультиспектральных спутниковых изображений и численных решений многокомпонентных уравнений коагуляции с источниками и стоками частиц.

Несмотря на надёжную сходимостью методов переменного проектирования их принципиальным недостатком оказывается использование простого оператора проектирования на множество неотрицательных тензоров, требующего использования всех элементов используемого тензора. В данной работе предлагается решение данной проблемы при помощи эффективной операции поиска максимального/минимального элемента в формате тензорного поезда на основе ТТ-крестовой интерполяции и эффективной реализации арифметических действий над тензорами, представимыми в виде ТТ-формата. Мы демонстрируем, что достаточно построить лишь одноранговую поправку к исходному приближаемому тензору, чтобы полностью избавиться от артефактных

Исследование выполнено при поддержке проекта Российского научного фонда (21-71-10072, <https://rscf.ru/project/21-71-10072>).

Матвеев Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

отрицательных элементов. Данная идея позволяет получить алгоритмы построения неотрицательных тензорных поездов, не подверженные проблеме “проклятия размерности”, то есть без явных экспоненциальных требований по сложности и памяти. Эффективность этой базовой идеи можно дополнительно повысить при использовании метода проекции градиента и методов на основе вариационных техник типа DMRG [4].

Внедрение малоранговых неотрицательных тензорных разложений в алгоритмы поиска численного решений многокомпонентного уравнения коагуляции позволяет повысить их устойчивость и избавиться от артефактных отрицательных элементов для задач произвольной размерности.

Литература

1. *Oseledets I. V.* Tensor-train decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2011. — Т. 33. — №. 5. — С. 2295–2317.
2. *Sultonov A., Matveev S., Budzinskiy S.* Low-rank nonnegative tensor approximation via alternating projections and sketching // Computational and Applied Mathematics. — 2023. — Т. 42. — №. 2. — С. 68.
3. *Shcherbakova E. M. et al.* Study of performance of low-rank nonnegative tensor factorization methods // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2023. — Т. 38. — №. 4. — С. 231–239.
4. *Shcherbakova E. M.* Nonnegative tensor train factorization with dmrg technique // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Т. 40. — С. 1863–1872.

МАТЕМАТИКА ДОЛЖНА ЗАВОЕВАТЬ БИОЛОГИЮ

Ю.И. Ожигов

ozhigov@cs.msu.ru

Обосновывается возможность построения математических моделей живого с предсказательной силой, с использованием существующих суперкомпьютеров.

Первоначальный проект Фейнмана: квантовый компьютер; его роль и итог

Программа Д. Гильберта, выдвинутая в начале 20 века, сводилась к необходимости наведения порядка в естествознании с помощью внедрения математических методов. Первый этап этой программы — математизация физики, был выполнен за столетие; второй этап, связанный с биологией, нам предстоит преодолеть. Математическое моделирование жизни с предсказательной силой (см., например, [1]) возможно только на квантовой основе, что — согласно традиционной (копенгагенской) теории требует экспоненциального ресурса компьютерной памяти. Р. Фейнман в начале 80-х выдвинул программу создания так называемого квантового компьютера, который смог бы преодолеть этот барьер сложности ([3]; см. рисунок 1).

Однако эксперименты столкнулись с препятствием — спонтанным распадом сложных квантовых состояний, названным декогерентностью, которое оказалось не техническим, а фундаментальным. Стало ясно, что имеет место соотношение неопределенностей, связывающее сложность квантовых состояний и возможную точность их описания, вида

$$C(\Psi)A(\Psi) \leq Q \quad (1)$$

где константа Q есть максимальное число кубитов квантового процессора ([1]). Это ставит ограничение как на фейнмановский квантовый компьютер, так и на границы применимости копенгагенской квантовой теории в области сложных процессов (см. рисунок 2).

Одновременно открываются новые перспективы для математизации сложных квантовых процессов: такие задачи оказываются в сфере досягаемости современных суперкомпьютеров. Итак, в деле освоения биологии физическая прибористика отходит на второй план, уступая место математике. Единственный феномен, который нельзя воспроизвести на классических компьютерах и вычислительных сетях - квантовая нелокальность; ее роль в биологии еще предстоит выяснить (см. например, [2] — влияние бифотонного управления на синтез цепочек полимеров — рисунок 3).

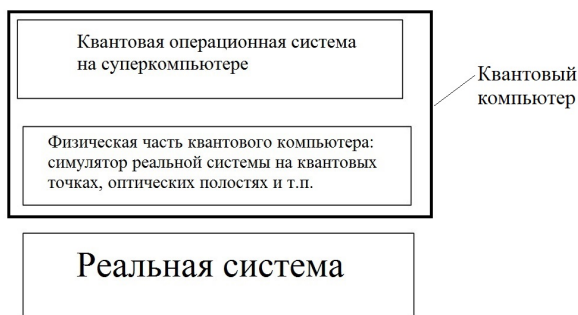


Рис. 1:

**Как математика должна использовать новые возможности.
Пример: простейшая химия**

Новый математический аппарат для моделирования сложной химии живого должен опираться на квантовую механику с ограничением (1) и иметь форму алгоритмов, моделирующих химические процессы в живом с полным учетом электромагнитного поля, включающим не только его скалярную часть (как при моделировании конформаций уже готовых молекул), но и векторную часть, отвечающую за реакции. Работа [2] показывает, каким образом, абстрагируясь от огромного числа не играющих роли деталей, эту задачу можно решить, на примере ассоциации — диссоциации двух одновалентных атомов (см. рисунок 4, а также 5).

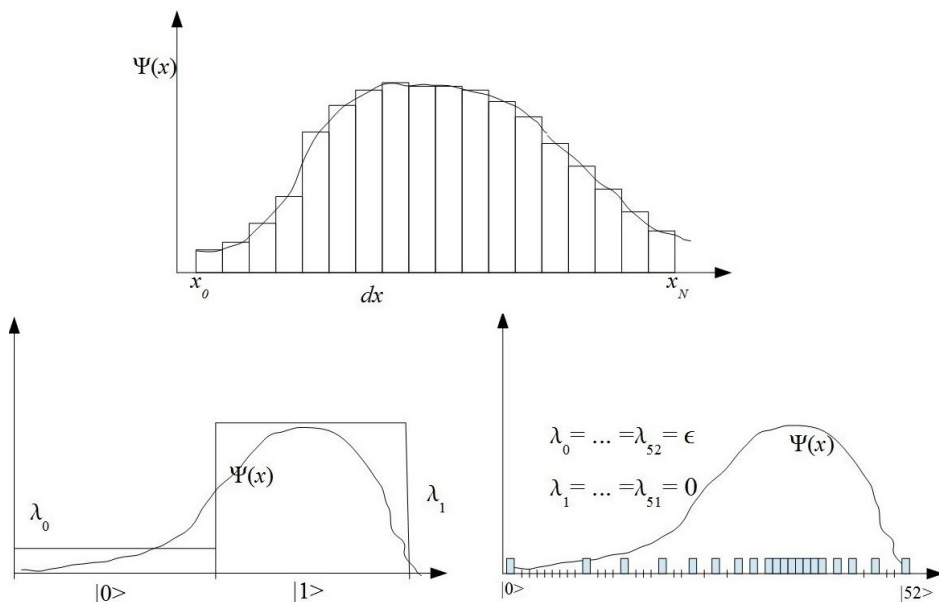


Рис. 2: Соотношение между сложностью и точностью квантового описания состояния системы. Кривая — гипотетическая вероятность рассчитанная по волновой функции. Вверху — небольшая сложность и удовлетворительная точность (ошибка порядка точности эксперимента) — типичная область применения квантовой теории. Внизу слева — очень простая система и высокая точность описания. Внизу справа — экстремальная сложность и отсутствие точности в физическом смысле — это биологические объекты.

Построение алгоритмов, моделирующих более сложные процессы, должно опираться на абстрагирование — освобождение от колоссального числа деталей, не играющих принципиальной роли, в чем и состоит сила математики.

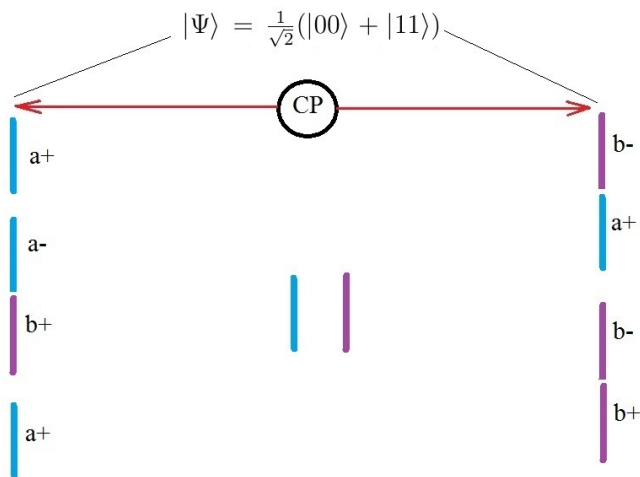


Рис. 3: Синтез двух полимеров из моноблоков типов a и b при одностороннем бифотонном управлении

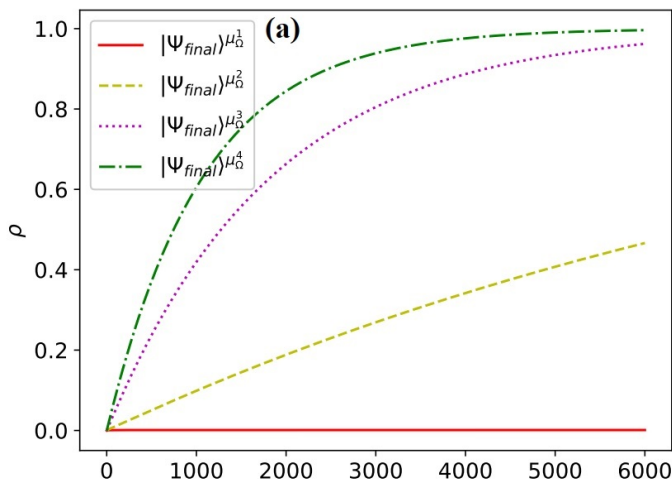


Рис. 4: Зависимость вероятности образования молекулы от времени; различные температуры атомного возбуждения ([5]).

Литература

1. *Vasily Ogryzko, Yuri Ozhigov*, Biologically inspired path to quantum computer // Proceedings Volume 9440, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2014; 94401N (2014) doi [10.1117/12.2180581](https://doi.org/10.1117/12.2180581)
2. *Ozhigov Y.I.*, 2018 Distributed Synthesis of Chains with One-way Biphotonic Control // Quantum Information and Computation, vol. 18, № 7–8, pp. 0592–0598
3. *Richard P. Feynman*, Simulating Physics with Computers // International Journal of Theoretical Physics, Vol. 21, Nos. 6/7, 1982, pp. 467–488.
4. *Ozhigov Yuri*, Three principles of quantum computations, Quantum Information and Computation.— Rinton Press, Inc. (United States), 2022, vol.22, №15–16, pp. 1280–1288 doi: [10.26421/QIC22.15-16-2](https://doi.org/10.26421/QIC22.15-16-2)
5. *Miao Hui-hui, Ozhigov Yuri*, Using a modified version of the Tavis-Cummings-Hubbard model to simulate the formation of neutral hydrogen molecule // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier BV (Netherlands), 2023, vol. 622, № 1, pp. 128851 doi: [10.1016/j.physa.2023.128851](https://doi.org/10.1016/j.physa.2023.128851)

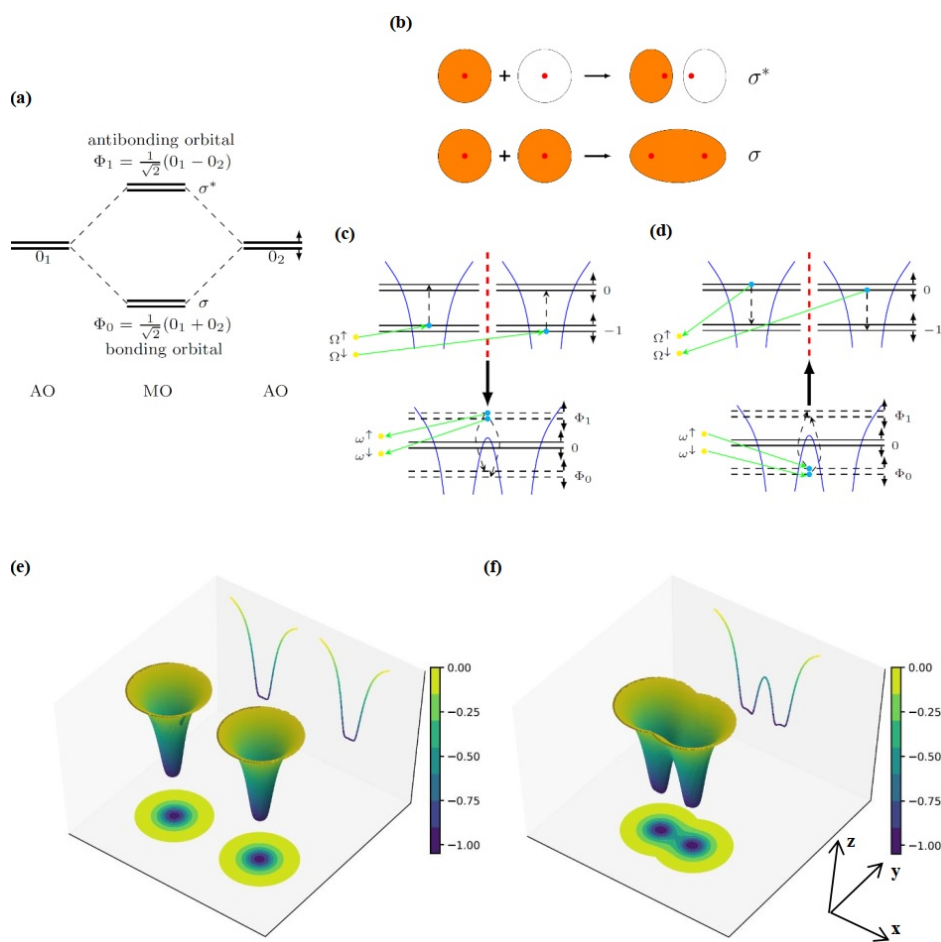


Рис. 5:

УСВОЕНИЕ ДАННЫХ И РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ АДВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ–РЕАКЦИИ

А.В. Пененко, Е.В. Русин, М.К. Емельянов, В.В. Пененко

aleks@ommgp.ssc.ru, rev@ooi.ssc.ru, m.emelyanov2@g.nsu.ru, penenko@sscc.ru

УДК 519.688

Подход на основе ансамблей решений сопряженных уравнений и операторов чувствительности позволяет численно решать широкий спектр обратных задач и задач усвоения данных для многомерных моделей адвекции–диффузии–реакции.

Ключевые слова: усвоение данных, обратные задачи, модели адвекции–диффузии–реакции, сопряженные уравнения, операторы чувствительности.

Многомерные модели адвекции–диффузии–реакции применяются в широком спектре прикладных задач, включая задачи моделирования процессов переноса и трансформации примесей в атмосфере и гидросфере, а также процессов роста и развития живых систем. Реалистичные модели обычно требуют задания большого количества априорной информации и существенных вычислительных ресурсов, особенно в режиме обратного моделирования, в частности, для идентификации источников и других параметров моделей по данным наблюдений за функцией состояния.

Для решения задач обратного моделирования с многомерными моделями используется подход на основе операторов чувствительности и ансамблей решений сопряженных уравнений [1]. Операторы чувствительности обратной задачи конструируются из набора функций чувствительности, которые вычисляются по ансамблю решений сопряженных уравнений модели. На основе операторов чувствительности формируются семейства квазилинейных операторных уравнений, содержащие неизвестные обратной задачи. Наряду с многомерными нелинейными моделями процессов адвекции–диффузии–реакции, в работе также рассматриваются нелинейные операторы измерений, которые связывают результаты измерений с модельными переменными. Такие операторы измерений возникают, например, в задачах дистанционного зондирования.

Полученные квазилинейные операторные уравнения решаются алгоритмами типа Ньютона–Канторовича. Ансамблевый характер алгоритмов допускает их эффективное распараллеливание [2]. Благодаря свойствам квазилинейных операторных уравнений с операторами чувствительности, позволяющим предварительно оценивать результат решения обратной задачи [3], на основе методов машинного обучения реализован гибридный алгоритм по уточнению результатов решения обратной задачи в части учета априорной информации о типе источников [4].

Разработанные алгоритмы решения обратных задач применяются в качестве основы для решения задач усвоения данных, когда новые данные измерений поступают в ходе моделирования. Численные алгоритмы тестируются в реалистичных сценариях оценки качества воздуха на региональном и городском масштабах.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН FWNM-2022-0003 (в части алгоритмов обратного моделирования для многомерных моделей) и проекта 075-15-2020-787 (в части разработки гибридных алгоритмов).

Пененко Алексей Владимирович, д.ф.-м.н., ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Лаборатория математического моделирования гидротермодинамических процессов в природной среде

Русин Евгений Владимирович, к.т.н., ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Лаборатория математического моделирования гидротермодинамических процессов в природной среде

Емельянов Михаил Константинович, ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Лаборатория математического моделирования гидротермодинамических процессов в природной среде

Пененко Владимир Викторович, д.ф.-м.н., профессор, ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Лаборатория математического моделирования гидротермодинамических процессов в природной среде

Литература

1. Penenko A. Convergence analysis of the adjoint ensemble method in inverse source problems for advection-diffusion-reaction models with image-type measurements // Inverse Problems & Imaging. American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), 2020. vol. 14, № 5. pp. 757–78226p
2. A. Penenko and E. Rusin, “Parallel Implementation of a Sensitivity Operator-Based Source Identification Algorithm for Distributed Memory Computers” // Mathematics, vol. 10, no. 23, p. 4522, Nov. 2022, doi: 10.3390/math10234522
3. Penenko A. et al. Sensitivity Operator Framework for Analyzing Heterogeneous Air Quality Monitoring Systems // Atmosphere. MDPI AG, 2021. vol. 12, № 12. p. 16971
4. Penenko A. et al. Hybrid Deep Learning and Sensitivity Operator-Based Algorithm for Identification of Localized Emission Sources // Mathematics. MDPI AG, 2023. vol. 12, № 1. p. 781

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. Утебаев, Б.Д. Утебаев, Х.Б. Токаева

dutebaev_56@mail.ru, bakhadir1992@gmail.com, tokaevaxoshruy@gmail.com

Одним из основных вопросов теории нелинейных разностных уравнений является исследование устойчивости их решения. Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения

$$y_{n+1} = S_n y_n + \tau f_n(y_n), \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Наряду с (1) рассмотрим однородное уравнение

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad y(0) = y_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Нелинейное возмущение $f_n(y_n)$ удовлетворяет условиям:

$$\|f_n(y_n)\| = K_n \|y_n\|^r, \quad r > 1, \quad f_n(0) = 0, \quad \sum_{m=0}^{n-1} K_m \leq M < \infty, \quad (3)$$

где M — некоторая положительная постоянная. При этом тривиальная последовательность $y_n = 0$ является решением уравнения (1). Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: а) тривиальное решение уравнения (2) равномерно устойчиво, т.е. $\forall j > 0, j \leq n$ выполняется оценка $\|y_n\| \leq M \|y_j\|$; б) нелинейная правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям (3); в) начальное возмущение y_0 достаточно мало. Тогда тривиальное решение уравнения (1) равномерно устойчиво, т.е. имеет место оценка $\|y_n\| \leq M \|y_0\|, \forall n = 0, 1, \dots$

Исследуем устойчивость тривиального решения разностного уравнения (1) при постоянно действующих возмущениях g_n , т.е. рассмотрим разностное уравнение

$$y_{n+1} = S_n y_n + f_n(y_n) + g_n, \quad y(0) = y_0, \quad g_n(0) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Нелинейное возмущение $f_n(y_n)$ удовлетворяет условию (3) и постоянно действующие возмущения g_n таково, что

$$\sum_{m=0}^{n-1} \|g_m\| \leq \delta_0, \quad \forall n, \quad \delta_0 > 0, \quad (5)$$

Утебаев Д., д.ф.-м.н., Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Математический факультет, кафедра Прикладной математики и информатики

Утебаев Вахадир Даулетбай улы, к.ф.-м.н., Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Математический факультет, кафедра Прикладной математики и информатики; Каракалпакское отделение Института математики им. В.И. Романовского АН Республики Узбекистан

Токаева Х.Б., Академический лицей при МВД Республики Каракалпакстан

где δ_0 — достаточно мало.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Кроме того, постоянно действующее возмущение удовлетворяет условию (5). Тогда тривиальное решение уравнения (4) устойчиво при постоянно действующих возмущениях и для ее решения справедлива оценка

$$\|y_n\| \leq M \left(\|y_0\| + \sum_{m=0}^{n-1} \|g_m\| \right).$$

Результаты применены для исследования устойчивости решений явных и неявных разностных схем, аппроксимирующие полулинейные параболические уравнения.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭФФЕКТА ОПРОКИДЫВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Е.В. Чижонков

chizhonk@mech.math.msu.su

УДК 519.633

Предлагаемый способ оптимизации вычислений носит комбинированный характер. Сначала с использованием кусочно-равномерной сетки строится разностная схема второго порядка точности типа Мак-Кормака, а затем — для ослабления условия устойчивости — применяется неявная версия схемы, которая даже в нелинейном случае допускает безытерационную реализацию.

Ключевые слова: релятивистские колебания, холодная плазма, эффект опрокидывания, кусочно-равномерная сетка, неявная схема Мак-Кормака.

Гидродинамическая модель холодной плазмы хорошо известна и достаточно подробно описана в учебниках и монографиях по физике плазмы [1]–[4]. В настоящее время внимание к этой модели обусловлено, в первую очередь, задачами, связанными с распространением сверхмощных лазерных импульсов в плазме [5], [6]. Подобные постановки напрямую связаны с приложением результатов, удостоенных Нобелевской премии по физике 2018 года. Приведем следующие примеры практически важных задач этой тематики: лазерное ускорение электронов и ионов, быстрое зажигание термоядерного синтеза, ядерные реакции в луче лазера, синхротронное и субмиллиметровое излучение и пр. [7]. Численному моделированию колебаний в холодной плазме, а также — кильватерных волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом, посвящена монография [8].

В силу нелинейности рассматриваемой модели, в качестве рабочего инструмента исследований на первом плане находятся численные методы, хотя трудности их применения представляются весьма серьезными. Главной причиной этого являются качественные свойства решений дифференциальных уравнений холодной плазмы (см., например, [9], [10]). Во-первых, даже гладкие периодические по времени решения характеризуются сильными изменениями, что выражается в абсолютных значениях производных на различных этапах одного периода (перепады значений могут достигать нескольких порядков). Во-вторых, может наблюдаться (при моделировании релятивистских колебаний с конечной энергией имеет место всегда!) хорошо и давно известный эффект опрокидывания колебаний [11]. В терминах уравнений с частными производными гиперболического типа эффект опрокидывания имеет название «градиентная катастрофа», т.е. когда из сколь угодно гладких начальных данных или правых частей формируется ограниченное разрывное решение, имеющее неограниченные пространственные производные. Вышесказанное означает необходимость применения достаточно подробных дискретизаций по пространству, что

при использовании явных по времени расчетных схем, в свою очередь, порождает ограничение курантовского типа на временной шаг. Иными словами, численное моделирование плазменных колебаний, завершающихся эффектом опрокидывания, можно проводить с помощью соответствующих модификаций классических разностных схем [12], однако вычислительные затраты при этом представляются весьма обременительными.

В докладе при моделировании эффекта опрокидывания плазменных колебаний с целью существенного сокращения объема вычислительной работы (без заметной потери точности!) предлагается использование кусочно-равномерных сеток (КРС): достаточно подробных в области больших градиентов решения и более грубых — в области плавного изменения решения. Подобные сетки хорошо зарекомендовали себя при численном решении сингулярно возмущенных параболических и эллиптических уравнений [13], однако для систем первого порядка гиперболического типа, описывающих колебания холодной плазмы, они применяются, по-видимому, впервые. Заметим, что естественным дополнением КРС при моделировании колебаний должны быть неявные по времени разностные схемы, обладающими более слабыми, чем курантовские, ограничениями на устойчивость (вплоть до полного отсутствия ограничений!). В данном случае для ослабления требований на устойчивость предлагается использовать *неявную схему* Мак-Кормака [14], т.к. безытерационный способ ее реализации по объему вычислений незначительно отличается от классической *явной схемы* Мак-Кормака (переопубликована в [15]), но при этом схема является безусловно устойчивой (в линейном случае), т.е. вполне подходящей при применении КРС.

Доклад имеет следующую структуру. Сначала приводится простейшая (плоская пространственно одномерная) система уравнений, описывающая релятивистские колебания холодной плазмы в эйлеровых переменных. Также здесь указываются аналитические свойства решения дифференциальной задачи: существование и единственность, закон сохранения энергии, нечетность решения при нечетных начальных данных, а также — соответствующая формула электронной плотности на оси симметрии области. Затем приводится модификация неявной схемы Мак-Кормака для расчета релятивистских колебаний и ее основные свойства для численного решения линейного уравнения переноса. Далее излагается процедура оптимизации вычислений, включающая выбор подобластей с различными пространственными шагами, и приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие эффективность вычислительного алгоритма на основе КРС и неявной схемы при моделировании эффекта опрокидывания. На их основании делается вывод о потенциальном сокращении объема вычислений в десятки раз без заметной потери точности.

Литература

1. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. Изд. 2-е, перераб. и дополн. — М.: Высшая школа, 1988.
2. Chen F.F. Introduction to plasma physics and controlled fusion. 3rd ed. — New York: Springer, 2016.
3. Силлин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. — М.: Наука, 1971.
4. Силлин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. Изд. 2-е испр. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.
5. Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. // Rev. Mod. Phys., 2009. V. 81. P.1229–1285.
6. Bulanov S.V., Esirkepov T.Zh., Hayashi Y. et al. On some theoretical problems of laser wake-field accelerators. // J. Plasma Phys, 2016. V.82, No. 3. P.905820308 (1–55).
7. Горбунов Л.М. Зачем нужны сверхмощные лазерные импульсы? // Природа. 2007. Т.21. №4. С.11–20.
8. Chizhonkov E.V. Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and WakeWaves in Plasma. — Boca Raton: CRC Press, 2019.
9. Розанова О.С., Чижонков Е.В. О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т.492. №1. С.97–100.
10. Rozanova O.S., Chizhonkov E.V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // Z. Angew. Math. Phys. 2021. V.72. №13. P.1–15.
11. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma. // Phys. Review. 1959. V. 113. No. 2. P.383–387.
12. Чижонков Е.В. О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний // Вычисл. методы и программирование. 2020. Т.21. С.115–128.

13. *Шихкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

14. *MacCormack R.W.* A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // AIAA J. 1982. V.20. №9. P.1275–1281.

15. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // J. Spacecr. Rockets. 2003. V.40. №5. P.757–763.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ И СУБЪЕКТИВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А.И. Чуличков, О.В. Фаломкина, Ю.П. Пытьев, Д.А. Балакин
achulichkov@gmail.com, olesya.falomkina@gmail.com, yuri.pytyev@physics.msu.ru,
balakin_d_a@physics.msu.ru

УДК 519.23, 519.254

Рассмотрены разрабатываемые под руководством Пытьева Ю.П. математические методы теории возможностей и субъективного математического моделирования для моделирования физических систем в научных исследованиях при отражении как знаний исследователя в предметной области, так и его мнения об адекватности модели, ее неполноте и т.п. Приведены примеры использования.

Ключевые слова: теория возможностей, субъективное моделирование, нечеткость, неопределенность.

Математические методы теории возможностей

Как известно, вероятностное моделирование неэффективно при моделировании стохастических объектов, вероятностные характеристики которых непредсказуемо эволюционируют во времени. Для эмпирического восстановления математической модели реального стохастического объекта и для ее верификации требуется большое количество событийно-частотных наблюдений. Для этого обычно требуется время, в течение которого объект и его вероятностные характеристики, как правило, эволюционируют, и нарушается “принцип устойчивости частот”, согласно которому при стремлении числа наблюдений к бесконечности частоты событий стремятся к их вероятностям, что позволило бы восстановить вероятностную модель объекта с заданной точностью. В этом случае наблюдения за частотами событий не позволят оценить их вероятности (речь не идет о сложных стохастических объектах, эволюция моделей которых хорошо описывается, например, линейными разностными, дифференциальными или интегральными стохастическими уравнениями). Но если объект и не эволюционирует, то, как правило, по конечному числу наблюдений возможно восстановление лишь приближенной вероятностной модели, а ее погрешность может оказаться неприемлемой для последующего использования модели.

Рассматриваемый вариант теории возможностей [1], [2] является альтернативой теории вероятностей при моделировании феноменов случайности и нечеткости и позволяет математически формализовать как вероятностную случайность, в том числе свойственную непредсказуемо эволюционирующим стохастическим объектам, вероятностные модели которых нельзя восстановить эмпирически, так и невероятностную случайность (нечеткость), свойственную реальным физическим, техническим, экономическим объектам, человеко-машинным, экспертным системам и др. При известных условиях [1] возможно безошибочное восстановление такой модели на основе конечного числа наблюдений. Его эмпирически восстановленная нечеткая модель позволяет решать многие задачи, типичные для неэволюционирующей вероятностной модели, например,

Чуличков Алексей Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет
 Фаломкина Олеся Владимировна, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет
 Пытьев Юрий Петрович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет
 Балакин Дмитрий Александрович, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

задачи оптимизации принятия решений, прогнозирования и т. д. Данный вариант теории возможностей существенно отличается от других известных вариантов теории возможностей [3]–[10] и др., в частности, математическим формализмом, содержательной интерпретацией и приложениями.

Математические методы субъективного моделирования

В математических моделях, как правило, встречаются “мешающие параметры”, истинные значения которых неизвестны исследователю, но которые сами по себе его не интересуют. В стандартном математическом моделировании в таких случаях требуется либо независимость следствий использования модели от мешающих параметров, либо приемлемость величины потерь, обусловленных применением модели, в наихудшем по всем возможным значениям мешающих параметров случае. На самом деле исследователь обычно имеет представления о более правдоподобных и о менее правдоподобных значениях мешающих параметров, но не может выразить эту субъективную информацию средствами “стандартного” математического моделирования. Для математического моделирования информации, выраженной в форме субъективных суждений, разработан математический формализм субъективного моделирования (МФСМ) [2], позволяющий исследователю моделировать как свои формализованные точные знания об объекте исследования из соответствующей предметной области, так и неформализованные, неполные и недостоверные знания, научный опыт и интуицию, выразив математически свое субъективное отношение к их истинности. МФСМ существенно расширяет возможности “стандартного” математического моделирования, поскольку позволяет субъективно моделировать любую информацию о математической модели объекта исследования, начиная с “абсолютного незнания” вплоть до “абсолютного знания” модели объекта исследования, эмпирически проверять адекватность субъективной модели цели исследования, корректировать субъективную модель, комбинируя субъективные представления с данными наблюдений, а при достаточном объеме данных наблюдений – эмпирически восстанавливать модель объекта исследования.

В докладе кратко приведены математические основы теории возможностей и субъективного моделирования. Приведены как модельные, так и взятые из прикладных задач примеры использования методов теории возможностей и субъективного моделирования, в частности, в задачах оптимального оценивания, идентификации объектов со случайно изменяющейся геометрической формой по их изображениям, восстановления функциональных зависимостей, прогнозирования, редукции измерений для нечетких и субъективных моделей, медицинской диагностики, восстановления пропусков в данных на основе субъективного критерия оптимальности и др. [1], [2], [11]–[20].

Литература

1. *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности: Математические и эмпирические основы, приложения. 2 изд.— М.: Физматлит, 2017.
2. *Пытьев Ю. П.* Вероятность, возможность и субъективное моделирование в научных исследованиях. Математические и эмпирические основы, приложения.— М.: Физматлит, 2018.
3. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей.— М.: Радио и связь, 1990.
4. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // *Fuzzy Sets and Systems*, № 1, p. 3–28 (1978).
5. *Savage L. J.* The Foundations of Statistics.— New York: Dover, 1972.
6. *Sugeno M.* Fuzzy measure and fuzzy integral // *Trans. Soc. Instrum. Control Eng.* **8**(2), p. 218–226 (1972).
7. *Wolkenhauer O.* Possibility Theory with Applications to Data Analysis.— Research Studies Press, 1998.
8. *Yager R. R.* Fuzzy Sets and Possibility Theory.— New York: Pergamon Press, 1982.
9. *Slowinski R.* Fuzzy Sets and Possibility Theory, Operations Research and Statistics.— Kluwer Academic, 1998.
10. *de Cooman G.* Possibility theory I: The measure and integral-theoretic groundwork // *Int. J. Gen. Syst.* **25**, p. 291–323 (1997).
11. *Yuan B., Chulichkov A. I.* On the estimation of the maximum possibility for the parameters of a measurement model // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **70**, p. 353–361 (2015).
12. *Pyt'ev Yu. P., Falomkina (form. Zhuchko) O. V.* The methods of the possibility theory in the problems of optimal estimation and decision making. VII. Reconstruction of functional dependences from experimental data // *Pattern Recognit. Image Anal.* **12**, p. 116–129 (2002).

13. *Zubyuk A. V.* A possibility model in the problems of morphological image analysis // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **67**, p. 512–519 (2012).
14. *Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P.* A comparative analysis of reduction quality for probabilistic and possibilistic measurement models // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **72**, p. 101–112 (2017).
15. *Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P.* Measurement reduction in the presence of subjective information // *Math. Models Comput. Simul.* **11**, p. 596–610 (2019).
16. *Balakin D. A.* Reduction of images to the form typical for measuring the distribution of object transparency with subjective information about its sparsity in a given basis // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **75**, p. 26–34 (2020).
17. *Kirillov K. V., Chulichkov A. I.* Measurement reduction in a fuzzy experimental model as a solution of linear programming problems // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **54**(2), p. 83–86 (1999).
18. *Pyt'ev Yu. P., Mazaeva I. V.* Possibility theoretical prediction of mean monthly temperature // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **57**(5), p. 27–31 (2002).
19. *Pyt'ev Yu. P., Gazaryan V. A., Rosnitskiy P. B.* A comparative analysis of the efficiency of probabilistic and possibilistic algorithms for medical diagnostics // *Moscow Univ. Phys. Bull.* **69**, p. 210–217 (2014).
20. *Pyt'ev Yu. P., Falomkina O. V., Chulichkov A. I.* Subjective restoration of omissions in the measurement data of an object of study and its mathematical model // *Pattern Recognit. Image Anal.* **32**, 743–754 (2022).

МЕТОДЫ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

А.И. Чуличков, Н.Е. Шапкина, П.В. Голубцов, В.А. Газарян, С.Н. Куличков

achulichkov@gmail.com, neshapkina@mail.ru, golubtsov@physics.msu.ru,

varvaragazaryan@yandex.ru, snk@ifaran.ru

УДК 519.21, 519.25

На основе морфологических методов, предложенных проф. Пытьевым Ю.П., разработан ряд методов анализа временных рядов, таких, как методы фильтрации, классификации, оценки параметров и др.

Ключевые слова: временные ряды, форма сигнала, геофизические параметры, вейвлет-спектр.

В настоящее время обработка и анализ результатов временных рядов вызывает интерес в различных сферах, от экономики до метеорологии. Для этого используется достаточно обширный арсенал методов, как математически обоснованных (например, метод Фурье для стационарных рядов, вейвлет-преобразования для нестационарных), так и эвристических. В связи с этим особый интерес представляет разработка методов анализа временных рядов, основанных на достаточно общих математических моделях и дающих оптимальные решения на широком классе задач.

Для адекватного анализа цикличности временных рядов геофизических параметров в данной работе предлагается морфологический подход, развиваемый в школе проф. Ю.П. Пытьева [1]. Разработан способ морфологической фильтрации, позволяющий выделить в рядах составляющую, представляющую собой последовательность фрагментов, схожих по форме, но меняющихся по длительности и амплитуде в некоторых заданных пределах. Такая фильтрация может быть полезна для декомпозиции исходного временного ряда на «почти циклическую» составляющую, связанную с сезонностью, и остаток, который может быть подвергнут дальнейшему исследованию с целью выделения дополнительных циклических составляющих. Фильтрация и

Чуличков Алексей Иванович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет; ИФА РАН

Шапкина Наталья Евгеньевна, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

Голубцов Петр Викторович, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет

Газарян Варвара Арамовна, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет; Финансовый университет при Правительстве РФ

Куличков Сергей Николаевич, д.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет; ИФА РАН

дальнейшие исследования проводились на основе Фурье- и вейвлет-анализа. В результате были выделены короткопериодные составляющие ряда.

Морфологические методы также применялись для решения задачи обнаружения инфразвуковых сигналов заданной формы, распространяющихся в атмосфере Земли, их классификации, оценки времени прихода и локализации источника. Для локализации источника используют данные регистрации звукового давления в нескольких точках поверхности Земли, определяют время задержки сигналов в разных каналах и рассчитывают углы прихода акустического сигнала, однако поскольку трассы распространения сигналов, регистрируемых разными датчиками, отличаются одна от другой, то и регистрируемые сигналы отличаются не только временным сдвигом, но и нелинейными искажениями амплитуд. В этом случае одна из проблем состоит в задании формального критерия близости сигналов, учитывающего, что близкие по форме сигналы могут отличаться указанными искажениями.

Морфологические методы анализа сигналов, развиваемые в школе проф. Ю.П. Пытьева, предназначены для анализа структуры сигнала, сохраняющейся при его преобразовании, принадлежащем заданному классу [2]. В частности, если каждый из двух сигналов представляют собой набор «пигов» и «провалов» (т.е. локальных максимумов и минимумов), то считать их сигналами одной формы разумно, если положения «пигов» и «провалов» совпадают, а упорядоченность локальных экстремумов по амплитуде сохраняется (самый высокий «пик» у обеих сигналов расположен в одной и той же точке и т.д.) Это свойство сигналов сохранится при любом монотонном преобразовании амплитуд этих сигналов.

Другой подход к анализу инфразвуковых сигналов состоит в том, чтобы исследовать форму изображения их вейвлет-спектров. Этот подход привлекателен тем, что при распространении импульсных сигналов в атмосфере Земли сохраняется их частотно-временная структура, которая адекватно отображается в их вейвлет-спектрах [3].

Литература

1. Пытьев Ю. П. Морфологические понятия в задачах анализа изображений. // Доклады Академии наук. 1975. Т. 224. № 6, с. 1283–1286.
2. Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. Методы морфологического анализа изображений.— М.: Физматлит, 2010. — 336с.
3. Ziuzina N. A., Gazaryan V. A., Kurbatova J. A., Chulichkov A. I., Avilov V. K., Shapkina N. E. Study of time series of meteorological parameters by wavelet analysis // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 606 012069 DOI [10.1088/1755-1315/606/1/012069](https://doi.org/10.1088/1755-1315/606/1/012069)

Секция 13

Математическое моделирование экономических и социальных процессов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКОНА О ВЫБОРАХ

П.Н. Александров, О.Ю. Шаховская-Ро

alexandr@gemrc.ru, olga.roh@gmail.com

УДК 303.73

Проведено исследование избирательного права, одного из регуляторов общественных отношений, на основе математических методов. Построена математическая модель закона о выборах и на примере проведенных избирательных компаний, проведен анализ фальсификации выборов. Введено понятие справедливости выборов и предложено ее математическое выражение.

Ключевые слова: избирательное право, фальсификация выборов, репрезентативность.

Основная проблема применения математических методов для анализа гуманитарных, в том числе правовых процессов и систем связана не со сложностью используемого математического аппарата, а с насыщением математики содержанием предметной области. Избирательное право является одним из основных прав граждан, которое гласит, что каждый гражданин имеет право избираться и быть избранным. Это избирательное право регулируется законом о выборах.

Математическая модель закона о выборах. Введем определение закона в форме, позволяющее рассматривать закон с математических позиций: закон — это правило, по которому каждому элементу множества объектов действие закона ставится в соответствие элемент из множества результатов действия закона. Это в полной мере отвечает математическому определению функции. Отличием является дискретность области определения и области значений функции. В соответствие с этим множество определения функции является вектор объектов действия закона, а областью значений функции — вектор результатов действия закона.

Очевидно, что законы должны обладать максимальной простотой, что приводит к линейной зависимости между вектором объектов действия закона X и вектором результатов действия закона Y в виде

$$Y = AX \tag{1}$$

Александров Павел Николаевич, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник Центра геоэлектромагнитных исследований (ЦГЭМИ ИФЗ РАН)

Шаховская-Ро Ольга Юрьевна, PhD, Российская академия адвокатуры и нотариата (Москва)

где A — матрица, являющаяся количественным выражением закона. Она является предметом количественного анализа закона. При изменении закона меняется матрица A .

Для нахождения решения уравнения (1) относительно неизвестной матрицы выборов A необходимо $m \geq n$ проведенных выборов по одному и тому же действующему закону о выборах, т.е. количество проведенных выборов должно быть равно или больше количеству позиций в листке голосования. Тогда составив матрицу

$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m] = A[X_1, X_2, \dots, X_m] = AX,$$

где запятая в квадратных скобках означает добавление столбцов к вектору Y или X , получим матричное уравнение вида

$$Y = AX = A[X_1, X_2, \dots, X_m].$$

На основе вышеизложенного, рассмотрим этот закон на формальном (математическом) языке, что позволит исследовать проблему фальсификации выборов на количественной основе. В данном случае единство выражается в выборах, противоположности — в результатах голосования и результатах выборов. Закон — это правило, по которому результатам голосования ставится в соответствие результат выборов.

Теория фальсификации выборов. Важнейшим вопросом выборов является вопрос о признании результатов выборов вокруг которого зачастую возникают разного рода спекуляции, в том числе и спекуляции относительно фальсификации выборов.

Основная идея теории фальсификации выборов заключается в следующем [1]. Пусть один из баллотирующихся кандидатов, например, в законодательный орган, имеет рейтинг 40%. Тогда если на первом избирательном участке имеется 100 избирателей, то кандидат получит 40 голосов, если на втором избирательном участке имеется 200 избирателей, то кандидат получит 80 голосов, на третьем — 300 избирателей и получит 120 голосов, и т.д. Очевидно, что имеет место линейная зависимость, выражающаяся в уравнение прямой $y = ax + b$, где y — количество голосов, отданных кандидату, x — количество избирателей, a — количественная характеристика рейтинга, в рассматриваемом примере $a = 0.4$. Определим величину b . Предположим, что на участке нет избирателей $x = 0$, тогда не будет и голосов отданных за кандидата $y = 0$. Это означает что всегда $b = 0$.

В практике голосования всегда имеет место разброс мнений избирателей, что выражается в разных значениях рейтинга, т.е. $a = \bar{a} \pm \Delta a$, где \bar{a} — средний рейтинг кандидата по всем избирательным участкам, Δa — разброс мнений электората по всем избирательным участкам.

Нахождение величин a и Δa : $\sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{x_i} - a \right)^2 = \delta^2$, где i — номер избирательного участка, N — количество избирательных участков (комиссий). Дифференцируя его по a и приравнявая результат нулю, получим

$$\frac{\partial}{\partial a} \delta^2 = 0 = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{x_i} - a \right)^2 = -2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{x_i} - a \right),$$

откуда получим

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{x_i}.$$

Отсюда найдем разброс мнений избирателей

$$\Delta a = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i}{x_i} - \bar{a} \right)^2}.$$

Таким образом, рейтинг кандидата заключается в интервале от $\bar{a} - \Delta a$ до $\bar{a} + \Delta a$, что будем называть нормальным или стандартным изменением (разбросом) рейтинга. Однако в реальных выборах некоторые значения рейтинга значительно выходят за пределы этого интервала. Эти аномальные значения требуют отдельного изучения, поскольку они могут быть связаны не только с мнением избирателей, что требует собственно политических исследований, но и с

фальсификацией выборов. В последнем случае наступает уголовная ответственность и начинает работать другой закон — уголовный кодекс РФ.

Справедливость (репрезентативность) избирательной системы. Любая избирательная система, как известно, несовершенна. Несовершенство связано с тем обстоятельством, что невозможно представить в законодательном собрании, или других выборных органов, весь спектр мнений избирателей. Действительно, пусть имеется 100 мнений избирателей, а мест в избираемом органе 25. Очевидно, что все 100 мнений избирателей невозможно учесть в избираемом органе в силу различия количества мнений избирателей и количество мест в избираемом органе. С другой стороны, если из 100 мнений только 10 определяют состав избираемого органа, то это является не справедливым, поскольку нарушаются демократические принципы — меньшинство будет руководить большинством. Отсюда следует, что существует некоторая количественная характеристика справедливости избирательной системы. По аналогии с изменениями в конституцию, по общепринятой практике принятия важнейших решений голосованием, определим эту величину как квалифицированное ($2/3$ мнений) количество мнений избирателей в избираемом органе.

Таким образом, формальным критерий будет определяться следующим образом. Пусть количество голосов на данных конкретных выборах отданных кандидатам, которые прошли в избирательный орган, равно M , а голосов, отданных за кандидатов, которые не прошли в избирательный орган, равно n . Тогда количественная характеристика справедливости избирательной системы может быть определена из выражения

$$K = \frac{M}{M + n} 100\%.$$

K — справедливость избирательной системы (в %);

M — количество голосов кандидатов, которые прошли в избирательный орган;

n — количество голосов кандидатов, которые не прошли в избирательный орган.

При условии $K > \frac{2}{3} 100\%$ будем считать избирательную систему справедливой, поскольку в избираемом органе представлен, квалифицированное большинство мнений избирателей. В противном случае избирательная система является не справедливой.

Выводы. Таким образом, на примере закона о выборах показано, что количественные методы могут быть полезны для дополнительного анализа законов. Построена математическая модель закона о выборах и найдено количественное выражение этого закона. Анализ матрицы A позволяет установить, на количественном уровне, перераспределение голосов избирателей в результате применения закона о выборах.

Введена количественная оценка нормального и аномального результатов голосования. Введена количественная оценка справедливости избирательной системы.

Изложенный подход к анализу закона о выборах справедлив и для других демократических государств, реализующих избирательные права граждан.

Литература

1. Собянин А.А., Суховольский В.Г. Демократия, ограниченная фальсификациями: Выборы и референдумы в России в 1991–1993гг.— М., 1995 г.

ВЛИЯНИЕ БИРЖЕВЫХ ОПЕРАЦИЙ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ НА ЦЕНЫ

Г.И. Бобрик, П.П. Бобрик

bobrikgi@mail.ru, bobrikpp@mail.ru

УДК 330.16, 51.7, 519,865

Статья посвящена моделированию биржевых торгов и исследованию с его помощью методов манипулирования ценой. Предлагается простейшая трехагентная модель, состоящая из чистых продавцов, чистых покупателей и спекулянтов. Разобраны условия, когда крупные операции с итоговой нулевой суммой могут приводить к систематическому манипулированию ценой.

Ключевые слова: Модель, биржевые торги, манипулирование ценой.

Существует два основных подхода к прогнозированию цены: технический и фундаментальный. Первый изучает форму ценового графика и закономерности его поведения [1]. Второй апеллирует к концепциям спроса и предложения, внутренней рентабельности актива и другим экономическим соображениям, которые должны определять так называемую “справедливую” цену [2]. Общим для них является неявное предположение, что торги не зависят от действий трейдеров и их суждений. Что, безусловно, верно в первом приближении, пока объемы их сделок относительно невелики от общих оборотов.

Ситуация меняется, когда появляется крупный игрок, или игрок который предлагает очень высокую плотность ордеров в короткий промежуток времени [3]. Он способен исказить нормальное ценообразование. И за счет этого извлечь прибыль из своих сделок.

Для учета и изучения таких эффектов в данной статье была создана математическая модель биржевого ценообразования, в рамках которой были сформулированы качественные выводы об особенностях ценообразования в зависимости от определенных действий крупного участника.

В модели представлены три типа участников. Производители товара являются чистыми продавцами. Потребители товара только покупают. Спекулянты ставят цель извлечь прибыль за счет совершения сделок в обоих направлениях.

На практике часто возникает ситуация, когда покупка и продажа идет с постоянной интенсивностью, что обуславливается как удобством совершения сделок, так и неполной информацией о ситуации на рынке. Такая практика позволяет снижать риски. Хотя реально сделки и объемы сделок дискретны, но для моделирования иногда бывает полезным оперировать дифференциальными уравнениями [4]:

$$p' = \frac{\rho_{bid}v_{bid} - \rho_{ask}v_{ask}}{\rho_{bid} + \rho_{ask}}$$

$$V'_{trade} = (v_{bid} - p')\rho_{bid} = (v_{ask} + p')\rho_{ask}$$

Здесь p — текущая цена, ρ_{bid} , ρ_{ask} — плотности заявок покупателей и продавцов соответственно, v_{bid} , v_{ask} — скорости продвижения их заявок, V — плотность объема торгов.

Данные уравнения справедливы для двухагентной модели без спекулянтов. Если плотности и скорости постоянные, то верна следующая

Лемма. *Скорость изменения цены постоянна.*

Добавим теперь к системе спекулянта, который сначала покупает, а затем продает такое же количество. Или совершает данное действие в обратном порядке. Т.е. в итоге совершает операции с итоговой нулевой суммой [5].

Основная теорема. *Пусть в модели с тремя агентами производство равно потреблению, скорости продвижения ордеров и их плотности у производителей и потребителей и спекулянтов постоянны. Тогда цена не меняется от операций спекулянта с нулевой суммой.*

Следствие. *В стационарном состоянии рынок обладает свойством потенциальности ценообразования по отношению к операциям с нулевой суммой.*

Такое поведение нередко наблюдается на практике, особенно на коротких промежутках времени. Например, при внутридневной торговле.

Однако, рынки не часто находятся в состоянии равновесия. В этом случае условия теоремы нередко нарушаются. Например, при росте цены в ожидании продолжения движения активность покупателей будет наоборот возрастать, а продавцов снижаться. И некоторые продавцы даже будут фиксировать убытки по стоп приказам. К тому же, нередко это происходит с некоторым запаздыванием [6]. В этом случае свойство потенциальности ценообразования нарушается. Что легко показать на простейших примерах.

В общем случае верно следующее

Утверждение. *Если при изменении цены происходит перекося заявок в направлении движения, то спекулянт получает прибыль при совершении операций с нулевой суммой.*

Следствие. *Обычные рынки производителей и потребителей потенциально уязвимы со стороны спекулянтов на систематической основе.*

Подобные эффекты часто наблюдаются в реальных биржевых торгах. Одно из подтверждений верности данного утверждения для практики приведено в недавнем исследовании дневных и ночных торгов [7].

Литература

1. *J. J. Murphy*, Technical Analysis of the Financial Markets: A Comprehensive Guide to Trading Methods and Applications.— New York Institute of Finance, NY, 1999.
2. *J. D. Schwager*, A Complete Guide to the Futures Market: Technical Analysis, Trading Systems, Fundamental Analysis, Options, Spreads, and Trading Principles (Wiley Trading).— 2nd edition, Kindle Edition, John Wiley & Sons Inc; Underlining edition, NY, 1984.
3. *Г.И. Бобрик, П.П. Бобрик*, Чувствительность сетевого ценообразования // IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM-2018). Москва, 22–27 октября 2018г. Труды. В двух томах. / Отв. ред. Ф.И. Ерешко — Москва : МАКС Пресс, 2018. ISBN 978-5-317-05923-1 Том II. — 580с. ISBN 978-5-317-05925-5, стр. 243–247.
4. *Galina Bobrik, Petr Bobrik, Irina Sukhorukova*, The sensitivity of commodity markets to exchange operations such as swing // Journal of Dynamics & Games, 2021, 8 (2) : 119–128. DOI: [10.3934/jdg.2020022](https://doi.org/10.3934/jdg.2020022), (WOS:000644683500003) <https://www.aims sciences.org/article/doi/10.3934/jdg.2020022>.
5. *Бобрик Г.И., Бобрик П.П.*, Определение биржевых трендов с помощью угловых операций // Вестник РЭУ им Д.В. Плеханова. — 2017, №4(94), стр. 67–73.
6. *W. Grandmill*, Investing in Wheat, Soybean, Corn.— Windsor Book, NY, 1990.
7. *B. Knuteson*, Celebrating Three Decades of Worldwide Stock Market Manipulation // preprint, arXiv:1912.01708.

МОДЕЛЬ ИГРЫ СРЕДНЕГО ПОЛЯ С УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В ОНЛАЙН СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Т.А. Звонарева, О.И. Криворотько

t.zvonareva@g.nsu.ru, krivorotko.olya@mail.ru

УДК 519.63

Процесс распространения информации в онлайн социальных сетях может быть описан в терминах игры среднего поля. Рассматривается задача определения функции управления, которая решалась конечно-разностным методом. Численные расчеты были проанализированы и обсуждены.

Ключевые слова: обратная задача, оптимизация, игры среднего поля, социальные процессы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-71-10068).

Звонарева Татьяна Александровна, м.н.с., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Криворотько Ольга Игоревна, д.ф.-м.н., с.н.с., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Процесс распространения информации в онлайн социальных сетях может быть описан в терминах игры среднего поля [1]. Мы рассматриваем большое количество пользователей, которые могут принимать состояния $x \in [0, 1]$, где 0 означает, что пользователь вовлечен в процесс распространения информации, а 1 — наоборот. Тогда плотность пользователей $u(x, t) : [0, 1] \times [1, T] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению Колмогорова (Фоккера—Планка)

$$u_t + \nabla(u\alpha) + \left(\frac{u}{K_{cap}} - 1 \right) r(t)u - Du_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [1, T] \quad (1)$$

с начальным условием и граничными условиями Робина

$$u(x, 1) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2)$$

$$\beta_1 u_x(0, t) - \beta_2 u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in [1, T]. \quad (3)$$

Для $\alpha = 0$ уравнение (1) исследовано в [2].

Здесь $\alpha(x, t) : [0, 1] \times [1, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — параметр управления (или, другими словами, стратегия пользователя), обеспечивающий равновесие Нэша системы взаимодействующих агентов и минимизирующий функционал стоимости в отношении (u, α) .

$$J(u, \alpha) = \int_1^T \int_0^1 \left(d_1 e^{-t} \frac{u\alpha^2}{2} + d_2 (x-1)^2 u \right) dx dt.$$

Здесь d_1 и d_2 — весовые коэффициенты.

С помощью метода множителей Лагранжа [3] строится система, аналогичная уравнению Гамильтона—Якоби—Беллмана:

$$\begin{cases} v_t + \alpha v_x + \left(1 - \frac{2u}{K_{cap}} \right) r(t)v + Dv_{xx} = -d_1 e^{-t} \frac{\alpha^2}{2} - d_2 (x-1)^2, \\ v(x, T) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0, \quad t \in [1, T]. \end{cases} \quad (4)$$

Условия оптимальности определяются из равенств

$$\begin{cases} d_1 e^{-t} \alpha + v_x = 0, \\ \alpha(0, t) = \alpha(1, t) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (1)–(3), (5), (6) решалась конечно-разностной схемой, предложенной в [4]. Численные расчеты были проанализированы и обсуждены.

Для решения обратной задачи необходимо определить функции (φ, α) по дополнительным измерениям $u(x, t)$ в вычислительной области. Проведен анализ идентифицируемости модели методом анализа чувствительности Соболя.

Для случая $\alpha = 0$ (без управления) были получены следующие результаты. На рисунке 1 представлены результаты восстановления начальной функции плотности $\varphi(x)$ в 6 точках с помощью: метода тензорной оптимизации (ТТ) — красная линия с треугольниками, комбинации ТТ и градиентного метода (ГМ) — зеленая линия с квадратами, комбинированного метода с регуляризацией А. Н. Тихонова — синяя линия с пятиугольниками, а также комбинации стохастического метода роя частиц и ГМ — оранжевая линия с ромбами. Таким образом, наилучшее в смысле значения погрешности — решение, полученное регуляризованной комбинацией ТТ и ГМ.

Рисунок 2 демонстрирует (а) график плотности вовлеченных пользователей $u(x, t; \varphi_{best})$ для наилучшего в смысле погрешности восстановленного решения φ_{best} и (б) график абсолютной разности плотностей вовлеченных пользователей u для точного и найденного начального приближения $\varphi(x)$.

Литература

1. *Bauso D., Tembine H., Basar T.* Opinion dynamics in social networks through mean-field games // *SIAM J. Control Optim.*, **54:6** (2016), 3225-3257.

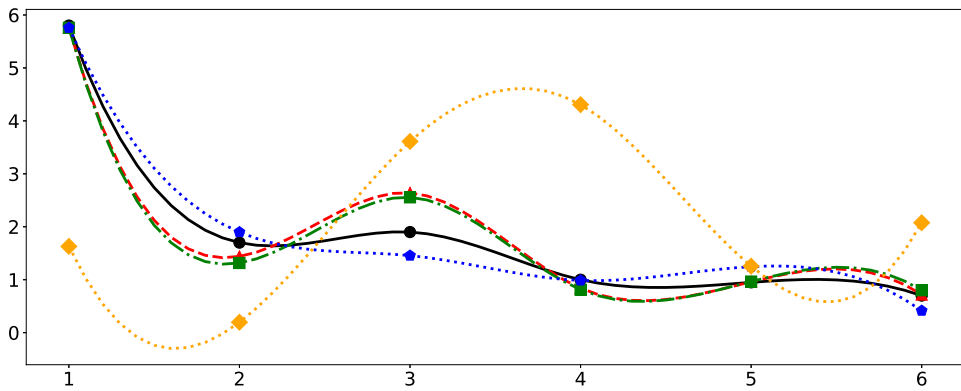


Рис. 1: Результаты восстановления начальной функции плотности $\varphi(x)$ для случая $\alpha = 0$ (без управления).

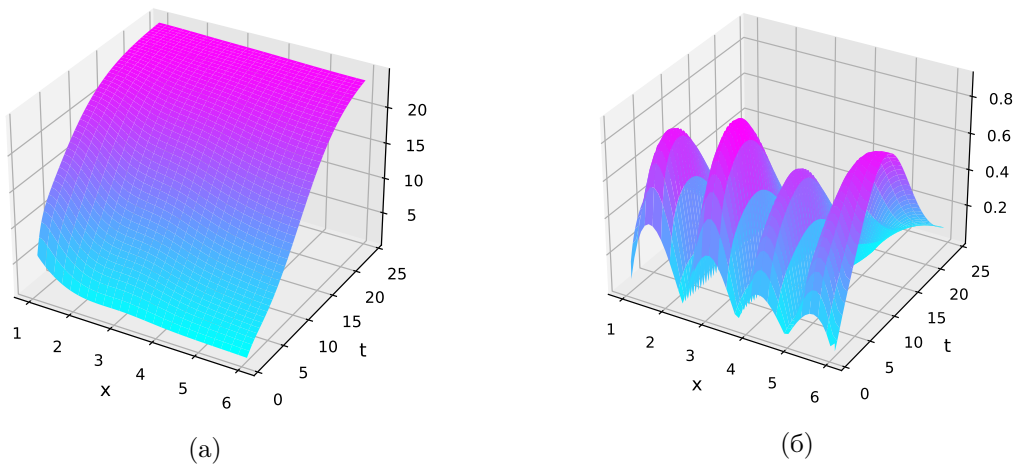


Рис. 2: Графики (а) плотность вовлеченных пользователей для наилучшего в смысле погрешности восстановленного решения φ_{best} и (б) абсолютной разности плотностей для точного и найденного φ .

2. Звонарева Т.А., Криворотько О.И. Сравнительный анализ градиентных методов определения источника диффузионно-логистической модели // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **62**:4 (2022), 694-704.

3. Bensoussan A., Frehse J., Yam P. Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory. — New York: Springer, 2013.

4. Shaydurov V., Kornienko V. A finite-difference solution of mean field problem with a predefined control resource // AIP Conf. Proc., **2302** (2020), 110004.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ, СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ

С.И. Кабанихин

ksi52@mail.ru

В докладе проводится анализ взаимосвязей обратных задач, возникающих в естественных науках при исследовании волновых процессов различной природы (акустика, электродинамика, теория упругости). Импульсная характеристика среды (динамические обратные задачи) связана со спектральной функцией и с функцией Вейля (обратная задача рассеяния), что позволяет получать новые результаты и алгоритмы решения обратных задач.

Литература

1. *Kabanikhin S., Shishlenin M., Novikov N., Prokshoshin N.*, Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand–Levitan–Marchenko–Krein Equations // *Mathematics* 2023, 11, 4458.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБЩЕСТВЕННОГО МНЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ SCARDO-МОДЕЛИ: РОЛЬ СИЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

И.В. Козицин

kozitsin.ivan@mail.ru

УДК 512.56

В докладе рассматривается задача прогнозирования динамики общественного мнения при помощи методов агент-ориентированного моделирования. Для построения прогноза используются две спецификации SCARDO-модели, одна из которых учитывает роль сильных связей, а другая – нет. Для калибровки параметров модели применяются два базовых метода. В рамках первого метода в качестве оценки влияния используется среднее мнение друзей (УД-метод), в рамках второго метода мнение каждого из друзей в социальном графе операционализируется как отдельный источник влияния, порождающий свое наблюдение (ДУ-метод). Качество прогноза модели сопоставляется с линейной моделью. Вычислительные эксперименты показали, что УД-метод приводит к наибольшей точности и в некоторых случаях позволяет получить более точный прогноз, чем линейная модель. Прогноз, построенный при помощи ДУ-метода значительно менее точен, однако учет фактора силы связей, операционализируемой как число общих друзей, ведет к росту точности прогноза.

Ключевые слова: модели социального влияния, SCARDO-модель, ВКонтакте, сильные связи.

Приведем описание SCARDO-модели, предложенной в работе [1]. Модель рассматривает динамику мнений системы из N агентов, связанных статическим социальным графом \mathcal{G} . Агенты описываются мнениями из дискретного и, возможно, упорядоченного множества $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_m\}$. Также для каждой пары агентов i и j определено значение числа их общих друзей в социальном графе \mathcal{G} , которое будем обозначать $f_{i,j}$. Эта величина принимает значения из множества $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_M\}$.

Время дискретно. В каждый момент времени t случайным образом выбирается пара соседних агентов, один из которых влияет на другого. Пусть агент j с мнением $o_j(t) = x_l \in \mathcal{Z}$ влияет на агента i с мнением $o_i(t) = x_s \in \mathcal{Z}$. Пусть $f_{i,j} = \Xi_r \in \Xi$. В результате этого события мнение агента i принимает одно из m значений азбуки мнений на основании заданного распределения P , являющегося функцией характеристик взаимодействующих агентов. Рассмотрим две спецификации SCARDO-модели.

Кабанихин Сергей Игоревич, д.ф.-м.н., член-корр. РАН, директор Международного математического центра, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-71-00075).

Козицин Иван Владимирович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН (Москва, Россия)

Спецификация 1. Данная спецификация была приведена в основополагающей работе [1]. Пусть $P = P_{s,l}$, то есть исход взаимодействия зависит только от мнений агентов (связь с которыми обеспечивается индексами s и l). Пусть заданы величины $p_{s,l,k}$, где

$$p_{s,l,k} = P\{o_i(t+1) = z_k \mid o_i(t) = z_s, o_j(t) = z_s\}.$$

Распределение $P_{s,l}$ определяется вероятностями $p_{s,l,1}, \dots, p_{s,l,m}$, где $p_{s,l,1} + \dots + p_{s,l,m} = 1$ для любых $s, l \in \{1, \dots, m\}$.

Спецификация 2. Данная спецификация была приведена в работе [2]. Пусть $P = P_{s,l}^r$, то есть исход взаимодействия зависит от мнений агентов и числа их общих друзей, то есть от силы связи [3]. Пусть заданы величины $p_{s,l,k}^r$, где

$$p_{s,l,k}^r = P\{o_i(t+1) = z_k \mid o_i(t) = z_s, o_j(t) = z_s, f_{i,j} = \Xi_r\}.$$

Распределение $P_{s,l}^r$ определяется вероятностями $p_{s,l,1}^r, \dots, p_{s,l,m}^r$, где $p_{s,l,1}^r + \dots + p_{s,l,m}^r = 1$ для любых $s, l \in \{1, \dots, m\}$ и $r \in \{1, \dots, M\}$.

Величины $p_{s,l,k}$ (спецификация 1) и $p_{s,l,k}^r$ (спецификация 2) группируются в таблицы переходов $\mathcal{P} = [p_{s,l,k}]_{s,l,k \in \{1, \dots, m\}}$ и $\mathcal{P} = [p_{s,l,k}^r]_{s,l,k \in \{1, \dots, m\}}^{r \in \{1, \dots, M\}}$, соответственно.

Пусть имеются лонгитюдные эмпирические данные, описывающие динамику мнений выборки людей, а также историю их взаимодействий. Для оценки компонент таблицы переходов было предложено два метода. В рамках первого метода в качестве оценки влияния используется среднее мнение друзей (УД-метод) [1], в рамках второго метода мнение каждого из друзей в социальном графе операционализируется как отдельный источник влияния, порождающий свое наблюдение (ДУ-метод) [2]. ДУ-метод возможно применять для калибровки параметров обеих спецификаций SCARDO-модели, в то время как УД-метод не подходит для калибровки параметров второй спецификации.

Для оценки точностей прогноза описанных выше спецификаций SCARDO-модели были использованы эмпирические лонгитюдные данные из социальной сети ВКонтакте, подробно описанные в работе [1]. Данные включают три снимка мнений пользователей ВКонтакте и снимок социального графа. Первые два снимка мнений использовались для оценки компонент таблиц переходов, а третий – для оценки точности макро-прогноза (численностей сторонников позиций z_1, \dots, z_m). Для оценки компонент таблицы переходов в рамках первой спецификации использовались УД- и ДУ-метод, а для второй спецификации – только ДУ-метод. Рассматривались различные размерности азбуки мнений. Для каждой идентифицированной модели проводились вычислительные эксперименты, длительность которых соответствовала временному промежутку между вторым и третьим снимками мнений датасета. Второй снимок вкупе со структурой графа использовались в качестве начального состояния системы. Точность прогнозов сопоставлялась с линейной моделью, в рамках которой динамика мнений обладает постоянным трендом.

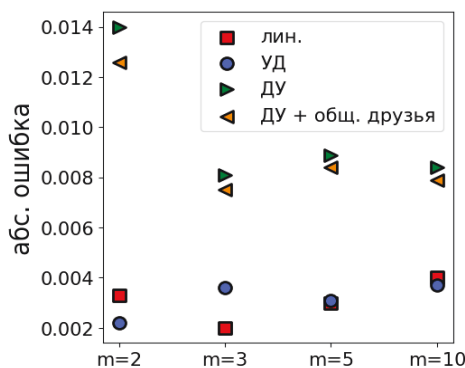


Рис. 1: Точность прогнозов SCARDO-модели для различных значений m и способов калибровки ее параметров в сравнении с точностью прогноза линейной модели.

Критерии Д’Агостино–Пирсона и Шапиро–Вилка показали, что нулевая гипотеза о том, что распределение абсолютной ошибки прогноза, полученное для фиксированных сценария и m , является нормальным, не может быть отвергнута – для каждого из сценариев и для всех m имело место $P > 0.05$. В связи с этим для визуализации распределений абсолютной ошибки использовались средние значения – см. рис.1., а для сравнения распределений применялся одновыборочный t -критерий.

Статистический анализ показал, что для 2- и 10-элементной азбуки мнений SCARDO-модель (ее первая спецификация), откалиброванная при помощи УД-метода, показывает большую точность по сравнению с линейной, в то время как для $m = 3$ линейная модель является более точной ($P < 0.001$). При $m = 5$ статистически значимых различий не было обнаружено ($P = 0.18$). SCARDO-модель (первая спецификация), откалиброванная при помощи УД-метода более точна, чем в случае использования ДУ-метода для всех m ($P < 0.001$). Применение второй спецификации SCARDO-модели позволяет повысить точность прогноза ($P < 0.001$).

Литература

1. *Kozitsin I.V.* A general framework to link theory and empirics in opinion formation models // Scientific reports, **12**:1 (2022), 5543.
2. *Gezha V.N., Kozitsin I.V.* The effects of individuals’ opinion and non-opinion characteristics on the Organization of Influence Networks in the online domain // Computers, **12**:6 (2023), 116.
3. *Aral S., Walker D.* Tie strength, embeddedness, and social influence: A large-scale networked experiment // Management Science. **60**:6 (2014), 1352-1370.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

А.И. Козко, Л.М. Лужина, А.Ю. Попов, В.Г. Чирский

prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, vgchirskii@yandex.ru

УДК 518.865

В статье исследуется модель Рамсея–Касса–Купманса. Мы исследовали приближенные решения функций $C(t)$, $K(t)$ и оценили их точность.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея–Касса–Купманса, приближенное решение.

В модели Рамсея–Касса–Купманса (см. [1]–[7]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ – капитал в момент времени t и $C(t)$ – потребление в момент времени t :

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^\alpha(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \quad (1)$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. В большинстве исследований по этой тематике рассматривается значение $\theta > 1$; этот случай будет в центре внимания и в нашей работе.

Козко Артем Иванович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия), Московский центр фонд. и прикладной математики (Москва, Россия)

Лужина Любовь Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Попов Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., вед. науч. сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия), Московский центр фонд. и прикладной математики (Москва, Россия)

Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

В [1] мы обнаружили, что система дифференциальных уравнений (1) допускает решение в квадратурах, если константы x_1, x_2, α связаны соотношением $\alpha x_1 = x_2$. В нашей работе мы исследовали производственную функцию Кобба–Дугласа $f(K) = aK^\alpha$.

В связи с тем, что в [1] мы решили в квадратурах задачу Коши для более общих систем, нежели (1) с соотношением $\alpha x_1 = x_2$, а именно

$$\begin{cases} \dot{K} = f(K) - bC - x_3K, \\ \dot{C} = \alpha\theta^{-1} \left(\frac{f(K)}{K} \right) C - x_2C, \quad \text{где } x_3 = \frac{x_2}{\alpha}, b > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$K(0) = K_0, C(0) = C_0, \quad (3)$$

мы там же предложили в случае $\xi = \alpha x_1 - x_2 > 0$ заменить систему уравнений (1) системой уравнений (2), отличающейся от (1) множителем

$$b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}$$

перед C в правой части первого уравнения, а также заменой x_1 на $\frac{x_2}{\alpha}$ в том же уравнении. Такой выбор параметра b обусловлен тем, что тогда будет следовать совпадение значений правых частей первых уравнений систем (1) и (2) в начальный момент времени. А поскольку вторые уравнения этих систем одинаковы, то мы имеем “близость” решений задачи Коши для систем (1) и (2) с совпадающими начальными условиями (3). Нами получен ряд результатов, сформулируем один из них.

Теорема 1. Пусть (u, v) – решение задачи Коши (1), (3) и (x, y) – решение задачи Коши (2), (3). Тогда справедливо

$$\left| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \leq \frac{\xi}{\alpha} \left(\frac{K_0}{C_0} + 1 \right) M_2 \cdot \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2}{M_1^2} \left(e^{M_1 t} - 1 - M_1 t - \frac{(M_1 t)^2}{2} \right) \right).$$

Кроме того, нами выписан явный вид M_1, M_2 , которые зависят от K_0, C_0, α, ξ .

Литература

1. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея–Касса–Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник, **23**:4 (2022), 115–125. DOI: [10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125)
2. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник, **20**:4 (2019), 197–207. DOI: [10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207)
3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея–Касса–Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, **182** (2020), 39–44. DOI: [10.36535/0233-6723-2020-182-39-44](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-182-39-44)
4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея–Касса–Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия. Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. Под ред. А. В. Царева. Москва: 2019. — 87–88.
5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник, **20**:4 (2019), 188–196. DOI: [10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196)
6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея–Касса–Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. **23**:1 (2022), 118–129. DOI: [10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129)
7. Барро Р.Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // Лаборатория знаний — М.: БИНОМ, 2010.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ: ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

О.И. Криворотко, С.И. Кабанихин, Н.Ю. Зятков, А.В. Неверов

krivorotko.olya@mail.ru, ksi52@mail.ru, nikolay.zyatkov@gmail.com, a.neverov@g.nsu.ru

УДК 519.63

Процесс распространения информации в онлайн социальных сетях может быть описан в терминах игры среднего поля. Рассматривается задача определения функции управления, которая решалась конечно-разностным методом. Численные расчеты были проанализированы и обсуждены.

Ключевые слова: обратная задача, оптимизация, игры среднего поля, социальные процессы.

В работе приведен обзор математических моделей распространения эпидемий на основе дифференциальных уравнений, имитационных моделей и искусственного интеллекта. Проанализированы условия применимости моделей с учетом социально-экономических процессов в регионах [1].



Рис. 1: Диаграмма взаимосвязи математических моделей эпидемиологии с эпидемиологическими данными и их обработки.

Построены математические модели распространения эпидемий COVID-19 [2–5] и инфекции туберкулеза и ВИЧ [6] в регионах РФ, основанные на комбинации дифференциальных и агентных моделей с методами машинного обучения. Особенности распространения эпидемий в

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-71-10068).

Криворотко Ольга Игоревна, д.ф.-м.н., с.н.с., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Кабанихин Сергей Игоревич, чл.-корр. РАН, директор ММЦ, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Зятков Николай Юрьевич, к.т.н., начальник инновационного отдела ММЦ, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Неверов Андрей Вячеславович, инженер-исследователь, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия)

регионе определяют параметры модели: контагиозность вируса, вероятность развития тяжелой формы заболевания, доля бессимптомных носителей и другие. Для идентификации параметров моделей по дополнительным измерениям состояний эпидемической системы формулируются и решаются обратные задачи. Для эффективного и устойчивого решения обратных задач используются методы машинного обучения, природоподобные алгоритмы, байесовские и градиентные методы и их комбинации. В качестве примера приведены сценарии распространения эпидемии COVID-19 в Новосибирской области, полученные при использовании комбинированной модели, а также прогноз заболеваемости туберкулеза в неблагоприятных регионах РФ, основанный на дифференциальной модели.

Литература

1. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И.* О математическом моделировании COVID-19 // Сибирские электронные математические известия, **20:2** (2023), 1211-1268.
2. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Зятыков Н.Ю., Приходько А.Ю., Прохошин Н.М., Шмиленин М.А.* Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области // Сибирский журнал вычислительной математики, **23:4** (2020), 395-414.
3. *Krivorotko O., Sosnovskaia M., Vashchenko I., Kerr C., Lesnic D.* Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: parameter identification algorithm // Infectious Disease Modelling, **7** (2022), 30-44.
4. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Сосновская М.И., Неверов А.В.* Моделирование сценариев распространения COVID-19 в Республике Казахстан на основе регуляризации агентной модели // Дискретный анализ и исследование операций, **30:1** (2023), 40-66.
5. *Криворотько О.И., Зятыков Н.Ю., Кабанихин С.И.* Моделирование эпидемий: нейросеть на основе данных и SIR-модели // Журнал вычислительной математики и математической физики, **63:10** (2023), 1733-1746.
6. *Kabanikhin S., Krivorotko O., Takuadina A., Andornaya D., Zhang S.* Geo-information system of tuberculosis spread based on inversion and prediction // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **29:1** (2021), 65-79.

АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЙ НА РЫНКЕ ПУБЛИЧНЫХ ВАКАНСИЙ С ПОМОЩЬЮ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА

А.С. Куць

kuts.as@phystech.edu

УДК 51-77

Непараметрический метод построения экономических индексов позволяет проверять согласованность наблюдаемых статистических данных с математической моделью поведения экономических агентов. Метод применен для исследования влияния пандемии на рынок публичных вакансий рабочих. Был разработан подход для оценки премии работникам за трудоустройство и работу в условиях изменений, связанных с шоковыми событиями.

Ключевые слова: выявленные предпочтения, функция полезности, экономические индексы.

Непараметрический метод построения экономических индексов Конюса–Дивизиа основан на теории выявленного предпочтения и позволяет проверять согласованность наблюдаемого потребительского поведения с моделью спроса Парето [1, 2]. Согласно классической модели Парето спрос совокупности домашних хозяйств можно описать действиями одного рационального репрезентативного агента, который максимизирует свою функцию полезности F при заданных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00281).

Куць Андрей Сергеевич, МФТИ (НИУ), ФИЦ ИУ РАН, ФГБУ «ВНИИ Труда» Минтруда России (Москва, Россия)

бюджетных ограничениях. Обратная задача модели Парето заключается в нахождении функции полезности F из заданного функционального класса Φ при известной обратной функции спроса $P(X)$ такой, что для любого $X \geq 0$ выполнено

$$X \in \operatorname{Argmax}\{F(Y) | \langle P(X), Y \rangle \leq \langle P(X), X \rangle, Y \geq 0\}.$$

Непараметрический метод отвечает на вопрос разрешимости обратной задачи. Модификации непараметрического метода используются для идентификации периодов структурных изменений на потребительском рынке [3,4] и изучения его сегментации [3].

В данной работе метод применен для анализа рынка публичных вакансий на основе данных автоматизированной информационной системы (АИС) «Мониторинг рынка труда» ФГБУ «ВНИИ труда» Минтруда России, которая агрегирует первичную информацию с трех российских рекрутинговых онлайн-платформ: «Работа России», «HeadHunter», «Superjob». Было получено, что начало пандемии изменило поведение работодателей. Предприятия повысили предлагаемую заработную плату, чтобы закрыть дополнительную потребность в опытных рабочих. С начала 2021 года структура рынка вернулась к состоянию, сложившемуся до пандемии. Разработан подход для оценки степени завышения предлагаемой заработной платы после начала пандемии. Для этого был спрогнозирован уровень предлагаемой зарплаты после начала пандемии, согласующийся со сложившейся структурой спроса на рынке. Были выделены отдельные группы вакансий, связанные свойствами взаимодополняемости и взаимозаменяемости, и построены индексы предлагаемой зарплаты и количества вакансий Конюса-Дивизиа, которые отражают агрегированную динамику на рынке публичных вакансий рабочих.

Литература

1. *Pareto V.* Manual of Political Economy. Augustus M. Kelley, 1971. Перевод французского издания. 1927 г.
2. *Pareto V.* Ophelimity in nonclosed cycles // Preferences, utility and demand / Ed. by J. Chipman, L. Hurwicz, M. Richter, H. Sonnenschein.— Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1971. — 370–385.
3. *Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А.* Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков // Труды МФТИ, **2:3** (2010), 32-45.
4. *Klemashev N., Shanani A., Zhang S.* Inverse problems in Pareto's demand theory and their applications to analysis of stock market crises // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **26:1** (2018), 95-108. DOI: [10.1515/jiip-2017-0021](https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0021)

АДАПТАЦИЯ МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА – ХИКСА ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ НА ОТКРЫТОЙ ЭКОНОМИКЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Е.П. Мочалина, Г.В. Иванкова, Д.И. Назарова, Н.С. Семина, Н.С. Зайцева

mochalina.ep@real.ru, ivankova.gv@rea.ru

УДК 519.865

В условиях санкционного давления задача определения факторов экономического роста, может быть решена с помощью математического моделирования. В работе рассматривается применение модели Самуэльсона–Хикса в условиях ограничений на примере Республики Беларусь: страны участника ЕАЭС с достаточно закрытой экономикой, по сравнению с соседними государствами.

Ключевые слова: модель Самуэльсона–Хикса, регрессионный анализ, экономика с ограничениями, математическое моделирование.

Мочалина Екатерина Павловна, к.ф.-м.н., доцент, РЭУ им. Г.В. Плеханова, ВШКМиС, кафедра высшей математики (Москва, Россия)

Иванкова Галина Владимировна, старший преподаватель, РЭУ им. Г.В. Плеханова, ВШКМиС, кафедра высшей математики (Москва, Россия)

Назарова Дарья Игоревна, студент, РЭУ им. Г.В. Плеханова, ВШФ (Москва, Россия)

Семина Наталья Сергеевна, студент, РЭУ им. Г.В. Плеханова, ВШФ (Москва, Россия)

Зайцева Наталья Сергеевна, студент, РЭУ им. Г.В. Плеханова, ВШКМиС (Москва, Россия)

Беларусь уже долгое время входит в пятерку стран с наибольшим количеством наложенных на нее санкций: суммарное число введенных санкций в отношении страны на начало 2024 г. составляет около 1 170 ограничений, касающихся как юридических, так и физических лиц. Экономика стран ЕАЭС в значительной степени зависит от России, которая занимает лидирующие позиции по различным сегментам и является наиболее финансово и экономически развитой. Санкции, наложенные на Россию и создающие трудности для свободного товарооборота, оказывают негативное экономическое влияние на остальные страны союза. Для Беларуси этот эффект усугубляется из-за недостаточно развитой финансовой системы и экономической нестабильности. Россия важна как стратегический партнер для Беларуси [1], особенно в сферах энергоресурсов и обмена потребительскими товарами. С 2017 по 2021 год происходил стабильный рост притока иностранных прямых инвестиций в экономику Беларуси [2], однако в 2022 году этот показатель снизился на 12%, что свидетельствует об изменении окружающего контекста и необходимости адаптации к новым условиям. В ЕАЭС два страны находятся под давлением значительного количества ограничений, а еще три — под угрозой вторичных санкций. Геополитическая ситуация располагает к усилению экономических связей внутри союза. Для того, чтобы понять, как сильно страны-партнеры ЕАЭС зависят друг от друга, был проведен однофакторный ANOVA-анализ. Он, в свою очередь, позволил определить статистическую схожесть динамики объемов ВВП государств-членов ЕАЭС. Результаты демонстрируют, что значения ВВП Беларуси и России идентично реагируют на внешние изменения (рис. 1); высокая созависимость России и Беларуси внутри ЕАЭС не позволяет им отдаляться от интеграции в союзе.

| pairwise GDP increments as factors for one-way ANOVA | | | | |
|--|----|------------|---------|---------|
| | | | F value | P value |
| Armenia | to | Belarus | 0.4385 | 0.5099 |
| Armenia | to | Kazakhstan | 0.0152 | 0.9021 |
| Armenia | to | Kyrgyzstan | 0.2045 | 0.6525 |
| Armenia | to | Russia | 0.5639 | 0.4551 |
| Belarus | to | Kazakhstan | 0.5936 | 0.4435 |
| Belarus | to | Kyrgyzstan | 1.2906 | 0.2596 |
| Belarus | to | Russia | 0.0420 | 0.8382 |
| Kazakhstan | to | Kyrgyzstan | 0.1032 | 0.7489 |
| Kazakhstan | to | Russia | 0.7244 | 0.3974 |
| Kyrgyzstan | to | Russia | 1.4466 | 0.2329 |

Рис. 1: Результаты ANOVA-анализа ВВП стран-участников ЕАЭС

Теперь определимся с методами, с помощью которых возможно будет провести анализ обобщенных характеристик и показателей развития Беларуси и сделать соответствующие выводы. Для разработки интегрального показателя экономического развития, разносторонне характеризующего сложившуюся ситуацию, было принято решение использовать международные индексы. За основу были взяты индексы, объединенные в следующие группы: экономическую (индексы конкурентоспособности, экономической свободы и инновационного развития), социальную (индекс качества жизни) и экологическую (индекс эффективности борьбы с изменением климата) по годам. Нормализация и взвешенное усреднение дали итоговые значения интегрального индекса экономического развития Беларуси (с 2013 по 2022г., представлен на рис. 2). На основе полученных результатов можно сделать вывод об определенном влиянии введенных санкций на экономическое, социальное и экологическое состояние Беларуси. Заметим, что методология по оценке влияния санкций на экономическую среду как таковая на данный момент не разработана. Авторы считают, что изменение ВВП страны в качестве индикатора, дающего оценку экономического благосостояния, является наиболее адекватным. Факторы для регрессионной модели были протестированы посредством метод главных компонент (рис. 3). Как мы видим, торговый баланс образует отдельную совокупность. Анализ и тестирование на выборке с использованием как $R_a d_j^2$, МАЕ и МАРЕ привели в решении рассмотреть модель “Торговый баланс” — “Импорт России из Беларуси”, показавшей себя чуть хуже с точки зрения $R_a d_j^2$ (но лучше по проценту ошибок). Она отвечает сразу двум требованиям: необходимости включения торгового баланса и отсутствия сильной корреляции между факторами.

Для построения прогнозных значений факторных показателей стандартно использовать мо-

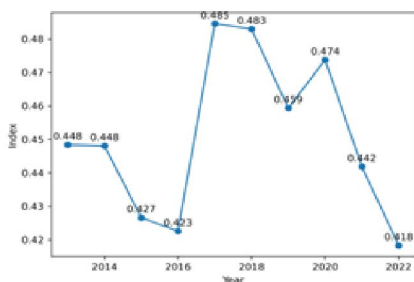


Рис. 2: Динамика интегрального индекса экономического развития Беларуси

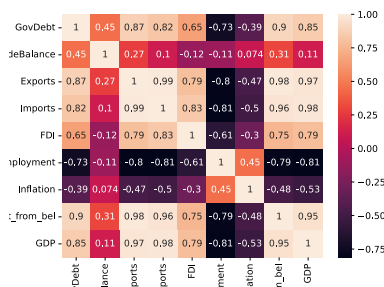


Рис. 3: Корреляционная матрица факторных и результативных показателей для построения модели регрессии

дель ARIMA, параметры которой были подтверждены тестированием на тренировочной выборке (рис. 4). Прогноз показал, что после падения в 2023г. произойдет стабилизация.

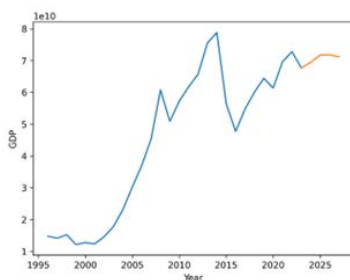


Рис. 4: ARIMA-модель динамики ВВП Беларуси

Однако в условиях ограничений, по нашему мнению, лучше использовать модель экономического роста Самуэльсона–Хикса [3], которая лучше себя показывает в условиях неопределенности. В классическом виде модель применяется для закрытой экономики, однако экономика Беларуси таковой не является. По этой причине модель была скорректирована с учетом влияния внешней торговли на ВВП. Авторами были введены такие переменные, как объем экспорта (X_t), объем импорта (M_t), а также переменная ϵ_t — дефицит ВВП Беларуси, являющийся разницей между объемом ВВП и суммой объема потребления домохозяйствами (C_t), валовыми инвестициями (I_t), государственными расходами (G_t) и чистым экспортом ($X_t - M_t$). Наличие ϵ_t , по нашему мнению, может объясняться другими внешними факторами, не учтенными оригинальной моделью, или же недостаточностью ВВП для покрытия потребительского спроса, обеспечения государственных расходов и инвестиций, а также чистого экспорта. В результате имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_t = 0,052 + 0,711 * Y_{t-1}, \\ I_t = 0,606 + 0,136 * Y_{t-1} - 0,120 * Y_{t-2}, \\ G_t = 2,439 + 0,998 * G_{t-1}, \\ X_t = 1,709 + 1,016 * X_{t-1}, \\ M_t = 3,818 + 0,623 * Y_{t-1}, \\ \epsilon_t = -1,195 + 1,008 * \epsilon_{t-1}, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t + X_t - M_t - \epsilon_t. \end{cases}$$

Авторская модель используется для прогнозирования факторов, на основе которых рассчитывается объем ВВП на последующие периоды. В результате прогнозные значения для всех составляющих модифицированной модели Самуэльсона–Хикса представлены на рис. 5. Они указывают

на необходимость увеличения торгового баланса страны, объема экспортных и импортных операций. Также важным условием для экономического развития является высокий уровень жизни граждан.

Модифицированная модель Самуэльсона–Хикса подтвердила, что только при увеличении объемов потребления, государственных расходов и инвестиций возможен устойчивый экономический рост (рис. 6)

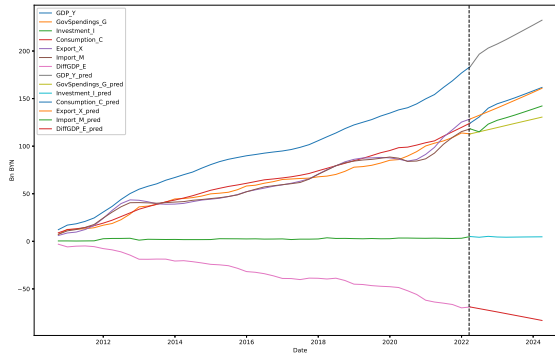


Рис. 5: Прогнозирование показателей, входящих в преобразованную модель Самуэльсона–Хикса

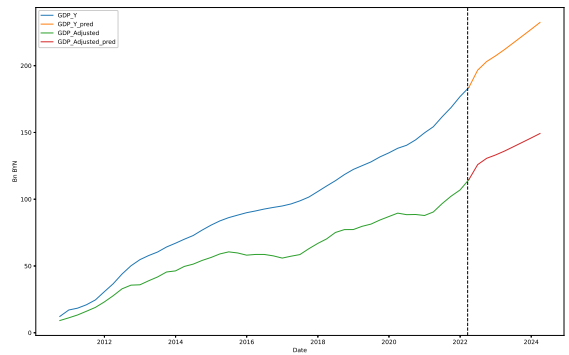


Рис. 6: Динамика и прогноз объема ВВП Беларуси

Литература

1. Liu Z., Dunford M., Liu W Coupling national geo-political economic strategies and the Belt and Road Initiative: The China–Belarus Great Stone Industrial Park // *Political Geography*, 2021. — 1–13.
2. Gulomova N. Assessment and comparative analysis of the investment potential of the Republic of Belarus and the Republic of Uzbekistan within the EAEU // *Western European Journal of Modern Experiments and Scientific Methods*, 2023. — 1–9.
3. Naumowicz P, Ruzickova M. Modifications of the Samuelson Economic Cycle Model // *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 2023. — 45–60.

АППРОКСИМАЦИЯ ПО ХАУСДОРФУ РЕШЕНИЙ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ИГР

Н.М. Новикова, И.И. Поспелова

Novikova@gse.cs.msu.ru, ipospelova05@yandex.ru

УДК 519.8

Для двухкритериальных матричных игр в смешанных стратегиях исследована возможность аппроксимации по Хаусдорфу равновесия Нэша–Шепли. Проведено сравнительное тестирование практической сходимости переборных алгоритмов на базе линейной свертки и свертки Гермейера.

Ключевые слова: многокритериальные матричные игры, свертка Гермейера.

Многокритериальные (МК) игры являются моделью игры нескольких ЛПР (лиц, принимающих решения), представляющих некоторые коллективы, что обуславливает наличие у них векторных функций выигрыша. В докладе максимально упростим постановку, рассматривая двухкритериальную матричную игру в смешанных стратегиях, когда у каждого игрока всего по две чистых стратегии. Априорное сведение подобных игр к однокритериальным лишает ЛПР возможностей поиска компромиссного решения, характерного для исходной МК-игры [1]. Понятие решения МК-игр строится не на обобщении на МК-случай равенства максимина и минимакса, а на поиске МК-равновесия по Шепли [2], развивающего идею Нэша.

Введем обозначение A для матрицы выигрышей игрока 1, ее элементами являются пары (a_{ij}^1, a_{ij}^2) значений его 1-го и 2-го критериев. Для игрока 2 эти значения показывают его проигрыш по каждому критерию. Смешанная стратегия игрока 1 задается вероятностью p выбора 1-й строки матрицы A . Вероятность выбора 1-го столбца игроком 2 обозначим через q . Средний выигрыш игрока 1 и проигрыш игрока 2 определяется векторным критерием $\Phi(p, q)$ с компонентами

$$\varphi_k(p, q) = p(a_{11}^k q + a_{12}^k(1 - q)) + (1 - p)(a_{21}^k q + a_{22}^k(1 - q)), \text{ где } k = 1, 2.$$

Решение игры является множеством R всех таких пар (p^0, q^0) вероятностей, что p^0 реализует $\text{Max}_p \Phi(p, q^0)$, а q^0 реализует $\text{Max}_q \{-\Phi(p^0, q)\}$, где максимум векторного критерия понимается по Слейтеру. Значение игры — множество $V = \Phi(R)$, как правило, невыпуклое.

Для поиска равновесий R в [2] предложено использовать линейную свертку (ЛС), т.е. выпуклую комбинацию частных критериев, и доказано, что R равно множеству решений биматричных игр, в которых выигрыши игроков 1 и 2 задаются как $\mu a_{ij}^1 + (1 - \mu)a_{ij}^2$ и $-\nu a_{ij}^1 - (1 - \nu)a_{ij}^2$, при всех $\mu, \nu \in [0, 1]$. Однако не доказано, что выбрав конечную сетку на множестве пар коэффициентов (μ, ν) ЛС игроков 1 и 2, можно получить аппроксимацию множества R , даже найдя все смешанные равновесия биматричных игр, соответствующих параметрам сетки. Действительно, при фиксированной стратегии q^0 игрок 1 будет решать МК-задачу на $\text{Max}_{p \in [0,1]} \Phi(p, q^0)$ с

$$\varphi_1(p, q^0) = c_1 + d_1 p, \quad \varphi_2(p, q^0) = c_2 - d_2 p,$$

где c_k, d_k зависят от q^0 . Значит, либо $p^0 = 0$, либо $p^0 = 1$, либо

$$d_2 \varphi_1(p, q^0) + d_1 \varphi_2(p, q^0) = \text{const} \text{ (при } d_1 d_2 > 0).$$

В последнем случае решением этой МК-задачи на максимум будет весь отрезок $[0, 1]$. Но найти точки из $(0, 1)$ с помощью ЛС можно лишь при единственном варианте коэффициентов свертки $\mu_0 = d_1 / (d_1 + d_2)$. В процессе аппроксимации его можно не получить, и не ясно априори, как это скажется на приближенном описании равновесного множества R . Стандартные программы поиска равновесий биматричных игр не рассчитаны на вырожденные случаи, которые вполне могут получаться при построении игровых матриц на основе ЛС. Как следствие, не ко всем точкам из R и V удастся найти приближения. А это сужает поле для переговоров о компромиссе между ЛПР.

Другой подход, применяемый в МК-оптимизации, основан на использовании обратной логической свертки вслед за Ю.Б.Гермейером [3] (далее — свертка Гермейера, или ГС). Прибавляя ко всем элементам A одно и то же число, обеспечим условие их положительности. Решение игры от этого не изменится. Тогда скаляризованная с помощью ГС при $\mu \in (0, 1)$ функция выигрыша равна

$$\begin{aligned} & \min(\varphi_1(p, q)/\mu, \varphi_2(p, q)/(1 - \mu)) \text{ для игрока 1 и} \\ & - \max(\varphi_1(p, q)/\mu, \varphi_2(p, q)/(1 - \mu)) \text{ для игрока 2.} \end{aligned}$$

Теперь для описания R и V можно применить ГС, т.е. рассмотреть параметрическое семейство скаляризованных на базе ГС игр $\Gamma(\mu)$ при $\mu \in (0, 1)$ с указанными выше функциями выигрыша. В [4] обоснованы аппроксимационные свойства такого подхода, причем для однопараметрического семейства скалярных игр (в отличие от ЛС, где, ограничившись играми с $\mu = \nu$, не получить параметризацию R или V [2]). Кроме того, в [5] доказано, что ГС позволяет построить аппроксимацию по Хаусдорфу и для множеств значений МК-максимина и минимаксов, т.е. получить для ЛПР гарантированные оценки их результатов в процессе переговоров [1].

Тем не менее, игры в ГС не сводятся к биматричным (не являются конечными) и для них нет стандартных методов поиска всех равновесий. Поэтому интересно сравнение свойств практической сходимости обеих сверток в задаче аппроксимации R и V . С целью исследования влияния именно вида свертки поиск равновесных (p^0, q^0) для всех скалярных игр в свертках осуществлялся с помощью перебора (p, q) из одной и той же сетки (далее $1/1000$). Расчеты для представительного (согласно [6]) набора матриц A показали, что ГС правильно строит R и V в большинстве примеров, и V — во всех примерах. Для построения множества R с помощью ГС следует использовать сетку лишь по одной компоненте p или q , а другую рассчитывать для каждой $\Gamma(\mu)$ по специальной формуле.

Для применения ЛС на тех же примерах пришлось перейти к приближенному вычислению равновесий (оптимумов), причем с не очень маленькой точностью. В рассмотренных примерах «лишних» (не входящих в R или V) точек от этого не возникло, однако доказать подобное свойство ЛС авторам не удалось. Так что в качестве рекомендации для поиска компромисса в МК-матричных играх предлагается использование ГС.

Литература

1. *Novikova N. M., Pospelova I. I.* A Game-Theoretic Approach to Two-Person Negotiation Under Multiple Criteria // Group Decis Negot, **33** (2024), 195-216.
2. *Shapley L.S.* Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs // Naval Research Logistics Quarterly, **6:1** (1959), 57-61.
3. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — Москва: Наука, 1971.
4. *Novikova N. M., Pospelova I. I.* Germeier's Scalarization for Approximating Solution of Multicriteria Matrix Games // Mathematics, **11:1** (2023), 133-160.
5. *Novikova N. M., Pospelova I. I.* Multicriteria decision making under uncertainty // Math. Program. **92** (2002), 537-554.
6. *Tanaka T., Higuchi M.* Classification of matrix types for multicriteria two-person zero-sum matrix games // IFAC Proceedings Volumes **33:16** (2000), 659-668.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ И ИНФЛЯЦИОННЫХ РИСКОВ В УСЛОВИЯХ РЕСТРУКТУРИЗАЦИИ ЭКОНОМИКИ

Н.К. Обросова, А.А. Шананин

nobrosova@ya.ru, alexshan@ya.ru

УДК 519.86

Предложен новый подход к описанию межотраслевых связей в экономике на основе нелинейной модели межотраслевого баланса с производственными функциями с постоянной эластичностью замещения. Подход позволяет вычислить конкурентное равновесие в пространстве товаров и цен в экономической сети поставок в заданных сценарных условиях. Представлены результаты оценки инфляционных рисков в экономике РФ с помощью модели.

Ключевые слова: выпуклая оптимизация, межотраслевой баланс, преобразование Янга, конкурентное равновесие, инфляция.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-21-00429).

Обросова Наталия Кирилловна, к.ф.-м.н., доцент, Федеральный исследовательский центр Информатика и управление Российской академии наук (Москва, Россия)

Шананин Александр Алексеевич, академик РАН, главный научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр Информатика и управление Российской академии наук (Москва, Россия)

В современной ситуации геополитической нестабильности актуальной задачей является макроэкономический анализ сценариев развития отечественной экономики с учетом изменяющихся межотраслевых связей в условиях локализации производственных цепочек и инфляционных рисков ресурсных ограничений. Для решения задачи требуется модификация традиционных методов анализа производственных сетей, основанных на модели межотраслевого баланса В.В. Леонтьева. Трудности их использования связаны с нарушением в современных условиях базовой гипотезы о постоянстве норм производственных затрат. В статьях [1], [2] предложена новая концепция математической модели межотраслевого баланса, в которой производство описывается нелинейными производственными функциями с постоянной эластичностью замещения (CES), которые позволяют учитывать замещение производственных факторов. В заданных сценарных условиях развития экономики модель позволяет вычислить конкурентное равновесие в сети межотраслевых поставок и цен. Это равновесие определяется на основе решения пары взаимно двойственных оптимизационных задач: задачи распределения ресурсов и специального вида двойственной (по Янгу) задачи формирования цен. Расчет равновесных межотраслевых потоков и равновесных цен позволяет построить прогноз I и III квадранта симметричной таблицы межотраслевого баланса отечественной продукции СТЗВ (см. рис. 1) при заданном векторе суммарного конечного потребления (сумма столбцов II квадранта таблицы) и индексах цен на первичные ресурсы (первичные ресурсы образуют строки III квадранта).

База данных для идентификации и калибровки модели по данным экономики РФ включает данные симметричных таблиц затраты-выпуск отечественной продукции РФ за период 2016–2020г., которые восстановлены на основе стандартных процедур (отраслевая гипотеза) по таблицам ресурсов и использования за 2016–2020г. (<https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts>). Формат таблиц затраты-выпуск представлен на рис. 1.

Предположения модели и сценарные условия:

- спрос на первичные ресурсы (строки III квадранта СТЗВ) удовлетворяется при заданных ценах, т.е. заданы индексы цен первичных ресурсов целевого года по отношению к фиксированному базовому году s_1, \dots, s_n . В общем случае строки квадранта III (рис. 1) могут рассматриваться дифференцированно по отраслям (столбцам таблицы), поэтому в описании выделено n первичных ресурсов и цен на них;
- технологии производства описываются CES-производственными функциями, допускающими замещение производственных факторов

$$F_j(X^j, l^j) = \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{X_i^j}{w_i^j} \right)^{-\rho_j} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{l_k^j}{w_{m+k}^j} \right)^{-\rho_j} \right)^{-\frac{1}{\rho_j}}$$

$$w_i^j = (a_{ij})^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}, \quad w_{m+k}^j = (b_{kj})^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}},$$

где $\frac{1}{1+\rho_j}$ — эластичность замещения производственных факторов, X_i^j, l_k^j — промежуточное потребление продукта i и первичного ресурса k для производства продукта j , соответственно (в постоянных ценах базового года). Идентификация параметров модели, кроме параметров эластичности замещения, производится по статистике фиксированного базового года (рис. 1), причем $a_{ij} = \frac{Z_{ij}}{Y_j}$, $b_{kj} = \frac{Z_{m+k,j}}{Y_j}$, $i, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$.

- задан целевой конечный спрос в текущих ценах прогнозного года $\hat{Z}^0 = (\hat{Z}_1^0, \dots, \hat{Z}_m^0)$ — сумма векторов II квадранта СТЗВ.

Преобразование Янга производственной функции F_j имеет вид

$q_j(p, s) = \inf \left\{ \frac{pX^j + sl^j}{F_j(X^j, l^j)} \mid X^j \geq 0, l^j \geq 0, F_j(X^j, l^j) > 0 \right\}$ и определяет функцию себестоимости в зависимости от индексов цен $(p_1, \dots, p_m, s_1, \dots, s_n)$. В случае CES-технологий

$$q_j(p, s) = \left(\sum_{i=1}^m \left(w_i^j p_i \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} + \sum_{k=1}^n \left(w_{m+k}^j s_k \right)^{\frac{\rho_j}{1+\rho_j}} \right)^{\frac{1+\rho_j}{\rho_j}}.$$

| | | Промежуточное потребление | | | Конечное потребление | | | | Валовый выпуск |
|---|--|---|-------------------------|--------------|----------------------|-------------|--|---------------|----------------|
| Симметричная таблица затраты-выпуски отечественной продукции (СТЗВ) | | продукты | | | Домашние хозяйства | Государство | Валовое накопление (=изменение запасов материальных оборотных средств) | Экспорт | |
| | | 1 | ... | m | | | | | |
| отечественные продукты | 1 | $Z_d = \left \left Z_i^j \right \right $ $i, j = 1, \dots, m$ | | | $Z_1^{H,0}$ | $Z_1^{G,0}$ | $Z_1^{INV,0}$ | $Z_1^{EXP,0}$ | Y_1 |
| | ... | | | | $Z_2^{H,0}$ | $Z_2^{G,0}$ | $Z_2^{INV,0}$ | $Z_2^{EXP,0}$ | Y_2 |
| | m | | I квадрант | | | $Z_m^{H,0}$ | $Z_m^{G,0}$ | $Z_m^{INV,0}$ | $Z_m^{EXP,0}$ |
| Расходы на первичные ресурсы | импорт | | Z_{m+1}^j | | II квадрант | | | | |
| | оплата труда | | Z_{m+2}^j | | | | | | |
| | прибыль* <small>*= чистая прибыль (чистый смешанный доход)+другие налоги (за вычетом субсидий) на производство + потребление основного капитала</small> | | Z_{m+3}^j | III квадрант | | | | | |
| | Валовая добавленная стоимость | | $Z_{m+2}^j + Z_{m+3}^j$ | | | | | | |
| Валовый выпуск | | | Y_1 | Y_2 | ... | Y_m | | | |

$$Z_j^0 = Z_1^{H,0} + Z_1^{G,0} + Z_1^{INV,0} + Z_1^{EXP,0}$$

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m+3} Z_i^j = Z_j^0 + \sum_{i=1}^m Z_j^i, \quad j = 1, \dots, m$$

Рис. 1: Формат входных данных модели. Таблица затраты-выпуск (СТЗВ).

Если предположить наличие CES-функции полезности конечного потребителя $F_0(X^0)$, задача поиска конкурентного равновесия в сети поставок сводится к решению задачи распределения ресурсов и двойственной по Янгу задачи формирования равновесных цен:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(X^0) \rightarrow \max \\ F_j(X^j, l^j) \geq \sum_{i=0}^m X_j^i \\ \sum_{j=1}^m l^j \leq l \\ X^j \geq 0, l^j \geq 0, j = 1 \dots m \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0(p) \rightarrow \max \\ q_j(s, p) \geq p_j, \\ p_j \geq 0, j = 1 \dots m \end{array} \right.$$

Здесь $q_0(p)$ — преобразование Янга функции F_0 . Решение прямой задачи определяет равновесные потоки ресурсов (X^j, l^j) при заданном конечном потреблении X^0 . Решение двойственной задачи определяет равновесные индексы цен p_j при заданных индексах цен на первичные ресурсы s_j . Индексы цен p_j определяются как решение системы уравнений $q_j(s, p) = p_j, j = 1, \dots, m$.

Калибровка модели позволяет оценить параметры эластичности замещения производственных факторов ρ_j на основе решения задачи квадратичной оптимизации: минимум суммы квадратов отклонений основных макроэкономических показателей от статистики.

После проведения процедур идентификации и калибровки модель может быть использована для среднесрочных расчетов межотраслевых связей. В результате расчетов по модели может быть построен сценарный прогноз следующих макроэкономических показателей:

— вектор равновесных индексов цен на продукцию отраслей $p = (p_1, \dots, p_m)$ по отношению к базовому году,

— I и III квадрант СТЗВ отечественной продукции.

Предлагаемый модельный аппарат позволяет оперативно решать следующие задачи среднесрочного макроэкономического прогнозирования в изменяющихся условиях и с контролем ре-

сурсных ограничений в экономике: строить оперативные среднесрочные сценарные прогнозы СТЗВ (1–3 года) с учетом замещения факторов производства, в т.ч. импортозамещения, выявлять драйверы экономического роста, строить оценки отраслевого платежеспособного спроса на ресурсы, проводить риск-анализ трендов макроэкономического развития, инфляционных рисков.

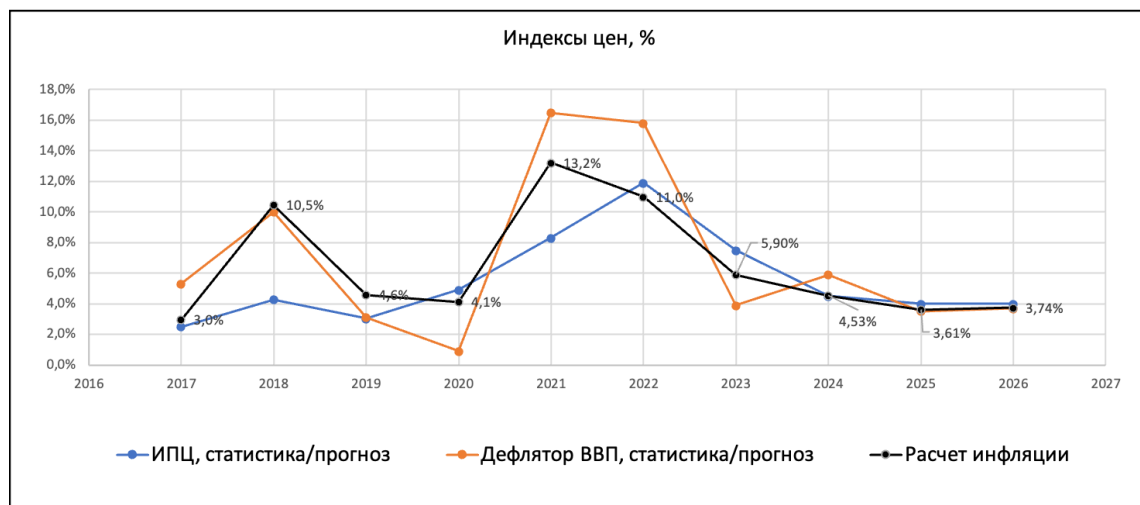


Рис. 2: Расчет инфляционных рисков в модели и данные статистики/прогноз

С помощью модели проведены оценки темпа инфляции в экономике РФ в сценарных условиях, соответствующих официальной статистике 2017–2022г. и прогнозу Министерства экономического развития от 28.09.2023г. Сопоставление результатов модельных расчетов с данными официальной статистики и официального прогноза подтверждает адекватность модельных оценок (см. рис. 2).

Предложенная технология может быть использована в качестве блока системы поддержки принятия экономических решений в условиях геополитических шоков.

Литература

1. Н.К. Обросова, А.А. Шананин Двойственность по Янгу вариационных неравенств. Приложение для анализа взаимодействий в производственных сетях // Труды института математики и механики УрОРАН, 29:3 (2023), 88-105.
2. Askar Boranbayev, Nataliia Obrosova, Alexander Shaninin Technology of Input–Output Analysis with CES Production: Application for Studying the Kazakhstan Supply Chain during the COVID-19 Pandemic // Sustainability, 15:14057 (2023).

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ МОЩНОСТИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ВОЗРАСТОМ

Н.Н. Оленев

nolenev@mail.ru

УДК 519.86

Рассмотрен экспоненциальный рост для производственных мощностей с заданным предельным возрастом. При этом существуют два действительных корня, дающих два режима сбалансированного изменения объемных макроэкономических показателей, а также счетное множество комплексных корней, ответственных за колебательные режимы.

Ключевые слова: производственная мощность, предельный возраст, производственная функция, характерные режимы, W -функция Ламберта.

В [1] построена математическая теория производственных функций, представимых распределением производственных мощностей (максимальных выпусков) по технологиям [1], доказана эквивалентность понятий производственная функция и функция прибыли.

В [2] построен класс таких производственных функций с неограниченными по возрасту мощностями, дифференцированными по моментам создания.

В настоящей работе представлены некоторые результаты построения эндогенной производственной функции для производственных мощностей с ограниченным возрастом от момента создания до момента демонтажа (предельным возрастом) [3] и результаты исследования характерных режимов сбалансированного роста и колебаний вблизи этих режимов [4].

Пусть t — текущий момент времени, а τ — момент создания производственной мощности, тогда $t - \tau$ — ее возраст. Если инвестиции (новые мощности) $J(t)$ распределяются оптимальным образом в наилучшую технологию (наименьшую трудоемкость) $\nu(t)$, мощность производственной единицы $m(t, \tau)$ с возрастом уменьшается с постоянным темпом μ , а число рабочих мест на этой единице фиксируется в момент создания до момента демонтажа, то величина мощности этой единицы описывается уравнением

$$m(t, \tau) = J(\tau)e^{-\mu(t-\tau)},$$

а ее трудоемкость (норма затрат живого труда на единицу выпуска) $\lambda(t, \tau)$ с тем же темпом растет

$$\lambda(t, \tau) = \nu(\tau)e^{\mu(t-\tau)}.$$

Суммарная производственная мощность $M(t)$ производственных единиц с возрастом не превышающим предельного $A(t)$ задается выражением

$$M(t) = \int_{t-A(t)}^t J(\tau)e^{-\mu(t-\tau)} d\tau. \quad (1)$$

Дифференцируя интеграл (1) по времени t в соответствии с формулой Готфрида Лейбница [5], найдем уравнение на динамику суммарной производственной мощности

$$\frac{dM}{dt} = (\alpha(t) - \mu)M(t) - \left(1 - \frac{dA}{dt}\right)\alpha(t - A)M(t - A)e^{-\mu A(t)}, \quad (2)$$

где $\alpha(t) = J(t)/M(t)$ — доля новых мощностей в суммарной мощности, величина $A = A(t)$ предельного возраста зависит от t и после демонтажа не возвращается в производственный процесс,

$$dA/dt \leq 1.$$

Предполагаем, как и в [2–4], что наименьшая трудоемкость $\nu(t)$ в силу научного и технического прогресса уменьшается с темпом, пропорциональным доле новых мощностей.

$$\frac{d\nu}{dt} = -\varepsilon\alpha(t)\nu(t), \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ характеризует темп научного и технического прогресса, овеществленного в инвестициях в новые производственные мощности. Соответственно, $\varepsilon\alpha(t)$ — темп снижения наименьшей трудоемкости.

Производственная функция характеризует зависимость выпуска $Y(t)$ от производственных факторов: скопированного труда $L(t)$ и суммарной производственной мощности $M(t)$.

$$Y(t) = \int_{t-a(L)}^t J(\tau)e^{-\mu(t-\tau)} d\tau, \quad (4)$$

$$L(t) = \int_{t-a(L)}^t \nu(\tau)J(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Здесь $a(L) = a(L(t))$ — возраст самой старой производственной мощности, загруженной оптимально используемыми трудовыми ресурсами $L(t)$. При этом $a(L) \leq A(t)$, так что $Y(t) \leq M(t)$.

Пусть $x(t)$ — отношение средней трудоемкости мощностей $L(t)/M(t)$ к наименьшей $\nu(t)$.

$$x(t) = \frac{L(t)}{\nu(t)M(t)}. \quad (6)$$

Тогда параметрическое выражение для производственной функции (4)–(5) запишется, как

$$Y(t) = M(t)f(x(t)) = \int_{t-a(x)}^t \alpha(\tau)M(\tau)e^{-\mu(t-\tau)}d\tau, \quad (7)$$

$$L(t) = M(t)\nu(t)x(t) = \int_{t-a(x)}^t \alpha(\tau)M(\tau)\nu(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Производственная функция $f(x(t)) \in [0, 1]$ имеет смысл загрузки суммарной мощности $M(t)$.

В характерном режиме с постоянным темпом роста γ суммарной производственной мощности $M(t)$, с фиксированным предельным возрастом мощностей $A \gg 1$ и постоянной доле новых мощностей $\alpha \in (0, 1)$ из (2)–(3), (7)–(8) получим выражение для производственной функции:

$$f(x(t)) = \frac{\alpha}{\gamma + \mu} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\gamma - \varepsilon\alpha}{\alpha} x(t) \right]^{(\gamma+\mu)/(\gamma-\varepsilon\alpha)} \right\}, \quad (9)$$

где γ является действительным корнем $\gamma = \gamma(\alpha, \mu, A)$ трансцендентного уравнения

$$\frac{\gamma + \mu}{\alpha} = 1 - e^{-(\gamma+\mu)A}. \quad (10)$$

В общем случае [4] можно рассмотреть комплексные корни этого уравнения,

$$M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{W_n(-\alpha A \exp(-\alpha A))(t-t_0)/A} e^{(\alpha-\mu)(t-t_0)}. \quad (11)$$

которые могут описывать колебательные траектории $M(t)$, связанные с несбалансированностью начальных данных при $t = t_0$. Здесь $W_n(-\alpha A \exp(-\alpha A))$ — W -функция Ламберта [6] для счетного числа ее комплексных ветвей $n \in (-\infty, +\infty)$.

Две действительных ветви W -функции Ламберта (0 и -1) дают соотношение для двух режимов сбалансированного роста с разными темпами γ :

$$\alpha A((\gamma + \mu)/\alpha - 1) = W(-\alpha A e^{-\alpha A}). \quad (12)$$

Первый режим обеспечивает сбалансированный рост с положительным темпом

$$\gamma = \alpha - \mu + \frac{1}{A} W_0(-\alpha A e^{-\alpha A}) > 0, \quad (13)$$

а второй — с отрицательным темпом

$$\gamma = \alpha - \mu + \frac{1}{A} W_{-1}(-\alpha A e^{-\alpha A}) = -\mu < 0, \quad (14)$$

поскольку $W_{-1}(-\alpha A e^{-\alpha A}) = -\alpha A$ [6]. В режим падения, близкий ко второму попала российская экономика в 90-е годы XX века.

Литература

1. Шанинин А. А. Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **24**:12 (1984), 1799-1811.
2. Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И.Г. Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. — Москва: Наука, 1986 — 46-60.

3. *Olenev N.* Two Balanced Growth Paths Based on an Endogenous Production Function // *Olenev, N., Evtushenko, Y., Jaćimović, M., Khachay, M., Malkova, V.* (eds) *Optimization and Applications. OPTIMA 2023. Lecture Notes in Computer Science*, vol 14395. Springer, Cham. Pages 263-274

4. *Olenev N.* Fluctuations of Aggregated Production Capacity Near Balanced Growth Path. In: *Olenev, N., Evtushenko, Yu., Jaćimović, M., Khachay, M., Malkova, V., Pospelov, I.* (eds) *OPTIMA 2022, LNCS*, vol. 13781, pp. 192–204. Springer, Heidelberg (2022).

5. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ: учебник для студентов вузов. В 2-х ч. — 3-е, перераб. и доп.. — Москва: Издательство МГУ, 2007.

6. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // *Advances in Computational Mathematics* **5** (1996), 329-359.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СБОРЕ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ НАИБОЛЬШЕЙ СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ

Л.И. Родина, А.В. Черникова

LRodina67@mail.ru, nastik.e@bk.ru

УДК 517.929

Рассматривается модель эксплуатируемой популяции, динамика которой задана системой разностных уравнений. Исследуется задача оптимального периодического сбора ресурса, доставляющего наибольшее значение средней временной выгоды. Решение данной задачи проиллюстрировано на примерах однородной и структурированной популяции.

Ключевые слова: модель эксплуатируемой популяции, средняя временная выгода, оптимальный периодический сбор.

Как известно, многие виды животных имеют сезонный характер размножения. В этой связи интерес представляет исследование динамических режимов таких популяций [1]. При промысловом воздействии актуальной является задача описания оптимальных режимов сбора, при которых остается часть популяции для дальнейшего восстановления и достигается наибольшее значение дохода, в том числе в долгосрочной перспективе. Так, в работе [2] исследован периодический импульсный режим сбора, доставляющий максимум дисконтированного дохода. В работе [3] для периодического промысла доказано существование доли отбора, доставляющей максимум среднего временного дохода в натуральном виде. Настоящая работа является продолжением публикаций [4, 5], в которых положено начало исследованию различных характеристик сбора возобновляемого ресурса. Здесь для модели структурированной популяции описан периодический режим сбора, при котором средняя временная выгода достигает наибольшего значения.

Рассмотрим структурированную популяцию, разделенную на $n \geq 2$ видов или возрастных классов (при $n = 1$ назовем популяцию однородной, то есть состоящей из одного вида). Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ численность популяции i -го вида или возрастного класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$. При отсутствии эксплуатации динамика $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$ задана системой разностных уравнений

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $f_i(x)$ — вещественные непрерывные функции на $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Предполагаем, что в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Рассмотрим множество

Родина Людмила Ивановна, д.ф.-м.н., профессор кафедры математики, Университет науки и технологий МИСИС (Москва, Россия)

Черникова Анастасия Владимировна, старший преподаватель кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия)

$U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}$ и исследуем задачу выбора управлений $\bar{u} \in U$, доставляющих определенный результат сбора. Таким образом, исследуем модель популяции, подверженной промыслу, динамика которой определяется системой

$$X(k+1) = f((1-u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $(1-u(k))X(k) = ((1-u_1(k))X_1(k), \dots, (1-u_n(k))X_n(k))$, $X_i(k)$ и $(1-u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$, $X(1) = f(x(0))$.

Средней временной выгодой от сбора возобновляемого ресурса назовем характеристику, которая определена функцией

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j),$$

где $C_i \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i -го вида. Если существует указанный предел, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H(\bar{u}, x(0))$.

Исследуем периодический режим сбора ресурса с периодом $\tau \geq 2$. В случае, когда $\tau = 1$ режим является стационарным. Рассмотрим функцию

$$D(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\tau} C_i(j) (f_i(j, x_i(j)) - x_i(j)).$$

и множество $G \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^{\tau} : x_i(j) \leq f_i(j, x_i(j)) \neq 0\}$.

Теорема. *Предположим, что функция $D(x)$ достигает наибольшего значения $D(x^*)$ в точке $x^* \in G$. Тогда для любых $\bar{u} \in U$, $x(0) \in \mathbb{R}_+^{\tau}$ выполнено неравенство*

$$H(\bar{u}, x(0)) \leq H(\bar{u}^*, x^*(0)) = D(x^*),$$

где $x^*(0) \in A(f(x^*))$ при следующих периодических управлениях:

$$u^*(j+k\tau) = \left(1 - \frac{x_1^*(j)}{f_1(j, x_1^*(j))}, \dots, 1 - \frac{x_n^*(j)}{f_n(j, x_n^*(j))}\right), \quad j = 1, \dots, \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

Здесь через $A(f(x^*))$ обозначено множество притяжения неподвижной точки $f(x^*)$ системы (1) при $u(k)$, заданном (2).

Пример 1. Найдем оптимальные режимы промысла однородной популяции, динамика которой задана дискретным логистическим уравнением

$$x(k+1) = a(k)x(k)(1-x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x \in [0, 1]$ — численность популяции, $a(k) > 0$ — коэффициент собственной скорости роста. Предполагаем, что коэффициент $a(k)$ периодический с периодом 2, например, $a(k) = 1.5$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $a(k) = 3$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Тогда развитие однородной популяции можно описать периодическими функциями $f(1, x(1)) = 1.5x(1)(1-x(1))$ и $f(2, x(2)) = 3x(2)(1-x(2))$. Пусть агрегированные стоимости условной единицы популяции равны $C(1) = 1$ и $C(2) = 4$. Функция

$$D(x(1), x(2)) = C(1)(f(1, x(1)) - x(1)) + C(2)(f(2, x(2)) - x(2)) = 0.5x(1)(1-3x(1)) + 4x(2)(2-3x(2))$$

достигает наибольшего значения 1.375 на множестве G при $x^*(1) = \frac{1}{6}$, $x^*(2) = \frac{1}{3}$ и управлениях $u^*(1) = 0.2$, $u^*(2) = 0.5$.

Пример 2. Пусть динамика двухвозрастной популяции описана системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = b(k)x_1(k) + x_1(k)x_2(k) - 2x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = 4x_2(k) + \frac{1}{4}x_1(k)x_2(k) - 3x_2^2(k), \end{cases}$$

где $x_1(k) \in [0, 1]$ и $x_2(k) \in [0, 1]$ — численность младшего и старшего возрастного класса соответственно в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$, $b(k) > 0$ — периодический (с периодом 2) коэффициент собственной скорости роста младшего возрастного класса. Пусть $b(k) = 2$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $b(k) = 4$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Развитие двухвозрастной популяции можно описать периодическими функциями $f(1) = (f_1(1, x(1)), f_2(1, x(1)))$ и $f(2) = (f_1(2, x(2)), f_2(2, x(2)))$, где $x(1) = (x_1(1), x_2(1))$, $x(2) = (x_1(2), x_2(2))$,

$$\begin{aligned} f_1(1, x(1)) &= 2x_1(1) + x_1(1)x_2(1) - 2x_1^2(1), & f_1(2, x(2)) &= 4x_1(2) + x_1(2)x_2(2) - 2x_1^2(2), \\ f_2(1, x(1)) &= 4x_2(1) + \frac{1}{4}x_1(1)x_2(1) - 3x_2^2(1), & f_2(2, x(2)) &= 4x_2(2) + \frac{1}{4}x_1(2)x_2(2) - 3x_2^2(2). \end{aligned}$$

Пусть $C_1(1) = 1$, $C_2(1) = 4$, $C_1(2) = 2$, $C_2(2) = 4$. Функция

$$\begin{aligned} D(x(1), x(2)) &= x_1(1)(1 - 2x_1(1)) + 12x_2(1)(1 - x_2(1)) + 2x_1(2)(3 - 2x_1(2)) + 12x_2(2)(1 - x_2(2)) + \\ &+ 2x_1(1)x_2(1) + 3x_1(2)x_2(2) \end{aligned}$$

достигает наибольшего значения, приблизительно равного 10.2103, на множестве G при $x_1^*(1) \approx 0.5217$, $x_2^*(1) \approx 0.5434$, $x_1^*(2) \approx 0.9836$, $x_2^*(2) \approx 0.6229$ и управлениях $u_1^*(1) \approx 0.3333$, $u_2^*(1) = 0.6$, $u_1^*(2) \approx 0.6235$, $u_2^*(2) \approx 0.5793$.

Литература

1. Шлюфман К.В., Фрисман Е.Я., Неверова Г.П. Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром // Нелинейная динам., **13**:3 (2017), 363-380.
2. Belyakov A.O., Veliov V.M. On optimal harvesting in age-structured populations // Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making: Essays in Honor of Richard F. Hartl, **22** (2016), 149-166.
3. Давыдов А.А., Мельник Д.А. Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // Тр. ИММ УрО РАН, **27**:2 (2021), 99-107.
4. Егорова А.В., Родина Л.И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки., **29**:4 (2019), 501-517.
5. Родина Л.И., Черникова А.В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // Тр. ИММ УрО РАН, **29**:1 (2023), 167-179.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ МАГИСТРАЛЬНОГО ЭФФЕКТА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К АНАЛИЗУ КРИЗИСА НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ

Н.В. Трусов

trunick.10.96@gmail.com

УДК 519.863

В работе исследуется модель группового поведения агентов с подражательным поведением на основе концепции игр среднего поля. Задача формализована в виде системы связанных уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка и Гамильтона – Якоби – Беллмана. Для её решения разработан специальный численный метод решения данной краевой задачи, получены результаты моделирования среднесрочной динамики котировок репрезентативной акции на Шанхайской фондовой бирже в период кризиса 2015 г.

Ключевые слова: математическое моделирование, игры среднего поля, магистральный эффект, численные методы.

В работе развивается подход к исследованию кризисов фондовых рынков на основе исследования группового поведения агентов. Мотивировкой изучения финансового рынка является прошедший кризис на Шанхайской фондовой бирже в 2015г. Роль экономических агентов играют высокочастотные трейдеры. Для описания их поведения используется модификация модели торгов акциями из работы [1]. Данная модель описывает поведение высокочастотных трейдеров, пытающихся извлечь прибыль из колебаний цены акции. Принимая во внимание факт большого числа высокочастотных трейдеров, их поведение можно описать с помощью концепции игр среднего поля: трейдер в каждый момент времени имеет информацию о среднем положении остальных трейдеров и принимает решение о дальнейшей стратегии, независимо от действий остальных участников финансового рынка. Данное поведение можно описать с помощью системы уравнений в частных производных: уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана, основываясь на специальном виде функции цены, эволюционирующей в обратном времени, и уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка, эволюционирующего в прямом времени, описывающее эволюцию плотности распределения высокочастотных трейдеров. Функция цены высокочастотных трейдеров включает в себя подражательное поведение по отношению к другим участникам финансового рынка, отвращение к резким изменениям в торговых стратегиях, а также предполагает наличие магистралей: участники стремятся иметь определённый запас акций, находясь в открытых позициях. Задача рассматривается на конечном временном отрезке.

Наличие краевых условий в начальный и конечный моменты времени и рассматриваемого магистрального эффекта характеризуют плохую обусловленность задачи. Это приводит к численным трудностям решения краевой задачи уравнений в частных производных. В [2] предложен подход к численному анализу модели группового поведения на основе концепции игры среднего поля. Подход основан на построении задачи минимизации функционала от функции распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве. Ограничения в этой вариационной задаче задаются уравнением Колмогорова – Фоккера – Планка и начальными условиями на функцию распределения. Функционал подбирается таким образом, чтобы сопряженные переменные (множители Лагранжа) в этой вариационной задаче удовлетворяли уравнению Гамильтона – Якоби – Беллмана в исходной постановке игры среднего поля, а условия трансверсальности совпадали с условиями на функции цены в конечный момент времени. При определённых ограничениях имеет место редукция системы уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям Риккати [1]. Данная редукция используется как тестовый пример для анализа сходимости численного метода.

На основе теории спроса Парето используется обобщённый непараметрический метод построения экономических индексов объёмов торгов китайских инвестиционно-банковских компаний, динамика акций которых привела к кризису. Концепция игр среднего поля применена для описания поведения экономических агентов и воспроизведения динамики агрегированного индекса цен основных инвестиционных банков Китая в кризисный период. На качественном уровне получены результаты моделирования среднесрочной динамики котировок репрезентативной акции на Шанхайской фондовой бирже в период кризиса 2015 г. Результаты моделирования опубликованы в работах [3], [4].

Литература

1. *Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C., Zirilli F.* A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control // *Applied Mathematics*, **5**, (2014), 3091-3116.
2. *Lachapelle A., Salomon J., Turinici G.* Computation of mean field equilibria in economics // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **20**:4, (2010), 567-588.
3. *Trusov N.* Numerical study of the stock market crises based on mean field games approach // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **29**:6, (2011), 849-865.
4. *Kuts A., Trusov N.* Analysis of the Stock Market Crisis Based on Mean Field Games Concept // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **45**:1, (2024), 271-285.

СОЦИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ОБЩЕСТВА: ОТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДО УПРАВЛЕНИЯ

М.А. Шишленин, А.И. Глухов

m.a.shishlenin@mail.ru, a.glukhov@g.nsu.ru

УДК 519.62

Исследована математическая модель (SIR типа) социальных протестов на основе системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработан и реализован численный метод решения прямой и обратной задачи. Проведен анализ чувствительности и идентифицируемости параметров к данным обратной задачи о численности протестующих, позволяющий определить, какие факторы оказывают наиболее сильное влияние на динамику протестов. Обратная задача сведена к минимизации целевого функционала. Математическая модель апробирована на протестном движении “Желтые жилеты” 2018–2019 во Франции. Показано, что математическая модель хорошо описывает динамику протестов.

Ключевые слова: социальные протесты, обратные задачи, математическое моделирование, динамические системы.

В последние годы во всем мире наблюдается рост социальной напряженности общества, которая проявляется в виде социальных протестов, иногда возникающих спонтанно. Понимание динамики уличных протестов и всестороннее исследование факторов, которые могут повлиять на их возникновение, продолжительность, а также интенсивность, принципиально важно для стабильного и устойчивого развития общества. Математическое моделирование и определение параметров математических моделей на основе решения обратных задач все чаще используется для построения сценариев социальной динамики общества, а также позволяет ввести возможность управления социальными явлениями.

Исследована математическая модель (SIR типа) динамики социальной напряженности на основе системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Всё общество разделяется на четыре группы: S — потенциальные участники протеста, I — новые протестующие, недавно присоединившиеся к движению, C — опытные протестующие и R — бывшие участники движения. Предполагается, что активные протестующие ($I + C$) есть совокупность вновь вступивших (I) и опытных протестующих (C). Первые вступают в социальное движение из группы потенциальных участников (S) в результате взаимодействия с активными протестующими. Как новые, так и опытные участники с течением времени покидают протестное движение, переходя в группу бывших участников (R).

Разработан и реализован численный метод решения прямой задачи. Проведен анализ чувствительности и идентифицируемости параметров к данным обратной задачи о численности протестующих, позволяющий определить, какие факторы оказывают наиболее сильное влияние на динамику протестов. Обратная задача сведена к минимизации целевого функционала. Реализован численный метод решения обратной задачи на основе метода глобальной оптимизации. Математическая модель апробирована на протестном движении “Желтые жилеты” 2018–2019 во Франции. Проведена работа по поиску и обработке статистических данных протестов. Показано, что математическая модель хорошо описывает динамику протестов [1]. Показано, что привлечение априорной информации о решении обратной задачи, позволяет существенно снизить требования на вычислительные ресурсы [2].

Предложена модернизация математической модели, в которой появляется возможность управления социальными протестами [3].

Работа М.А. Шишленина выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, проект № FWNF-2024-0001. Работа А.И. Глухова выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации No. 075-15-2022-281.

Шишленин Максим Александрович, д.ф.-м.н., профессор РАН, заместитель директора по науке, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Глухов Антон Иосифович, Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия)

Литература

1. *Alsulami A., Glukhov A., Shishlenin M., Petrovskii S.* Dynamical modelling of street protests using the Yellow Vest Movement and Khabarovsk as case studies. *Scientific Reports*. 2022, vol. 12, no. 1, 20447.
2. *Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.* Quasi-solution in inverse coefficient problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2008, Vol. 16, No. 6, pp. 707–715.
2. *Petrovskii S., Shishlenin M., Glukhov A.* Understanding street protests: from a mathematical model to protest management. *Proceedings of the National Academy of Sciences* (2024, to appear).

ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ: ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ

М.А. Шишленин, С.И. Кабанихин, Н.С. Новиков

m.a.shishlenin@mail.ru, ksi52@mail.ru, novikov-1989@yandex.ru

УДК 519.62

Рассматриваются обратные задачи электроакустической томографии, математическая модель которой основана на законах сохранения. Исследована совмещенная постановка обратной задачи для системы уравнений акустики и электродинамики определения акустических и электромагнитных параметров среды по измерениям на границе исследуемой области.

Ключевые слова: электроакустическая томография, обратные задачи, машинное обучение, законы сохранения, регуляризация.

Рассматриваются обратные задачи электроакустической томографии [1], математическая модель которой основана на законах сохранения [2]. Исследована совмещенная постановка обратной задачи для системы уравнений акустики и электродинамики определения акустических и электромагнитных параметров среды по измерениям на границе исследуемой области. Разработанная математическая модель, позволяет контролировать соблюдение законов сохранения и допускает распараллеливание при решении прямых и обратных задач на суперЭВМ.

Обратная задача сведена к минимизации целевого функционала градиентным методом [2]. Разработан метод, оптимизирующий вычисление градиента функционала и позволяющий уменьшить требования к требуемой памяти RAM в два раза и увеличивающий скорость вычислений на 10–25% в зависимости от количества ядер [3].

Разработан метод решения обратной задачи на основе технологий машинного обучения [4]. Показано, что метод находит решение за 0,01 сек., предварительно необходимо 35 часов на подготовку тренировочных датасетов и обучение нейросети. Коэффициентная обратная задача градиентным методом при этом дает приближенное решение за 7 часов.

Приведены результаты численных расчетов с применением технологии машинного обучения. Проведен сравнительный анализ model-driven и data-driven методов.

Литература

1. *Duric N., Littrup, P., Li C. et. al.* Breast ultrasound tomography: Bridging the gap to clinical practice. *Proc. SPIE*. (2012). 8320, 832000.
2. *Kabanikhin S.I., Klyuchinskiy D.V., Novikov N.S., Shishlenin M.A.* Numerics of acoustical 2D tomography based on the conservation laws. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. (2020). 28(2), 287–297.
3. *Klyuchinskiy D.V., Novikov N.S., Shishlenin M.A.* CPU-time and RAM memory optimization for solving dynamic inverse problems using gradient-based approach. *Journal of Computational Physics*. (2021). Vol. 439, 110374.
4. *Prikhodko A., Shishlenin M.A., Novikov N.S., Klyuchinskiy D.V.* Encoder neural network in 2d acoustic tomography. *Applied and Computational Mathematics*. 2024, 23(1), 83–98.

Работа М.А. Шишленина, Н.С. Новикова выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, проект № FWNF-2024-0001. Работа С.И. Кабанихина выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации No. 075-15-2022-281.

Шишленин Максим Александрович, д.ф.-м.н., профессор РАН, заместитель директора по науке, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Кабанихин Сергей Игоревич, д.ф.-м.н., член-корр. РАН, директор Международного математического центра, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Новиков Никита Сергеевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Секция 14

Математические методы искусственного интеллекта

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ В НАУКЕ О ДАННЫХ И ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ

С.Т. Главацкий, Р.Р. Айдагулов, В.В. Борисенко, И.Г. Бурыкин, И.Б. Кожухов,
В.В. Тензина, А.В. Шокуров

*sergey.glavatsky@math.msu.ru, rustem.aidagulov@math.msu.ru, vladimir.borisenko@math.msu.ru,
ilia.burykin@math.msu.ru, kozhuhov_i_b@mail.ru, viktorija.tenzina@math.msu.ru,
anton.shokurov@math.msu.ru*

УДК 004.8; 004.62; 004.92

В докладе представлен обзор основных достижений кафедры теоретической информатики мехмата МГУ имени М.В. Ломоносова в области развития математических методов искусственного интеллекта.

Ключевые слова: искусственный интеллект, машинное обучение, анализ данных.

Основные направления научных исследований на кафедре:

- **фундаментальные основы теоретической информатики.** Алгебраические и геометрические структуры в основаниях науки о данных. Анализ систем кодирования с использованием алгебраических систем (включая квантовые коды); исследование методов распределенных вычислений в контексте создания систем гомоморфного шифрования;

Главацкий Сергей Тимофеевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теоретической информатики

Айдагулов Рустем Римович, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теоретической информатики

Борисенко Владимир Витальевич, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теоретической информатики

Бурыкин Илья Геннадиевич, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теоретической информатики

Кожухов Игорь Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теоретической информатики

Тензина Виктория Васильевна, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теоретической информатики

Шокуров Антон Вячеславович, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теоретической информатики

- **большие данные: методы анализа, алгоритмы.** Создание новых и адаптация ранее созданных алгоритмов интеллектуального анализа данных. Разработка новых методов и алгоритмов решения фундаментальных задач обработки больших наборов данных (кластеризация, осреднение, снижение размерности, уменьшение объема и др.);
- **разработка эффективных методов и алгоритмов искусственного интеллекта.** Исследование методов быстрого умножения, комбинаторных алгоритмов и алгоритмов дискретной оптимизации;
- **3D-моделирование и компьютерная геометрия.** Исследования в компьютерной графике: построение трехмерных моделей изоповерхностей; построение оптимальных тетраэдрических сетей. Разработка трехмерных алгоритмов сегментации, применение методов оптимизации при построении двумерных и трехмерных изображений с приложениями в медицине;
- **машинное зрение.** Разработка нейронных сетей и методов глубокого обучения для решения задач распознавания образов в условиях неполной или нечеткой визуальной информации. Исследования в области машинного зрения и машинного обучения, компьютерной графики и сжатия данных.

Фундаментальные основы теоретической информатики

Изучены **полигоны над полугруппами:** в частности, продолжено исследование условий конечности в полигонах над полугруппами, их взаимодействие друг с другом и со структурными свойствами полигона. Исследована связь условий конечности с алгебраическими конструкциями — прямым произведением, копроизведением, взятием гомоморфного образа и подполигона [1, 2]. Описаны полигоны над прямоугольной связкой, имеющие модулярную решётку конгруэнций, а также с дистрибутивной и с цепной (линейно упорядоченной) решёткой.

Развита **теория топологических радикалов Джекобсона**, в том числе, для неассоциативных алгебр (в квазирегулярном и модульном вариантах определения). Этот вклад продолжает многолетнее исследование коллектива авторов [3, 4]. Изучено пересечение степеней топологического радикала Джекобсона. Рассмотрены **топологические аналоги артиновости, нётеровости и конечной порождённости** для топологических модулей. Построена **криптографическая схема** на основе топологически простых колец, а также топологически неприводимых модулей [5].

Разработаны методы **гомоморфной криптографии** (на основе частично гомоморфных криптографических систем), а также развиты технологии распределенных вычислений для реализации этих методов при решении прикладных задач. Проанализированы основы теории распределенных вычислений в интересах задач гомоморфной криптографии.

Большие данные: методы анализа, алгоритмы

Разработан новый метод **кластеризации данных** в многомерном пространстве, основанный на использовании свойств связности набора данных, исходя из осредненных значений плотности распределения точек данных в метрическом пространстве [6]. Продолжены исследования **в области осреднения и получения осредненных уравнений**, учет эффектов нелокальности. Достигнуто лучшее применение **конфигурационной размерности в больших данных**, её связи с процессом осреднения. Продолжены исследования в области осреднения и получения скрытой информации из больших данных.

Продолжены исследования в **области кластеризации**. Большинство известных методов дают существенно различающиеся результаты не только при малых изменениях значений данных, но и при изменении нумерации (порядка подачи данных) точек. Разработан метод кластеризации, который дает устойчивые результаты даже при относительно больших перемещениях начальных данных, либо при их малых деформациях.

Разработка эффективных методов и алгоритмов искусственного интеллекта

Продолжено изучение **бигрупповых алгебр** и их приложений в различных областях математики, физики. Развита теория преобразований Фурье в алгебре матриц.

Исследованы **алгоритмы быстрого умножения** и обращения квадратных матриц. Получен алгоритм обращения со сложностью двух умножений. Исследовано общее понятие преобразования Фурье в некоммутативных алгебрах, получен алгоритм умножения больших квадратных матриц с использованием преобразование Фурье. Продолжены исследования в области градуированных вычислений [7].

3D-моделирование и компьютерная геометрия

Разработаны **алгоритмы трехмерного восстановления** изоповерхностей с субпиксельной точностью. Реализован алгоритм упрощения триангуляции поверхности трехмерного объекта с сохранением ее формы и топологии. Алгоритм позволяет избавиться от треугольников очень маленького размера и сократить число треугольников с нескольких миллионов до сотен тысяч.

Проведена работа по реализации проекта создания **гидродинамической модели кровообращения** в области сердца по данным компьютерной томографии пациента. Целью является неинвазивная диагностика ишемической болезни сердца и других проблем пациента, связанных с нарушением кровоснабжения сердечных мышц из-за стеноза и кальцинирования коронарных артерий [8].

Машинное зрение

Осуществлена адаптация современных аналитических алгоритмов, алгоритмов прогнозирования и **методов машинного обучения** к решению ряда конкретных задач обработки больших данных, в особенности в **машинном зрении** [9]. Качество работы моделей машинного обучения, в частности, в области глубоких нейронных сетей напрямую зависит от качества обучающей выборки. Современный взгляд на решение упомянутых проблем заключается в формировании/синтеза выборок (рендеринг в трехмерной студии). Данные можно формировать разного характера — как табличные, так и визуальные. Мы концентрируемся на визуальных данных.

Реализованы проекты:

- по определению вирусов и сортовой однородности по визуальной и спектральной информации по посадкам картофеля;
- по таксации леса (определение его породного состава и высоты) по спутниковым мультиспектральным снимкам, цветным изображениям с БПЛА и лидарным данным;
- по регистрации мультимедийных данных;
- по восстановлению трехмерного объекта по фотографиям;
- по разработке методов сжатия изображений большого размера.

Студенты и аспиранты кафедры неоднократно принимали участие в международных соревнованиях и конференциях по робототехнике ERC (European Rover Challenge), где постоянно отмечались наградами [10].

Литература

1. *Кожухов И.Б., Михалев А.В., Тищенко А.В.* Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп. — М.: Интуит, 2021. — 160 с.
2. *Кожухов И.Б., Михалев А.В.* Об алгебраической теории автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25, № 4. — С. 45–51.
3. *Главацкий С.Т., Михалев А.А., Бурыйкин И.Г.* Методы теории алгебраических структур и компьютерной алгебры в информатике и разработке эффективных алгоритмов искусственного интеллекта // Вестник Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. — 2023. — Т. 1, № 2 (31). — С. 22–26.
4. *Главацкий С.Т., Голубков А.Ю., Михалев А.В.* Топологические радикалы Джекобсона, III // Фундаментальная и прикладная математика. — 2022. — Т. 24, № 3.
5. *Тензина В.В.* Применение топологически простых колец в криптографии // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2022. — Т. 26, № 1. — С. 116–120.
6. *Aidagulov R.R., Glavatsky S.T., Mikhalev A.V.* Clustering models // Journal of Mathematical Sciences. — 2022. — Vol. 262, no. 5. — P. 603–616.

7. Айдагулов Р.Р., Главацкий С.Т. Градуированные вычисления // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2019. — Т. 15, № 2. — С. 274–282.

8. Borisenko V.V., Veselova T.N., Ternovoy S.K., Chepovskiy A.M. Reconstruction of 3d-geometry of coronary arteries // J. Math. Sciences. — 2022. — Vol. 262, no. 5. — P. 617–629.

9. Шокуров А.В. Машинное зрение: от задачи до аппаратной реализации // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2022. — Т. 26, № 1. — С. 62–81.

10. Замилев Э.И., Долгий А.С., Шокуров А.В. Планирование движения автономного робота в лабиринте с препятствиями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2022. — Т. 26, № 1. — С. 267–272.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ, УЛУЧШАЮЩИХ ОБОБЩАЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ МОДЕЛЕЙ, И АНАЛИЗ ИХ ВЛИЯНИЯ НА ЛАНДШАФТ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ

С.Ю. Елистратов, Т.А. Южаков, Д.П. Ветров

semenelist@gmail.com, tyuzhakov@hse.ru, dvetrov@constructor.university

УДК 004.852

В данной работе рассматриваются методы оптимизации глубоких нейронных сетей, направленные на улучшение обобщающей способности и использующие свойства ландшафта функции потерь на обучающей выборке. Проведено сравнение методов на различных задачах и выявлены особенности их применения.

Ключевые слова: глубокое обучение, оптимизация, ландшафт функции потерь.

Одной из ключевых задач машинного обучения является улучшение обобщающей способности (генерализации) моделей. Однако, оценка генерализации моделей на основе лишь обучающей выборки является нетривиальной задачей. Множество исследований как теоретически, так и практически показывают наличие связи между шириной локального минимума, в который сошлись параметры нейронной сети в процессе обучения, и обобщающей способностью. Широкие минимумы являются более предпочтительными, так как малые пертурбации в пространстве весов слабо изменяют значение функции потерь.

В статье [1] был предложен метод оптимизации Sharpness-Aware Minimization (SAM), идея которого заключается в явной максимизации ширины минимума.

Определение 1. Пусть w — параметры нейронной сети, $L(w)$ — функция потерь. Тогда метод SAM заключается в оптимизации функции:

$$L_{\text{SAM}}(w) = \max_{\|\epsilon\| < \rho} L(w + \epsilon).$$

Данный метод позволяет сходиться в широкие минимумы за счет регуляризации $\max_{\|\epsilon\| < \rho} L(w + \epsilon) - L(w)$. Кроме того, в статье [2] авторы показали, что данная регуляризация эквивалентна минимизации нормы градиента: $\|\nabla L(w)\|$. Норма градиента также является хорошей метрикой ширины минимума, так как дает оценку на константу Липшица функции потерь.

Многие современные нейронные сети обладают свойством масштабной инвариантности: домножение весов сети на положительную константу не влияет на выход модели. Данное свойство возникает при использовании нормализационных слоев. При обучении таких сетей на сфере фиксированного радиуса возникает четкая зависимость между шириной минимума и значением

Елистратов Семен Юрьевич, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Южаков Тимофей Алексеевич, научный сотрудник, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Москва, Россия)

Ветров Дмитрий Петрович, к.ф.-м.н., профессор, Constructor University (Бремен, Германия)

скорости обучения (learning rate), что позволяет использовать такие модели как инструмент для изучения ландшафта функции потерь [3].

В работе было исследовано применение метода SAM для масштабно-инвариантных сетей. Было показано как именно изменяется ландшафт функции потерь, а также описаны причины, по которым метод может сходиться к седловым точкам.

Также в работе рассматривались методы улучшения обобщающей способности на основе максимизации отступа [4]. Отступ (margin) отвечает за уверенность модели в предсказании — следовательно является хорошей метрикой устойчивости моделей к пертурбациям и, соответственно, обобщающей способности.

Было разработано два метода максимизации отступа:

Определение 2. Пусть l — вектор логитов (ненормированных предсказаний) модели. l_t — логит, соответствующий таргету. Тогда метод GAP:

$$L_{\text{GAP}}(w) = \text{CrossEntropy}(y_t, \text{Softmax}(l - g_t)),$$

где g_t — вектор из нулей с g на t -ой позиции, g — гиперпараметр модели.

Пусть $L_M(w)$ — некоторая функция потерь на основе отступа (HingeLoss). Тогда метод SAMMargin:

$$L_{\text{SAMMargin}}(w) = L(w + \rho \nabla L_M(w)).$$

Было проведено множество экспериментов на различных прикладных задачах компьютерного зрения, которые подтвердили преимущество предлагаемых методов и позволили прояснить наблюдаемые эффекты.

Литература

1. Foret P., Kleiner A., Mobahi H., Neyshabur B. Sharpness-aware minimization for efficiently improving generalization. // arXiv preprint arXiv:2010.01412. 2020 Oct 3.
2. Zhao Y., Zhang H., Hu X. Penalizing gradient norm for efficiently improving generalization in deep learning. // In International Conference on Machine Learning. pp. 26982-26992. PMLR.
3. Kodryan M., Lobacheva E., Nakhodnov M., Vetrov D. P. Training Scale-Invariant Neural Networks on the Sphere Can Happen in Three Regimes. // Advances in Neural Information Processing Systems, 35, 2022, 14058–14070.
4. Deng J., Guo J., Xue N., Zafeiriou S. Arcface: Additive angular margin loss for deep face recognition. // In Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition 2019, 4690–4699

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ПРЕДСКАЗАНИЯ ЯВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ НЕЯВНОГО В РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

М.Ю. Трапезников

s02190217@gse.cs.msu.ru

Современные рекомендательные системы имеют возможность предсказания двух видов взаимодействия: явного и неявного. Неявным взаимодействием называют минимальные возможные взаимодействия с объектом или даже их отсутствие (например, нажатие, показ объекта). Явным взаимодействием принято называть те взаимодействия, которые позволяют определить заинтересованность пользователя в объекте (например, объект понравился пользователю, объект не понравился пользователю). Целью данной работы является исследование существующих и разработка собственных алгоритмов предсказания явного взаимодействия на основе неявного в рекомендательных системах, показывающих высокое качество и скорость работы. Данные методы позволяют решать одну из актуальных задач рекомендательных систем – задачу формирования

интересных пользователю рекомендаций исходя из известных неявных взаимодействий пользователя с системой. В работе рассматриваются существующие способы предсказания явного взаимодействия из неявного при помощи линейных моделей машинного обучения [1] и нейросетевые методы для предсказания, в которых используются трансформерные архитектуры [2], анализируются их достоинства и недостатки. Предлагаются собственные эвристические подходы решения поставленной задачи, использующие линейные модели. По результатам экспериментального исследования, рассмотренные линейные модели превзошли нейросетевые методы по производительности. Более того, в большинстве рассмотренных наборов данных линейные модели превзошли по качеству нейросетевые аналоги.

Литература

1. *Frolov E., Oseledets I.* Fifty shades of ratings: how to benefit from a negative feedback in top-N recommendations tasks // Proceedings of the 10th ACM Conference on Recommender Systems.— 2016. — С. 91–98.
2. *Tran Q. et al.* From Implicit to Explicit feedback: A deep neural network for modeling sequential behaviours and long-short term preferences of online users // Neurocomputing.— 2022. — Т. 479. — С. 89–105.

ИНТЕГРАЦИЯ СИСТЕМ ВИДЕОАНАЛИТИКИ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ОБЩЕСТВЕННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

А.Г. Шишкин, М.В. Никонов, М.О. Шмитов, А.А. Долматов

shishkin@cs.msu.ru, nikon.mv.cmc@gmail.com, iceiceice_2015@mail.ru, zarokdol@yandex.ru

УДК 004.891.3

В рамках данной работы была рассмотрена задача создания сервиса видеоаналитики для общественных камер наблюдения в государственных учреждениях с акцентом на использование нейросетевых технологий для повышения эффективности систем безопасности. Авторы фокусируются на разработке алгоритмов, способных идентифицировать не только визуальные признаки наличия оружия, но и определенные позы, что позволяет минимизировать риски ложноположительных срабатываний. Результаты показали, что интеграция нейросетевых технологий способствует созданию надежных и эффективных систем видеоаналитики, адаптируемых к различным условиям и способных к обработке данных в реальном времени. В дополнение к этому, были проведены стресс-тесты, которые подтвердили способность системы поддерживать высокое качество аналитики даже при интенсивных нагрузках.

Ключевые слова: видеоаналитика, обработка изображений, обнаружение угроз, искусственный интеллект.

Шишкин Алексей Геннадиевич, д.ф.-м.н., профессор, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра автоматизации научных исследований

Никонов Максим Викторович, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра автоматизации научных исследований

Шмитов Максим Олегович, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра информационной безопасности

Долматов Александр Анатольевич, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра автоматизации научных исследований

В последние годы применение систем видеонаблюдения стало повсеместным в усилиях по повышению общественной безопасности и управлению городскими инфраструктурами. С ростом объема собираемых видеоданных возникает необходимость в их эффективной обработке и анализе, что представляет значительные технические и вычислительные вызовы. Введение нейросетевых технологий в процессы видеоаналитики открывает новые возможности для решения этих задач. Использование искусственного интеллекта позволяет не только автоматизировать процесс анализа данных с камер наблюдения, но и значительно повысить точность и скорость распознавания объектов и событий.

Современные достижения в области машинного обучения и, в частности, глубоких нейронных сетей показали свою высокую эффективность в задачах компьютерного зрения. Применение этих технологий к анализу видеопотоков с общественных камер наблюдения обещает существенные улучшения в области урбанистики, транспортной логистики и безопасности. Однако разработка таких систем требует тщательного подхода к обучению моделей, выбору архитектур и оптимизации вычислительных процессов.

Обеспечение безопасности в общественных местах является ключевым аспектом поддержания качества жизни и функционирования городов и сообществ. Общественные пространства, будучи местами сбора, центрами активности и социального взаимодействия, сталкиваются с рядом вызовов, таких как управление толпой, терроризм, акты насилия, преступления, а также вопросы наблюдения и приватности [1]. Решения, включающие умные системы видеонаблюдения на основе методов искусственного интеллекта, могут обнаруживать подозрительные действия и потенциальные угрозы, соблюдая при этом права на приватность. Эти системы способны отправлять мгновенные уведомления уполномоченным органам, обеспечивая оперативное реагирование [2]. Создание безопасного общественного пространства требует непрерывной адаптации и принятия технологий для решения указанной задачи без ущерба для открытости и доступности пространств.

Управление и защита городских общественных пространств остаются одним из приоритетных направлений местных и региональных властей, что связано с их ключевой ролью в привлекательности городов и способствовании социальному включению всех групп населения, а также предложением возможностей для культурного развития, проведения досуга и торговли. Эти области долго были ключевым направлением работы для Европейского форума по городской безопасности (EFUS), сети, объединяющей около 250 городов всех размеров из 16 европейских стран, и результатом проекта PACTESUR (Защита союзных городов от терроризма при обеспечении безопасности городских зон), который проводился с января 2019 по декабрь 2022 года [3]. Научная новизна данного проекта заключается в разработке алгоритмов, способных идентифицировать не только визуальные признаки наличия оружия, но и определенные позы, которые могут указывать на угрозу без использования видимых атрибутов. Это минимизирует риск ложноположительных срабатываний, которые могут происходить при ошибочной идентификации объектов, не представляющих угрозу, таких как мобильные телефоны или зонты.

Использование умных тревожных систем и камер CCTV, интегрированных с интеллектуальными аналитическими алгоритмами, позволило авторам проанализировать видеозаписи и обнаружить аномалии в реальном времени [4]. В исследовании использовались данные с камер видеонаблюдения с черно-белыми видеопотоками с частотой 60 кадров в секунду, установленных в школьных помещениях и на прилегающей территории. Данные брались за 2 недели непрерывной съемки и составили около 1.2 миллиона кадров. Разметка использовала ручные аннотированные видеоданные, где каждый объект угрозы размечен и классифицирован с делением потока на кадры. Итоговый алгоритм работал только с кадрами-изображениями из потока, дополнительно был добавлен признак времени для использования архитектуры LSTM и работы с временными рядами. Обучающая выборка класса «оружие» была увеличена с помощью архитектуры GAN и составила около 20000 примеров.

Благодаря использованию чёрно-белого видеопотока с высокой частотой кадров данные были эффективно обработаны с высокой точностью в реальном времени. Основываясь на наборе черно-белых видеоданных с частотой 60 кадров в секунду, полученных от камер общеобразовательных учреждений, были разработаны и протестированы три модели нейросети: Модель А на базе Faster R-CNN, Модель В, использующая архитектуру VGG-16, и Модель С с применением ResNet50 совместно с методом iForest для выявления аномалий по построенным признакам.

Каждая из моделей была оценена на основе таких показателей, как точность (Precision), полнота (Recall) и площадь под кривой ошибок (ROC AUC).

Для увеличения размера и разнообразия обучающего множества использовались различные методы аугментации данных, включая геометрические преобразования, такие как повороты и масштабирование, и фотометрические изменения, такие как изменение яркости и контраста.

Для учета несбалансированности классов в данных были применены методы перевзвешивания классов и увеличения выборки для миноритарных классов.

Таблица 1: Результат точности экспериментов

| Model | Precision | Recall |
|---------|-----------|--------|
| Model A | 0.65 | 0.70 |
| Model B | 0.63 | 0.65 |
| Model C | 0.70 | 0.75 |

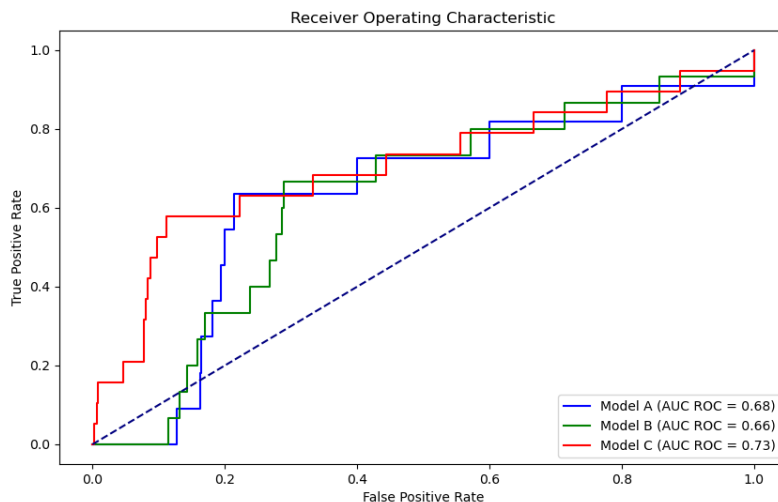


Рис. 1: ROC кривые моделей

На основании табл. 1 и рис. 1 можно сделать вывод, что Model C показывает лучшую точность и полноту и имеет большее значение площади под кривой ошибок Receiver Operating Characteristic (AUC ROC) по сравнению с двумя другими моделями.

Также были проведены стресс-тесты системы, чтобы оценить её производительность в условиях высокой нагрузки и различных сценариев использования. Стресс-тесты систем видеоналиктики позволяют оценить их устойчивость и производительность при максимальных нагрузках, которые могут возникнуть в реальных условиях эксплуатации. Эти тесты важны для определения предельных возможностей системы, выявления узких мест и оптимизации ресурсов.

Результаты стресс-тестов (рис. 2) подтвердили, что система способна работать стабильно и эффективно в разнообразных условиях и с различными типами видеопотоков.

По мере увеличения количества запросов в секунду (QPS) время отклика системы возрастает логарифмически, указывая на нелинейный по отношению к нагрузке рост времени отклика, что может быть признаком того, что система начинает испытывать затруднения при высоких нагрузках.

Точность обнаружения угроз начинает уменьшаться по мере увеличения QPS. Снижение точности может быть обусловлено перегрузкой системы, однако при этом качество остается всё

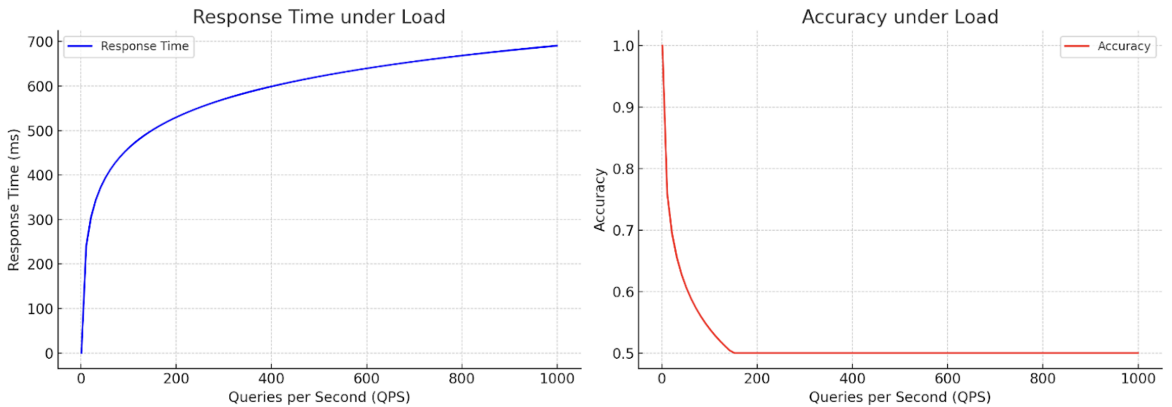


Рис. 2: Результат стресс-тестов

равно сравнительно высоким.

Результаты показывают, что предложенная модель на основе глубокого обучения может быть реализована в реальном времени для обнаружения объектов и распознавания действий. Добавленные функции, такие как обнаружение автомобильных аварий, падений людей и нарушения социальной дистанции, могут быть использованы для реализации системы видеонаблюдения в реальном времени, которая может помочь спасти жизни и защитить людей. Такая система видеонаблюдения в реальном времени может быть установлена на уличных и дорожных камерах, а также в системах CCTV.

В результате, была создана полнофункциональная система видеоаналитики, которая может быть адаптирована для использования в различных областях, включая общественную безопасность, транспорт и управление городскими инфраструктурами. Она обеспечивает высокую степень автоматизации процессов мониторинга и способна в реальном времени предоставлять данные для принятия решений и оперативного реагирования на угрозы.

Литература

1. *Beqaj, B.* Public Space, public interest and Challenges of Urban Transformation // IFAC-Papers online (2016), 49(29), 320–324. DOI: [10.1016/j.ifacol.2016.11.087](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.11.087)
2. Physical security in public spaces: challenges and simple solutions, <https://www.icaras.nz/blog/physical-security-in-public-spaces-challenges-and-simple-solutions> Дата обращения 18 февраля 2023.
3. Publication Pactesur https://issuu.com/efus/docs/publication_pactesur_en_v5 Дата обращения 18 февраля 2023.
4. *Ahmed Jamal Alshaibi, Mustafa Majid Al-Ani, Juliet Kadum,* The effect of integration and effectiveness of artificial neural networks on information security tasks // AIP Conf. Proc. (2023); Vol. 2591 (1), DOI: [10.1063/5.0121244](https://doi.org/10.1063/5.0121244)

HYBRID ARTIFICIAL INTELLIGENCE

S.S. Goncharov, A.V. Nechesov, D.I. Sviridenko

s.s.goncharov@math.nsc.ru, nechesov@math.nsc.ru, dsviridenko47@gmail.com

The report examines the compatibility and applicability of various mathematical approaches in the construction of reliable and trusted artificial intelligence algorithms. This hybrid approach allows us to take advantage of both large language models (LLMs) and generative AI as well as logical-probabilistic methods.

The report will present a new learning theory and knowledge hierarchy in AI. This theory is based on the concept of the task approach proposed by A.N. Kolmogorov in the 1930s [1], and then quite fully formalized by Y.L. Ershov and K.F. Samohvalov in the 2000s [2]. Further, Goncharov, Sviridenko and Vityaev developed this direction in their work [3]. Carl Hempel's work on the requirement of maximum specificity also played an important role in the development of learning theory [4].

By probabilistic knowledge we mean the next triple:

$$(F(x, y), t(x), p)$$

where $F(x, y)$ a task that has the following form:

$$F(x, y) : \forall x \exists y \Phi(x, y) \rightarrow \Psi(x, y)$$

$t(x)$ is a special L*-program [5]–[7] which is solution to task $F(x, y)$ with probability p .

On a set of probabilistic knowledge, one can define a partial order

$$(F_1(x, y), t_1(x), p_1) \leq_{\varphi} (F_2(x, y), t_2(x), p_2)$$

which generates a hierarchy of knowledge.

References

1. *Kolmogoroff, A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // *Mathematische Zeitschrift*, 35(1), pp.58–65, 1932. DOI: [10.1007/bf01186549](https://doi.org/10.1007/bf01186549)
2. *Ershov Yu.L.; Samokhvalov, K.F.* Modern philosophy of Mathematics: Ailments and treatment.—Novosibirsk, 2007
3. *Vityaev, E.E.; Goncharov, S.S.; Sviridenko, D.I.* On the task approach to artificial intelligence // *Siberian Journal of Philosophy*, 17(4), pp.5–25. (In Russ.), 2019.
4. *Hempel C.G.* Maximal Specificity and Lawlikeness in Probabilistic Explanation // *Philosophy of Science*, v.35(2), pp. 116–133, 1968, <http://www.jstor.org/stable/186482>
5. *Goncharov, S.; Nechesov, A.* Semantic programming for AI and Robotics // *IEEE SIBIRCON*, Yekaterinburg, Russian Federation, 2022, pp. 810–815, DOI: [10.1109/SIBIRCON56155.2022.10017077](https://doi.org/10.1109/SIBIRCON56155.2022.10017077)
6. *Goncharov, S.; Nechesov, A.* Solution of the problem $P = L$ // *MDPI Mathematics*, **2021**, 12(17) 2102, DOI: [10.3390/math10010113](https://doi.org/10.3390/math10010113)
7. *Goncharov, S.; Nechesov, A.* Polynomial analogue of Gandy's fixed point theorem // *MDPI Mathematics*, **2021**, 9(17) 2102, DOI: [10.3390/math9172102](https://doi.org/10.3390/math9172102)

This work was performed within the state task of the Sobolev Institute of Mathematics (Project No. FWNF-2022-0011).

Sergei S. Goncharov, academician RAS, Sobolev Institute of Mathematics (Novosibirsk, Russia)
 Nechesov A.V., Ph.D., Sobolev Institute of Mathematics, (Novosibirsk, Russia)
 Sviridenko D.I., Sc.D., Institute of Philosophy and Law (Novosibirsk, Russia)

Секция 15

Математическая теория управления и оптимизация

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ДВУХЭТАПНЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ С НЕТОЧНО ЗАДАНЫМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Л.А. Артемьева, А.А. Дряженков
artemieva.luda@gmail.com, andrja@yandex.ru

УДК 519.853.62

Рассматривается задача квадратичной минимизации в гильбертовых пространствах при наличии линейного операторного ограничения и выпуклого квадратичного ограничения. Предлагается двухэтапный метод поиска решения задачи в случае, когда входные данные известны неточно, а классические оценки соответствующих уровней погрешностей недоступны. Доказана сильная сходимость вырабатываемых методом приближений к одному из оптимальных решений исходной задачи.

Ключевые слова: задача квадратичной минимизации, приближённые данные, регуляризация, экстраградиентный метод.

Рассматривается задача квадратичной минимизации

$$J(u) = \|Au - f\|_F^2 \rightarrow \min_{u \in U}, U = \{u \in U_0 \mid Bu = g, \|Qu - w\|_W^2 \leq R^2\}, \quad (1)$$

где $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$, $B \in \mathcal{L}(H \rightarrow G)$, $Q \in \mathcal{L}(H \rightarrow W)$ — заданные линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовых пространствах H , F , G , W . Элементы $f \in F$, $g \in G$, $w \in W$, число $R > 0$ и выпуклое замкнутое множество $U_0 \subset H$ также считаются заданными. Требуется построить устойчивые приближения к одному из оптимальных решений $u_* \in U$ задачи (1) в случае, когда вместо точных данных известны их приближения $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$, $\mathcal{B}_n \in$

Артемьева Людмила Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Дряженков Андрей Александрович, к.ф.-м.н., младший научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

$\mathcal{L}(H \rightarrow G)$, $\mathcal{Q}_n \in \mathcal{L}(H \rightarrow W)$, $f_n \in F$, $g_n \in G$, $w_n \in W$, $R_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, связанные с точными данными следующими оценками с известными уровнями погрешностей $h_n^-, h_n^+, \sigma_n, \sigma_n^+$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H^- \rightarrow F)} &\leq h_n^-, & \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow F^+)} &\leq h_n^+, \\ \|\mathcal{B}_n - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H^- \rightarrow G)} &\leq h_n^-, & \|\mathcal{B}_n - \mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow G^+)} &\leq h_n^+, \\ \|\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H^- \rightarrow W)} &\leq h_n^-, & \|\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(H \rightarrow W^+)} &\leq h_n^+, \\ \|f_n - f\|_F &\leq \sigma_n, & \|f_n - f\|_{F^+} &\leq \sigma_n^+, \\ \|g_n - g\|_G &\leq \sigma_n, & \|g_n - g\|_{G^+} &\leq \sigma_n^+, \\ \|w_n - w\|_W &\leq \sigma_n, & \|w_n - w\|_{W^+} &\leq \sigma_n^+, & |R_n - R| &\leq \sigma_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь H^-, F^+, G^+, W^+ — вспомогательные гильбертовы пространства, связанные с исходными пространствами непрерывными всюду плотными вложениями $H^- \subset H$, $F \subset F^+$, $G \subset G^+$, $W \subset W^+$. В отличие от традиционных оценок [1], операторные нормы в (2) являются более слабыми, что расширяет область обоснованного применения предлагаемого метода.

Для решения задачи (1) в предположениях (2) предлагается итерационный процесс, в котором базовым методом оптимизации является не градиентная, как в [2], а экстраградиентная [3,4] процедура, позволяющая избавиться от неудобного на практике требования стремления градиентных шагов к нулю, принятого в [2]. Каждая итерация метода состоит из двух этапов.

На первом этапе уточняется приближение J_{*n} к нижней грани J_* критерия $J(u)$ из исходной постановки (1). Для этого выполняется одна итерация экстраградиентного метода, нацеленного на поиск седловой точки регуляризованной функции Лагранжа исходной задачи (1); при этом основная переменная u изменяется в пространстве $H^- \subset H$.

На втором этапе выполняется одна итерация экстраградиентного метода, нацеленного на поиск седловой точки регуляризованной функции Лагранжа, соответствующей вспомогательной задаче минимизации:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u - f - \psi\|_{F^+}^2 + \|\mathcal{Q}u - w - \varphi\|_{W^+}^2 &\rightarrow \min_{u, \psi, \varphi}, \\ u \in U_0, \mathcal{B}u = g, \|\psi\|_F^2 &\leq J_{*n}, \|\varphi\|_W^2 \leq R^2, \end{aligned}$$

в которой основная переменная u находится в исходном пространстве H .

Основным результатом работы является доказательство того, что при выполнении аппроксимационных условий (2) с уровнями погрешностей $h_n^-, h_n^+, \sigma_n, \sigma_n^+ \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а также при выполнении определённых условий согласования с этими уровнями значений параметров регуляризации и шагов экстраградиентных итераций последовательность элементов $u_n \in H$, выработываемая на втором этапе общего итерационного процесса, сильно сходится к одному из оптимальных решений u_* исходной задачи (1):

$$\|u_n - u_*\|_H \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. — М.: Курс, 2017. 400 с.
2. Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М. О задаче квадратичной минимизации с неравномерными возмущениями в критерии и ограничениях // Тр. ИММ УрО РАН, **27:2** (2021), 19-34.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: В 2-х кн. — М.: МЦНМО, 2011. 1053 с.
4. Васильев Ф.П., Потапов М.М., Артемьева Л.А. Регуляризованный экстраградиентный метод в многокритериальных задачах управления с неточными данными // Дифференциальные уравнения, **52:11** (2016), 1504-1516.

АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ГРУППЫ НА ОСНОВЕ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Р.Р. Бегишев

begrusso@gmail.com

УДК 519.711.2, 004.942

Рассматривается задача формирования группы из однотипных роботов. Предложен функционал, обеспечивающий поддержание расстояния между роботами в допустимом диапазоне. Сформулирован алгоритм, включающий в себя использование обучения с подкреплением, минимизирующий данный функционал.

Ключевые слова: теория управления, обучение с подкреплением.

В последнее десятилетие групповая робототехника обретает всё большую популярность. Предложено множество задач, связанных с формированием кластеров из агентов, достижением ими какой-то цели в пространстве, обходом препятствий (как выпуклых, так и невыпуклых). В данной работе рассматривается задача формирования группы в точке. Существует достаточно много работ, посвящённых решению описанной проблемы, например, [1,2,3].

Для обучения модели и проведения наглядных экспериментов использовалась математическая модель двухколёсного робота. x_i, y_i — положение центра масс робота, θ_i — угол поворота робота относительно заданной системы координат, $i \in \overline{1, N}$, v_i — линейная скорость робота, w_i — поворотная скорость, $0 \leq v_i < v_{max}$, $|w_i| < w_{max}$:

$$\begin{cases} x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i \cos \theta_i(t) \\ y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + v_i \sin \theta_i(t) \\ \theta_i(t + \Delta t) = \theta_i(t) + w_i, \end{cases}$$

Пусть также $z_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ — позиция робота в момент времени t , а $d_{ij} = \|z_i - z_j\|$ — расстояние между роботами.

Для решения рассматриваемой задачи был предложен функционал, реализующий приближение на допустимое расстояние к другим роботам:

$$G_i = \frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^N d_{ij} - \eta \min_{i,j} d_{ij}$$

Каждому роботу необходимо минимизировать этот функционал, т.е. $G_i \rightarrow \min$. Результат будем считать успешным, если каждый робот в группе минимизировал свой функционал до необходимых значений K , где $K \in (K_{min}, K_{max})$, K_{min} — минимально допустимое значение функционала, а K_{max} — максимально допустимое значение.

Функция наград для модели формируется следующим образом. Так как роботы имеют возможность изменять свои линейные и угловые скорости, формируется множество стратегий A , элементы которого агенты могут выбирать на каждом шаге для изменения собственного положения в пространстве. Именно изменение и правильный выбор этих стратегий гарантирует максимизацию функции награды, что является обязательным условием успешного применения обучения с подкреплением. Такой подход гарантирует, что функционалы G_i будут минимизированы, если будет введена следующая функция:

$$R(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = -\nu \sum_{i=1}^N G_i + \beta \mathbf{a},$$

где \mathbf{s} — текущее состояние пространства, $\mathbf{a} \in A$ — принятые стратегии роботов на данном шаге.

Реализована система моделирования, в которой проводилось обучение и тестирование алгоритма.

Литература

1. *Fujisawa, R., Dobata, S., Sugawara, K. et al.* Designing pheromone communication in swarm robotics: Group foraging behavior mediated by chemical substance // *Swarm Intell* 8, 227–246 (2014).
2. *Arques, P., Aznar, F., Sempere, M.* Positioning of Geometric Formations in Swarm Robotics // *Luaces O., et al.* *Advances in Artificial Intelligence. CAEPIA 2016. Lecture Notes in Computer Science*, vol 9868. Springer, Cham.
3. *Ping Luo, Xinsheng Zhang, Ran Meng,* Co-attention learning cross time and frequency domains for fault diagnosis // *Cognitive Robotics*, Volume 3, 2023, Pages 34-44, ISSN 2667-2413.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЕТИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ (ХАБОВ) ДЛЯ ПЕРЕВОЗКИ ГРУЗОВЫХ ВАГОНОВ: ТОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ

Ю.М. Васильев, Е.В. Глазунова, А.В. Смирнова, Г.М. Фридман

vas_yu_m@mail.ru, katarina.glazunova97@inbox.ru, anast99@yandex.ru, grifri@finec.ru

УДК 519.854.2

Рассмотрена задача маршрутизации локомотивов для выполнения заданий по перевозке грузовых вагонов между железнодорожными станциями. Обсуждены подходы к решению задачи, основанные на маршрутизации как без использования концентраторов (станций-хабов, предназначенных для реформирования грузовых поездов), так и с их использованием, включая выбор станций для размещения концентраторов

Ключевые слова: маршрутизация, spoke-hub distribution, смешанное программирование.

Одна из крупнейших российских логистических компаний, занимающаяся грузовыми железнодорожными перевозками, планирует разместить на путях множество станций-концентраторов для изменения логистики перевозок. В настоящее время логистика для перевозки вагонов с грузом для относительно небольших предприятий имеет следующую схему: по мере готовности малые партии вагонов перемещаются к пункту назначения в составе одного или цепочки рейсов. В иной распределительной парадигме предполагается использовать концентраторы – станции, на которых может осуществляться формирование новых грузовых поездов из вагонов, прибывших на нее в составе других поездов. В этом случае грузовой поезд от предприятия до концентратора или между концентраторами может перевозить вагоны, имеющие различные пункты конечного назначения, при этом доставка вагонов может быть выполнена по маршруту, проходящему через подмножество концентраторов. Расположение концентраторов должно быть выбрано таким образом, чтобы максимизировать прибыль от выполнения заказов с учетом затрат на перемещение грузовых вагонов.

Постановка задачи имеет следующий вид. Дана сеть железнодорожных путей, которая может быть представлена в виде взвешенного ориентированного графа $G = (V, A)$, где V – множество вершин, соответствующих станциям, A – множество дуг, соответствующих железнодорожным путям между станциями, вес дуги – временные затраты на перемещение между станциями. Известно подмножество станций $C \subset V$ – потенциальные позиции для размещения концентраторов.

Также дано множество локомотивов L , доступных для перемещения вагонов на горизонте планирования H , состоящего из m временных квантов: $H = \{h_1, \dots, h_m\}$. Определено n заданий,

Васильев Юрий Михайлович, ст. преподаватель, СПбГЭУ, лаборатория методов оптимизации и искусственного интеллекта (Санкт-Петербург, Россия)

Глазунова Екатерина Валерьевна, аспирант, СПбГЭУ, лаборатория методов оптимизации и искусственного интеллекта (Санкт-Петербург, Россия)

Смирнова Анастасия Владимировна, магистрант, СПбГЭУ, кафедра прикладной математики и экономико-математических методов (Санкт-Петербург, Россия)

Фридман Григорий Морищевич, д.т.н., профессор, СПбГЭУ, лаборатория методов оптимизации и искусственного интеллекта (Санкт-Петербург, Россия)

обозначим множество заданий как $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, по перемещению вагонов между станциями. Каждое задание $t \in T$ характеризуется списком идентификаторов вагонов, которые необходимо переместить, станцией отправления $orig_t$ и станцией прибытия $dest_t$, временем готовности вагонов $ready_t \in H$ (временем, начиная с которого вагоны могут быть отправлены с станции) и дедлайном $deadline_t \in H$ – крайним сроком, когда вагоны должны поступить на станцию прибытия.

Логистические расходы на выполнение множества заданий зависят от:

- количества используемых локомотивов;
- количества выполненных заданий — за невыполненные задания начисляется штраф;
- длины поезда — за длину поезда, находящуюся в определенном диапазоне, начисляется скидка;
- расстояния, которое преодолевает локомотив.

Маршрутизация локомотивов для выполнения заданий возможна по двум схемам: с использованием концентраторов и без них. Размещение концентратора требует дополнительных финансовых затрат, но компания может снизить логистические расходы за счет использования концентраторов для реформирования поездов из грузовых вагонов, которые на ней находятся, так, чтобы одновременно выполнять нескольких заданий по перемещению вагонов.

Для решения задачи без использования концентраторов была разработана математическая модель, в рамках которой перемещаемые поезда не могут быть реформированы во время выполнения задания между пунктами отправления и прибытия вагонов.

Строится граф, вершины которого соответствуют заданиям. Вершины в графе являются смежными, если у пары заданий, соответствующие вершинам графа, совпадают станции отправления и прибытия, при этом они могут быть выполнены вместе без нарушения временных ограничений.

Решение задачи о разбиении этого графа на клики [1] дает непересекающиеся подмножества вершин, где каждое подмножество образует клику. Задания, соответствующие каждой найденной клике, могут быть выполнены вместе без нарушения временных ограничений, т.е. могут быть агрегированы, тем самым сокращается список заданий. На графе агрегированных заданий решается задача смешанного программирования, являющаяся модификацией задачи нескольких коммивояжеров с временными окнами [2]. Таким образом определяются маршруты локомотивов для выполнения заданий.

Решение задачи с использованием концентраторов выполняется в два этапа. На первом этапе разработанная модель выбора станций для размещения концентраторов представляет собой расширение многопродуктовой динамической потоковой задачи [3]. При помощи такой модели выбирается подмножество вершин $C' \subset C$ для размещения концентраторов.

Формируется динамический граф железнодорожной инфраструктуры, затем решается задача, где поток представляет собой задание по перемещению грузовых вагонов. Если несколько потоков разного типа перемещаются одновременно по одной дуге, то вагоны этих заданий можно сформировать в один грузовой поезд, и поэтому в вершине-родителе этой дуги можно разместить концентратор.

На втором этапе составляется маршрутная сетка передвижения локомотивов при выполнении заданий. Задача маршрутизации локомотивов с использованием концентраторов решается в парадигме “spoke-hub” [4]. Задача была сформулирована как задача смешанного программирования. Модель представляет собой объединение многопродуктовой потоковой задачи на динамическом графе и задачи нескольких коммивояжеров с временными окнами и дополнительными ограничениями.

Тестовые числовые расчеты для синтетических данных (50 заданий, 5 локомотивов, 30 станций, 25 квантов времени) производились на солвере Cardinal Optimizer v7.0.3 [5]. Из 10 возможных концентраторов было выбрано 4, затраты на маршрутизацию с концентраторами превышают затраты на маршрутизацию без концентраторов на 5.21%. Однако концентраторы позволяют использовать меньшее число локомотивов (3 и 5, соответственно) и выполнять большее число заданий (10 и 8, соответственно). При этом время счета для модели с концентраторами существенно увеличивается (3904 секунды вместо 1 секунды для модели без концентраторов). Комбинатор-

ная сложность задачи маршрутизации с использованием концентраторов требует применения неточных методов для выполнения расчетов на исходных данных большей размерности.

Литература

1. *Eidenbenz S., Stamm C.* Maximum Clique and Minimum Clique Partition in Visibility Graphs // Conference: Proceedings of the International Conference IFIP on Theoretical Computer Science, Exploring New Frontiers of Theoretical Informatics. 2000.
2. *Bektas, T* The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures // *Omega*. 2006. №34 (3). С. 209–219.
3. *Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin, J.B.* Network Flows. Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, 1993.
4. *Hande Y., Oya E.K., Bahar Y.K.* Release Time Scheduling and Hub Location for Next-Day Delivery // *Operations research*. 2012. №60 (4). С. 906–917.
5. *Ge D., Huangfu Q., Wang Z., Wu J., Ye Y.* Cardinal Optimizer (COPT) User Guide. 2022.

СТАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОЦЕНКИ РЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ГРУППЫ ДРОНОВ

Р.А. Гиргидов

ruben@betria.com

УДК 512.56

Повторяемость пространственной структуры группы дронов является одним из важных требований предъявляемых к групповым системам управления, в связи с чем особое значение приобретает возможность автоматизированной и числовой оценки повторяемости структуры. Для этого была разработана и протестирована для различных организаций групп дронов метрика, показавшая относительные значения соответствующие ожидаемым.

Ключевые слова: моделирование, рой, пространственная структура, автокорреляция.

Регулярность или, другими словами, повторяемость пространственного положения дронов, находящихся в группе, является важным аспектом при эксплуатации группы дронов. Данное построение имеет следующие особенности: оно гарантирует определенную (заранее заданную) равномерную плотность покрытия и времени достижения поставленной цели, в отличие от ситуаций, когда плотность покрытия является вероятностной характеристикой и получается в результате случайного блуждания дронов в некоторой области. Оно предъявляется в задачах мониторинга, сканирования поверхности или поиска неподвижного объекта.

Автоматизированная оценка состояния группы и степени регулярности пространственной структуры (ПС) необходима в том случае, когда производится оптимизация параметров и эксплуатационных характеристик дронов [4]. Особенно при отсутствии централизованного управления.

Рассматривается метод (псевдометрика) получения характеристики наличия или отсутствия у группы однотипных агентов некоторой ПС. Важной особенностью данного метода является его нетребовательность к начальным данным.

Разработанная оценка сравнивалась с существующими на сегодняшний момент наиболее распространенными методами оценки пространственных [1], [2] структур различных объектов, начиная с методов анализа данных и заканчивая методами анализа структуры кристаллов, таких как: кластерный анализ, автокорреляция по смещению (используемую для оценки состояния и структуры кристаллов) как высокоорганизованных объектов, а также автокорреляция по модифицированному расстоянию, также используемая в кристаллографии, но для оценки структуры аморфных состояний вещества. Однако все они при применении к группе агентов (дронов) имеют недостатки. Это связано с необходимостью учитывать ориентацию в пространстве, порядка подсчета (нумерации) дронов в группе. Кроме того, классические методы требуют дополнительную

априорную информацию о некоторых характеристиках ПС группы (этого требует, например, кластерный анализ). Нами предлагается следующий метод анализа ПС, требующий только информацию о попарных расстояниях до каждого дрона в группе. В качестве параметра данный метод имеет только количество дронов-соседей связи с которыми мы принимаем во внимание. Эксперименты показали, что оптимальное количество учитываемых соседей – от 3 до 15. В данном диапазоне получающаяся метрика показывает близкие значения, но при множественных запусках моделирования дисперсия получаемой оценки изменяется от типа ПС. Этот параметр также можно охарактеризовать как количество дронов, влияющих на поведение каждого дрона в группе. Понятно, что значение параметра должно быть значительно меньше, чем количество дронов в группе (обозначаемое как m). Оценка состояния группы проводится по следующему алгоритму:

1. На основании наблюдений строится матрица попарных расстояний каждого дрона с каждым в заданный момент времени (t). R – это симметричная матрица размерностью $N \times N$
2. Отсортируем каждый столбец по возрастанию значения r_{ij} , полученная матрица уже не будет симметричной
3. Ограничим матрицу $m + 1$ строками, а также исключим первую нулевую строку. В результате получим матрицу размерности $N \times m$, состоящей из расстояний до ближайших дронов от дрона под номером (k), все элементы этой столбцов матрицы отсортированы по возрастанию, т.е. $r_1^{(k)} < r_2^{(k)} \dots < r_m^{(k)}$, (k) номер соответствующего столбца в матрице расстояний.
4. Вычислим значения $\Delta^{(k)} = \left[r_1^{(k)} \quad r_2^{(k)} - r_1^{(k)} \quad \dots \quad r_m^{(k)} - r_{m-1}^{(k)} \right]$, в силу сортировки все элементы полученной матрицы положительны.
5. Вычислим по парную корреляцию между всеми столбцами, получая симметричную матрицу корреляции $corr_{i,j}$ размерностью $N \times N$
6. Вычислим среднее от всех значений матрицы $corr_{i,j}$. Также обратим внимание, что данная операция в общем случае некорректна, однако в данном случае характеризует именно значение авторреляции или повторяемости состояния группы дронов.
7. По аналогии с коэффициентом корреляции применим следующее правило:

$[0.8; 1]$ – высокоорганизованная группа

$[0.6; 0.8)$ – среднеорганизованная группа

$[0.5; 0.6)$ – слабоорганизованная группа

$[0; 0.5)$ – случайное блуждание дронов в группе

Применение описанного выше алгоритма для анализа состояния группы проводилась для искусственно созданных ПС групп точек с заданной степенью случайного смещения каждой точки от идеального положения и параметром

Было определено, что наиболее соответствующим нашим визуальным оценкам степени организованности соответствует метод расчета средней корреляции, основанной на разнице между соседями. Остальные методы, либо требовали дополнительной подстройки, как метод оценки количества кластеров, либо показывали неудовлетворительный (не соответствующие предполагаемым оценкам) результат.

Данный метод не является универсальным, и в случае, наличия регулярных сгущений локально хаотично расположенных дронов, он показывает полное отсутствие регулярности, что в целом неверно. С другой стороны, для анализа структуры роя наличие множества сгущений может говорить о дестабилизации ПС группы и разделения ее на отдельные кластеры. Аналогично были проверены сравнительный анализ всех методов на искусственно созданных группах и при оценке моделей роя.

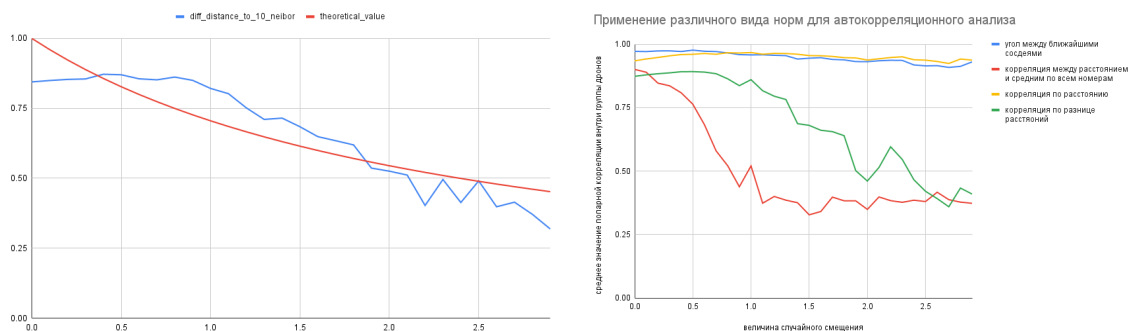


Рис. 1: Область D

Литература

1. *Курьянов А. В.* Анализ текстур и определение типа кристаллической решётки на наномасштабных изображениях // Компьютерная оптика, том 35, **123:2** (2011), 151-157.
2. *Г. Дэвид* Порядковые статистики // Петрова В.В. (ред.) Главная редакция Физ-Мат литературы — Москва: НАУКА, — 94-115.
3. *Богданов Ю. В., Бойко А. М., Гиргидов Р. А.* Применение дисперсионного анализа к оценке структуры роя, образованного беспилотными летательными аппаратами // (2022) Инновационные идеи в машиностроении. Сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых УДК 62-5 ПОЛИТЕХ-ПРЕСС: , — 258-263 .
- 4 *Бойко А. М., Гиргидов Р. А.* Обеспечение пространственной устойчивости роя автономных беспилотных летательных аппаратов (БЛА) // Робототехника и техническая кибернетика (2021), — 95-90

ПРИМЕНЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТОКОВ ЛЮДЕЙ

М.В. Зайцева, П.А. Точилин
zaimarko@gmail.com, tochilin@cs.msu.ru

УДК 519.711.3, 519.852

Рассматривается математическая модель движения групп людей в помещении. Данная модель позволяет строить гарантированные оценки на количества людей в каждой комнате в следующий момент времени. Такие оценки, в свою очередь, используются при построении стратегии управления для недопущения давки с помощью обучения с подкреплением.

Ключевые слова: моделирование потоков людей, линейное программирование, множество достижимости, гарантированные оценки.

Работа посвящена математическому моделированию групп людей в помещении. За основу рассматриваемой модели взята известная дискретная макромодель СТМ (Cell Transmission Model), используемая для моделирования транспортных потоков [1, 2]. Основной задачей данного исследования является перераспределение движущихся людей в помещении таким образом, чтобы исключить возможность появления давки.

Рассматривается схема помещения в виде ориентированного графа $\Gamma = \{\mathcal{R}, \mathcal{T}\}$, где $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ — множество N комнат, а \mathcal{T} — множество переходов между ними. Переход

Зайцева Маргарита Владимировна, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Точилин Павел Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

между комнатами R_i и R_j обозначается T_{ij} , если он существует. Подробное описание модели содержится в работе [3].

Каждая комната R_i описывается следующими характеристиками: S_i — площадь комнаты, C_i — максимальная вместимость (максимальное количество человек, которые могут одновременно находиться в комнате), $n_i(t)$ — количество людей в комнате в момент времени t . Величина $n_i(t)$ может не быть целочисленной, так как рассматривается усреднение по небольшому интервалу времени, однако условие $n_i(t) \in [0, C_i]$ всегда выполнено.

Дополнительно для каждой комнаты R_i , связанной с R_{j_1}, \dots, R_{j_k} вводится набор коэффициентов расщепления $\alpha^{(i)}(t) = (\alpha_{j_1}^{(i)}(t), \alpha_{j_2}^{(i)}(t), \dots, \alpha_{j_k}^{(i)}(t))$, причём $\alpha_s^{(i)}(t) \geq 0$, $s = j_1, \dots, j_k$, и $\alpha_{j_1}^{(i)}(t) + \dots + \alpha_{j_k}^{(i)}(t) = 1, \forall t$. Коэффициент расщепления $\alpha_j^{(i)}(t)$ задаёт долю людей, находящихся в момент времени t в комнате R_i , которые собираются перейти в комнату R_j .

Каждый переход T_{ij} описывается тройкой параметров (v_{ij}, F_{ij}, w_{ij}) , которые являются аналогом коэффициентов фундаментальной диаграммы, определяющей зависимость скорости движения потока людей от плотности. Коэффициент v_{ij} характеризует скорость свободного движения, w_{ij} — скорость распространения затора, F_{ij} — максимальную пропускную способность перехода между R_i и R_j . В случае двустороннего потока будем считать, что $F_{ij} = F_{ji}$.

Рассмотрим моменты времени $t = t_0, t_0 + \Delta, \dots$ и уравнения пересчёта количеств людей в каждой комнате:

$$n_i(t + \Delta t) = n_i(t) + \Delta t \left(\sum_{T_{ji} \in \mathcal{T}} f_{ji}(t) - \sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} f_{ij}(t) \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $f_{ij}(t)$ — поток людей на соединении T_{ij} в момент времени t . Величины потоков $f_{ij}(t)$ для каждого момента времени t являются решением задачи оптимизации:

$$\sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} f_{ij}(t) \rightarrow \max_{\{f_{ij}\}} \quad (2)$$

$$0 \leq f_{ij}(t) \leq F_{ij} - f_{ji}(t), \quad \forall i, j : T_{ij} \in \mathcal{T}, \quad (3)$$

$$f_{ij}(t) \leq \alpha_j^{(i)}(t) v_{ij} \frac{n_i(t)}{S_i}, \quad \forall i, j : T_{ij} \in \mathcal{T}, \quad (4)$$

$$\sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} \frac{f_{ij}(t)}{w_{ij}} \leq \left(\frac{C_j - n_j(t)}{S_j} \right), \quad \forall j. \quad (5)$$

Неравенство (3) характеризует влияние противонаправленных потоков f_{ij} и f_{ji} друг на друга. Неравенство (4) определяет долю от общего количества людей в комнате R_i , желающих перейти в комнату R_j . Соотношение (5) является ограничением на суммарный входящий поток в комнату R_j . Максимизация потоков (2) соответствует тому, что люди будут занимать с максимальной возможной скоростью всё доступное им свободное место, если это соответствует желаемому направлению их движения.

Задача оптимизации (2)–(5) с учётом ограничений на противонаправленный поток (3) и суммарный входящий поток (5) должна быть рассмотрена одновременно для всех комнат. Кроме того, её решение может не быть единственным. Поэтому для описания количеств людей в каждой комнате будем использовать верхнюю оценку множества достижимости [4] в виде декартового произведения интервалов:

$$\mathcal{X} = \{[n_{i,-}(t), n_{i,+}(t)], i = \overline{1, N}\},$$

где $0 \leq n_{i,-}(t) \leq n_{i,+}(t) \leq C_i$ — нижняя и верхняя оценка величины $n_i(t)$. Множество \mathcal{X} является гарантированной оценкой $n_i(t)$, так как содержит все возможные значения $n_i(t)$. Подробно способ построения оценок данного вида представлен в работе [5].

Построение гарантированных оценок на каждом шаге для модели (1) позволяет осуществлять поиск управляющей стратегии. В данной работе для этой цели предлагается использовать подход обучения с подкреплением. Представленная математическая модель в данном случае выступает в качестве «среды», выдавая результат в зависимости от действий «агента». Действием

или управлением здесь выступает выбор закрытого или открытого состояния для некоторых переходов. Оценкой выбранного действия служит функция награды, которая «штрафует» агента в случае, если количество людей в какой-либо комнате близко к критическому, т.е. образуется давка, и «награждает» агента, когда через рассматриваемое помещение удалось пройти как можно большему количеству людей.

В текущей работе для поиска управлений в модели взаимодействия «агент»-«среда» используется алгоритм DQN (Deep Q-network) [6]. Результаты работы данного алгоритма для рассматриваемой математической модели движения потоков людей продемонстрированы примером.

Литература

1. *Daganzo C. F.* The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // *Transp. Res.-B*, **28B**:4 (1994), 269-287.
2. *Daganzo C. F.* The cell transmission model, part II: network traffic // *Transp. Res.-B*, **29B**:2 (1995), 79-93.
3. *Зайцева М.В., Точилин П.А.* Управление потоками людей в здании во время эвакуации // *Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика*, 4 (2020), 3-17.
4. *Kurzanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. — Birkhäuser, 2014.
5. *Зайцева М.В., Точилин П.А.* Методы построения оценок множеств достижимости в задаче моделирования потоков людей // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **63**:8 (2023), 1381-1394.
6. *Mnih V., Kavukcuoglu K., Silver D. et al.* Human-level control through deep reinforcement learning // *Nature*, **518** (2015), 529-533.

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В УПРАВЛЕНИИ

А.В. Ильин, А.С. Фурсов

iline@cs.msu.ru, fursov@cs.msu.ru

УДК 517.926

Предлагается алгоритм построения цифрового регулятора, стабилизирующего непрерывную скалярную переключаемую интервальную линейную систему с соизмеримыми запаздываниями.

Ключевые слова: цифровая стабилизация, переключаемые системы, системы с соизмеримыми запаздываниями.

В настоящей работе исследуется задача цифровой стабилизации переключаемой интервальной линейной системы в случае, когда ее режимы имеют различные запаздывания в управлении. А именно, рассматривается непрерывная скалярная переключаемая интервальная линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma]u(t - \theta_\sigma), \\ y(t) = [c_\sigma]x(t), \end{cases} \quad \sigma \in S_{0,\gamma}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\sigma : R_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (ненаблюдаемый переключающий сигнал); $S_{0,\gamma}$ — множество переключающих сигналов σ , точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, где γ — некоторое положительное число, а $l = 0, 1, 2, \dots$; $x \in R^n$ — вектор состояния, $y \in R$ — измеряемый скалярный выход, $u \in R$ — управляющий вход; $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ — композиция отображения $[A] : I \rightarrow \{[A_1], \dots, [A_m]\}$ и переключающего сигнала σ ; $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Ильин Александр Владимирович, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Фурсов Андрей Серафимович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

$[c_\sigma] = [c] \circ \sigma$ и $\theta_\sigma = \theta \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $[b] : I \rightarrow \{[b_1], \dots, [b_m]\}$ и $[c] : I \rightarrow \{[c_1], \dots, [c_m]\}$ и $\theta : I \rightarrow \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ($[A_i], [b_i], [c_i]$ ($i = \overline{1, m}$) — интервальные матрицы соответствующих размеров). Здесь $\theta_i > 0$ — величины постоянных запаздываний, причем θ_i/γ , θ_i/θ_j — рациональные числа для любой пары $i, j \in I$.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим переключаемой системы (1), описываемый интервальной линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_i]x(t) + [b_i]u(t - \theta_i), \\ y(t) = [c_i]x(t). \end{cases}$$

Решением уравнения состояния системы (1) при фиксированных тройках (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = 1, \dots, m$), заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$), переключающем сигнале $\sigma \in S_{0, \gamma}$ и начальном условии $x(0) = x_0$ является решение соответствующей линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(t - \theta_{\sigma(t)}), \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

Требуется для переключаемой линейной системы (1) с заданным $\gamma > 0$ и ненаблюдаемыми переключающими сигналами $\sigma \in S_{0, \gamma}$ построить цифровой регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} u[jT]S(t - jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T), \\ 0, & t \notin [0, T), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0, \end{cases} \quad (4)$$

обеспечивающий глобальную равномерную асимптотическую устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_\sigma]x(t) + [b_\sigma]u(t - \theta_\sigma), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + q[c_\sigma]x[lT], \quad \sigma(t) \in S_{0, \gamma}, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$u(t - \theta_i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t - \theta_i}{T} \rfloor} (Hv[lT] + h[c_\sigma]x[lT])S(t - \theta_i - jT), & \text{если } t \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t < \theta_i, \end{cases} \quad (6)$$

Система (5) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы, $l = \lfloor \frac{t}{T} \rfloor$, т.е.

$$lT \leq t < (l+1)T, \quad l = 1, 2, \dots$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T < \gamma$, существует $l_0 \in N$ такое, что $\gamma = l_0T$ и для любого i найдется такое $l_i \in N$, что $\theta_i = l_iT$), $[\cdot]$ — целая часть действительного числа, $Q \in R^{r \times r}$, $q \in R^{r \times 1}$, $H \in R^{1 \times r}$, $h \in R$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определенные на последовательности $\{lT\}_{l=0}^\infty$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [5, с. 25].

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (5) называем *глобально равномерно асимптотически устойчивой*, а регулятор (3)-(4) *стабилизирующим*, если при любых фиксированных тройках (c_i, A_i, b_i) ($c_i \in [c_i]$, $A_i \in [A_i]$, $b_i \in [b_i]$, $i = 1, \dots, m$), для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_{0, \gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad l = \lfloor \frac{t}{T} \rfloor, \quad (7)$$

Для решения поставленной задачи предлагается использовать подходы, разработанные в статьях [1–4], где исследовались проблемы цифровой стабилизации переключаемых линейных систем с запаздываниями в управлении и переключаемых интервальных линейных систем с интервальными неопределенностями в коэффициентах. В работах [1, 4] был предложен подход к

стабилизации переключаемой системы с запаздываниями, включающий два основных шага — переход от исходной непрерывной системы к ее точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка), не содержащей запаздываний и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. В [2, 3] предложен метод дискретизации переключаемой интервальной системы с дальнейшим поиском динамического дискретного регулятора на основе линейных матричных неравенств. Модифицируя указанные подходы с учетом наличия соизмеримых запаздываний в режимах исходной переключаемой системы (1), предложена общая схема построения цифрового регулятора (3)-(4), включающая следующие основные шаги:

1. переход от непрерывной системы (1) к ее точной дискретной модели с учетом, что на ее входе используется фиксатор нулевого порядка (точная дискретная модель, фактически, представляет собой семейство переключаемых дискретных систем с режимами, описываемыми системами разностных уравнений, вообще говоря, различных динамических порядков, не содержащих запаздываний);
2. построение интервального расширения для полученной дискретной модели;
3. нахождение одновременно стабилизирующего дискретного регулятора вида (4) для семейства интервальных режимов полученного интервального расширения (на основе метода функций Ляпунова);
4. оценка времени задержки для построенной замкнутой переключаемой дискретной системы, обеспечивающего ее глобальную равномерную асимптотическую устойчивость.

Литература

1. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения, 2018, Т. 54, N. 8. С. 1132-1141.
2. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М.* Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения, 2019, Т. 55, N. 11, с. 1545-1559.
3. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения, 2020, Т. 56, N. 11, с. 1516-1527.
4. *Ильин А.В., Фурсов А.С.* Цифровая стабилизация переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями // Доклады РАН. 2023. Т. 514. С. 82-88.
5. *Поляков К. Ю.* Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие. СПбГМТУ, 2002.

СОВРЕМЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИПШИЦЕВОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Я.Д. Сергеев, Р.Г. Стронгин

yaro@dimes.unical.it, president@unn.ru

УДК 519.6, 519.85

В докладе рассматриваются предложенные авторами методы липшицевой глобальной оптимизации и ряд приложений. Основное внимание уделено методам глобальной оптимизации, использующим кривые Пеано и адаптивные диагональные кривые, а также балансировке локальной и глобальной информации в процессе поиска.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, численные методы, условие Липшица, кривые Пеано, локальная настройка.

Сергеев Ярослав Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Стронгин Роман Григорьевич, д.ф.-м.н., президент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Доклад посвящен актуальной проблеме разработки численных алгоритмов для решения одномерных и многомерных многоэкстремальных задач липшицевой глобальной оптимизации. Обсуждается решение многомерных задач при помощи кривых Пеано и диагонального подхода (см. [1-6]). Обе методологии позволяют элегантно обобщить одномерные методы на многомерный случай. Особое внимание уделяется ускорению глобального поиска за счет использования введенных авторами техник локальной настройки, производящих автоматическую балансировку локальной и глобальной информации в процессе оптимизации. Обсуждаются способы оценки константы Липшица на практике и применение новых вычислительных технологий (см. [7]). Формулируется задача надёжной глобальной оптимизации с шумом. Для экспериментального сравнения алгоритмов глобального поиска описывается генератор классов многомерных тестовых функций (уже используемый более чем в 40 странах мира) с известным расположением всех точек минимумов (локальных и глобальных) и размерами их областей притяжения. Приводятся техники сравнения метаэвристических алгоритмов с детерминированными методами глобальной оптимизации.

Литература

1. *Стронгин Р.Г.* Численные методы в многоэкстремальных задачах, М.: Наука, 1978.
2. *Стронгин Р.Г.* Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990.
3. *Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации, М.: Наука, 2008.
4. *Strongin R.G., Sergeyev Ya.D.* Global Optimization with Non-Convex Constraints: Sequential and Parallel Algorithms, Kluwer, Dordrecht, 2000 (2nd ed. 2013, 3rd ed. 2014, Springer, NY).
5. *Sergeyev Ya.D., Strongin R.G., Lera D.* Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves, Springer, NY, 2013.
6. *Sergeyev Ya.D., Kvasov D.E.* Deterministic Global Optimization: An Introduction to The Diagonal Approach, Springer, NY, 2017.
7. *Sergeyev Ya.D., De Leone R., eds.* Numerical Infinities and Infinitesimals in Optimization. Springer, Cham, 2022.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

П.А. Точилин, М.В. Паршиков

tochilin@cs.msu.ru, miron232734@gmail.com

УДК 517.977

В докладе представлен субоптимальный алгоритм для задачи быстродействия при фазовых ограничениях и эллипсоидальных ограничениях на управления. Показано, как взятый за основу алгоритм быстрорастущих случайных деревьев (RRT*) модифицируется для поставленной задачи с помощью методов эллипсоидального исчисления.

Ключевые слова: системы управления, задача быстродействия, планирование движения, эллипсоидальное оценивание.

Для объектов, динамика которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, \quad (1)$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $f \in \mathbb{R}^n$, — рассматривается задача оптимального быстродействия с заданными жёсткими, поточечными ограничениями на возможные значения управляющих параметров: $u \in \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P)$, $p \in \mathbb{R}^m$, $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, где $\mathcal{E}(p, P)$ — эллипсоид; и с учётом статичных препятствий \mathcal{M}_i , $i = 1, \dots, M$, ограничивающих движение. Конкретный

Точилин Павел Александрович, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Паршиков Мирон Вячеславович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

объект требуется перевести из заданной начальной позиции $x_{start} \in \Omega$ в целевое множество $X_{goal} \subset \Omega$.

Оптимальное решение такой задачи во многих случаях является сложновычислимым, поэтому предлагается алгоритм, позволяющий эффективно по времени получать субоптимальное решение. Оно достигается за счет использования вероятностно полного алгоритма быстрорастущих случайных деревьев (RRT*) [1], учитывающего кинодинамические ограничения [2], а также методов эллипсоидального оценивания [3]. На каждой итерации алгоритма формируется дерево $\Gamma = (V, E)$, множество вершин V которого инициализируется начальной точкой и дополняется точками, генерируемыми в Ω . Каждой вершине $v \in V$ сопоставляется минимально найденное время её достижения. Множество дуг E состоит из решений локальных задач оптимального управления о переводе системы из точки в точку за наименьшее время, которые решаются с помощью метода “прицеливания”, на эллипсоидальную трубку, выпущенную из очередной случайной точки и являющуюся внутренней оценкой множества разрешимости для рассматриваемой системы. Увеличение числа итераций алгоритма позволяет получить решение, сколько угодно близкое к оптимальному.

В случае нелинейной динамики системы

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2)$$

в алгоритм добавляется процедура линеаризации в малой окрестности сгенерированной точки.

Также предлагается возможная модификация алгоритма для задач, когда препятствия накладывают ограничения лишь на часть фазовых переменных. В этом случае изменяется подход к генерированию случайных точек и последующему построению эллипсоидальных оценок, однако методы решения подзадач управления и общая идея алгоритма остаются прежними.

Приводятся примеры работы алгоритма для обозначенных задач и результаты сравнения его с аналогичными, использующими случайные деревья, в тех случаях, когда это корректно.

Литература

1. *Karaman S., Frazzoli E.* Sampling-based algorithms for optimal motion planning // The international Journal of Robotics Research, 30, No. 7, 2011. — 846 – 894.
2. *Webb D.J., van der Berg J.* Kinodynamic RRT*: Asymptotically optimal motion planning for robots with linear dynamics // Proc. of the IEEE Conf. on Robotics and Automation, 2013. — 5054 – 5061.
3. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. — Birkhäuser, 2014.

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ АВТОНОМНЫХ РОБОТОВ ПУТЕМ КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ДАТЧИКОВ

К.Ю. Шутова, А.А. Лукьяница

shutova.k.u@yandex.ru, Andrei_Luk@mail.ru

УДК 004

В последние годы резко возрос интерес к групповому использованию автономных роботов для решения различных задач. При этом весьма актуальной является проблема определения точных координат каждого члена такой группы. В настоящей работе для этой цели разработан метод, основанный на комплексировании информации от различных датчиков, установленных на роботах. Проведенные численные эксперименты продемонстрировали, что предложенный метод позволяет существенно повысить точность позиционирования каждого робота в составе группы, а число итераций, необходимое до достижения заданной точности, практически не зависит от состава группы.

Ключевые слова: позиционирование, групповая робототехника.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Интеллект.

Шутова Ксения Юрьевна, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Лукьяница Андрей Александрович, д.т.н., с.н.с, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Современные автономные роботы могут быть оснащены широкой номенклатурой различных датчиков. Часть из них, которые в дальнейшем будем называть дальномерами, могут с высокой точностью определять расстояние до заданных объектов, но не способны определять координаты. В то же время датчики, используемые для определения координат, такие как система глобального позиционирования Глонавс или инерциальные датчики, зачастую не обеспечивают требуемую точность, а последние к тому же склонны к накоплению ошибок [1]. Цель настоящей работы — разработать робастный метод компенсации ошибок позиционирования роботов в группе за счет комплексирования информации от различных датчиков с учетом априорной информации относительно их погрешностей.

Предположим, что каждый робот оснащен тремя типами разнородных датчиков: инерциальным, высотомером, а также дальномером. Первый способен определять трехмерные координаты, второй — только высоту, а последний — расстояние до других роботов в группе. Для определения трехмерных истинных координат i -го робота $X_i^R = (x_i^R, y_i^R, z_i^R)$ был сконструирован следующий функционал:

$$E(X^R) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a^G} \sum_{i=1}^n E_i^G + \frac{1}{a^H} \sum_{i=1}^n E_i^H + \frac{1}{a^D} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij}^D \right), \quad (1)$$

где n — число роботов в группе; a^G, a^H, a^D — соответственно точности перечисленных приборов, а E_i^G, E_i^H, E_{ij}^D — квадратичные ошибки вычисления координат инерциальным датчиком, высотомером и дальномером:

$$E_i^G = (x_i^R - x_i^G)^2 + (y_i^R - y_i^G)^2 + (z_i^R - z_i^G)^2; \quad E_i^H = (z_i^R - z_i^H)^2; \quad E_{ij}^D = (d_{ij}^R - d_{ij}^D)^2.$$

Здесь (x_i^G, y_i^G, z_i^G) — координаты i -го робота, определенные инерциальным датчиком, z_i^H — высота i -го робота по показаниям высотомера, а в качестве d_{ij} используется евклидово расстояние между i -м и j -м роботами. Искомые координаты X_i^R определялись путем минимизации функционала (1), для чего была разработана специальная модификация алгоритма RPROP [2], содержащая минимальное число арифметических операций и допускающая распараллеливание.

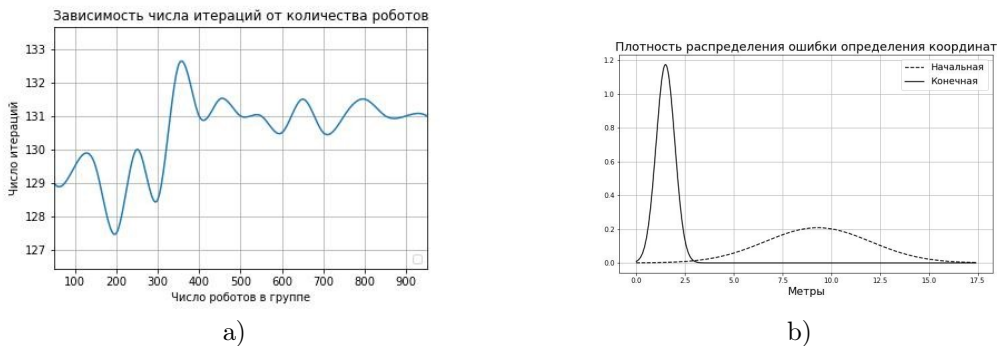
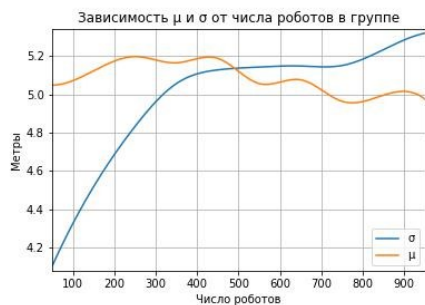


Рис. 1: а) Число итераций для достижения заданной точности в зависимости от количества роботов. б) Начальная и конечная плотности распределения ошибок определения координат.

В численном эксперименте число роботов n изменялось от 10 до 1000 с шагом 50. Распределение роботов в пространстве выбиралось в виде какой-либо из фигур: в узлах прямоугольной сетки, вдоль окружности либо вдоль линии. Далее с помощью датчика равномерно распределенных случайных чисел синтезировались искаженные показания для каждого из приборов. Затем проводилась минимизация функционала (1). В качестве начального распределения использовались искаженные показания инерциальных датчиков, а итерации прекращались при достижении заданной относительной точности $\delta = 10^{-6}$. Для каждой группы роботов проводились 100 таких экспериментов, после чего все полученные статистические характеристики усреднялись. Результаты численного моделирования приведены на Рис. 1, 2.



с)



d)

Рис. 2: с) Зависимости снижения математического ожидания и среднеквадратичного отклонения. d) Зависимости относительного снижения ошибки определения координат от числа роботов.

Численные эксперименты показали, что разработанный метод позволяет существенно повысить точность измерения координат каждого робота в составе группы, а число итераций, необходимое до достижения заданной точности, практически не зависит от числа роботов в группе.

Литература

1. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратах (Под ред. Красильщикова М.Н., Серебрякова Г.Г.). - М. : ФИЗМАТЛИТ.– 2009. – 556 с.

2. Riedmiller M., Braun H. A direct adaptive method for faster backpropagation learning: The RPROP algorithm. — In Proceedings of the IEEE international Conference on Neural Networks. — IEEE Press. 1993. P. 586–591.

Секция 16

Суперкомпьютерные вычисления

МУЛЬТИМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХРОМАТИНА

Г.А. Армеев, А.С. Князева, А.К. Шайтан

armeev@intbio.org, a.kniazeva@intbio.org, alex@intbio.org

УДК 577.32

Несмотря на успехи в секвенировании геномов, за последние десятилетия стало очевидным, что трехмерное устройство генома является не менее важным для понимания функционирования живых организмов чем последовательность ДНК. Данная работа посвящена исследованию структуры и динамики хроматина на разных масштабах методами молекулярного моделирования.

Ключевые слова: хроматин, нуклеосома, молекулярное моделирование, молекулярная динамика.

Геномная ДНК в ядре эукариотической клетки вместе с совокупностью ядерных белков формирует хроматин. Устройство хроматина обеспечивает плотную упаковку генетического материала, несмотря на которую в хроматине проходят процессы транскрипции, репликации и репарации ДНК. На уровне хроматина реализовано множество механизмов эпигенетической регуляции транскрипции генов, которые значительно влияют на экспрессию генов и как следствие управляют функционированием клеток и организмов. Понимание принципов устройства и регуляции хроматина является одной из наиболее актуальных научных проблем молекулярной биологии.

Хроматин по своей природе мультимасштабен. На самом первом уровне организации, упаковка ДНК осуществляется за счет формирования нуклеосом — частиц, размером порядка 10 нм. Компактная часть нуклеосомы состоит из 145–147 пар оснований ДНК обернутых вокруг гетеро-октамера гистонов. Нуклеосомы на нити ДНК формируют фибриллы и в конечном счете позволяют упаковать ДНК в плотные хромосомы, формирующиеся во время клеточного деления. Однако конкретное устройство промежуточных уровней организации неясно. На данный момент представление об уровнях организации хроматина интерфейсной клетки отошло от классической “детерминированной” модели хроматина, в которой хроматиновые нити формируют 30-ти нанометровые фибриллы с последующей упаковкой таких фибрилл в петли. Хроматин постоянно изменяется и перестраивается, что дополнительно усложняет его изучение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-74-10012)

Армеев Григорий Алексеевич, к.ф.-м.н, в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Князева Анастасия Сергеевна, м.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Шайтан Алексей Константинович, д.ф.-м.н, чл.-корр. РАН, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Сложность изучения хроматина также обусловлена методическими ограничениями. Для изучения одиночных нуклеосом применяется весьма широкий набор методов структурной биологии от рентгеноструктурного анализа и криоэлектронной микроскопии до ядерно-магнитного резонанса, Фёрстеровского резонансного переноса энергии. Однако все эти методы поодиночке не позволяют сформировать полную картину устройства и функционирования нуклеосом. Методы молекулярного моделирования и структурной биоинформатики позволяют дополнить, интегрировать и валидировать разнородную информацию, полученную из экспериментов. Так моделирование методом молекулярной динамики позволяет исследовать конформационные ансамбли макромолекул, основываясь на стартовой экспериментальной структуре. Моделирование в огрубленном представлении позволяет интегрировать результаты методов молекулярной динамики (МД) и крупномасштабных экспериментов для того, чтобы получить структурную интерпретацию этих исследований. Мультимасштабное моделирование позволяет объединять подходы к моделированию, для интерпретации экспериментальных результатов.

Исследование нуклеосом и более крупных элементов хроматина методом полноатомной молекулярной динамики стало возможным относительно недавно. Современные вычислительные системы на основе графических ускорителей позволяют достигать скорости моделирования порядка 40 нс в сутки расчета. Нами были рассчитаны траектории МД продолжительностью до 14 мкс, для нескольких разных нуклеосом. Расчеты такой продолжительности были осуществлены с использованием СК Ломоносов 2. Данные расчеты позволили продемонстрировать влияние разупорядоченных хвостов гистонов на процесс откручивания ДНК от нуклеосом, а также пролили свет на процесс транслокации ДНК в нуклеосоме. Мы экстраполировали результаты моделирования с атомарным масштабом и показали как гистоновые хвосты влияют на жёсткость хроматиновых фибрилл (цепочек нуклеосом). Также путем продолжительной МД мы показали, что локальная транслокация ДНК в нуклеосоме связана с деформацией гистонов в нуклеосоме. Методом МД мы также смогли продемонстрировать влияние аминокислотных замен (для гистона H2A.Z) на подвижность гистонов и их взаимосвязь с динамикой ДНК. Методами огрубленного моделирования на масштабе цепочек нуклеосом мы смогли предложить подход к обработке данных MNase-seq для уточнения положений нуклеосом на хроматиновых фибриллах.

Доступные на данный момент вычислительные мощности не позволяют достигать биологически-значимых времен моделирования для таких крупных макромолекул как нуклеосомы. Моделирование цепочек нуклеосом или целых фрагментов хроматина еще более затруднено. Однако темпы роста производительности, вместе с появлением новых методик моделирования дают надежду на построение моделей устройства хроматина, проясняющих механизмы его работы.

Литература

1. G. A. Armeev, A. S. Kniazeva, G. A. Komarova et al. Histone dynamics mediate dna unwrapping and sliding in nucleosomes // Nature communications.— 2021. Vol. 12, no. 1. — P. 2387.
2. H.-W. Chang, A. V. Feofanov, A. V. Lyubitelev et al. N-terminal tails of histones h2a and h2b differentially affect transcription by rna polymerase ii in vitro // Cells.— 2022. Vol. 11, no. 16.
3. В.А. Васильев, Д.М. Рябов, А.К. Шайтан, Г.А. Армеев Уточнение позиций нуклеосом внутри отдельных генов с использованием методов молекулярного моделирования и данных mnase-секвенирования // Биофизика, 2023, Т. 68, №5, стр. 911–919

СУПЕРКОМПЬЮТЕР КАК ИНСТРУМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА В АВИАЦИОННО-КОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ

В.Г. Бобков, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская, П.В. Родионов

УДК 519.6

Доклад посвящен суперкомпьютерной технологии вихреразрешающего моделирования сжимаемых турбулентных течений в задачах вычислительной аэродинамики и аэроакустики. Такие ресурсоемкие высокоточные вычислительные эксперименты являются важным инструментом научно-технического прогресса в авиационно-космической отрасли

Ключевые слова: вычислительная газовая динамика, вихреразрешающее моделирование, гибридный суперкомпьютер.

Развитие высокопроизводительной вычислительной техники открывает все более широкие возможности для применения высокоточного вычислительного эксперимента в авиационно-космической отрасли. Вихреразрешающее моделирование сжимаемых турбулентных течений в задачах вычислительной аэродинамики и аэроакустики является ресурсоемким видом расчетов, имеющим большой потенциал применения в авиационно-космических приложениях. В докладе будет представлена суперкомпьютерная технология для эффективного выполнения таких расчетов на гибридных высокопроизводительных вычислительных системах.

В качестве математической модели, описывающей течение вязкого сжимаемого газа, используются уравнения Навье–Стокса, дополненные уравнениями модели турбулентности. Для пространственной дискретизации на неструктурированных сетках применяются экономичные численные схемы повышенной точности [1] и метод [2] для конвективных и вязких членов, соответственно. Эти методы отличаются экономичностью с точки зрения вычислительной стоимости, а также сниженным потреблением памяти, что особенно важно для вычислений с использованием графических процессоров. Для интегрирования по времени используются полностью неявные схемы. Ключевым компонентом вычислительной технологии является гетерогенный параллельный алгоритм для вычислений на центральных и графических процессорах [3]. Для программной реализации используются стандарты параллельного программирования MPI, OpenMP и OpenCL.

В докладе будет уделено внимание гетерогенной программной реализации параллельного алгоритма и релевантным особенностям используемых численных методов, будут представлены примеры практических приложений высокоточных вычислительных экспериментов на гибридных суперкомпьютерах. Также пойдет речь о перспективах таких вычислительных технологий при переходе на суперкомпьютеры, обладающие на порядки более высокой производительностью, чем доступны в настоящее время.

Литература

1. *Bakhvalov P., Kozubskaya T., Rodionov P.* EBR schemes with curvilinear reconstructions for hybrid meshes // *Computers & Fluids*, **239** (2022), 105352.
2. *Bakhvalov P., Surnachev M.* Method of averaged element splittings for diffusion terms discretization in vertex-centered framework // *Journal of Computational Physics*, **450** (2022), 110819
3. *Gorobets A., Bakhvalov P.* Heterogeneous CPU+GPU parallelization for high-accuracy scale-resolving simulations of compressible turbulent flows on hybrid supercomputers // *Computer Physics Communications*, **271** (2022), 108231.

Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 25.04.2022 №075-15-2022-330).

Бобков Владимир Георгиевич, к.ф.-м.н., с.н.с., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Горобец Андрей Владимирович, д.ф.-м.н., в.н.с., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Дубень Алексей Петрович, к.ф.-м.н., с.н.с., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Козубская Татьяна Константиновна, д.ф.-м.н., г.н.с., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Родионов Павел Вадимович, м.н.с., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**КРИПТОГРАФИЯ: ЗАДАЧИ ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГОРИТМОВ НА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ****Д.А. Желтков, Н.Л. Замарашкин, Е.Е. Тыртышников***dmitry.zhalkov@gmail.com, nikolai.zamarashkin@gmail.com, eugene.tyrtysnikov@gmail.com*

УДК 519.688

В сообщении будут обсуждаться вопросы, связанные с эффективной реализацией алгоритмов криптоанализа на современных вычислительных системах.

Ключевые слова: математика, криптография, вычислительные системы.

В сообщении будут обсуждаться вопросы, связанные с эффективной реализацией криптографических алгоритмов на современных вычислительных системах. Мы остановимся на примерах алгоритмов, которые, на наш взгляд, наиболее полно отражают особенности задач криптографии. Будет показано, что в некоторых случаях последовательные с математической точки зрения алгоритмы могут обладать значительным параллельным ресурсом и «не проигрывать» параллельным алгоритмам даже для самых мощных вычислительных систем.

Мы обсудим вопросы организации данных и вычислений эффективно работающих с памятью современных вычислительных устройств. Мы рассмотрим возникающую здесь дилемму выбора между «медленным» алгоритмом простой структуры и «быстрым» алгоритмом с более сложной организацией вычислений. Мы также покажем, что в некоторых случаях эффективная организация данных и вычислений требует создания фундаментальной математической теории.

**СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ГЕМОСТАЗА И ТРОМБОЗА: ВЫВОДЫ
И ПЕРСПЕКТИВЫ****Д.Ю. Нечипуренко, А.А. Масальцева, Е.С. Бершадский, М.А. Пантелеев***nechipur@gmail.com, anamasalcev@gmail.com, bershadskyef@yandex.ru, mapanteleev@yandex.ru*

УДК 577.3

Механизмы, определяющие динамику роста тромба в ответ на повреждение сосудистой стенки, остаются невыясненными. Понимание этих механизмов важно для разработки новых лекарственных препаратов и методов диагностики. Доклад посвящен суперкомпьютерному моделированию роста тромба и перспективам его применения для фундаментальных и прикладных исследований.

Ключевые слова: гемостаз, тромбоз, компьютерное моделирование, рост тромба.

Желтков Дмитрий Александрович, к.ф.-м.н., научный сотрудник ИВМ РАН (Москва, Россия)

Замарашкин Николай Леонидович, к.ф.-м.н., ст. научный сотрудник ИВМ РАН (Москва, Россия)

Тыртышников Евгений Евгеньевич, академик, директор ИВМ РАН (Москва, Россия)

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 23-74-00057.

Нечипуренко Дмитрий Юрьевич, к.ф.-м.н., с.н.с., Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Масальцева Анастасия Александровна, м.н.с., Центр теоретических проблем физико-химической фармакологии РАН

Бершадский Ефим Сергеевич, м.н.с., Центр теоретических проблем физико-химической фармакологии РАН

Пантелеев Михаил Александрович, член-корр. РАН, д.ф.м.н., директор, Центр теоретических проблем физико-химической фармакологии РАН

Несмотря на десятилетия исследований, механизмы, определяющие динамику гемостатического ответа на повреждение сосудистой стенки, остаются предметом научного поиска. Отсутствие понимания ключевых процессов, связанных с регуляцией роста тромба в норме и при патологиях, является важным препятствием на пути к разработке как эффективных диагностических инструментов, так и фармакологических методов коррекции состояния системы гемостаза у пациентов. Сегодня для решения многих задач в данной области всё чаще привлекаются компьютерные модели, позволяющие исследовать динамику тромбообразования в широком спектре гемодинамических и биохимических условий. Данная работа посвящена суперкомпьютерному анализу роста тромба при помощи новой модели тромбообразования, позволяющей исследовать различные сценарии повреждения артериол. Полученные результаты позволили выдвинуть новую гипотезу о механизме, ограничивающем рост тромба в случае нормального гемостатического ответа, а также физиологическую роль подвижной оболочки артериального тромба. В докладе также приводятся современные вызовы и перспективы в применении суперкомпьютерных моделей тромбообразования для фундаментальных и прикладных исследований.

СУПЕРКОМПЬЮТЕРЫ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ЛЕКАРСТВ

А.В. Сулимов, Д.К. Кутов, В.Б. Сулимов

sulimov@mail.ru, dk@dimonta.com, v.sulimov@srcc.msu.ru

УДК 51-76, 539.6, 577.2

Показана чрезвычайно возросшая роль докинга для разработки лекарств, заключающаяся в поиске ингибиторов заданных белков-мишеней, ответственных за развитие заболевания. В дополнение к докингу важную роль начинают играть квантовая химия и молекулярная динамика. Для повышения эффективности разработки лекарств необходимо существенно повысить точность всех этих методов, а для этого требуется существенное повышение производительности суперкомпьютеров.

Ключевые слова: Молекулярное моделирование, докинг, квантовая химия, виртуальный скрининг, разработка лекарств.

Современная разработка лекарств использует знание об атомарной структуре белков-мишеней, ответственных за развитие заболеваний, чтобы найти такие соединения, молекулы которых, избирательно связываясь с активным центром белка-мишени, блокировали его работу, тем самым влияя на течение заболевания. Такие соединения называются ингибиторами, и они являются основой лекарств. В качестве лекарств могут использоваться не только ингибиторы, но и активаторы и другие типы биологически активных соединений, молекулы которых избирательно связываются с активным центром белка-мишени и изменяют его функционирование. Размеры активных центров составляют единицы нанометров, а особенности связывания молекул кандидатов в ингибиторы, называемых лигандами, с белком определяются межмолекулярными силами, в основе которых лежат взаимодействия между атомами молекулы ингибитора и белка-мишени. Основным инструментом начальной стадии разработки лекарства — поиска и разработки ингибиторов, являются методы компьютерного молекулярного моделирования, а среди них ведущую роль играет докинг. Программы докинга находят глобальный минимум энергии системы белок-лиганд и оценивают энергию связывания лиганда с белком-мишенью. Чем сильнее это связывание, тем эффективнее будет лекарство на основе такого ингибитора. Ключевую роль докинга в разработке лекарств показал возникший с начала пандемии COVID 19 бум разработок противовирусных препаратов, направленных на ингибирование белков-мишеней коронавируса

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-71-20031). Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова [8].

Сулимов Алексей Владимирович, к.ф.-м.н., ООО «Димонта» (Москва, Россия)

Кутов Данил Константинович, ООО «Димонта» (Москва, Россия)

Сулимов Владимир Борисович, д.ф.-м.н., ООО «Димонта» (Москва, Россия)

SARS-CoV-2, вызвавшего пандемию [1]. Широкое использование методов компьютерного моделирования привело к значительному, но еще недостаточному, ускорению разработок противовирусных препаратов для борьбы с COVID 19. Недостаточно эффективное ещё применение этих методов обусловлено недостаточно высокой их точностью.

На начальном этапе разработки часто используют поиск ингибиторов с помощью докинга (виртуальный скрининг) в очень больших базах данных органических молекул: от десятков и сотен тысяч до десятков миллиардов лигандов, и для этого стали широко применяться суперкомпьютеры. Анализ публикаций показал [1], что виртуальный скрининг многих миллионов и даже миллиардов лигандов не приводит к нахождению большого количества хороших ингибиторов, активность которых подтверждается экспериментально, и связано это с тем, что для скрининга применяются самые быстрые программы докинга, в которых, однако, точность принесена в жертву быстрдействию. Повышая точность докинга, можно существенно увеличить эффективность поиска ингибиторов.

В программе докинга SOL [2] сделано существенно меньше упрощений ради высокой скорости, и с её помощью докинг одного лиганда осуществляется за 1–2 часа на одном ядре суперкомпьютера МГУ Ломоносов-2, что существенно повышает точность докинга и позволяет находить ингибиторы коронавируса в сравнительно небольших базах данных, содержащих только несколько десятков тысяч органических соединений [3]. Недавно, была предложена и апробирована оригинальная методика использования программы докинга SOL и квантово-химического пост-процессинга для проведения виртуального скрининга базы данных Chinese National Compound Library, содержащей около 1 миллиона соединений, на что было потрачено на суперкомпьютере Ломоносов-2 около 116 000 процессорочасов [4]. Увеличение мощности суперкомпьютера МГУ на 3 порядка позволит проводить виртуальных скрининг теми же методами баз данных, содержащих миллиарды соединений, а такие базы уже есть. Тщательный докинг столь больших баз данных с помощью программы SOL, позволит более эффективно находить ингибиторы для заданных белков-мишеней и, тем самым, ускорить разработку лекарств.

Нами разработан также суперкомпьютерный программный комплекс прямого докинга SOL P [5], осуществляющий докинг с помощью алгоритма глобальной оптимизации на основе разложения больших многомерных тензоров в тензорные произведения. Данный программный комплекс обладает гораздо более высокой точностью, чем существующие ныне программы докинга, в том числе и программа SOL, поскольку в SOL P нет многих упрощений, используемых обычно в существующих программах докинга. Благодаря эффективному алгоритму глобальной оптимизации SOL P умеет выполнять докинг очень гибких лигандов в жесткий белок и докинг гибких лигандов в белок с большим количеством подвижных атомов, но требует многопроцессорных вычислений и больших вычислительных ресурсов на докинг одного лиганда: от 30 до 5 000 процессорочасов в зависимости от размера лиганда и числа подвижных атомов белка. Так что пока SOL P может быть использован только для особо точного докинга отдельных лигандов, но никак не для виртуального скрининга большого количества соединений. Увеличение вычислительной мощности суперкомпьютера МГУ на 3 порядка позволит применять новый программный комплекс прямого докинга SOL P для скрининга баз данных, содержащих несколько тысяч соединений, и, тем самым, существенно повысить эффективность применения суперкомпьютерного моделирования для разработки лекарств.

Недостаточная точность существующих программ докинга определяется и тем, что в них для описания межмолекулярных взаимодействий, в том числе водородных связей между атомами лиганда и белка-мишени, используются классические потенциалы — так называемые силовые поля, в то время как правильное описание межмолекулярных взаимодействий даёт только квантовая механика — применительно к молекулам квантовая химия. Переход от классических силовых полей к квантово-химическим методам расчета энергии системы белок-лиганд в программах докинга, т.е. переход к квантовому докингу, позволит существенно повысить точность докинга. Предпосылки для этого есть: разработаны современные квантово-химические полуэмпирические методы [6] для вычисления энергии комплексов белок-лиганд с точностью, соизмеримой с точностью расчетов с помощью методов функционала плотности (DFT), есть и вычислительный метод локализованных молекулярных орбиталей и его реализация в программе MORAC, позволяющая проводить квантово-химические расчеты больших молекулярных систем типа комплексов белок-лиганд [7], что недоступно методам DFT, и разработан и апробирован в программном комплексе

SOL P новый эффективный метод поиска глобального минимума на сложной многомерной энергетической поверхности системы белок-лиганд. Увеличение производительности суперкомпьютера МГУ на 3 порядка делает возможным применение квантового докинга не только в отдельных исследованиях, но и в разработке новых лекарств. Высокая точность квантового докинга позволит существенно повысить эффективность применения компьютеров для поиска ингибиторов и, тем самым, повысить эффективность всего конвейера разработки лекарств.

При существующих доступных суперкомпьютерных ресурсах применение молекулярной динамики для поиска ингибиторов ограничивается только расчетами отдельных молекул кандидатов в ингибиторы. Увеличение вычислительных мощностей суперкомпьютеров на 3 порядка позволит более широко применять методы молекулярной динамики при поиске ингибиторов, и перейти к расчетам тысяч молекул. Таким образом, современные достижения Математики в области тензорного анализа и развитие вычислительных методов с применением тензорных поездов наряду с последними достижениями суперкомпьютерного докинга и методов квантовой химии создали предпосылки к развитию прорывных технологий эффективного применения вычислительных методов для разработки лекарств, но для этого требуется существенно повысить производительность суперкомпьютерных ресурсов.

Литература

1. *Sulimov A.V., Ilin I.S., Tashchilova A.S., Kondakova O.A., Kutov D.C., Sulimov V.B.* Docking and other computing tools in drug design against SARS-CoV-2 // SAR QSAR Environ. Res., 2024, Vol. 35, No. 2, P. 91–136. DOI: [10.1080/1062936X.2024.2306336](https://doi.org/10.1080/1062936X.2024.2306336)
2. *Sulimov V., Ilin I., Kutov D., Sulimov A.* Development of docking programs for Lomonosov supercomputer // J. Turkish Chem. Soc. Sect. A Chem., 2020, Vol. 7, No. 1, P. 259–276. DOI: [10.18596/jotcsa.634130](https://doi.org/10.18596/jotcsa.634130)
3. *Sulimov A., Ilin I., Kutov D., Shikhaliev K., Shcherbakov D., Pyankov O., Stolpovskaya N., Medvedeva S., Sulimov V.* New Chemicals Suppressing SARS-CoV-2 Replication in Cell Culture // Molecules, 2022, Vol. 27, No. 17, P. 5732. DOI: [10.3390/molecules27175732](https://doi.org/10.3390/molecules27175732)
4. *Kutov D., Sulimov A., Tashchilova A., Ilin I., Sulimov V.* Supercomputer search for coagulation factor XIIa inhibitors in the Chinese national compound library // Communications in Computer and Information Science, Russian Supercomputing Days, RuSCDays 2023 / ed. Voevodin V. et al., Cham: Springer International Publishing, 2023, LNCS 14388, P. 245–258. DOI: [10.1007/978-3-031-49432-1_19](https://doi.org/10.1007/978-3-031-49432-1_19)
5. *Sulimov A.V., Zheltkov D.A., Oferkin I.V., Kutov D.C., Katkova E.V., Tyrtysnikov E.E., Sulimov V.B.* Evaluation of the novel algorithm of flexible ligand docking with moveable target-protein atoms // Comput. Struct. Biotechnol. J., 2017, Vol. 15, P. 275–285. DOI: [10.1016/j.csbj.2017.02.004](https://doi.org/10.1016/j.csbj.2017.02.004)
6. *Stewart J.J.P.* Optimization of parameters for semiempirical methods VI: more modifications to the NDDO approximations and re-optimization of parameters // J. Mol. Model. 11/29, 2013, Vol. 19, No. 1, P. 1–32. DOI: [10.1007/s00894-012-1667-x](https://doi.org/10.1007/s00894-012-1667-x)
7. *Stewart J.J.P.* Stewart Computational Chemistry. MOPAC2016 [Electronic resource], Colorado Springs, CO, USA, 2016. URL: <http://openmopac.net/MOPAC2016.html> (accessed: 08.04.2022)
8. *Voevodin V.V., Antonov A.S., Nikitenko D.A., Shvets P.A., Sobolev S.I., Sidorov I.Y., Stefanov K.S., Voevodin V.V., Zhumatiy S.A.* Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community // Supercomput. Front. Innov., 2019, Vol. 6, No. 2, P. 4–11. DOI: [10.14529/jsfi190201](https://doi.org/10.14529/jsfi190201)

СУПЕРКОМПЬЮТЕРЫ КАК НЕОБХОДИМАЯ ОСНОВА ДЛЯ РАЗВИТИЯ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

М.М. Тихомиров, Д.И. Чернышев, Н.В. Лукашевич, Б.В. Добров

tikhomirov.mm@gmail.com, chdanorbis@yandex.ru, louk_nat@mail.ru, dobrov_bv@mail.ru

УДК 004.8

Современные большие языковые модели показывают значительные возможности в понимании и генерации текстов на естественном языке, позволяя строить на их основе вопросно-ответные системы для различных отраслей науки и бизнеса. Однако, обучение моделей подобного уровня с нуля требует огромного количества вычислительных ресурсов, оснащенных графическими ускорителями последних поколений. В докладе будет рассмотрено текущее положение дел в сфере обучения больших языковых моделей с точки зрения необходимых вычислительных ресурсов, а также отдельно случай адаптации таких моделей на русский язык.

Ключевые слова: большие языковые модели, искусственный интеллект, обработка естественного языка.

В последние годы в области обработки естественного языка (и всей отрасли искусственного интеллекта) происходят революционные изменения за счет развития больших нейросетевых языковых моделей, таких как GPT (генеративные модели на архитектуре «трансформер») (Radford A. et al., 2018). Большие языковые модели (LLM) представляют собой большую нейросеть (десятки и сотни миллиардов параметров), которые обучаются задаче языкового моделирования на огромных корпусах текстов (триллионы слов). За счет размеров модели и количества данных для обучения, современные языковые модели содержат в себе обширные знания о мире и позволяют решать широкий спектр задач обработки естественного языка.

Однако, обучение подобных моделей с нуля требует огромного количества вычислений, которые необходимы производить на кластерах, оснащенных современными графическими процессорами (GPU). Так, например, для обучения модели GPT-3 (Brown, T. et al., 2020) с 175 миллиардами параметров потребовалось $3.14e23$ flops или же 0.314 yotta flops. Несмотря на то, что в последнее время есть отдельный интерес, направленный на обучение более компактных моделей, для обучения модели с нуля размеров “всего” в 1.1 миллиард параметров (Zhang, P. et al, 2024) потребовалось 90 дней на кластере с 16 A100. При этом стоит понимать, что качество подобных небольших моделей существенно уступает моделям с 7 и более миллиардами параметров.

Другим актуальным направлением является адаптация уже обученных больших языковых моделей на язык или предметную область. Так, нашей группой исследовался метод адаптации больших языковых моделей LLaMa 7B (Touvron H. et al., 2023) и Solar 10.7 на русский язык (Tikhomirov, M. and Chernyshev, D., 2023). Разработанный подход позволил не только повысить среднее качество на бенчмарке Russian Super Glue (Shavrina T. et al., 2020) по сравнению с исходными моделями, но и улучшить вычислительную эффективность при работе на русском языке, существенно ускоряя этап генерации. Однако, даже с учетом того, что адаптация не предполагает обучения всей модели с нуля, данный этап потребовал использования вычислительных мощностей DGX-2 (16 V100) и раздела Volta-1 суперкомпьютера Ломоносов-2.

Литература

1. Radford A. et al. Improving language understanding by generative pre-training. 2018.
2. Brown, T. et al. Language models are few-shot learners. *Advances in neural information processing systems* 33 (2020): 1877-1901.

Тихомиров Михаил Михайлович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр (Москва, Россия)

Чернышев Даниил Иванович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр (Москва, Россия)

Лукашевич Наталья Валентиновна, д.т.н., ведущий научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр (Москва, Россия)

Добров Борис Викторович, к.ф.-м.н., заведующий лабораторией, МГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр (Москва, Россия)

3. Zhang, P., Zeng, G., Wang, T., and Lu, W. Tinyllama: An open-source small language model. arXiv preprint arXiv:2401.02385. 2024.
4. Touvron H. et al. Llama: Open and efficient foundation language models //arXiv preprint arXiv:2302.13971, 2023.
5. Tikhomirov, M. and Chernyshev, D., Impact of Tokenization on LLaMa Russian Adaptation. arXiv preprint arXiv:2312.02598. 2023.
6. Shavrina T. et al. RussianSuperGLUE: A Russian Language Understanding Evaluation Benchmark //Proceedings of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP). – 2020. – С. 4717-4726.

Секция 17

Математическое обеспечение современных телекоммуникационных систем

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИФЕРИЙНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРИКЛАДНЫХ СЕТЕВЫХ СЕРВИСОВ

В.О. Писковский

vpiskovski@asvk.cs.msu.ru

УДК 004.056.53

Рассматриваются распределенные облачные вычисления, возможности использования вычислительных мощностей транспортных сетей и сетей доступа, что, в свою очередь, делают необходимыми анализ и прогнозирование оптимального использования сетевых ресурсов.

Ключевые слова: виртуализация, Cloud-Edge сеть, Ubiquitous OS, ML, Random Forest, PCA, SVD, CNN, SLA.

Доклад посвящен методам эффективной эксплуатации Cloud-Edge сети с целью учета энергопотребления и характеристик возобновляемых источников энергии, в частности, рассматривается математическая модель сети вычислительных узлов (далее СЕ (Cloud Edge) сеть) с разным количеством ресурсов (вычислительных, хранения данных, оперативной памяти) в облачной инфраструктурой и шлюзов для подключения абонентских облачных терминалов, например, объектов Интернета вещей (сети датчиков, собирающих и передающих в сеть вычислительных узлов потоки данных), соединенных наложенными каналами для передачи данных, а также связанных с этим математических постановок задач об оптимальном распределении прикладных сервисов и виртуальных сетевых функций, управлении трафиком в СЕ сети [1,2].

В рамках решения перечисленных задач эксплуатации рассматривается прогнозирование времени выполнения прикладных задач [3,4] на узлах сети доступа при реализации сетевых с учетом ключевых характеристик аппаратной платформы и особенностей рассматриваемых приложений. В качестве исходных данных для обучения, построения и тестирования методов прогнозирования используются опубликованные данные трасс работы распределенных сетевых сервисов на типовом оборудовании облачных структур и сетей доступа к ним [5].

В докладе содержатся результаты подготовки синтетической рабочей нагрузки в части потока запросов и цепочек сервисов для проведения экспериментов на стенде моделирования СЕ

Писковский Виктор Олегович, к.ф.-м.н., вед. науч. сотр., МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

сети, с целью оценки разработанных алгоритмов и методов распределения прикладных сервисов/сетевых функций, вопросы создания и эксплуатации ПО Cloud-Edge сети, Интернета вещей, а также распределенной бессерверной платформы для оркестровки и управления прикладных сервисов/сетевых функций (Ubiquitous OS).

Представлены результаты исследования способов прогнозирования реализации сервиса, исходя из априорных данных его работы на оборудовании сетей доступа и заданных вероятностно-временных характеристик предоставления услуги, а именно методы, основанные на использовании:

- случайного леса,
- матричных разложений,
- с использованием глубоких сверточных нейронных сетей (ГНС, CNN) на платформе машинного обучения ГосНИИАС «Plat2023»/«Платформа-ГНС» [6,7].

В докладе также сформулированы методы прогнозирования выполнения распределенных прикладных сервисов на узлах CE сети с учетом требований предустановленных показателей соглашения об уровне качества обслуживания (SLA, Service Level Agreement) и текущих характеристик состояния CE сети и оборудования.

Литература

1. *R. Smeliansky* Network Powered by Copmuting: Next Generation of Computational Infrastructure, Edge Computing - Techonology, Management and Integration, available <http://dx/doi.org/10.5772/intechopen.106537>, edited by Sam Goundar, First published in London, UK by IntechOpen, 2023, pp 47-70.
2. *Смелянский Р.Л.* MC2E – метаоблачная вычислительная среда для междисциплинарных исследований, Вестник Российской академии наук (ранее: Вестник Академии наук СССР), т. 92, № 1, 2022, Наука: МАИК "Наука/Интерпериодика Москва, 2022, стр. 46-56.
3. *Christopher M. Bishop* Pattern Recognition and Machine Learning, Springer Science+Business Media, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, 2006.
4. *С.Л. Френкель, В.Н. Захаров* Модели учета влияния статистических характеристик трафика вычислительных сетей на эффективность прогнозирования средствами машинного обучения, Информатика и ее применения, 2023, т.17, вып. 4, стр. 71-80
5. Data traces from a data center testbed – Kaggle. [Электронный ресурс] - URL: <https://www.kaggle.com/datasets/jaliltaghia/data-traces-from-a-data-center-testbed> (дата обращения: 11.09.2023)
6. *Ю.В. Визильтер, Б.В. Вишняков, С.Ю. Желтов* Современные технологии искусственного интеллекта и их применение в авиационных комплексах Материалы XVI Всероссийская мультikonференция по проблемам управления (МКПУ-2023), г. Волгоград, Россия, 11–15 сентября 2023 г., Том 3, Управление аэрокосмическими системами, (УАКС-2023), стр. 13-16
7. Платформа-ГНС. Унифицированная программная платформа машинного обучения. Материалы к семинару-конференции, «PLAT-2023» ФАУ «ГосНИИАС», 15 февраля 2023 [Электронный ресурс] - URL: <https://www.gosniias.ru/pages/d/plat-2023-brosh-gns.pdf> (дата обращения: 17.01.2024)

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ СЕТЕВОГО ТРАФИКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА ГЕТЕРОГЕННЫХ КАНАЛОВ В СЕТЯХ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

А.М. Рязанов, Д.Ю. Волканов

alryaz@asvk.cs.msu.ru, volkanov@asvk.cs.msu.ru

УДК 004.89

В работе рассматривается задача прогнозирования качества гетерогенных каналов в сетях передачи данных. Рассматриваются количественные параметры КО и методы оценки данных параметров по собранной трассе сетевого трафика.

Ключевые слова: Сети передачи данных, анализ сетевого трафика, качество обслуживания, гетерогенные каналы.

Качество обслуживания (КО) – технология предоставления различным классам трафика различных приоритетов в обслуживании.

Сбор сетевого трафика производится для обучения алгоритмов решения таких задач, как балансировка и фильтрация трафика, обнаружение и предотвращение различных сетевых угроз, высокопроизводительные коммутация и маршрутизация.

В этой статье рассматривается спектр подзадач, сопряжённых с расчётом показателей КО для формирования обучающих наборов, которые могут быть использованы для решения задач анализа и прогнозирования КО гетерогенных каналов в СПД.

Постановка задачи прогнозирования качества гетерогенных каналов в сетях передачи данных и параметры КО рассматриваются в работе [1]. Задача расчёта и прогноза всех четырех параметров КО в литературе практически не рассматривается (в качестве исключений можно упомянуть статьи [2] и [3]), поэтому в работе предложены методы расчёта четырех параметров КО по данным собранным в трассе сетевого трафика.

Для образования обучающих выборок для алгоритмов машинного обучения необходимо собрать множество трасс сетевого трафика на различных промежутках времени, используя различные гетерогенные каналы.

Исходя из вариативности и неопределённости во времени сетевого трафика, проходящего через гетерогенный канал, необходимо максимально точно определить упомянутый минимальный набор характеристик пакета, уникально идентифицирующих поток данных внутри канала. Такими характеристиками будут являться:

- время поступления пакета на сетевой интерфейс;
- адреса (сетевые, физические, и др.) отправителя и получателя;
- последовательность протоколов и соответствующих им идентификаторов, инкапсулирующих данные (MPLS, VLAN, L2TP, PPTP, GRE, IP и др.);
- размер и очерёдность инкапсулированных данных.

Набор алгоритмов, разрабатываемых в рамках задачи пассивного анализа сетевого трафика, извлекают упомянутые характеристики и преобразуют их в кортежи значений, при помощи которых формируются значения показателей КО для любого отдельно взятого промежутка времени, охватывающего полностью или частично поток данных.

Необходимо ввести чёткое разграничение методик определения показателей КО для двух вариантов сбора (в одной и двух точках):

- Полезная пропускная способность (throughput):

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ, проект №23-Ш03-03.

Рязанов Александр Михайлович, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

Волканов Дмитрий Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики (Москва, Россия)

- **для одной точки сбора:** для протоколов, не предоставляющих обратную связь (подтверждение) о доставке, это значение равно обозримому количеству байт полезной нагрузки с вычетом идентифицированных потерь; для протоколов без подтверждения значение эквивалентно обозримому количеству байт полезной нагрузки.
- **для двух точек сбора:** пара разностей между количествами байт полезной нагрузки, переданной между отправителем и получателем.
- Односторонняя задержка (one-way delay):
 - **для одной точки сбора:** определена аппроксимациями $RTT/2$ и $RTPLatency$, используемых протоколами транспортного и прикладного уровня;
 - **для двух точек сбора:** определена исходя из разности минимальной и максимальной временных меток для каждого успешно переданного пакета.
- Колебания задержки (jitter):
 - **для одной и двух точек сбора:** определена как отклонение задержки пакета от некоего эталонного, усреднённого или минимального значения задержки на протяжении потока.
- Доля потерь пакетов (loss rate):
 - **для одной и двух точек сбора:** как процент потерянных пакетов по отношению к отправленным пакетам.

В данной работе рассмотрена задача прогнозирования качества гетерогенных каналов в сетях передачи данных. Рассматриваются количественные параметры КО и методы их расчёта по трассе сетевого трафика.

В дальнейшем планируется формализовать задачу прогнозирования значений показателей КО, исследовать методы её решения на основе вероятностно-статистических подходов и методов машинного обучения, разработать методику выделения обучающей и тренировочной выборки из собранных данных, а также полностью реализовать средство сбора, хранения и анализа сетевого трафика TrafficKeeper.

Литература

1. Рязанов А. М., Волканов Д. Ю., Цыганов Н. И. Методы сбора и хранения сетевого трафика для решения задачи прогнозирования качества гетерогенных каналов в сетях передачи данных // Тематический сборник «Программные Системы и Инструменты». Т. 23. — 2023. — С. 83–91. — ISBN 978-5-89407-638-6.
2. H. Yang et al. A Technical Research towards 5G SLA: System Definition, Sense and Assurance Solution // IEEE 21st International Conference on Communication Technology (ICCT). — IEEE, 2021. — С. 462–471.
3. Ahmad N., Wahab A., Schormans J. Importance of Cross-Correlation of QoS metrics in Network Emulators to Evaluate QoE of Video Streaming Applications // IEEE 11th International Conference on Network of the Future (NOF). — IEEE, 10.2020. — С. 105–109. — ISBN 978-1-7281-8055-7.

ИИ В УПРАВЛЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ИНФРАСТРУКТУРОЙ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Р.Л. Смелянский

smel@cs.msu.su

УДК 004.896

На основе анализа свойств современных приложений (прикладных программных систем) показано, что существующая вычислительная инфраструктура им не удовлетворяет. В докладе представлена архитектура сетевой вычислительной инфраструктуры нового поколения и на конкретных примерах показано, как средствами управления ее ресурсами на основе методов машинного обучения можно удовлетворить требования современных приложений.

Ключевые слова: сетевая вычислительная инфраструктура, методы машинного обучения, мультиагентные методы.

Технология вычислений – одна из основ современной цивилизации. Поэтому важно понимать основные тенденции и направление ее развития. В настоящее время вычислительная инфраструктура переходит от концепции «создай сам» к концепции – «потребляй как услуга», когда не нужно создавать собственную вычислительную инфраструктуру, арендовать каналы для подключения с общедоступной сетью, нанимать дорогих специалистов для ее обслуживания. Новая парадигма вычислительной инфраструктуры предполагает доступ к неограниченным вычислительным ресурсам. Когда пользователь может получать ресурсы и вычислительные услуги по мере необходимости, где и когда это нужно. Однако такая возможность сегодня ограничена рамками конкретного центра обработки данных или высокопроизводительной вычислительной установки.

Если мы посмотрим на историю развития вычислительной инфраструктуры, то главный урок этой истории заключается в том, что основным двигателем этого прогресса были требования приложений. Именно они стимулировали три основные движущие силы развития вычислительной инфраструктуры: микроэлектронику, инженерию программного обеспечения и телекоммуникацию.

В 2018 году лауреаты премии Тьюринга – профессора Массачусетского технологического института Дж. Л. Хеннесси и Д.А. Паттерсон в своей лекции [1] написали: “The next decade will see a Cambrian explosion of novel computer architectures, meaning exciting times for computer architects in academia and in industry”. Этот «взрыв» открывает большие возможности для вычислительной инфраструктуры нового поколения.

Появление новых технологий виртуализации вычислительных ресурсов, программно-конфигурируемых сетей и виртуализации сетевых функций открыло новые возможности для соединения ресурсов отдельных центров обработки данных (ЦОД). Теперь не столь важно, сколько серверов и стоек в ЦОД, а то, насколько эффективно мы умеем сопоставить виртуальные ресурсы физическим.

Для определения требований к вычислительной инфраструктуре в докладе представлен анализ свойства современных приложений. В докладе также определены основные свойства, которым должна удовлетворять вычислительная инфраструктура нового поколения [2]. Вот основные из них [2]:

- Повсеместно связанные и доступные вычислительные ресурсы, не ограниченные рамками локальных ЦОДов или вычислительных комплексов;
- Детерминированное качество сервисов передачи данных;
- Наличие оперативной информации о доступных вычислительных мощностях и ресурсах сети передачи данных;
- Виртуализация, масштабируемость, бессерверность;

- Доступность, надежность и отказоустойчивость;
- Эффективность и справедливость при распределении ресурсов;
- Безопасность.

Вычислительную инфраструктуру с указанными выше свойствами мы будем называть Сетевой Вычислительной Средой или по-английски — Network Powered by Computing (NPC). NPC — это открытая, программно-управляемая [3], полностью виртуализированная инфраструктура, представляющая собой тесную программно-ориентированную интеграцию различных вычислительных установок и высокоскоростной сети передачи данных (DTN). Важно подчеркнуть, что эта инфраструктура не ограничена рамками ЦОДа, локального комплекса вычислительных установок, сколь мощными они не были. Здесь можно провести аналогию с инфраструктурой генерации и управления распределением электрической энергии в любом современном экономически развитом государстве.

Современные скорости передачи данных, вычислений, масштабы потоков приложений и запросов к ним с учетом ограничений на время их выполнения/реакции на запрос, не позволяют применять классические методы оптимизации в силу их высокой вычислительной сложности. Решение приходится искать в области методов много агентной оптимизации (МА оптимизации), методов управления с машинным обучением. Этот тезис демонстрируется на решении нескольких задач, без решения которых невозможна NPC инфраструктура:

- оценка ожидаемого времени выполнения приложения на определенном вычислителе NPC [2];
- оптимального распределения/балансировки потоков данных в транспортной среде NPC [4];
- выбор оптимального транспортного/наложенного канала для передачи данных [5];
- управление распределением потока задач между вычислителями NPC инфраструктуры [6].

Литература

1. *John L. Hennessy, David A. Patterson* Communications of the ACM A New Golden Age for Computer Architecture // Communication of the ACM, February 2019, Vol. 62 No 2, p. 48-60
2. *Smeliansky R.* Network Powered by Computing: Next Generation of Computational Infrastructure // In “Edge Computing – Technology, Management and Integration”. IntechOpen 2023
3. *Смелянский Р.Л. Антощенко В.А.* Концепции программного управления и виртуализации сетевых сервисов в осовремененных сетях передачи данных // Москва: Курс, 2020
4. *E. Stepanov et al.* On Fair Traffic allocation and Efficient Utilization of Network Resources based on MARL // Preliminary on ResearchGate, <https://www.researchgate.net/publication/371166584> [Дата обращения 2023-14-11]
5. *Smeliansky R.* Next Generation of Computational // Preliminary on ResearchGate, <https://www.researchgate.net/publication/378012247> [Дата обращения 2024-07-02]
6. *Stepanov E.P., Smeliansky R.L., Balashov V.V., Plakunov A.V.* On Domain based Task Allocation in Network Powered by Computing // DOI:10.13140/RG.2.2.16273.40805 / Preprint ResearchGate

БАЛАНСИРОВКА ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ МНОГОАГЕНТНЫМ МЕТОДОМ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В НАЛОЖЕННОЙ СЕТИ

Е.П. Степанов

estepanov@lwk.cs.msu.ru

УДК 004.896

В докладе рассматривается задача балансировки транспортных потоков по каналам наложенной сети. Задача сформулирована как распределенный вариант частично наблюдаемого марковского процесса принятия решения. Для случая многоагентной системы, где допускается общение между агентами, предлагается решение на основе методов машинного обучения с подкреплением. Экспериментальное исследование показало преимущество предложенного метода по сравнению с классическими алгоритмами балансировки (ЕСМР и УСМР) и сопоставимые результаты с результатом работы централизованного генетического алгоритма.

Ключевые слова: балансировка сетевого трафика, качество сервиса, методы машинного обучения, многоагентные методы.

Согласно статистике Surfshark за 2023 год [1], 31% пользователей Интернета используют Virtual Private Network (VPN). Исследование [2] показало, что объем VPN трафика через крупную европейскую точку обмена трафиком после пандемии COVID-19 почти удвоился, а в кампусных сетях увеличение было в 20 раз. Вычислительная инфраструктура нового поколения Network Power by Computing (NPC) [3] задействует наложенные сети для построения единого безграничного вычислителя. В связи с увеличением трафика в наложенных сетях становится важно управлять маршрутами транспортных потоков таким образом, чтобы не возникало перегруженных каналов.

Задача управления транспортными потоками данных (далее сетевым трафиком) рассмотрена как задача балансировки трафика по каналам сети передачи данных так, чтобы не вызывать перегрузки и минимизировать задержки при передаче. Задача сформулирована как распределенный вариант частично наблюдаемого марковского процесса принятия решения (Dec-POMDP [4]). Рассмотрены несколько вариантов многоагентной оптимизации: централизованный, децентрализованный с взаимодействием между агентами и полностью децентрализованный. Во всех этих подходах предполагается, что агенты формируют свое локальное состояние на основе наблюдений за окружающей средой. Однако поведение агентов в этих подходах различно:

- централизованный подход предполагает наличие в среде одного объекта (центр управления), который координирует работу каждого агента. Этот центр управления собирает данные о локальных состояниях от всех агентов и определяет действия для каждого из них на основе решения задачи оптимизации. Централизованный подход к балансировке трафика требует дополнительной задержки на сбор информации и принятие решения, поэтому в последнее время исследования по повышению эффективности балансировки трафика сместились в сторону многоагентных алгоритмов машинного обучения.
- децентрализованный подход с взаимодействием между агентами (или просто децентрализованный подход) предполагает, что каждый агент обменивается с другими агентами своим локальным состоянием. На основе собранной информации агент выбирает оптимальное действие.
- полностью децентрализованный подход не предполагает какого-либо общения между агентами. Каждый агент принимает решение только на основе анализа истории своего поведения.

В качестве решения задачи балансировки трафика в докладе рассмотрен метод Multi-Agent Routing using Hashing (MAROH), предложенный в [5]. Метод MAROH основан на объединении идей децентрализованного многоагентного обучения с подкреплением и алгоритмов консистентного хеширования. Эта комбинация позволила обеспечить справедливое распределение трафика между сетевыми ресурсами и эффективное их использование. Предложенный метод в каждый момент времени каждому выходному порту маршрутизатору наложенной сети присваивает вес, который потом используется консистентной хэш-функцией для распределения потоков данных между наложенными каналами. Таким образом, ключевыми проблемами являются то, как присвоить веса выходным портам маршрутизатора и как построить надлежащую хеш-функцию.

Метод балансировки трафика сочетает в себе три подхода: поиск маршрутов в графе, консистентное хеширование и машинное обучение. Так как каждый маршрутизатор в сети выбирает следующий узел независимо от других, алгоритм поиска маршрутов должен обеспечить отсутствие циклов в пути для пакета. Это достигается с помощью преобразования графа сети в ориентированный ациклический граф. Алгоритмы консистентного хеширования широко применяются для балансировки трафика за счет свойства сохранения маршрутов для потоков при изменении топологии сети. Используемый в работе алгоритм Weighted DxDHash использует заданные веса для каналов, влияющих на количество потоков, направляемых по соответствующему пути. Многоагентный метод машинного обучения вычисляет веса так, чтобы повысить эффективность балансировки трафика во всей сети. Было проведено экспериментальное исследование, которое показало сходимость предложенного метода, достигающего наибольшей эффективности при высокой нагрузке в сети. Так как в процессе работы алгоритма маршрутизаторам необходимо передавать внутреннюю информацию своим соседям, скорость сходимости исследована в зависимости от числа таких обменов. Количество эпизодов, необходимое для достижения стабильного улучшения по сравнению с начальным решением, составляет от 1500 до 3000. Значения отклонения загрузки каналов от средней загрузки в сети, получаемые алгоритмом, лучше значений, получаемых классическими алгоритмами балансировки (ECMP и UCMP) и сопоставимы с централизованным генетическим алгоритмом.

Литература

1. VPN statistics: users, markets, & legality. [Internet] Available from: <https://surfshark.com/blog/vpn-users> [Дата обращения: 20.02.2024]
2. *Maghsoudlou A. et al.* Characterizing the VPN Ecosystem in the Wild // International Conference on Passive and Active Network Measurement. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023.
3. *Smeliansky R.* Network Powered by Computing: Next Generation of Computational Infrastructure // In "Edge Computing – Technology, Management and Integration". IntechOpen 2023.
4. *Beynier, Aurelie, et al.* DEC-MDP/POMDP // Markov Decision Processes in Artificial Intelligence (2013): 277-318.
5. *Stepanov E. et al.* On Fair Traffic allocation and Efficient Utilization of Network Resources based on MARL // Preliminary on ResearchGate, <https://www.researchgate.net/publication/371166584> [Дата обращения: 20.02.2024]

АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ И ПОДХОДЫ К ИХ РЕШЕНИЮ

Ю.Ю. Терентьева

terjul@mail.ru

УДК 519.176

Рассматриваются актуальные задачи, возникающие при проектировании и/или модернизации сетей связи с точки зрения их математического обеспечения, а также сопровождающего программного обеспечения, являющегося инструментом моделирования.

Ключевые слова: сеть связи, моделирование, устойчивость, пропускная способность.

Основными аргументами к разработке инструментов моделирования сетей связи являются следующие факторы:

- необходимость разработки отечественных аналогов программного обеспечения моделирования сетей связи;
- рост размерности современных сетей связи, что влечет за собой необходимость оптимального расходования ресурсов на ее проектирование/ модернизацию/ эксплуатацию;
- необходимость интеграции информации для решения оперативных задач управления сетью связи;
- повышение качества проектирования сети связи за счет многокритериального анализа, включающего выявление уязвимостей, оптимизации ресурсов.

Прежде всего рассматриваются три грани моделирования для любой задачи. Это визуализация в различных аспектах, включая картографическую подоснову до 17 уровня, формирование необходимых отчетов и динамической информации по объектам сети связи. Вторая грань — это управление данными, задействующее процедуры хранения и актуализации информации. И, наконец, третья грань — это аналитические функции, на которых остановимся подробнее.

Итак, рассматриваются следующие задачи, для решения которых требовалось разработать ряд аналитических функций. Перечислим основные:

- расчет устойчивости сети связи;
- расчет пропускной способности направления связи при канальной и пакетной коммутации;
- построение оптимального резервного пути;
- нахождение максимального множества взаиморезервирующих вершиннезависимых путей между заданными вершинами графа сети связи;
- автоматическое построение канала связи с учетом скорости потока и оборудования на узлах связи.

В ходе разработки инструмента моделирования автором опубликованы следующие основные статьи: [1–4]. На рис. 1 представлен фрагмент работы программного обеспечения (языки PHP, Javascript, СУБД PostGres), где представлены маршруты при канальной коммутации. На рис. 2 — фрагмент работы программного обеспечения (язык C#), где представлены маршруты при пакетной коммутации, а также расчет пропускной способности.

Разработанное программное обеспечение неоднократно использовалось при решении реальных задач, касающихся сетей связи. Дальнейшее его развитие призвано стать частью общей системы управления сетью связи.

Терентьева Юлия Юрьевна, к.т.н., начальник управления, Федеральное государственное автономное научное учреждение «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти им. А.В. Старовойтова» (Москва, Россия)

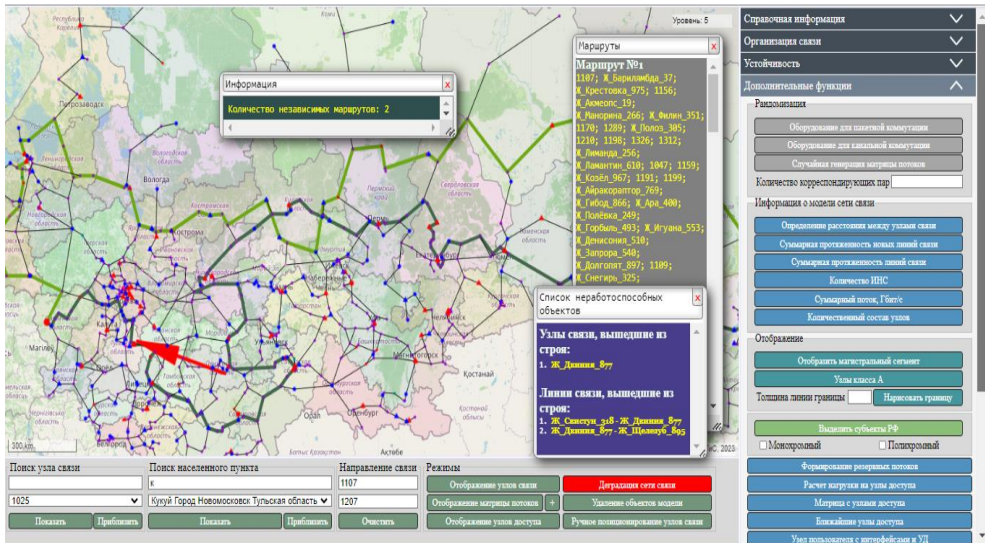


Рис. 1: Фрагмент работы программного обеспечения: маршруты при канальной коммутации; моделирование деградации сети связи

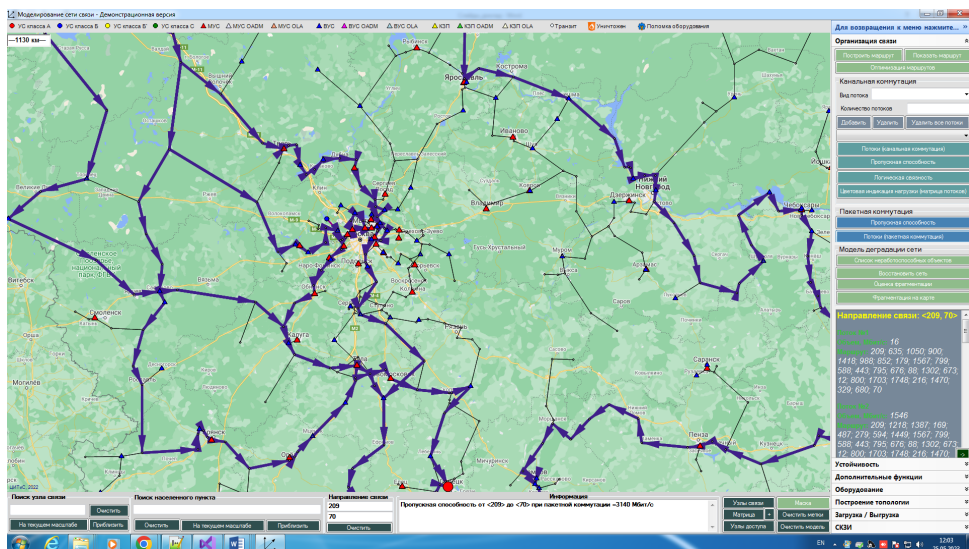


Рис. 2: Маршруты при пакетной коммутации и расчет пропускной способности

Литература

1. Терентьева Ю.Ю. Некоторые теоретические вопросы практических алгоритмов дефрагментации сети связи // International Journal of Open Information Technologies. — 2021. — Том 9, №3 — С.13–21.
2. Терентьева Ю.Ю. Алгоритмы расчета надежности крупномасштабных сетей связи // Информатизация и связь.— 2021. — №6. — С.171–175.
3. Терентьева Ю.Ю., Стариков П.П., Синев С.Г. ГОСТ Р 53111-2008 (Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки): аргументы за и против. — М.: Электросвязь, №6, 2022, стр. 1–6.
4. Терентьева Ю.Ю. Прототип цифрового двойника сети связи // 11-я Международная научная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем», май 2023, Москва, Красновидово.

Секция 18

Искусственный интеллект и большие языковые модели

БОЛЬШИЕ МОДЕЛИ КАК НОСИТЕЛИ РУССКОЙ ГРАММАТИКИ

П.В. Гращенков, Л.И. Паско, К.А. Студеникина, А.А. Герасимова

pavel.gra@gmail.com, paskolada@yandex.ru, xeanst@gmail.com, anastasiagerasimova432@gmail.com

УДК 81'32

В настоящее время большие языковые модели способны успешно вести диалог с пользователем на различные темы: они понимают смысл запросов и порождают текст, неотличимый от человеческого. Однако остается малоизученным вопрос о том, насколько сходны грамматические ограничения, которые накладываются на языковую способность людей и нейросетей. В рамках доклада мы представим методологические и содержательные решения для оценки уровня владения русским языком больших языковых моделей, а также обсудим конкретные результаты оценки для одного из специфических для естественного языка синтаксических явлений — острова сочиненной конструкции — моделями ChatGPT, GigaChat, YandexGPT.

Ключевые слова: большие языковые модели, грамматика естественного языка, моделирование грамматических процессов.

Современные нейронные сети демонстрируют уровень владения естественным языком, внешне схожий с человеческим. При этом остается открытым вопрос, насколько их «языковая компетенция» действительно адекватна языковой компетенции человека. Ключевым для языковой способности человека является умение оценивать грамматическую правильность предложения на родном языке. Суждения о грамматической правильности языкового выражения служат эмпирической базой при моделировании языковой компетенции. Совпадение грамматических суждений носителей языка относительно достаточно широкого класса языковых выражений может служить основанием для того, чтобы считать их представителями единой языковой общности.

Гращенков Павел Валерьевич, д.ф.н., заведующий лабораторией автоматизированных лексикографических систем НИВЦ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Паско Лада Игоревна, студент филологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, техник лаборатории автоматизированных лексикографических систем НИВЦ (Москва, Россия)

Студеникина Ксения Андреевна, аспирант филологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, специалист лаборатории автоматизированных лексикографических систем НИВЦ (Москва, Россия)

Герасимова Анастасия Алексеевна, к.ф.н., ведущий специалист лаборатории автоматизированных лексикографических систем НИВЦ МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

На данный момент наиболее развитыми с точки зрения владения русским языком можно считать диалоговые трансформерные модели [1]. Они демонстрируют правдоподобное поведение при ответе на запросы пользователей, в целом их ответы аналогичны человеческим с точки зрения содержания. Вопрос о том, насколько границы грамматичности у моделей совпадают с таковыми у носителей-людей, представляет как теоретический, так и практический интерес. На данный момент степень доверия к искусственному интеллекту стремительно и неконтролируемо растет: виртуальные ассистенты начинают управлять домами, процессами на производстве, решать вопросы безопасности и т.д. Важно, что «входом» в системы ИИ является текстовое представление языка. Следовательно, изучение больших языковых моделей (БЯМ), обученных на текстах, позволит понять, как устроено «сознание» ИИ.

Языковые модели проходят при создании тщательное тестирование как при помощи специфичных для каждого конкретного проекта методов, так и в рамках общедоступных процедур оценок. Последние, такие, как, например, SuperGLUE [2] или Russian SuperGLUE [3], призваны оценивать способность моделей к логическому выводу, анализу информации, рассуждениям и т.д. По сути, большинство тестов и диагностик, если не все, связаны с проверкой тех или иных общекогнитивных навыков моделей. В то же время, проверкой собственно владения грамматикой, насколько нам известно, при создании моделей занимаются минимально.

БЯМ приобретают языковую компетенцию исключительно из «увиденных» ими текстов. Общий принцип работы нейросетевых моделей заключается в предсказании наиболее вероятного продолжения последовательности слов или символов. Наиболее естественным и вероятным продолжением, соответственно, будет то, которое частотнее в обучающей выборке. Как следствие, от человека и БЯМ ожидается разная реакция на неграмматичные структуры. Человеку свойственно отказываться от интерпретации тех структур, которые представляются ему неграмматичными, в то время как БЯМ могут интерпретировать и неграмматичные с точки зрения носителей русского языка высказывания, поскольку для таких высказываний все равно будут рассчитываться вероятностные характеристики. Исследуя представление грамматических ограничений различного типа в БЯМ, мы не просто изучаем их «языковую интуицию», но и пытаемся понять границы возможностей в интерпретации. Они могут быть более узкими или более широкими, чем человеческие, или могут просто не совпадать с таковыми у людей.

В докладе мы обратимся к одному из специфических для естественного языка синтаксических явлений – островным ограничениям, которые заключаются в запрете на извлечение элементов из определенных синтаксических составляющих, называемых островами. Некоторые проведенные предыдущими исследователями эксперименты с компьютерным моделированием имели целью имитацию усвоения синтаксических островов на основе ограниченного языкового материала, см. [4-7]. Отметим один важный недостаток всех перечисленных экспериментов: во всех них моделировалось усвоение только лишь отношений между извлекаемым элементом и местом, из которого произошло извлечение, но не собственно ограничения. В последних из двух приведенных работ объектом исследования выступали модели, внутренние состояния которых непрозрачны. Исследование языковых способностей таких моделей напоминает изучение лингвистических компетенций человека, которые также во многом представляют собой «черный ящик». Этот факт позволяет распространить на БЯМ экспериментальные методы, использующиеся в лингвистике для изучения компетенций естественных носителей.

Эксперименты по сравнению языковой способности у людей и языковых моделей могут принимать разную форму. Так, в [8] исследуется сравнительная способность людей и языковых моделей производить систематическую работу по построению композиционных структур. В работе [9] проводится эксперимент по моделированию усвоения грамматических параметров детьми и трансформерными моделями. Как отмечают авторы, при всем различии в «архитектуре» языковой способности усвоение отдельных признаков происходит схожим образом: существует иерархия языковых структур, по которой при обучении должны «восходить» как языковые модели, так и люди.

В докладе мы представим проект, призванный оценивать языковую способность нейронных моделей для русского языка. В рамках этого проекта мы подготовили методологические и содержательные решения для оценки уровня владения БЯМ русским языком. К обсуждению будет представлено, какие именно явления русской грамматики должны подлежать оценке в первую очередь, будут описаны методы оценки языковых способностей БЯМ, приведены конкретные

результаты оценки одного из островных ограничений в русском языке — ограничения на остров сочиненной конструкции — моделями ChatGPT, GigaChat, YandexGPT.

Литература

1. *Minaee S., Mikolov T., Nikzad N., Chenaghlu M., Socher R., Amatriain X. & Gao J.* Large Language Models: A Survey. arXiv preprint. — 2024. — arXiv:2402.06196. — [10.48550/arXiv.2402.06196](https://arxiv.org/abs/2402.06196) (accessed 9 February 2024)
2. *Wang A., Pruksachatkun Y., Nangia N., Singh A., Michael J., Hill F., Levy O. & Bowman S. R.* Superglue: A stickier benchmark for general-purpose language understanding systems // *Advances in Neural Information Processing Systems*. — 2019. — 3261-3275.
3. *Fenogenova A., Shavrina T., Kukushkin A., Tikhonova M., Emelyanov A., Malykh V., Mikhailov V., Shevelev D. & Artemova E.* Russian SuperGLUE 1.1: Revising the Lessons not Learned by Russian NLP-models // *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the International Conference “Dialogue 2021”*. — 2021. — 267-277.
4. *Pearl L. & Sprouse J.* Syntactic islands and learning biases: Combining experimental syntax and computational modeling to investigate the language acquisition problem // *Language Acquisition* 20 (1). — 2013. — 23-68.
5. *Tomida Y. & Utsumi A.* A connectionist model for acquisition of syntactic islands // *Procedia — Social and Behavioral Sciences* 97. — 2021. — 90-97.
6. *Wilcox E. G. & Levy R. & Takashi M. & Futrell R.* What do RNN language models learn about filler-gap dependencies? // *Proceedings of the 2018 EMNLP Workshop BlackboxNLP: Analyzing and Interpreting Neural Networks for NLP*. — 2018. — 211-221.
7. *Wilcox E. G. & Futrell R. & Levy R.* Using computational models to test syntactic learnability // *Linguistic Inquiry, Special Collection: CogNet*. — 2022. — 1-44.
8. *Lake B. M. & Baroni M.* Human-like systematic generalization through a meta-learning neural network // *Nature* 623. — 2023. — 115-121.
9. *Evanson L., Lakretz Y., King J.-R.* Language acquisition: do children and language models follow similar learning stages? — arXiv preprint arXiv:2306.03586. — [10.48550/arXiv.2306.03586](https://arxiv.org/abs/2306.03586) (accessed 18 November 2023)

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОВЕДЕНИЯ КРИПТОКЛАСНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Н.С. Горбунов, О.В. Доница

theniksman@ya.ru, olga-donina@mail.ru

УДК 81'33

Исследование, посвященное автоматизации криптоклассного анализа в естественном языке, является ключевым этапом в разработке методов выявления скрытой именной классификации. С использованием машинного обучения и больших языковых моделей исследование охватывает отбор датасетов, тестирование различных классификаторов, включая глубокие нейронные сети, и анализ метафорических сочетаемостей. Результаты работы представляют интегрированный подход, внося вклад в понимание метафорической структуры языка.

Ключевые слова: криптокласс, большие языковые модели, обработка естественного языка, BERT.

Горбунов Никита Сергеевич, ВГУ, факультет романо-германской филологии, кафедра теоретической и прикладной лингвистики (Воронеж, Россия)

Доница Ольга Валерьевна, к.ф.н., доцент, ВГУ, факультет романо-германской филологии, кафедра теоретической и прикладной лингвистики (Воронеж, Россия)

Исследование, посвященное автоматизации криптоклассного анализа в естественном языке, является ключевым этапом в разработке методов выявления скрытой именной классификации. С использованием машинного обучения и больших языковых моделей исследование охватывает отбор датасетов, тестирование различных классификаторов, включая глубокие нейронные сети, и анализ метафорических сочетаемостей. Результаты работы предоставляют интегрированный подход, внося вклад в понимание метафорической структуры языка.

В данном исследовании разработан подход автоматизации процесса выявления скрытых лексико-грамматических категорий имен существительных в английском языке с использованием больших языковых моделей. Работа включает в себя отбор и разметку датасетов, выделение лингвистических паттернов посредством написания алгоритмов фильтрации и маркирование принадлежности слов к определенной категории с помощью дообучения глубокой нейронной сети на задачу бинарной классификации.

На этапе отбора и разметки датасетов были собраны и размечены основанные источники данных: словари английского языка и абстрактных существительных, а также обучающий датасет с метафорами и база данных, содержащая тексты с миллиардами словоупотреблений на английском языке.

Затем были выделены имена-эталоны — существительные, которые имеют ярко выраженный признак категории (к примеру, остроту). Далее был написан программный код на языке Python для парсинга заданного окна контекста для всех имен-эталонов. Предполагается, что слова, встречающиеся с эталоном рамках n -ого окна контекста могут указывать на принадлежность к скрытой категории. Все потенциальные слова-классификаторы добавляются в единую базу данных для дальнейшей обработки.

На следующем этапе каждое потенциальное слово-классификатор было проверено на наличие в своем определении характерного признака категории и была составлена окончательная таблица слов-классификаторов. После этого были составлены и добавлены в отдельную таблицу биграмм из слов-классификаторов и существительных без ярко выраженной категории, которые использовались для поиска реальных примеров совместного употребления в базе данных английских текстов.

Далее было необходимо выявить, какие слова-классификаторы имеют метафорическую сочетаемость с абстрактными существительными. С этой целью были подобраны оптимальные гиперпараметры и проведено дообучение базовой модели BERT на задачу бинарной классификации предложений с использованием предварительного размеченного датасета.

В финальной стадии, дообученная нейронная сеть классифицирует предложения на наличие метафор. Процент метафорической сочетаемости определяет, относятся ли классификаторы и абстрактные существительные к скрытой категории. Итоговая таблица содержит все слова-классификаторы и абстрактные существительные, отнесенные к криптоклассу.

Литература

1. *Борискина О.О.* Криптоклассы английского языка // Издательство Истоки (2011).

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА

В.А. Громов, Н.С. Бородин

stroller@rambler.ru, borodinik.s@gmail.com

УДК 004.62, 004.8, 515.1

В данной работе оцениваются внутренние (истинные) размерности фрактальных структур языка для русского и английского языков. Для этой цели мы применяем методы, основанные на (1) топологическом анализе данных и (2) минимальном остовном дереве графа данных (теорема Стила). Для обоих языков размерности оказываются нецелочисленными значениями (типично для фрактальных множеств), близкими к 9.

Ключевые слова: фрактальная структура языка; внутренняя размерность; теорема Стила; топологический анализ данных; граф данных.

Введение

Исследование, проведенное В.А. Громовым и А.С. Мигриной [4], открыло новую перспективу восприятия естественного языка как целостной самоорганизованнокритичной системы. В рамках текущей работы предпринимается анализ геометрических характеристик этой системы.

Распространение техник, позволяющих представлять слова и n -граммы естественного языка в форме векторов с вещественными значениями (известных как "*embeddings*" в англоязычной научной среде), в контексте машинного обучения, позволило поставить вопрос об определении внутренней размерности множеств слов и n -грамм данного естественного языка. Опираясь на экспериментальные данные, можно утверждать, что указанные множества точек обладают нецелыми (фрактальными) размерностями, что побудило авторов отказаться от интуитивно понятного термина "языковое многообразие" в пользу более точного "языковая фрактальная структура". Этот вопрос кажется авторам значимым как с практической, так и с теоретической точек зрения: с одной стороны, он ставит под сомнение целесообразность использования чрезвычайно объёмных векторов вложений (состоящих из тысяч или даже десятков тысяч элементов), которые генерируются, в первую очередь, большими нейросетевыми языковыми моделями ("*LLMs*"); с другой стороны, исследование вводит в оборот совершенно новый математический объект — языковую фрактальную структуру и определяет её основные свойства.

Эксперименты, целью которых было изучение рассматриваемой проблемы, осуществлялись на материале текстовых корпусов, представляющих национальную литературу русского и английского языков. Выбор этих двух языков для сравнения не был сделан случайно. Каждый из них предоставляет обширный массив текстов для подготовки корпусов, что позволяет лелеять надежду на достаточный объём выборки. При этом, языки имеют глубокие внутренние различия: русский язык характеризуется флективными структурами, и порядок слов в предложении может быть гибким; в то время как английский язык, согласно современной лингвистической классификации, относится к изолирующим языкам [9], где порядок слов, за некоторыми исключениями, должен соблюдаться строго [8].

Постановка задачи

- для множества текстов, принадлежащих корпусу естественного языка $\mathcal{I} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N)$, необходимо подготовить множества словарей n -грамм $\mathfrak{N}_n(d)$, $n = 1..N$, $d = 1..D$, где n — число слов в рассматриваемых n -граммах, а d — размерность пространства вложения. Выдвигается предположение о том, что \mathcal{I} представляет репрезентативную выборку текстов, принадлежащих корпусу соответствующего естественного языка;

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2024 году.

Громов Василий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет компьютерных наук (Москва, Россия)

Бородин Никита Сергеевич, стажёр-исследователь, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет компьютерных наук (Москва, Россия)

- для заданного $n = k$ по множествам $\aleph_k(d)$, $d = 1..D$ оценочно вычислить внутреннюю размерность множества k -грамм соответствующего естественного языка $k^* = f_i(\{\aleph_k(d)\})$ с использованием различных подходов f_i ;
- подтвердить или отвергнуть гипотезу о фрактальности с помощью тех подходов f_i , которые допускают действительное значение размерности (нецелые значения k^* будут свидетельствовать о принадлежности множества к фракталам).

Методология

Для генерации множеств точек $\aleph_n(d)$ по контексту \mathfrak{I} (набору текстов естественного языка) были позаимствованы идеи из метода латентно-семантического анализа [2].

Контексту \mathfrak{I} и множеству слов $\aleph = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$, входящих в этот контекст, в соответствие ставится матрица $W = (w_{ij})$, каждый элемент которой задан как:

$$w_{i,j} = (1 - \varepsilon_i) \frac{n_{i,j}}{\sum_{i' \in \Omega_j} n_{i',j}}, \quad (1)$$

где $n_{i,j}$ – количество вхождений слова λ_i в текст Ω_j , а ε_i – нормализованная энтропия слова λ_i в \aleph :

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{\log N} \sum_{j=1}^N \frac{n_{i,j}}{\tau_i} \log \frac{n_{i,j}}{\tau_i}, \quad (2)$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^N n_{i,j}. \quad (3)$$

Максимальные значения матрицы W соответствуют словам, наиболее часто встречающимся в конкретном тексте, но не характерным для большинства членов контекста.

К полученной матрице применяется сингулярное разложение (SVD) [2]:

$$W \simeq W' = U \Lambda V^T, \quad (4)$$

где U и V^T – прямоугольные матрицы $M \times d$ и $d \times N$ соответственно; Λ – диагональная матрица $d \times d$, сингулярные числа которой (элементы главной диагонали) отсортированы в порядке убывания. В данном контексте d выступает в роли гиперпараметра, который задает степень сохранения информации при воссоздании матрицы W' , которая должна максимально точно соответствовать исходной матрице W с точки зрения нормы Фробениуса. Для выполнения расчета сингулярного разложения (SVD) был применен алгоритм Голуба-Кахана-Ланцоша [3]. В результате использования этого алгоритма строки матрицы U формируют векторы вложений слов \aleph с заданной размерностью d .

Выбор подхода, основанного на сингулярном разложении, обусловлен возможностью быстрого перебора различных значений d и n , где максимальное значение d ограничено числом столбцов матрицы U [5], а n не ограничено вовсе.

Для вычисления внутренней размерности был рассмотрен подход, предложенный Макферсоном и Швайнхартом [6], а также Адамсом и др. [1]. В методе основной идеей является исследование свойств случайных величин, порождаемых персистентной гомологией для фильтраций Чеха и Вьеториса–Рипса; в частности, величины E_α^0 [7]:

$$E_\alpha^0(x_1, \dots, x_n) = \sum_{e \in T(x_1, \dots, x_n)} |e|^\alpha, \quad (5)$$

где $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – выборка независимых и одинаково распределённых случайных величин; $T(x_1, \dots, x_n)$ – остовное дерево минимального веса, построенное этом множестве; $|e|$, $e \in T$ – значение веса, вычисляемое как евклидово расстояние между вершинами, ребра, принадлежащего дереву. В [7] показано, что:

$$C_1 \leq E_\alpha^0(x_1, \dots, x_n) / n^{\frac{d-\alpha}{d}} \leq C_2, \quad (6)$$

$$\frac{\log(E_\alpha^0(x_1, \dots, x_n))}{\log(n)} \rightarrow \frac{\tilde{d} - \alpha}{\tilde{d}}, \quad (7)$$

при $n \rightarrow \infty$; C_1 и C_2 положительны и не зависят от n . Данный факт позволяет оценить фрактальную размерность \tilde{d} для заданного множества $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $x_j \in \mathbb{R}^d$ путём решения задачи регрессии с помощью метода наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\theta} \approx (X^*X)^{-1}Xy, \quad (8)$$

где X и y определены как:

$$\begin{bmatrix} 1 & \log(n_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \log(n_L) \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \log(E_\alpha^0(x_1, \dots, x_{n_1})_1) \\ \vdots \\ \log(E_\alpha^0(x_1, \dots, x_{n_L})_L) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

соответственно. В (9) L – количество равномерных выборок из основного множества точек, гиперпараметр алгоритма. После оценки вектора θ внутренняя размерность \tilde{d} в итоге может быть найдена по формуле:

$$\tilde{d} \approx \frac{\alpha}{1 - \hat{\theta}_1}. \quad (10)$$

Описанные в данном разделе подходы авторы применили для корпусов национальной литературы русского и английского языков, что позволило не только установить факт их принадлежности к классу фракталов, но и оценить внутренние размерности численно. Для обоих языков значение колеблется в диапазоне 9..10.

Литература

1. Adams H. et al. A fractal dimension for measures via persistent homology // Abel Symposia. ArXiv, 2019, abs/1808.01079, 25 p.
2. Bellegarda J. Latent Semantic Mapping: Principles and Applications // Morgan & Claypool Publishers. 2007. 101 p.
3. Golub G., Kahan W. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics; Series B: Numerical Analysis, 1965. Vol. 2(2). p. 205-224.
4. Gromov V.A., Migrina A.M. A Language as a Self-Organized Critical System // Hindawi Complexity. Vol. 2017, ArticleID 9212538, 7 p.
5. Kalman D. A singularity valuable decomposition: the SVD of a matrix // The college mathematics journal, 1996. Vol. 27(1): p. 2-23.
6. MacPherson R.D., Schweinhart B. Measuring shape with topology // Journal of Mathematical Physics, 2012. Vol. 53(7).
7. Schweinhart B. Fractal dimension and the persistent homology random geometric complexes // Advances in Mathematics. Academic Press, 2020. Vol. 372.
8. Shopen T. Language Typology and Syntactic Description // Grammatical Categories and the Lexicon. Cambridge University Press, 2007. Vol. 3.
9. Wayne H. The Germanic Languages // Cambridge Language Surveys. Cambridge University Press, 2015. [10.1017/CBO9780511755071](https://doi.org/10.1017/CBO9780511755071)

БОЛЬШИЕ ЯЗЫКОВЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ТОНАЛЬНОСТИ**Н.В. Лукашевич***louk_nat@mail.ru*

УДК 004.896

Доклад посвящен анализу подходов на основе больших языковых моделей в задачах таргетированной тональности, т.е. извлечению из текстов оценочного мнения по отношению к некоторым целевым объектам (сущностям, их характеристикам или дискуссионным темам). Анализируются результаты больших языковых моделей GPT 3.5 Turbo (ChatGPT), FLAN-T5, Mistral, LLaMA

Ключевые слова: Большая языковая модель, таргетированный анализ тональности, инструктивная модель, формат zero-shot.

В настоящее время достигнут большой прогресс в решении разнообразных задач автоматической обработки текстов на основе применения больших языковых моделей, обученных сначала на больших неразмеченных текстовых данных, а затем дообученных на наборах инструкций, т.е. примеров запросов или задач и ответов к этим запросам [1]. Доклад посвящен анализу подходов на основе больших языковых моделей в задачах таргетированной тональности, т.е. извлечению из текстов оценочного мнения по отношению к некоторым целевым объектам (сущностям, их характеристикам или дискуссионным темам) [2].

Работа моделей анализируется на наборе данных для русского языка RuSentNE-2023, созданного для открытого тестирования в 2023 году [3]. Датасет содержит русскоязычные новостные тексты, в которых размечена тональность по отношению к упоминаемым конкретным людям, организациями, местам и др. Таргетированный анализ тональности по отношению к именованным сущностям в новостных статьях связан с несколькими усложняющими факторами. Во-первых, такие тексты могут содержать мнения разных субъектов, включая взгляды автора(ов), позиции цитируемых источников и отношения упомянутых субъектов друг к другу. Во-вторых, некоторые предложения содержат несколько именованных объектов, к которым выражена разная тональность, что усложняет определение тональности по отношению к каждой отдельной сущности. В-третьих, большинство сущностей в новостных текстах упоминаются в нейтральном контексте, что приводит к значительному преобладанию нейтрального класса в данных.

В докладе анализируются результаты больших языковых моделей GPT 3.5 Turbo (ChatGPT), FLAN-T5 [4], Mistral [5], LLaMA [6]. Исследуются два типа запросов (промтов) к моделям, а также система связанных запросов (chain of thought). Показано высокое качество выявления тональности моделями GPT 3.5 и Mistral при применении в zero-shot формате, т.е. без дообучения на обучающем множестве датасета. Лучшие результаты по качеству показывает модель FLAN-T5xl после дообучения на датасете RuSentNE-2023. Полученные результаты превышают лучший результат тестирования RuSentNE-2023. В докладе будут приведены примеры типовых ошибок языковых моделей.

Литература

1. *Ouyang L. et al.* Training language models to follow instructions with human feedback //Advances in Neural Information Processing Systems, 2022. – Т. 35. – 27730-27744.
2. *Лукашевич Н. В.* Автоматический анализ тональности текстов: проблемы и методы //Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 2022. – Т. 26. – №. 1. – 50-61.
3. *Golubev A. et al.* RuSentNE-2023: Evaluating Entity-Oriented Sentiment Analysis on Russian News Texts //Proceedings of the International Conference “Dialogue, 2023.
4. *Chung H. W. et al.* Scaling instruction-finetuned language models //arXiv preprint arXiv:2210.11416, 2022.
5. *Jiang A. Q. et al.* Mistral 7B //arXiv preprint arXiv:2310.06825, 2023.
6. *Touvron H. et al.* Llama: Open and efficient foundation language models //arXiv preprint arXiv:2302.13971, 2023.

МАТЕМАТИКА И ЛИНГВИСТИКА

Е.В. Рахилина, Д.А. Рыжова

rakhilina@gmail.com, daria.ryzhova@mail.ru

УДК 81

Язык как живая динамическая система с большой вариативностью представляет значительный интерес для математического моделирования. В докладе будут рассмотрены две задачи — моделирования и распознавания ошибок нестандартных говорящих, а также моделирования лексической подсистемы для одного или нескольких языков.

Ключевые слова: математика, лингвистика, математическое моделирование, языковая вариативность.

Языковедческое образование в СССР получило новый импульс в 1960 году с образованием в МГУ Отделения структурной и прикладной лингвистики: из филологического языковедческого оно в одночасье превратилось в лингвистическое — структурное, прикладное, теоретическое, а затем и компьютерное. Это превращение случилось благодаря математикам МГУ, прежде всего, ученику А.Н. Колмогорова, профессору Владимиру Андреевичу Успенскому, который его придумал и осуществил.

Исходная идея состояла в том, чтобы представить описание языка как совокупность своего рода математических задач — каждая со своим «дано», «доказать» и непротиворечивым решением. В полной мере эта идея лучше всего осуществилась в задачах для Московской (а затем и международной) лингвистической олимпиады, однако она получила не только это прямое предметное воплощение, но постепенно, благодаря системному преподаванию лингвистам математики, поменяла идеологию лингвистической науки в целом. Об этом много написано, в том числе и самим В.А. Успенским в его «Трудах по нематематике», однако сегодняшнее взаимодействие математических методов и лингвистических данных (и их описаний) требует отдельного разговора.

Действительно, язык как живая динамическая система с большой вариативностью представляет значительный интерес для математического моделирования — которое, в свою очередь, может помочь лингвистам получать прогнозы развития и обозначать границы и для вариативности, и для динамики этой системы. Обученная на больших объемах данных, программа может преодолевать вариативность, свойственную конкретным говорящим и генерировать очень похожие на написанные неким стандартным носителем языка тексты. Однако интерес может представлять не только преодоление вариативности, но и изучение ее принципов. Кроме того, есть еще множество других типов языкового варьирования — в более широком смысле этого слова, также интересных лингвистам, которые пока своих моделей не получили.

В докладе речь пойдет о двух таких задачах — моделировании и распознавании ошибок нестандартных говорящих и моделировании лексической подсистемы для одного или нескольких языков.

Рахилина Екатерина Владимировна, д.ф.н., профессор, руководитель Школы лингвистики НИУ ВШЭ (Москва, Россия)

Рыжова Дарья Александровна, к.ф.н., доцент, Школа лингвистики НИУ ВШЭ (Москва, Россия)

ПРЕДОБУЧЕННЫЕ ЯЗЫКОВЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ВЛОЖЕННЫХ ИМЕНОВАННЫХ СУЩНОСТЕЙ

И.С. Рожков

fulstocky@gmail.com

УДК 004.89

В данной работе изучаются возможности модели понимания машинного чтения (*MRC, Machine Reading Comprehension*) по передаче знаний в задаче извлечения вложенных сущностей. В такой задаче от модели требуется получить некоторые знания из текстов при помощи подсказок, чтобы извлечь искомые сущности. Обычно для этого требуется обучение на большом наборе данных. Однако в сценариях с ограниченными ресурсами или в сценариях, специфичных для предметной области, создание набора обучающих данных может быть трудным и неэффективным. В таких случаях может быть полезен перенос знаний из более доступных наборов данных, например, из других областей. Для достижения более эффективного извлечения были проведены эксперименты на предобученных моделях BERT различных версий с разными подсказками, которые показали, что тщательная проработка и выбор действительно способствуют улучшению результатов. Были изучены различные подсказки на примере переноса знаний от общего набора данных NEREL к биомедицинскому набору NEREL-BIO, а также малоресурсный набор данных RuNNE.

Ключевые слова: извлечение именованных сущностей, обучение с переносом, малоресурсное обучение, понимание машинного чтения, обучение на подсказках..

Задача распознавания именованных сущностей (*Named Entity Recognition, NER*) — это задача поиска фрагментов текста, связанных с некоторыми физическими или абстрактными объектами именами, и их классификации в соответствии с их смысловым классом, таким как, например, человек или организация. На практике сущности часто вложены друг в друга (т.е. одна последовательность слов является непрерывной подпоследовательностью другой), и это требуется учитывать при создании автоматической системы извлечения сущностей. Примером такого феномена является последовательность *МГУ им. М.В. Ломоносова* со смысловым классом ORGANIZATION, внутри которой есть подпоследовательность слов *М.В. Ломоносова*, которые отображают человека, т.е. смысловой класс PERSON.

Однако извлечение вложенных именованных сущностей связано с немалым количеством трудностей и ограничений. Среди них:

— Применимость предобученных моделей в разных областях на практике. Нередко в специальных областях извлечение может иметь иной характер разметки, чем популярные общие обученные модели, из-за чего качество таких моделей может сильно ухудшиться.

— Малоресурсность наборов данных. Большинство нейросетевых моделей требует достаточно большое количество размеченных данных в целях получения требуемого качества. Однако нередко на практике не удаётся собрать достаточное количество таких данных.

Среди существующих наборов данных для русского языка большинство не рассматривало ни одну из вышеуказанных проблем. Совсем недавно возникли наборы данных NEREL [1], NEREL-BIO [2] и RuNNE [3]. Первый набор данных содержит множество вложенных сущностей 29 разных классов. Однако, он не позволял исследовать первое ограничение, в связи с чем на его основе был создан набор данных RuNNE, содержащий несколько специально ограниченных классов сущностей. NEREL-BIO — набор данных биомедицинской области, содержащий 37 разных классов, причём некоторые из них совпадают с классами набора NEREL. В паре эти наборы данных позволяют тщательно исследовать второе ограничение — по переносу знаний из одной, общей области, в другую, более специфичную.

Среди множества подходов к решению задачи была выбрана т.н. *модель машинного чтения (Machine Reading Comprehension, MRC)* [4]. Данная модель позволяет переформулировать задачу извлечения вложенных именованных сущностей как задачу ответа на вопросы некой

предобученной модели, например, BERT [5] по заданной последовательности слов. Выбирая «хорошие» вопросы, можно достичь высокого качества предсказания именованных сущностей. Лучшим типом вопросов в оригинальной работе стали т. н. *определения* классов сущностей, ставшие отправной точкой в исследовании. В работе понятия «вопросы» и «подсказки» взаимозаменяемы — последние отражают суть применения этих вопросов к модели: мы как бы стараемся подсказать модели, на что стоит обращать внимание, и какие знания в ходе машинного чтения полезнее других, что и позволяет улучшить результаты.

В исследовании рассматривались способы улучшения качества предсказаний сущностей модели MRC в обоих ограничениях. В том числе были предложены новые подсказки:

- *N самых частотных сущностей или их компонентов*
- «Однословные» *контекстная, лексическая и структурная*
- «Полные» *подсказки для всех внешних (внутренних, вложенных) и мультиподходы*

В частности, эксперименты показали, что т. н. *полная лексическая подсказка для всех внешних сущностей* оказалась наилучшей из них. Данная подсказка формируется следующим образом: берётся некоторое предложение из обучающего набора данных, в нём находятся все самые внешние сущности заданного класса, и каждая такая сущность заменяется меткой этого самого класса.

Все представленные подходы просты в создании, т. к. могут быть сгенерированы автоматически, в отличие от использования определений, поскольку требуется их тщательный отбор экспертами из разных словарей.

Эксперименты на ограниченных классах набора данных RuNNE показали, что использование определений достигает качества в 61.21% по макро F1-мере, в то время как полная лексическая по всем внешним сущностям позволяет улучшить его до 63.88%. Такой результат позволяет сделать вывод о том, что модель машинного чтения получает больше семантической информации из лексических подсказок. Более того, по сравнению с оригинальным подходом MRC [4] — выбором определений для каждого класса — лексические подсказки создаются полностью автоматически, что значительно проще ручного и тщательного подбора определений.

В задаче переноса знаний большинство подсказок позволили получить результаты лучше, чем при обычном обучении, что говорит о пользе переноса знаний из другой области.

Представленные результаты исследования были опубликованы в [3, 1, 2, 6, 7].

Литература

1. Loukachevitch N., Artemova E., Batura T., Braslavski P., Ivanov V., Manandhar S., Pugachev A., Rozhkov I., Shelmanov A., Tutubalina E., et al. NEREL: a Russian information extraction dataset with rich annotation for nested entities, relations, and wikidata entity links // Language Resources and Evaluation. — 2023. — 1-37

2. Loukachevitch N., Manandhar S., Baral E., Rozhkov I., Braslavski P., Ivanov V., Batura T., and Tutubalina E. NEREL-BIO: a dataset of biomedical abstracts annotated with nested named entities // Bioinformatics 39(4). — 2023. — btad161.

3. Артемова Е. Л., Змеев М. В., Лукашевич Н. В., Розжков И. С., Батура Т. В., Иванов В. В. и Тутубалина Е. В. Соревнование RuNNE-2022: извлечение вложенных именованных сущностей // COMPUTATIONAL LINGUISTICS AND INTELLECTUAL TECHNOLOGIES.. — RSUH. — 2022. — Июнь. — Режим доступа: [10.28995/2075-7182-2022-21-33-41](https://doi.org/10.28995/2075-7182-2022-21-33-41)

4. Li X., Feng J., Meng Y., Han Q., Wu F., and Li J. A Unified MRC Framework for Named Entity Recognition // Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. — 2020. — 5849–5859.

5. Devlin J., Chang M., Lee K., and Toutanova K. BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // Proceedings of the 2019 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies, Volume 1 (Long and Short Papers). — 2019. — 4171–4186.

6. Rozhkov I., Loukachevitch N. Machine Reading Comprehension Model in Domain-Transfer Task // Lobachevskii Journal of Mathematics 44(8). — 2023. — 3160–3168.

7. Rozhkov I., Loukachevitch N. Prompts in Few-Shot Named Entity Recognition // Pattern Recognition and Image Analysis 33(2). — 2023. — 122-131.

БОЛЬШИЕ ЯЗЫКОВЫЕ МОДЕЛИ И БОЛЬШИЕ МОДЕЛИ ЯЗЫКА

С.Г. Татевосов

tatevosov@gmail.com

УДК 81-116.6

В докладе обсуждается, в какой степени большие языковые модели могут способствовать разрешению основополагающих вопросов современной теоретической лингвистики — поддерживается ли языковая компетенция специализированной когнитивной системой и имеются ли универсальные ограничения на межъязыковое варьирование.

Ключевые слова: формальные теории языка, языковая компетенция, большие языковые модели..

Цель этого доклада — обсудить нарастающее влияние больших языковых моделей (Large Language Models, LLMs) на теорию естественной языковой компетенции.

Повестка дня современной теоретической лингвистики сформирована двумя конфликтующими представлениями о проблеме возможного естественного языка и проблеме того, какие когнитивные системы обеспечивают его функционирование.

В соответствии с так называемой нативистской гипотезой, которую связывают в первую очередь с именем Н. Хомского ([1] и серия многочисленных последующих публикаций; см., в частности, обсуждение в [2]), биологический вид *Homo Sapiens* оснащен специализированной когнитивной способностью, которая максимизирует эффективность усвоения языка, позволяя игнорировать значительные классы совместимых с внешним стимулом гипотез об устройстве языковой системы (например, [3]). Это в свою очередь накладывает принципиальные ограничения на допустимые в языке структуры, выделяя в пространстве возможностей классы невозможных языков [4].

Конкурирующее представление о языковой компетенции исходит из того, что усвоение и использование языковой системы — это часть общекогнитивной способности к представлению знаний и манипуляций с ними (например, [5-7]), не специфичной для языка. Языковое разнообразие в таком случае признается или вовсе не имеющим принципиальных ограничений [8], или ограниченным лишь такими факторами, как общность среды обитания носителей или схожие паттерны их социального взаимодействия.

Исходя из этого имеется два основополагающих типа аргументов за и против каждой из теоретических систем: аргументы, связанные с универсальными свойствами естественных языков или их отсутствием, а также аргументы об усвоении языка, опирающиеся на экспериментальные данные из области психолингвистики, когнитивной психологии и нейронауки (например, [9-11]).

Сторонники нативистского подхода указывают, что к настоящему моменту накоплен внушительный объем сведений о характеристиках естественных языков, не подверженных варьированию. В области семантики, например, важнейшим открытием начала 80-х годов стало обобщение о консервативности естественных языковых кванторных слов [12]. Любые предложения вида $Q(A)(B)$, где Q — кванторное слово, а A и B — дескрипции множеств, истинны тогда и только тогда, когда $Q(A)(A \cap B)$. (Например, чтобы оценить истинность предложения *Каждый студент на этом курсе сдал зачет*, не требуется рассматривать те элементы множества сдавших зачет, которые не являются студентами этого курса.) Это верно, по-видимому, практически для любых кванторных слов любого языка, например, русских *каждый, некоторые, много, большинство, ...* Аргумент об универсальности подкрепляется экспериментальными данными из области усвоения языка: в [13], в частности, показывается, что искусственные неконсервативные кванторные слова неусвояемы для детей, в отличие от искусственных консервативных кванторных слов.

Противники нативизма [5] отмечают, что универсальные свойства языка имеют слишком частный и фрагментарный характер, тогда как нормой, плохо совместимой с нативистскими представлениями, выступает варьирование без отчетливых ограничений, а данные о наличии специфичной для языка мозговой активности, приводимые в литературе (например, [27]), противоречивы и неполны.

Таким образом, теоретическое противоборство двух конкурирующих представлений о языке на данный момент остается неразрешенным.

Появление больших языковых моделей (GPT, AlexaTM, StableLM, LLaMA, PaLM, YaLM) и взрывообразный рост их применения, наблюдающийся с 2022 года, обозначило принципиально новое качество обработки естественного языка: языковая компетенция LLM впервые приблизилась к человеческой. LLM способны к построению рекурсивных структур, отличающих язык от коммуникативных систем других биологических видов, и к проведению операций над ними [14]. LLM (в частности, GPT-4) проявляют металингвистические способности, т.е. способности к построению эксплицитного фонологического, синтаксического и семантического анализа языковых выражений [15]. Основной вопрос, возникающий в этой связи, состоит в том, насколько возможно рассматривать LLM как действующие модели человеческой языковой компетенции и если да, могут ли они дать решающие аргументы для разрешения теоретической дихотомии, обозначенной выше.

В течение 2023 году в литературе развернулась оживленная дискуссия на эту тему.

Одна из обсуждаемых позиций состоит в том, что LLM позволяют отклонить теоретическую парадигму Н. Хомского. Эта позиция наиболее подробно и последовательно изложена в [16]. Основной аргумент в ее пользу состоит в том, что языковая способность LLM развивается исключительно с опорой на внешние данные, а следовательно предполагать вслед за Н. Хомским специализированный «предустановленный» в систему механизм, обеспечивающий усвоение, нет эмпирических оснований. Сами LLM, согласно этой работе, представляют собой наилучшую из имеющихся теорий естественного языка.

Ожидаемо противоположную позицию заняли сам Н. Хомский и его приверженцы. Их основной аргумент [17-21] сводится к тому, что компетенция LLM не является естественноречевой: LLM неизбирательны в отношении данных, невозможных в языке, и способны усваивать их с той же эффективностью. Это утверждение частично подкрепляется данными из [23], согласно которым LLM существенно уступают человеческим индивидам в решении металингвистической задачи вынесения адекватных суждений о грамматичности языковых стимулов. Другой аргумент [22] состоит в том, что человеческая языковая компетенция активизируется в процессе усвоения первого языка при наличии внешних данных, объем которых на несколько порядков меньше, чем необходимо при обучении LLM.

Эти выводы, однако, нельзя считать окончательными. Авторы работы [24] обнаруживают значимую асимметрию в усвоении паттернов естественного языка и трех классов невозможных языков, по внешним признакам похожих на естественные (GPT-2). В [25] указывается, что результаты, которые показывают LLM при обработке металингвистических запросов, могут не отражать их (не)способность к построению лингвистических обобщений. В [26] отмечается, что имеющиеся на данный момент слабые места LLM быстро преодолеваются. Если это так, то текущие отклонения от человеческой языковой компетенции, возможно, нельзя рассматривать как их неотъемлемую внутреннюю характеристику.

Таким образом, можно констатировать, что исследование языковой компетенции LLM превращается в самостоятельную междисциплинарную исследовательскую задачу, к тому же осложняемую их быстрой эволюцией. Можно прогнозировать, что в ближайшее время решение этой задачи будет осуществляться по двум основным направлениям. Во-первых, это получение данных о том, насколько языковой репертуар LLM подчиняется известным универсальным ограничениям на языковую структуру. Во-вторых, это поиск ответа на вопрос о том, ограничены ли и, если ограничены, то насколько способности LLM к усвоению разнообразных классов невозможных естественных языков.

Литература

1. *Chomsky N.* Syntactic structures. — The Hague: Mouton, 1959.
2. *Berwick R. & Chomsky N.* Why only us: Language and evolution. — Cambridge: MIT Press, 2016.
3. *Friederici A.* Language in our brain. The origins of a uniquely human capacity. — Cambridge: The MIT Press, 2017.
4. *Moro A.* Impossible Languages. 2nd edition. — Cambridge: The MIT Press, 2023.
5. *Evans V.* The language myth: Why language is not an instinct. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

6. *Tomasello M.* *Becoming Human: A Theory of Ontogeny.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
7. *Haspelmath M.* Human linguisticity and the building blocks of languages // *Frontiers in Psychology* 10(3056). — 2020. — 1-10.
8. *Croft W.* *Radical Construction Grammar: syntactic theory in typological perspective.* — Oxford: Oxford University Press, 2001.
9. *Tettamanti M., Alkadhi H., Moro A., Perani D., Kollias S. & Weniger D.* Neural correlates for the acquisition of natural language syntax // *NeuroImage* 17. — 2002. — 700–709.
10. *Poeppel D.* The neuroanatomic and neurophysiological infrastructure for speech and language // *Current Opinion in Neurobiology* 28. — 2014. — 142-149.
11. *Moro A.* *The Boundaries of Babel: The Brain and the Enigma of Impossible Languages.* 2nd ed. — Cambridge: MIT Press, 2015.
12. *Barwise J. & Cooper R.* Generalized Quantifiers and Natural Language // *Linguistics and Philosophy* 4. — 1981. — 159-219.
13. *Hunter T. & Lidz J.* Conservativity and learnability of determiners // *Journal of Semantics* 30(3). — 2014. — 315-334.
14. *Dąbkowski M. & Beguš G.* Large language models and (non-)linguistic recursion. 2023. — arXiv:2306.07195v1.
15. *Beguš G., Dąbkowski M. & Rhodes R.* Large Linguistic Models: Analyzing theoretical linguistic abilities of LLMs. 2023. — arXiv:2305.00948v2.
16. *Piantadosi S.* Modern language models refute Chomsky's approach to language. — *Lingbuzz Preprint*. 2023. — <https://lingbuzz.net/lingbuzz/007180>.
17. *Chomsky N., Roberts I. & Watumull J.* Noam Chomsky: The false promise of ChatGPT. — *The New York Times*. 2023. — <https://www.nytimes.com/2023/03/08/opinion/noam-chomsky-chatgpt-ai.html>.
18. *Katzir R.* Why large language models are poor theories of human linguistic cognition. A reply to Piantadosi (2023). Manuscript. — Tel Aviv University, 2023. — <https://lingbuzz.net/lingbuzz/007190>.
19. *Leivada E., Dentella V., Murphy E.* The Quo Vadis of the Relationship between Language and Large Language Models. 2023. — arXiv:2310.11146v1.
20. *Moro A., Greco M. & Cappa S. F.* Large languages, impossible languages and human brains. To appear in *Cortex*.
21. *Marcolli M.* *Generative Linguistics: Present and Future (a public address).* 2023. — https://youtu.be/-gx3SK7FvKk?si=MFZj01loUHjAL_NP
22. *Kodner J., Payne S. & Heinz J.* Why Linguistics Will Thrive in the 21st Century: A Reply to Piantadosi (2023). 2023. — arXiv:2308.03228v1.
23. *Dentella V., Günther F. & Leivada E.* Systematic testing of three Language Models reveals low language accuracy, absence of response stability, and a yes-response bias // *PNAS* 2023. Vol. 120. No. 51. — 2023. — e2309583120.
24. *Kallini J., Papadimitriou I., Futrell R., Mahowald K. & Potts C.* *Mission: Impossible Language Models.* 2024. — arXiv: 2401.06416v1
25. *Hu J. & Levy R.* Prompting is not a substitute for probability measurements in large language models. 2023. — arXiv:2305.13264v2
26. *Bowman S.* Eight Things to Know about Large Language Models. 2023. — arXiv:2304.00612v1.
27. *Musso, M., Moro, A., Glauche, V., Rijntjes, M., Reichenbach, J., Büchel, C., & Weiller, C.* Broca's area and the language instinct. // *Nature neuroscience*, 2003 — 6(7), 774–781.

АДАПТАЦИЯ БОЛЬШИХ МУЛЬТИЯЗЫЧНЫХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПУТЕМ НАСТРОЙКИ ТОКЕНИЗАЦИИ НА РУССКИЙ ЯЗЫК

М.М. Тихомиров

tikhomirov.mm@gmail.com

УДК 004.8

В докладе рассматривается проблема адаптации больших языковых моделей (LLM) с целью повышения вычислительной эффективности и качества при работе на русском языке. Большинство современных открытых LLM обучаются на преимущественно англоязычных корпусах текстов, из-за чего их использование на русском языке менее эффективно. Обучение подобных моделей с нуля стоит миллионы долларов, поэтому в работе исследуется метод адаптации мультязычных LLM путем обучения более подходящего под язык токенизатора с дальнейшей его заменой в языковой модели и дообучением на репрезентативном корпусе специальным образом.

Ключевые слова: большие языковые модели, токенизация, искусственный интеллект, обработка естественного языка..

В последние годы в области обработки естественного языка (и всей отрасли искусственного интеллекта) происходят революционные изменения за счет развития больших нейросетевых языковых моделей, таких как GPT (генеративные модели на архитектуре «трансформер») [1]. Большие языковые модели (LLM) представляют собой большую нейросеть (десятки и сотни миллиардов параметров), которые обучаются задаче языкового моделирования на огромных корпусах текстов (триллионы слов). За счет размеров модели и количества данных для обучения, современные языковые модели содержат в себе обширные знания о мире и позволяют решать широкий спектр задач обработки естественного языка. Несмотря на бурное развитие данного направления, преимущественно оно происходит для английского языка, а для русского языка отсутствуют модели, которые были бы способны иметь сопоставимое качество с англоязычными моделями на англоязычных бенчмарках. Это в первую очередь связано с тем, что обучение подобных моделей с нуля требует миллионов долларов, что могут позволить себе только некоторые коммерческие компании. Во-вторых, морфология русского языка более сложная, чем в английском языке, что добавляет моделям дополнительных сложностей во время обучения.

По этим причинам, одной из актуальных задач является развитие способов адаптации подобных мультязычных / англоязычных моделей на русский язык. Нашей группой был предложен метод адаптации большой языковой модели LLaMa 7B [2] на русский язык путем замены оригинального токенизатора на новый (а также слоя эмбедингов и слоя предсказания следующего слова, lm head). Новый токенизатор обучался на русскоязычных текстовых данных, из-за чего любое слово представляется в среднем меньшим количеством токенов. Так, например, слово интеллект в новом токенизаторе представляется одним токеном, а в оригинальном разбивалось на три: ['инте', 'лле', 'кт']. Из-за этого исходной модели при работе на русском языке приходится оперировать не более-менее разумными токенами, но символьными n-граммами, что негативно влияет на вычислительную эффективность, а также усложняет задачу для языковой модели, так как от нее требуется агрегировать информацию практически на уровне символов.

В нашем исследовании было показано, что алгоритм unigram [4] для токенизации подходит лучше для русского языка, чем повсеместно применяемый BPE [3]. А также было обнаружено, что для адаптации модели достаточно заменить токенизацию, слой эмбедингов и слой предсказаний и дообучить только новые слои на русскоязычных текстах.

Разработанный подход позволил повысить среднее качество на бенчмарке Russian Super Glue [5] по сравнению с исходной моделью с 0.68 до 0.7. Также эксперименты показали, что unigram подход к токенизации позволяет достичь более высокого качества на прикладных задачах, чем BPE.

Помимо этого, за счет перехода на новую токенизацию, существенно выросла вычислительная эффективность обработки русскоязычных текстов. Во время использования модели скорость

генерации текстовой последовательности одинаковой длины выросла на 60% (чем длиннее текст, тем больше эффект). Во время обучения модель стала быстрее на 35%. Помимо этого, также снизилось количество необходимой памяти для работы модели.

Литература

1. Radford A. et al. Improving language understanding by generative pre-training. 2018.
2. Touvron H. et al. Llama: Open and efficient foundation language models //arXiv preprint arXiv:2302.13971, 2023.
3. Sennrich R., Haddow B., Birch A. Neural Machine Translation of Rare Words with Subword Units //54th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics. – Association for Computational Linguistics (ACL), 2016. – С. 1715-1725.
4. Kudo T. Subword Regularization: Improving Neural Network Translation Models with Multiple Subword Candidates //Proceedings of the 56th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers). – Association for Computational Linguistics, 2018.
5. Shavrina T. et al. RussianSuperGLUE: A Russian Language Understanding Evaluation Benchmark //Proceedings of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP). – 2020. – С. 4717-4726.

МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ ПОВЕДЕНИЯ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ АБСТРАКТИВНОГО РЕФЕРИРОВАНИЯ

Д.И. Чернышев

chdanorbis@yandex.ru

УДК 004.912

Доклад посвящен проблеме неустойчивости процесса порождения рефератов нейросетевыми языковыми моделями абстрактного реферирования. В докладе будут рассмотрены причины поведенческих аномалий в работе лучших систем абстрактного аннотирования, а также представлены новые методы коррекции поведения моделей, позволяющие повысить надежность существующих систем.

Ключевые слова: языковое моделирование, нейронные сети, абстрактное реферирование.

Несмотря на универсальность текущего поколения языковых моделей, качество автоматического абстрактного реферирования до сих пор остается неустойчивым к контексту. Большие языковые модели, такие как ChatGPT, часто искажают факты в порождаемых рефератах, а на бенчмарках по абстрактному реферированию [1] проигрывают более ресурсоэффективным языковым моделям прошлого поколения BRIO-BART [2]. В то же время качество работы существующих систем автоматического абстрактного аннотирования сильно зависит от стилистических и структурных особенностей предметной области, что ограничивает возможность их практического применения.

Для объяснения феномена неустойчивости процесса автоматического порождения рефератов был проведен детальный анализ лучших предобученных нейросетевых моделей абстрактного реферирования. Эксперименты проводились на 5 предметных областях: новости, литература, научные статьи, патенты и руководства. Анализировались внешние (степень абстрактности, устойчивость процесса генерации) и внутренние (влияние отдельных слоев на процесс распространения информации в сети) особенности моделей в условиях ограничений на обучающую выборку (few-shot tuning). В результате удалось установить явную закономерность (см. Рис 1) между стратегией предобучения и особенностями работы моделей, обуславливающими эффективность их адаптации на документы различных предметных областей. Была выдвинута гипотеза, что современные предобученные модели абстрактного аннотирования имеют некорректное представление о статистическом позиционном распределении важной информации в документах, что в итоге приводит к снижению эффективности механизма перефразирования.

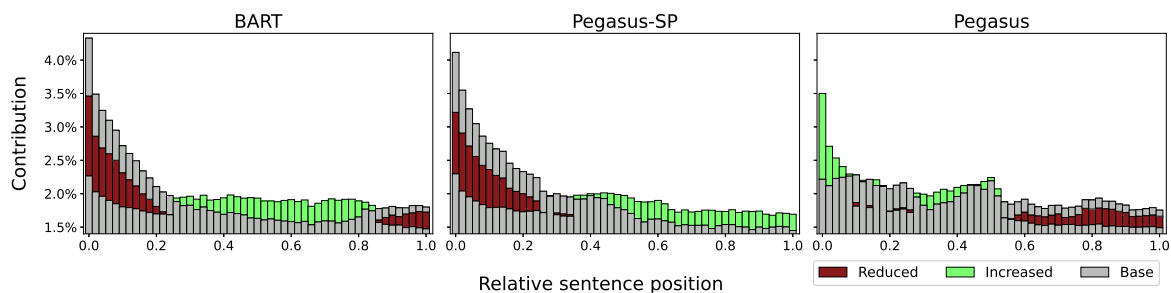


Рис. 1: Динамика изменения распределения центральности входных токенов языковой модели

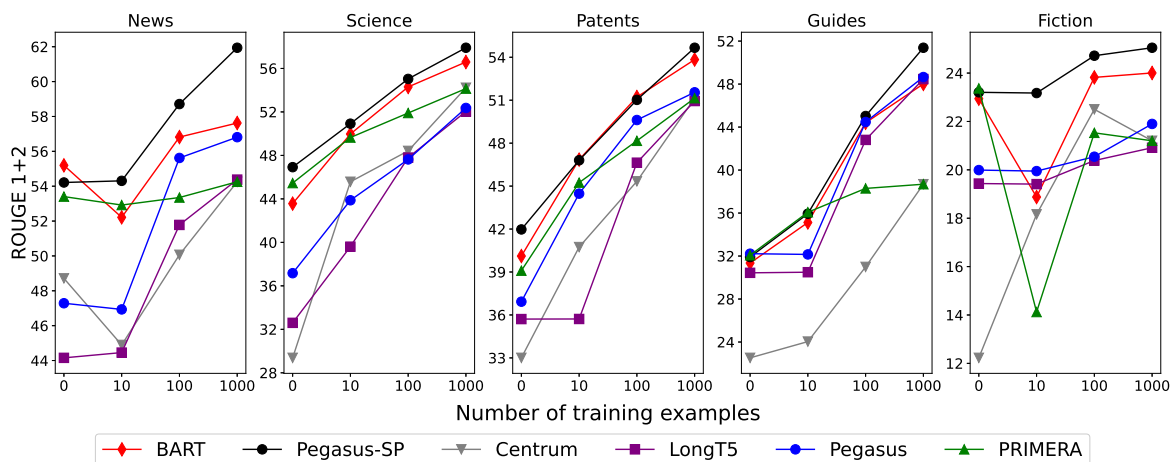


Рис. 2: Сравнение эффективности обучения новой модели Pegasus-SP с предшествующими аналогами

Для проверки гипотезы был проведен эксперимент по коррекции поведения модели Pegasus [3] путем дообучения на задаче ранжирования фрагментов в соответствии с информационной центральностью. В результате была получена новая модель абстрактивного реферирования (см. Рис. 2), Pegasus-SP, превосходящая предшествующие аналоги по качеству реферирования в режимах без обучения (zero-shot) и с частичным обучением (few-shot). Также для коррекции поведения без дополнительного обучения и архитектурных модификаций (plug-and-play) на основе обнаруженной закономерности был разработан новый метод контроля моделей архитектуры encoder-decoder, Biased Encoder Mixture (BEM). Метод BEM позволяет интегрировать внешние системы отбора контента для коррекции распространения информации в архитектуре encoder-decoder, а также влиять на стилистику порождаемого текста вспомогательными кодировщиками. Тестирование на 4 наборах данных показало, что BEM превосходит аналоги по точности и полноте коррекции, достигая 10% относительного роста качества.

Литература

1. Goyal T., Li J. J., Durrett G. News summarization and evaluation in the era of gpt-3 //arXiv preprint arXiv:2209.12356. — 2022.
2. Liu Y. et al. BRIO: Bringing Order to Abstractive Summarization //Proceedings of the 60th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers). — 2022. — 2890-2903
3. Zhang J. et al. Pegasus: Pre-training with extracted gap-sentences for abstractive summarization // International Conference on Machine Learning. — PMLR, 2020. — 11328-11339.

Секция 19

Математика и психология

ФОРМИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО МЫШЛЕНИЯ У СТУДЕНТОВ ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ОБУЧЕНИЯ

О.В. Алмазова

almaz.arg@gmail.com

УДК 512.56

Представлены результаты эмпирического исследования как актуального уровня, так и возможности развития комбинаторного мышления при помощи метода поэтапного формирования у студентов-психологов старших курсов.

Ключевые слова: комбинаторное мышление, метод поэтапного формирования, студенты психологического профиля обучения.

Комбинаторные способы рассуждения играют важную роль в общей структуре научного мышления и выходит за пределы математических знаний, так как в основе комбинаторики лежит способность человека находить, рассматривать и учитывать все возможные варианты сочетаний каких-либо признаков или событий. И именно эта способность создает необходимую базу для построения логически полноценного рассуждения. Ж. Пиаже и Б. Инельдер утверждали, что спецификой логики на формально-операциональной стадии состоит в том, что человек начинает учитывать все возможные, все мыслимые комбинации [1].

Г.В. Бурменская и Л.В. Евдокимова [2], показали недостатки традиционных способов обучения комбинаторики в школе и возможности формирования комбинаторного мышления у младших школьников и подростков при помощи теории поэтапного планомерного формирования умственных действий П.Я. Гальперина [3]. Умение видеть все пространство событий и оценивать вероятности разных вариантов развития ситуации лежит в основе практически всех направлений психологического консультирования (например, когнитивно-поведенческой терапии [4]), что еще раз подчеркивает важность комбинаторного мышления у студентов психологического профиля обучения.

Целью проведенного исследования являлось, во-первых, определение актуального уровня комбинаторного мышления у студентов психологического профиля обучения, а во-вторых, особенности использования теории поэтапного планомерного формирования для формирования комбинаторного мышления студентов.

В исследовании приняли участие студенты-психологи ($N = 67$) старших курсов, дневной формы обучения. Констатирующая часть, в которой студентам предлагалось для решения 6 заданий на разные типы комбинаторных задач и 3 задачи из теории вероятности показала, что для

Алмазова Ольга Викторовна, к.п.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

подавляющего числа студентов задачи на размещения с повторениями оказываются очень сложными, тогда как в задачах на перестановки и сочетания студенты практически не допускают ошибки. При этом только 3 студента (менее 5%) правильно решили все предложенные задачи, что говорит о возможности и нужности формирования комбинаторного мышления. Отметим, что успешность решения задач оказалась не связана с оценками студентов по курсу «Высшая математика» (при помощи критерия Краскела-Уоллиса для нескольких независимых выборок было установлено отсутствие значимых различий в общем балле за выполнение заданий у студентов с разными оценками по математике в ВУЗе).

В процессе обсуждения студенты самостоятельно выделили условия, на которые надо обращать условие при решении комбинаторных задач: 1) свойств исходного множества (объема и качественного состава); 2) свойств образуемых наборов (качественного состава и числа элементов); 3) возможности повторения элементов при составлении наборов; 4) значения порядка следования элементов в наборе. Однако в остальном ориентировочная основа действий была представлена студентам в готовом виде, то есть, использовался второй тип ориентировки (использовалась ориентировочная основа, разработанная Г.В. Бурменской и Л.В. Евдокимовой [2]). После формирования все студенты безошибочно решили задачи пост-теста. Отсроченный пост-тест (через два месяца), при котором студентам предлагалось использовать любой способ решения задач (по схеме или без нее) также показал, что студенты справляются со всеми предложенными заданиями.

Проведенное исследование показывает необходимость развития комбинаторного мышления у студентов психологического профиля обучения и возможность использования для этого теории планомерного поэтапного формирования.

Литература

1. *Жан Пиаже*: теория, эксперименты, дискуссии // Под ред. Л.Ф. Обухова, Г.В. Бурменской. М.: Гардарики, 2001.
2. *Бурменская Г.В., Евдокимова Л.В.* Формирование комбинаторного мышления у младших школьников и подростков // Вопросы психологии, 2007, №2.
3. *Гальперин П.Я.* Обучение и умственное развитие в детском возрасте / П.Я. Гальперин. Психология как объективная наука. Москва-Воронеж: Издательство «Институт практической психологии», 1998.
4. *Бек Дж.* Когнитивная терапия: полное руководство. М: ООО "И.Д. Вильямс 2006.

МНОГОМЕРНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ (MDS) В ИССЛЕДОВАНИЯХ МЕНТАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧЕЛОВЕКА

В.В. Барабанщикова, И.В. Блинникова

vvb-msu@bk.ru, blinnikova-iv@yandex.ru

УДК 159.9.075

В докладе анализируются методологические основания и приводятся примеры использования многомерного шкалирования для исследования ментальных представлений человека. Обсуждается применение MDS-алгоритмов для анализа ментальных репрезентаций пространства, построения семантических полей и социальных представлений.

Ключевые слова: многомерное шкалирование (MDS), ментальные представления человека, матрица близости и различий, размерность ментальных пространств.

Барабанщикова Валентина Владимировна, к.п.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

Блинникова Ирина Владимировна, к.п.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

Многомерное шкалирование (MDS) — это универсальный метод анализа и отображение структуры многомерных данных. Его можно применить к различным психологическим задачам для выявления соотношения отдельных измерений или оцениваемых объектов [1]. MDS использует оценки близости или различий между стимулами для выявления их структурных комбинаций. В российской психологии этот метод неоднократно служил основанием для сложных математических построений психологических феноменов. В частности, Ч.А.Измайлов [2] применил его для построения сферической модели цветоразличения, а в работах Г.М.Головиной [3] он стал базой для моделирования структуры знаний школьников. В качестве итогового результата в работах подобного типа строится пространственная модель, обладающая n -ной размерностью и описывающая систему субъективных представлений. Такое использование метода многомерного шкалирования требует обоснования пространственной природы сознания человека.

Данные о близости представляют собой индекс, который количественно определяет степень сходства или ассоциации между парой объектов или стимулов. Эти данные могут быть получены методом прямых и непрямых оценок [4]. Прямые оценки могут получаться путем попарного сравнения, при этом суждения о близости делаются относительно каждой пары стимулов в заданном множестве. Кроме попарного можно использовать и метод триадического сравнения, который оказывается субъективно более простым для участников. При этом все стимулы разбиваются на триады, и затем в каждой триаде выбираются два наиболее сходных и два наиболее различающихся объекта. Путем этой нехитрой процедуры от триад можно перейти к матрице попарной близости. Другим используемым приемом является задача сортировки стимулов. В этом случае респондентов просят группировать объекты на любых основаниях. Стимулам, попавшим в одну группу, приписывают максимальную степень близости, а затем просят оценить сходство отдельных групп. Процедуру сортировки можно выполнять в несколько итераций. Что касается непрямых методов оценки, то в психологических исследованиях можно применять различные способы приведения данных к таблицам близости. В частности, неоднократно в качестве первичных данных использовались корреляционные матрицы [5].

Цель метода многомерного шкалирования — найти адекватный набор непрерывных размерностей, который задает пространство с расположением стимулов, наиболее точно соответствующем первоначальным оценкам близости между ними. Полученные матрицы сходства или различий имеют квадратную или треугольную форму, на пересечении ее i -й строки и j -го столбца и размещается информация о степени близости между двумя элементами. Это именно то, что оказывается на входе в обработку MDS, а на выходе получают числовые значения координат стимулов в n -мерном пространстве, в некой эмпирически полученной системе координат. Наиболее существенным для дальнейшей интерпретации данных является размерность полученного пространства и содержательное наполнение отдельных измерений. Значения точек-стимулов по каждому из этих измерений позволяет выявить их психологические характеристики и раскрыть их отношения друг относительно друга. Статистические аспекты MDS подробно описаны в ряде работ и учебных пособий [6]. Метрические и неметрические MDS-алгоритмы можно найти в основных статистических пакетах, что позволяет широко использовать их в психологических исследованиях.

Рассмотрение современной картины использования многомерного шкалирования для исследования субъективных представлений человека о различных аспектах окружающего мира, позволяет выделить несколько активно развивающихся направлений. Первое касается изучения пространственных представлений, второе — анализа понятийных структур и семантических полей, а третье — построения социальных репрезентаций. Приведем три примера подобных исследований. Первое из них касается представлений студентов разных факультетов о территории МГУ на Ленинских горах. Участники исследования должны были в условных единицах попарно оценить расстояния между 10 зданиями университета. Обработка полученных матриц методом Торгерсона [7] позволила сделать заключение о двумерной пространственной природе ментальных представлений. В то же время, в полученных «когнитивных картах» наблюдались искажения, которые, с одной стороны, были результатом недостаточных знаний о местности, а, с другой, — свидетельствовали о более сложной и, возможно, многослойной организации ментального пространства.

В другом нашем исследовании испытуемые-трилингвы (жители Мальты) должны были с помощью триадического сравнения оценить близость наименований эмоций на мальтийском, ан-

глийском и итальянском языках. Полученные с помощью многомерного шкалирования итоговые структуры обладали частичным сходством, приближаясь к двумерной модели пространства эмоций. Однако в них были обнаружены и существенные различия, свидетельствующие о разных семантических связях между обозначениями эмоций в разных языках. Еще одна работа была посвящена изучению кросс-культурных различий в репрезентациях такого социального явления как профессионализм. В исследовании принимали участие представители российской и азербайджанской культур, которые должны были оценить сходство между рядом понятий, ассоциированных с профессионализмом. В обоих случаях были получены пространства, заданные тремя размерностями, но интерпретация этих размерностей оказалась различной. Сравнивая между собой три представленных исследования, можно заключить, что они поступательно различаются по степени свободы интерпретации данных и значения их пространственной визуализации.

Многомерное шкалирование, как метод, может создавать иллюзию объемности и пространственной раскладки представлений человека об окружающем мире. Встает вопрос, насколько эта иллюзия соответствует психологической реальности? Можем ли мы, как нечто пространственно протяженное? Одна из первых разработок этого метода нашла свое приложение к анализу представлений человека о географическом пространстве [8]. Этот подход был интуитивно обоснован, поскольку естественно было предположить, что представления о местности могут сохранять метрические характеристики. Работы Р.Шепарда послужили хорошим доказательством этого предположения и создали основания для описания ментальных репрезентаций как аналогов внешнего мира. Однако дальнейшее развитие приемов и способов многомерного шкалирования не были столь однозначными. В наших исследованиях пространственных представлений было обнаружено, что хотя они действительно отражают метрические характеристики, но наряду с этим в них может кодироваться и дополнительная совсем неметрическая информация, что приводит к пространственным искажениям [4]. В исследованиях семантических полей и социальных представлений пространственная развертка выглядит еще более сомнительной. Одним из путей проверки реалистичности пространственной метафоры может быть сравнение итоговых решений, которые получаются с помощью MDS-алгоритмов из разных источников данных, в частности, числовых и вербальных оценок. Другим — анализ получаемых пространств, имеющих четырехмерную и более размерности.

Литература

1. *Davison M., Sireci S.* Multidimensional Scaling. In: H.E.A. Tinsley, S. Brown (Eds.) Handbook of Applied Multivariate Statistics and Mathematical Modeling. Washington, DC: Academic Press, 2012. P.323-352.
2. *Измайлов Ч.А.* Сферическая модель цветоразличения. М.: Издво Моск. унта, 1980.
3. *Головина Г. М.* Метод многомерного шкалирования нечетких оценок // Математические методы в современной психологии: статус, разработка, применение. М.: ИП РАН, 1995. С. 24–31.
4. *Блинникова И. В.* Методы прямого и непрямого шкалирования в исследованиях пространственных представлений // Математическая психология. Сборник научных трудов, посвященных памяти В.Ю.Крылова. — Изд-во ИП РАН Москва: 2010. — С. 210–224.
5. *Campbell, D. P., Hansen, J. C.* Strong-Campbell Interest Inventory. Palo Alto, CA: Stanford University Press, 1985.
6. *Borg, I., Groenen, P.* Modern multidimensional scaling: Theory and applications. New York: Springer-Verlag, 1997.
7. *Torgerson W.S.* Multidimensional scaling: I Theory and method // Psychometrika, 1952. V. 17. № 3. P. 401-419.
8. *Shepard R.M.* The analysis of proximities: multidimensional scaling with an unknown distance function // Psychometrika, 1962. V. 27. № 2-3. P. 125-139, 219-246.

ПСИХОЛОГИЯ МАШИН И МАТЕМАТИКА МАШИН**Г.Д. Взорин***g.vzorin@mail.ru*

УДК 004.8:159.9

В докладе обсуждается проблема недостаточности междисциплинарного взаимодействия между психологией и математикой при изучении взаимодействия человека с искусственным интеллектом. Предлагается вариант решения данной проблемы, основанный на «машинной бихевиористике» и предполагающий применение классической гипотетико-дедуктивной логики науки.

Ключевые слова: гибридный интеллект, математическое моделирование, психология искусственного интеллекта.

Математический и психологический подходы к изучению взаимодействия человека с искусственным интеллектом на практике часто выступают в лучшем случае ортогональными, если не разнонаправленными. Математическое моделирование стремится к формализованному и дедуктивному описанию, в то время как психологический подход напоминает индуктивный, основанный на проведенном эмпирическом исследовании. Если в случае изучения поведения человека очевидно, что сугубо дедуктивно описать его невозможно, можно разве что моделировать полученные в опыте данные, то применительно к искусственному интеллекту (ИИ) напрашивается определенный уровень амбиций по формализации «черного ящика». Действительно, если человек сам создал искусственную систему, возможно, ее все еще можно аналитически описать. Примерами этих подходов являются два варианта исследований гибридного интеллекта (ГИ; взаимодействия интеллектов человека и искусственного) — через попытки формализации «черного ящика» в терминах системного подхода, нечеткой логики [1] и через отказ от попыток формализации в пользу эмпирического выявления условий взаимодействия человека и ИИ [2]. В первом случае работы являются и по форме, и по сути скорее математическими, во втором — скорее психологическими. В таких условиях возникает вопрос о возможности междисциплинарного диалога.

Одним из возможных путей сочетания этих подходов для формирования содержательных междисциплинарных групп является включение обеих линий в реализацию гипотетико-дедуктивной логики научного исследования, устоявшейся в классическом изучении живых систем. Если на заре становления психологии наблюдались интенции исчерпывающе и дедуктивно описать дух человека, либо сугубо эмпирично зафиксировать отдельные закономерности, то в современном подходе исследователь формулирует содержательные гипотезы теоретического уровня, оперирующие психологическими конструктами, из которых дедуктивно выводятся гипотезы эмпирические. Проведение опыта представляет из себя реализацию эмпирической модели, по своей сути — выявление «слабых» мест теории, с целью ее фальсификации. Если эмпирическая гипотеза подтверждается, при условии валидности проведенного опыта теоретическая модель сохраняется, оставаясь открытой для дальнейших проверок. Роль математического моделирования при этом отводится промежуточной ступени между теоретическими конструктами и полученными в опыте данными. С одной стороны, модель основывается на первичных и априори стохастических данных, с другой — она сама служит определенной цели «испытания» действительности в свете сформулированной теоретической гипотезы, которая по своей сути является содержательной психологической.

Такого рода сочетание математики и психологии в изучении гибридного интеллекта, напоминающее их сочетание при изучении человека, подразумевает, что и к искусственным системам применяется методология, принятая для систем естественных. Подходящую теоретическую рамку данного подхода представляет опубликованная недавно в журнале *Nature* статья [3]. Авторы предлагают концепт «Machine behaviour», который можно было бы перевести на русский язык как «машинная бихевиористика». Авторы указывают, что обычно тестированием ИИ моделей занимаются люди, которые их и создавали, применяя к ним специфические тесты, показывающие эффективность моделей — например, процент ошибок при распознавании лиц. Однако в условиях

современных больших языковых моделей, у которых развиваются эмерджентные свойства [4], напоминающие полноценную когнитивную деятельность, такой узконаправленный подход является недостаточным, и требуется привлечение специалистов, традиционно изучающих поведение сложных саморазвивающихся систем. Если при этом привлекаются специалисты-психологи, можно говорить о «психологии машин», как это обозначил автор недавнего препринта [5].

Примером такого подхода при изучении гибридного интеллекта может служить попытка создания эмпирической модели, которая бы вскрывала сущностные изменения в психике человека при взаимодействии его с искусственным интеллектом. Психологический подход предполагает здесь не только знание обычных закономерностей функционирования психики, но и знание методологии изучения сложных систем, к числу которых относится и ГИ. Математический подход предполагает тоже не только знание принципов функционирования ИИ, но и разработку моделей взаимодействия человека и ИИ в свете сформулированных психологических гипотез с целью их испытания в опыте.

Помимо возможностей для взаимодействия, этот подход поднимает, однако, и новые проблемы. Если классическая методология науки применяется к изучению ГИ «слепо», могут возникать ошибки обобщения из-за чрезмерного уподобления искусственных систем естественным. Например, исследователями описан принцип «зубчатой стены» [6] — неоднородности эффективности некоторой когнитивной функции при внешне сходных уровнях трудности с точки зрения человека.

Таким образом, один из возможных путей междисциплинарного изучения гибридных интеллектуальных систем заключается в развитии классической модели гипотетико-дедуктивной логики с рассмотрением искусственных систем в их взаимодействии с людьми.

Литература

1. *Бухаров М.Н.* Системы гибридного интеллекта. Общество с ограниченной ответственностью Издательство Научтехлитиздат, 2005.
2. *Heine I. et al.* Hybrid Intelligence: Augmenting Employees' Decision-Making with AI-Based Applications // Handbook of Human-Machine Systems. 1st ed. / ed. Fortino G. et al. Wiley, 2023. P. 321–332.
3. *Rahwan I. et al.* Machine behaviour: 7753 // Nature. Nature Publishing Group, 2019. Vol. 568, № 7753. P. 477–486.
4. *Webb T., Holyoak K.J., Lu H.* Emergent analogical reasoning in large language models // Nature Human Behaviour. Nature Publishing Group UK London, 2023. Vol. 7, № 9. P. 1526–1541.
5. *Hagendorff T.* Machine Psychology: Investigating Emergent Capabilities and Behavior in Large Language Models Using Psychological Methods: arXiv:2303.13988. arXiv, 2023.
6. *Dell'Acqua F. et al.* Navigating the jagged technological frontier: Field experimental evidence of the effects of AI on knowledge worker productivity and quality // Harvard Business School Technology & Operations Mgt. Unit Working Paper. 2023. № 24–013.

СМЫСЛЫ В МАТЕМАТИКЕ ИЛИ МАТЕМАТИКА СМЫСЛОВ

П.Н. Ермаков, И.В. Абакумова

paver@sfnu.ru, abakira@mail.ru

УДК 159.9

Математика выступает в качестве инструмента познания психики, моделирования психических процессов. Но это и предполагает высокую степень абстрагирования от собственно субъекта, а значит сознательную символизацию самого психического. Дает ли нам человеческое воображение представить четырехмерное пространство-время или n -мерное геометрическое пространство в категориях психологии? Ответ отрицательный. Значит ли это, что математика как наивысшая степень человеческой абстракции и символизации выходит за пределы нашего понимания миропорядка? Проблема заключается не в формировании математического мышления с развитой логикой и аналитическими умениями.

Ключевые слова: математика, смыслы.

Ермаков Павел Николаевич, академик РАО, д.б.н., профессор, Южный федеральный университет, (Ростов-на-Дону, Россия)

Абакумова Ирина Владимировна, д.п.н., профессор, Донской государственный технический университет, (Ростов-на-Дону, Россия)

«Кристаллизация» смыслов, их раскрытие минуется сознательное участие, но при этом математика дает возможность для понятийного творчества и предвосхищения на подсознательном, интуитивном уровне. Для одних это отчужденные сложные (часто плохо понимаемые) понятия, а для других это то, что питает наше сознание, порождает пульсацию новых знаний и открытий. Почему, одни видят в математических понятиях лишь безличные понятия, а для других они приобретают возможность увидеть в формулах и символах новые закономерности и взаимосвязи. Первые — видят и способны осмыслить лишь значения познаваемого, а для других значения наполняются личностным смыслом, порождающим направленный поток нашего сознания, преодолевающий противоречия и познавательные барьеры. В докладе обсуждаются основные положения теории смыслов с точки зрения математического мышления.

**РАЗВИТИЕ КОГНИТИВНОЙ УВЕРЕННОСТИ В РЕШЕНИИ
МЕЖДУНАРОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «КЕНГУРУ»
У 8-12-ЛЕТНИХ ШКОЛЬНИКОВ
О.А. Карабанова, С.М. Чурбанова
okarabanova@mail.ru, svetlanatch@mail.ru**

УДК 159.922

В настоящей работе на выборке 60 учащихся 8-12 лет изучалась «уверенность в собственных знаниях» в ситуации решения математических задач различной степени сложности с пятью вариантами ответов международной олимпиады «Кенгуру» с последующей двухкатегориальной оценкой уверенности в выборе ответа. Обсуждается развивающая роль внешне опосредствующей формы оценки уверенности в решении математических задач с учетом половозрастной специфики

Ключевые слова: уверенность в знаниях, уверенность в себе, международная математическая олимпиада «Кенгуру», учащиеся 8-12 лет, половозрастные различия.

Введение

Развитие когнитивной уверенности в познавательной деятельности — одно из важнейших условий формирования успешной учебной деятельности, актуальный запрос современной образовательной системы, остающийся в статусе нерешенной проблемы во всем мире. В российской психологии Л.С. Выготским (1978) была предложена культурно-историческая теория развития психических функций, суть которой заключается в возможности интериоризации внешне опосредованных форм деятельности и преобразования их во внутренние, интрапсихологические формы [1]. В исследованиях было показано, что внешнее опосредствование форм деятельности фиксируется через такие знаки, как речь, а также через особые типы структурированных образов [2, 3, 4, 5]. Цель настоящего исследования была основана на предположении, что для формирования уверенности в знаниях, необходимо определенным образом ориентировать учащихся на этот аспект школьной жизни, создавать условия для рефлексивных действий через материализованную форму знака оценки уверенности в правильности решения познавательной проблемы. Такой подход был применен при разработке диагностического метода оценки уверенности в решении олимпиадных математических задач у учащихся 8-12 лет [6].

Впервые международная олимпиада «Кенгуру» по математике была проведена в России по инициативе Санкт-Петербургского математического общества в 1994 году, в 2023 году она проводилась в России в 30-й раз. Первоначально в ней приняли участие всего около 300 школьников, сейчас участвуют около полмиллиона учащихся и до 3 миллионов по всему миру. Проведенный

Карабанова Ольга Александровна, член-корр. РАО, д.п.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии, (Москва, Россия)

Чурбанова Светлана Михайловна, к.п.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии, (Москва, Россия)

сравнительный анализ данных международных и национального сайтов олимпиады «Кенгуру» по оценке способности поддерживать познавательный потенциал школьников показал, что к 5-6 классу по сравнению с 3-4 классами наблюдалось снижение количества учащихся с высоким баллом на выборках школьников из разных стран [7]. Наблюдаемый возрастной пик высоких достижений и последующее постепенное снижение его при решении олимпиадных задач согласуется с возрастными закономерностями когнитивного развития подростков [8], и его поддержка зависит от возможности психологического сопровождения познавательного потенциала учащихся. Ситуации неопределенности, вызывающие неуверенность и отсутствие успеха у школьников, часто возникают при изучении математики, что совпадает с периодом формирования конкретно-операциональных структур интеллекта, метапознания и самооффективности [9]. Уверенность в знаниях рассматривается как полифункциональная психическая структура, выполняющая когнитивные, метакогнитивные и регулятивные функции, обеспечивающие как успешную учебную деятельность школьников, так и профессиональную деятельность взрослых [10]. Согласно исследованиям, Л. Станкова [9], применение рейтинга уверенности к математическим задачам у школьников служило лучшим предиктором достижений, чем личностные показатели Я-концепции, тревожности и самооффективности.

Метод исследования

Были отобраны задачи различной степени сложности с пятью возможными вариантами ответов с множественным выбором, исходя из отчетов, ежегодно публикуемых на сайте Международной олимпиады «Кенгуру для российского региона» [6]. В исследовании использовались 15 задач для учащихся 3-4 классов и 18 задач для учащихся 5-6 классов для решения в течение школьного урока, включались задания различной степени сложности и были новыми для школьников. Выборка состояла из 60 детей (29 мальчиков и 31 девочка), учащихся 3-4 и 5-6 классов г. Москвы.

Для оценки уверенности учащихся в правильности выполнения каждого задания использовалась двухкатегориальная шкала: «я уверен» и «я сомневаюсь в этом», введенная Е.В. Головиной (2009) и др. [10]. Испытуемый должен был выбрать правильный ответ и поставить знак «плюс» рядом с ответом в специальном поле, если он был уверен в его правильности, и знак «минус», если он сомневался. Для подсчета средних значений категории уверенности для всех заданий и степени ее достоверности фиксировались следующие параметры: доля правильных ответов, рассчитанная для каждого школьника; доля правильных и уверенных ответов; доля ошибочных и уверенных ответов; доля правильных и сомнительных ответов; доля ошибочных и сомнительных ответов. Анализ данных проводился на базе компьютерного пакета TIBCO «Statistica», версия 13.3.

Результаты и обсуждение

На основании анализа данных сделан вывод о наличии статистической значимости различий между выборками девочек и мальчиков по переменным: уровень когнитивной уверенности при решении задач «Кенгуру» ($U = 267; P = 0,006$); доля правильных и сомнительных ответов ($U = 310,5; P = 0,039$), доля ошибочных и сомнительных ответов ($U = 749,5; P = 0,045$). Отмечается, что на уровне тенденции имеются различия между выборками по переменной: доля правильных уверенных ответов ($U = 318,5; P = 0,052$). Гендерное сравнение когнитивной уверенности для общей выборки 8-12-летних школьников выявило большую уверенность в правильности решения олимпиадных задач для мальчиков и отсутствие уверенности у девочек, что может свидетельствовать о том, что мальчики имеют значительно большую уверенность в своих знаниях по математике, чем девочки. Показано, что девочки дают значительно больше правильных и сомнительных ответов, а также ошибочных и сомнительных ответов, чем мальчики. Высокий уровень уверенности мальчиков в решении задач обусловлен правильными уверенными ответами и отличается от девочек на уровне тенденции. Девочки чаще сомневаются в себе, когда правы и ошибаются, то есть у них проявляется большая критичность. Полученные значимые гендерные различия в когнитивной уверенности можно объяснить различиями в образовательных установках социума по отношению к девочкам по сравнению с мальчиками [11, 12]. В целом образовательные и культурные контексты в разных странах часто отводят девочкам второстепенную роль в изучении математики и естественных наук. Согласно М. Штейнхампу [13], стиль

воспитания девочек в современном обществе называется уступчивым стилем, то есть связан с подчинением правилам и требованиям других, что, несомненно, вносит конфликт в сферу мотивации. Он не формирует ни познавательной уверенности, ни уверенности в себе, а также снижает возможности для реализации способностей девочек по сравнению с мальчиками. В литературе отмечается наличие связей между различными компонентами уверенности, в частности, межкультурная выборка учащихся показывает, что уверенность в себе как личностный интеграл тесно связана с уверенностью в знании и когнитивным суждением [9]. Особая чувствительность к формированию метакогнитивной уверенности в знаниях и суждениях относительно решения различных классов задач создается в младшем школьном возрасте (8-12 лет) и продолжается до начала периода подросткового возраста, что создает прочную основу для формирования личностной уверенности в себе [8].

Таким образом, в проведенном исследовании рассматривалась возможность обращения к анализу психологического сопровождения формирующегося личностного потенциала на основе теории культурно-исторического развития психики ребенка (Л.С. Выготский, А.В. Запорожец, Д.Б. Эльконин, П.Я. Гальперин, Л.А. Венгер, А.Л. Венгер), что позволяет в перспективе изучить в единстве диагностический и коррекционно-развивающий аспекты темы исследования: уверенность в выполнении когнитивных задач с учетом половозрастной и межкультурной специфики.

Литература

1. *Vygotsky L.S.* Mind in society. The development of higher psychological processes (M. Cole at al., eds.), Cambridge, MA/USA: Harvard University Press, 1978.
2. *El'konin D.B. and Zaporozhets A.V.* The psychology of preschool children (D.B. El'konin and A.V. Zaporozhets, eds.), Cambridge, MA/USA: M.I.T. Press, 1971.
3. *Galperin P.Ya.* Stages in the development of mental acts in A handbook of contemporary soviet psychology (M. Cole and I. Maltzman, eds.). N.Y./USA: Basic Book, 1969. pp. 249-273.
4. *Vénguer L.A. and Vénguer A.L.* El hogar: una escuela del pensamiento. Moscow/Rusia: Editorial Progreso, 1988.
5. *Cole M.* Introduction: The Kharkov school of developmental psychology. Journal of Russian and East European Psychology. 1979, vol.18, no. 2. pp. 3-8, [10.2753/RPO1061-040518023](https://doi.org/10.2753/RPO1061-040518023)
6. *Churbanova S., Martynovsky M.* Materialized form of the assessment of confidence in the performance of mathematical kangaroo tasks for students aged 8-12: Gender differences // In Proceedings of the 12th International Conference on Education and New Learning Technologies (EDULEARN20), 6-7 July 2020 Palma, Spain. IATED Palma, Spain, 2020. pp. 3509-3517.
7. The mathematical Kangaroo contest in Russia, Accessed 4 February September, 2020. Retrieved from <https://mathkang.ru/page/k-in-russia>
8. *Craig G.J. and D. Baucum,* Human Development. New Jersey/USA: Prentice Hall, 2001.
9. *Stankov L., Morony S., and Lee P.Y.* Confidence: The best non-cognitive predictor of academic achievement? // Educational Psychology. 2014, vol. 34, no. 1. pp. 9-28, [10.1080/01443410.2013.814194](https://doi.org/10.1080/01443410.2013.814194)
10. *Головина Е.В., Скотникова И.Г., Эллиотт М.А.* Феномен уверенности и его проявления в русской и немецкой культурах // Экспериментальная психология. 2009. Т. 2. № 1. С. 23-34.
11. *Попова Л.В.* Проблема самореализации одаренных женщин // Вопросы психологии. 1996. № 2. С. 31-42.
12. *Ganley C.M. and Lubienski S.T.* "Mathematics confidence, interest, and performance: Examining gender patterns and reciprocal relations," Learning and Individual Differences. 2016, no. 47. pp.182-193.
13. *Steinkamp M.W.* "Motivational style as a mediator of adult achievements in science," in Advances in Motivation and Achievement: Women in Science (M.W. Steinkamp and M.L. Maehr, eds.). New York/ USA: JAI Press, 1984. pp. 281-317.

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В СОВРЕМЕННОЙ ПСИХОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ ХОККЕИСТОВ

С.В. Леонов, И.С. Поликанова

svleonov@gmail.com

УДК 512.56

Хоккей — это вид спорта, в котором первостепенное значение имеют техническая подготовка спортсменов и их когнитивные способности. Владение техникой хоккея подразумевает знание и умение применять различные приемы, необходимые для игры. Хоккеист, стремящийся к высоким результатам, должен в совершенстве освоить все технические приемы, требующие определенных физических возможностей. Во время игры хоккеисту необходимо удерживать внимание на множестве динамических факторов, таких как положение других игроков, траектория шайбы, текущий счет и стратегия игры. Это требует от спортсмена хорошей концентрации и развитых когнитивных способностей. В хоккее часто возникают непредсказуемые ситуации, требующие от игроков быстрого принятия решений.

Ключевые слова: хоккей, виртуальная реальность.

Развитие и совершенствование как технической, так и когнитивной составляющей осуществляется во время полноценного тренировочного процесса. Вместе с тем, благодаря значительному технологическому развитию в последние годы, все больше инноваций внедряется и в процесс подготовки спортсменов, и в частности — хоккеистов. К таким технологиям можно отнести системы виртуальной реальности, разработанные, к примеру Sense Arena (<https://www.sensearena.com/>) или система VR-PACE (<https://findpatent.ru/patent/278/2786594.html>), разработанная сотрудниками Московского университета. Использование систем анализа движений глаз в хоккее позволяет выделять и анализировать глазодвигательные стратегии полевых игроков и вратарей [2, 4]. Также в настоящее время используются системы комплексной хоккейной аналитики, в частности система ICEBERG, разработанная ICEBERG Sports Analytics, которая позволяет проводить анализ эффективности не по одному спортсмену, а сразу системно на командном уровне. Для хоккеистов крайне важное значение имеют такие психофизиологические параметры, как сенсомоторные реакции и общая двигательная координация. Для улучшения зрительно-моторных навыков как в хоккее, так и в других видах спорта, отлично себя зарекомендовал тренажер Dynavision D2 [3]. Для совершенствования двигательной координации и постурального баланса используются такие системы позиционного отслеживания движений как ArtTRACK и SteamVR Tracking 2.0 [1], или оптико-инерциальная система Antilatency (https://developers.antilatency.com/Hardware/Alt_ru.html).

Использование указанных или аналогичных им технологий в тренировочном процессе хоккеистов не сможет полностью заменить реальные тренировки, однако, они представляют собой большие перспективы для тренировки и совершенствования как когнитивных функций, так и двигательной координации на разных этапах подготовки спортсменов.

Литература

1. Поликанова, И. С., Леонов, С. В., Якушина, А. А., Бугрий, Г. С., Кручинина, А. П., Чертополохов, В. А., Люцко, Л. Н. (2022). Разработка технологии виртуальной реальности VR-PACE для диагностики и тренировки уровня мастерства хоккеистов. Вестник Московского университета. Серия 14. Психология, (1), 269-297.
2. Goettker, A., Pidaparthy, H., Braun, D. I., Elder, J. H., Gegenfurtner, K. R. (2021). Ice hockey spectators use contextual cues to guide predictive eye movements. *Current Biology*, 31(16), R991-R992.
3. Ильичева, О. В., Сураковская, Я. В., Шкирева, О. В., Шшиков, И. Ю. (2022). Совершенствование зрительной сенсорной системы хоккеистов 15–16 лет. Известия Тульского государственного университета. Физическая культура. Спорт, (10), 87-95.
4. Pidaparthy, H., Elder, J. (2019, January). Keep your eye on the puck: Automatic hockey videography. In 2019 IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV) (pp. 1636-1644). IEEE.

Леонов Сергей Владимирович, к.п.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

Поликанова Ирина Сергеевна, к.п.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ПСИХОЛОГИИ: НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

А.Д. Наследов

andrey.nasledov@gmail.com

УДК 512.56

Математические методы, все шире применяемые в психологических исследованиях, постоянно совершенствуются. Но наряду с этим, сохраняются традиционные и появляются новые проблемы их применения. Рассмотрим некоторые из них, на наш взгляд, наиболее часто встречающиеся. 1. Учет множественности (многократности) тестирования статистических гипотез (определения статистической значимости) [1]. 2. Критерии выбора между параметрическими и непараметрическими (ранговыми) методами сравнения выборок и корреляционного анализа: подходы к оценке нормальности распределения и гомогенности дисперсий [2, 3, 4]. 3. Проблемы корректности применения многомерных методов корреляционного анализа: многомерная нормальность и мультиколлинеарность. 4. Критерии качества эксплораторного факторного анализа: принцип простой структуры. 5. Критерии качества моделирования структурными уравнениями: индексы согласия [5].

Ключевые слова: математические методы, психология.

Литература

1. *Yoav Benjamini, Yoel Hochberg.* Controlling the False Discovery Rate: A Practical and Powerful Approach to Multiple Testing // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). — 1995-01. — Т. 57, вып. 1. — С. 289–300. — ISSN 0035-9246. — [10.1111/j.2517-6161.1995.tb02031](https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1995.tb02031)
2. *Корнеев А.А., Кричевец А.Н.* Условия применимости критериев Стьюдента и Манна–Уитни. Психологический журнал, 2011, том 32, № 1, с. 97–110. eLIBRARY ID: 16283462
3. *Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.* Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних // Измерительная техника. 2008. №9. С. 23–28
4. *R. Kline* “Principles and Practice of Structural Equation Modeling”, 2011.
5. *Hooper, D, Coughlan, J and Mullen, M* (2008) Structural Equation Modelling: Guidelines for Determining Model Fit. Electronic Journal of Business Research Methods, 6(1), 53-60.

ВОЗМОЖНОСТИ МЕДИАТОРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВЛИЯНИЕ ЧЕРТ ЛИЧНОСТИ И ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО ДИСТРЕССА НА ДИСФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ДЫХАНИЕ В УСЛОВИЯХ ПАНДЕМИИ COVID-19

В.Ф. Петренко, Е.И. Первичко, О.В. Митина

victor-petrenko@mail.ru, elena_pervichko@mail.ru, omitina@inbox.ru

УДК 159.9.07

Процедура медиаторного анализа использована для проверки гипотезы о роли психологического дистресса при влиянии черт личности на дисфункциональное дыхание во время пандемии COVID-19. На материале анализа данных 1362 респондентов показано, что личностные черты детерминируют возникновение психологического дистресса, который, далее, значимо влияет на возникновение ДД.

Ключевые слова: медиаторный анализ, детерминационные связи, дисфункциональное дыхание, пандемия covid-19, черты личности.

Наследов Андрей Дмитриевич, к.п.н., Санкт-Петербургский государственный университет, факультет психологии (Санкт-Петербург, Россия)

Петренко Виктор Федорович, Член-корреспондент РАН, д.п.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии, (Москва, Россия)

Первичко Елена Ивановна, д.п.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии, (Москва, Россия)

Митина Ольга Валентиновна, к.п.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии, (Москва, Россия)

Медиаторный анализ, являющийся одним из методов структурного моделирования, в последние годы все более часто используется при обработке данных в психологических исследованиях [1]. Метод медиаторного анализа с последующим сравнением полученных моделей использовался нами при обработке данных выполняемого нами исследования психологических последствий пандемии COVID-19. В данном исследовании проверке подлежала гипотеза о роли психологического дистресса (ПД) при влиянии черт личности на дисфункциональное дыхание (ДД) во время пандемии COVID-19.

Материалы и методы исследования

Сбор эмпирических данных проводился в России с 27 апреля по 31 декабря 2020 г. В исследовании приняли участие неинфицированные респонденты в возрасте от 18 до 88 лет, из всех регионов России. Объем выборки — 1362 человека.

Были использованы следующие методики: (1) Психологический дистресс измерялся на основании результатов двух методик: 1) Опросник «Шкала воспринимаемого стресса-10» и 2) Шкала ситуативной тревожности Спилберга-Ханина [2]; (2) Опросник симптоматики дисфункционального дыхания (Наймигенский опросник NQ) (Первичко и др., 2023); (3) Шестифакторный личностный опросник HEXACO-24 [4] определяющий выраженность личностных качеств: 1) Честность, 2) Экстраверсия, 3) Доброжелательность, 4) Эмоциональность, 5) Сознательность и 6) Открытость опыту.

Проверка выдвинутой гипотезы о роли ПД при влиянии черт личности на ДД осуществлялась путем построения двух детерминационных моделей методом моделирования структурными уравнениями (процедура медиаторного анализа) с помощью программы EQS и их последующего сравнительного анализа.

Результаты исследования

Было рассмотрено две теоретические модели. В модели 1 (Рис. 1) ПД был рассмотрен в качестве предиктора ДД (NQ) при медиации личностными чертами. В модели 2 было рассмотрено влияние черт личности (HEXACO-PI-R) на ДД при медиации ПД (Рис. 2).



Рис. 1: Теоретическая модель № 1 влияния психологического дистресса на ДД, опосредованное чертами личности



Рис. 2: Теоретическая модель № 2 влияния черт личности на ДД, опосредованное психологическим дистрессом

Рассмотрение показателей согласованности моделей с эмпирическими данными показало, что они обе имеют высокие качества моделей ($CFI = 1$ и $RMSEA = 0$). Однако анализ величин

AIC и CAIC показал, большую объяснительную силу имеет модель № 2 ($AIC = -7.802$; $CAIC = -38.886$), в которой личностные черты влияют на ДД при опосредовании ПД. Таким образом, можно заключить, что личностные черты являются более стабильной характеристикой, которая выступает предиктором как ПД, так и ДД.

Эмпирическая модель влияния личностных черт на ДД, опосредованное ПД, представлена на Рис. 3.

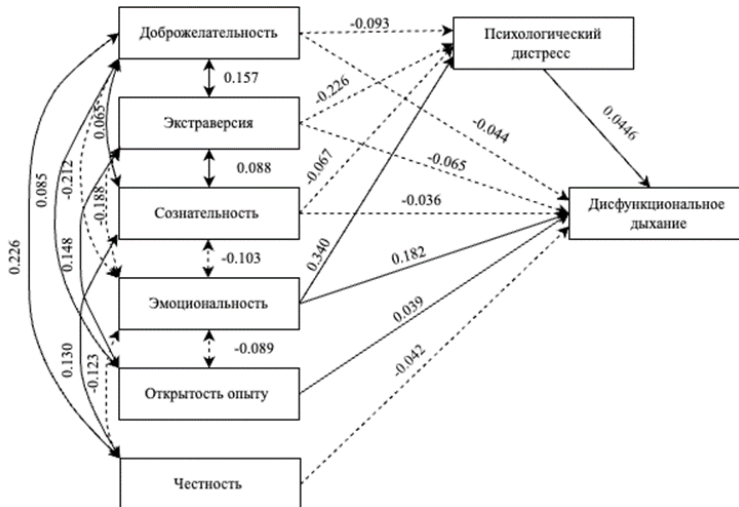


Рис. 3: Эмпирическая модель влияния личностных черт на ДД при опосредовании психологическим дистрессом. *Примечание.* Модель изначально рассматривалась как полная, но для краткости незначимые связи не отражены. Сплошными линиями указаны значимые положительные связи между переменными, прерывистыми линиями — отрицательные.

Уравнение опосредованного влияния:

Интегральный показатель по $NQ(ДД) = -0.041 * \text{Доброжелательность}$, $-0.101 * \text{Экстраверсия}$, $-0.030 * \text{Сознательность}$, $+0.152 * \text{Эмоциональность}$.

Анализ данной модели показал наибольший коэффициент влияния ПД на ДД (0.446). Из рассматриваемых шести личностных черт только 4 влияют на ПД: Эмоциональность его увеличивает, а Экстраверсия, Доброжелательность и Сознательность его уменьшают. Если ПД детерминировано только 4 личностными чертами, то ДД детерминировано всеми 6 личностными чертами. Из всех личностных черт наибольшее влияние на ДД имеет Эмоциональность. Факторами-протекторами для возникновения ДД являются Доброжелательность, Экстраверсия, Сознательность и Честность. Поскольку каждая из описанных черт представляет собой двухполюсную шкалу, то это означает, что противоположные полюса каждой из шкал также влияют на возникновение ДД.

Необходимо отметить, что коэффициенты влияния личностных черт на ПД больше почти в два, чем прямое влияние черт на ДД. Это свидетельствует о том, что личностные черты в первую очередь детерминируют ПД, а затем уже, совокупным эффектом, ПД влияет на ДД. Кроме того, важно отметить, что были выявлены две личностные черты: Открытость опыту и Честность, которые напрямую влияют на ДД, но не имеют прямого влияния на ПД.

Уравнение опосредованного влияния личностных черт на ДД при медиации ПД представлено в примечании к Рис. 3. Влияние личностных черт на ДД при опосредовании ДД статистически значимо и сонаправлено с непосредственным влиянием: положительное для Эмоциональности и отрицательное для Доброжелательности, Экстраверсии и Сознательности. Доля прямого влияния личностных черт на ДД примерно равна их опосредованному влиянию на ДД. Исключением является Экстраверсия: ее опосредованное ПД влияние на ДД почти в два раза больше, чем прямое. Поскольку у Экстраверсии коэффициент детерминации имеет отрицательный знак, то можно заключить, что большая интроверсия приводит к большему ПД и, как следствие, боль-

шему ДД. Важно также отметить, что коэффициенты прямого влияния личностных черт на ПД примерно в два раза больше, чем их прямое влияние на ДД. Т.е. в первую очередь совокупность личностных черт приводит к ПД, а затем уже, как следствие, к ДД.

Заключение

Использование метода медиаторного анализа позволило показать, что личностные черты в первую очередь детерминируют ПД, а затем уже ПД наиболее значимо влияет на возникновение ДД. Эмоциональность является основным фактором-предиктором для возникновения ПД и ДД, в то время как Доброжелательность, Экстраверсия и Сознательность могут выступать как факторы-протекторы для обоих зависимых переменных. Для Экстраверсии медиация дистрессом значительно увеличивает возникновение ДД, по сравнению с прямым воздействием данной черты: более выраженная интроверсия приводит к большему дистрессу и, как следствие, более выраженным дыхательным трудностям.

Литература

1. Митина О. В. Методы исследования каузальных связей // Экспериментальная психология в России. Традиции и перспективы. /ред. В.А. Барабанщиков. М.: Издательство «Институт психологии РАН». 2010. С. 139–143.
2. Первичко Е.И., Митина О.В., Степанова О.Б., Коноховская Ю.Е. Детерминация дисфункционального дыхания психологическим неблагополучием в условиях пандемии COVID-19. Какие психологические переменные опосредуют эту связь? // Психиатрия, психотерапия и клиническая психология. 2023. 14(1). С.7–26.
3. Первичко Е.И., Митина О.В., Степанова О.Б., Коноховская Ю.Е., Дорохов Е.А. Восприятие COVID-19 населением России в условиях пандемии 2020 года // Клиническая и специальная психология. 2020а. Т. 9. № 2. С. 119–147.
4. Егорова М.С., Паршикова О.В., Митина О.В. Структура российского варианта шестифакторного личностного опросника HEXACO-PI-R // Вопросы психологии. 2019. № 5. С. 33–49.

МНЕНИЯ РЕШАТЕЛЕЙ О ПРИЧИНАХ ПРАВИЛЬНЫХ И ОШИБОЧНЫХ ОТВЕТОВ В ЗАДАЧАХ НА НЕТРАНЗИТИВНОСТЬ ПРЕВОСХОДСТВА

А.Н. Поддьяков

apoddiakov@hse.ru

УДК 512.56

Нетранзитивные отношения превосходства (по принципу «камень, ножницы, бумага») активно изучаются в различных науках: биологии, математике, теории принятия решений, поведенческой экономике, психологии, философии. В настоящее время научно-популярные тексты о нетранзитивности превосходства (например, о нетранзитивных игральные костях, числа на гранях которых таковы, что кости бьют друг друга по кругу) представлены во многих изданиях (начало популяризации этой темы положил М. Гарднер в 60-х гг. XX в.). Таким образом, тема нетранзитивности представлена в общественном сознании — но лишь в определенном его сегменте: среди людей, интересующихся научно-популярными математическими источниками (профессиональных исследователей здесь не рассматриваем). Большинство же обычных людей считает многие ситуации нетранзитивности превосходства невозможными, хотя на самом деле они возможны [1]. Эта кажущаяся невозможность не выглядит странно, если учесть, что даже в математике данные ситуации квалифицируются как парадоксы и как возможный источник розыгрышей для не посвященных в тему. Исследовательский вопрос: как люди — не математики решают некоторые задачи на нетранзитивность и каковы их мнения, представления о причинах чужих правильных и ошибочных ответов в этих задачах?

Ключевые слова: нетранзитивность превосходства, правильные и ошибочные решения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ, проект № 23-18-00695 «Логико-когнитивные модели рассуждений: принципы демаркации нормативного и дескриптивного».

Поддьяков Александр Николаевич, д.п.н., профессор, НИУ «Высшая школа экономики», факультет социальных наук (Москва, Россия)

Нами впервые разработана методика и проведен эксперимент, в котором участникам помимо решения двух задач на логическое следование применительно к ситуациям нетранзитивности превосходства задавалась еще одна задача. Это задача на рефлекссию — о причинах правильных и ошибочных решений этих задач другими людьми.

Процедура. Участником давались две задачи с вопросом о возможности следующих ситуаций.

1. Возможны ли такие 3 команды борцов по 6 борцов в каждой, что в круговом турнире, где каждый борец одной команды встречается с каждым борцом из других команд, борцы 1-й команды одержали бы больше побед над борцами 2-й команды, чем потерпели от них поражений; борцы 2-й команды одержали бы больше побед над борцами 3-й команды, чем потерпели от них поражений; борцы 3-й команды одержали больше побед над борцами 1-й команды, чем потерпели от них поражений?

2. Возможны ли такие 3 различающихся набора, в каждом из которых по 6 карандашей разной длины, что при попарных сравнениях каждого карандаша из одного набора с каждым карандашом из других наборов: карандаши из 1-го набора чаще оказываются длиннее карандашей из 2-го набора; карандаши из 2-го набора чаще оказываются длиннее карандашей из 3-го набора; карандаши из 3-го набора чаще оказываются длиннее карандашей из 1-го набора?

После решения участниками этих задач им давалось разъяснение на числовом примере с показом несложных диаграмм, что ситуация с нетранзитивными наборами карандашей возможна. Затем им сообщалось: «Но подавляющее большинство решило задачу о карандашах неправильно (они ответили, что так быть не может), а задачу о борцах — правильно (ответили, что так может быть). Как Вы думаете, каковы могут быть причины такого расхождения в результатах: почему большинство людей решило задачу о борцах правильно, а задачу о карандашах неправильно?». Ответы давались в письменном виде.

Участники: 135 человек в возрасте от 17 до 21 года, студенты 1 курса гуманитарного факультета без вступительного экзамена по математике.

Результаты: Для первых двух задач показано следующее. Подавляющее большинство участников (79%) считает возможной ситуацию нетранзитивности превосходства, представленную в задаче про три команды борцов. И подавляющее большинство же (77%) считает невозможной ситуацию, представленную в другой задаче — про нетранзитивные наборы карандашей, при том, что обе ситуации возможны.

Выделены три вида обоснований, даваемых участниками при объяснении чужих ошибочных ответов в задачах о возможности нетранзитивных отношений между командами борцов и между наборами карандашей разной длины.

1. Наиболее распространенные ответы участников состояли в следующем. Задача про борцов — это задача про живое, динамичное, взаимодействующее, и здесь возможны самые разные варианты исходов, в отличие от задачи про карандаши — неживые, статичные, не взаимодействующие друг с другом, где парадоксальные исходы, выглядящие для многих людей противоречием с некоторыми правилами математики и логики, представляются невозможными.

2. Объяснения через неучет решающими условий задачи («не вчитались в условия»).

3. Объяснения через указание на возможность или затрудненность зрительного представления содержания этих задач и идентификации с теми субъектами или объектами, которые в них фигурируют (цитата: «Задачу о борцах проще визуализировать и понять, потому что мы люди, а не карандаши»).

В дальнейшем представляет интерес проведение эксперимента по описанной методике на двух других выборках: а) студентов, чья основная учебная деятельность связана с математикой и логикой; б) студентов, чья основная учебная деятельность связана с психологией. Это позволит получить более многомерную картину представлений о причинах правильных и ошибочных ответов.

Литература

1. Поддьяков А.Н. Изменение представлений о непереходности превосходства под влиянием ознакомления с «нетранзитивными» объектами // Современная экспериментальная психология: В 2 т. / Под ред. В. А. Барабанщикова. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2011. Т. 2. С. 193-205.

2. Поддьяков А.Н. Методика «Почему большинство ошиблось?»: мнения решателей о причинах правильных и ошибочных ответов в задачах на нетранзитивность превосходства. 2023. Препринт. <https://www.researchgate.net/publication/376834619>

3. *Поддьяков А.Н.* Непереходность (нетранзитивность) отношений превосходства и принятие решений // Психология. Журнал Высшей школы экономики. 2006. № 3. С. 88-111.

4. *Поддьяков А.Н.* Принцип нетранзитивности превосходства в разных парадигмах // Вопросы психологии. 2019. № 2. С. 3-16.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПОВ РАЗВИТИЯ МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Э.Э. Сыманюк, А.П. Усольцев

e.e.symanjuk@urfu.ru

Рассматриваются возможности развития мышления учеников в учебном процессе по математике. Выделяются аспекты мышления, которые необходимо учитывать в учебном процессе: познание, деятельность и воображение. Приводятся принципы развития мышления: субъектности, наглядности, системности, нормируемости, творчества и дополнительности. Показывается, что их учёт позволяет обеспечить целостность и достаточность процесса развития мышления. Кратко описывается каждый принцип и показываются конкретные пути его учёта при организации изучения школьниками математики. Особенное внимание уделяется обсуждению проблемы целесообразности изучения математики учениками, условно характеризуемыми как «гуманитарии».

Литература

1. *Бархатов, Т. А.* Воображение как граница понимания: о функции воображения в мысленных экспериментах // ПРАЭНМА. — 2020. — № 2 (24). — С. 199–223. — [10.23951/2312-7899-2020-2-199-224](https://doi.org/10.23951/2312-7899-2020-2-199-224).

2. *Гончаров, С. З.* Значение воображения в формировании понятий у студентов // Научный диалог. — 2015. — № 4 (40). — С. 44–75.

3. *Князева, Е. Н.* Когнитивная сложность // Философия науки. — 2013. — Т. 18, № 1. — С. 81–94.

4. *Конопкин, О. А.* Психическая саморегуляция произвольной активности человека (структурно-функциональный аспект) // Вопросы психологии. — 1995. — № 1. — С. 5-12.

Сыманюк Эльвира Эвальдовна, член-корр. РАО, д.п.н., профессор, Уральский федеральный университет, Уральский гуманитарный институт, (Екатеринбург, Россия)

Усольцев Александр Петрович, д.п.н., профессор, Уральский федеральный университет, Уральский гуманитарный институт, (Екатеринбург, Россия)

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА КЛАССИФИКАЦИИ ТРУДНЫХ ЖИЗНЕННЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Д.В. Ушаков, Е.В. Битюцкая

bityutskaya_ew@mail.ru

УДК 159.9.07

Исследование посвящено разработке воспроизводимого алгоритма, позволяющего пошагово проследить процесс принятия решения об отнесении воспринимаемых жизненных трудностей к определенному типу. Применяются методы машинного обучения и моделирование логических процессов. Полученный алгоритм объединяет решающие правила, разработанные с использованием профиля респондента по опроснику и признаков разметки.

Ключевые слова: восприятие ситуации, трудная жизненная задача, классификация, компьютерное моделирование, машинное обучение.

Исследование типов восприятия трудных жизненных ситуаций является востребованной задачей, поскольку знание об особенностях восприятия субъектом происходящих событий позволяет прогнозировать характер его взаимодействия с ситуацией. Классификация воспринимаемых трудностей, которая представлена в данной работе, разрабатывалась на материале трудных жизненных задач (ТЖЗ). Это тип трудных жизненных ситуаций, предполагающих достижение высокой значимой цели и возможность контроля субъекта. Основанием выделения типов является направленность субъекта на приближение к трудной ситуации или уход от нее. Классификация типов восприятия ТЖЗ включает три крупных типа: приближение, уход, амбивалентное восприятие. Приближение далее разделяется на три подтипа: драйвовый, максимальный и оптимальный. Тип определяется психологом комплексно: по сочетанию 1) профиля респондента по опроснику «Типы ориентаций в трудной ситуации» ТОРС (количественные данные; вектор профиля) и 2) наличию значимых для типа категорий (качественные данные – описания ТЖЗ; вектор разметки).

В настоящей работе мы применяем методы машинного обучения и компьютерное моделирование логических процессов (Подколзин, 2008) и преследуем две цели: 1) смоделировать принятие решения психолога, реализующего задачу классификации, 2) оптимизировать процедуру классификации. Необходимость создания алгоритма двойная: четко сформулировать процесс решения задачи классификации и получить инструмент, позволяющий другим психологам понять процесс оценки восприятия и совладания респондента с ТЖЗ.

Эмпирические данные о ТЖЗ собраны на выборке 611 респондентов, из них 184 мужчины и 427 женщин (в возрасте 19-52 года; $M = 25$; $SD = 5,8$) — студенты московских вузов, а также работающие специалисты, жители Москвы и Московской области. Для сбора данных применялся опросник ТОРС, включающий 8 шкал [1] и Методика структурированного описания ситуации, позволяющая получить качественные данные (их обработка выполнена на основе контент-анализа, по результатам которого получены 187 признаков разметки).

На первом этапе применялись методы машинного обучения (Random Forest, Gradient Boosting, Logistic Regression, Decision Tree). Результаты базовой конфигурации перечисленных методов при рассмотрении 187 признаков разметки и 8 признаков опросника отдельно указывают на невысокие показатели точности классификации (< 0.69 — по опроснику; < 0.51 — по разметке). На следующем шаге, в процессе работы над признаками опросника и разметки по отдельности, мы сократили пространство признаков до 6 шкал ТОРС и 25 признаков разметки. В результате нам удалось незначительно улучшить показатели точности классификации (< 0.7 — по опроснику; < 0.55 — по разметке). Видим, что оценки по опроснику выше, как и на предыдущем шаге. Далее мы применили комбинацию из 11 признаков опросника (6) и разметки (5). При этом точность классификации улучшилась до 0.74. Наконец, мы опробовали возможность последовательно отделять классы, используя также 11 признаков и получили приемлемую точность < 0.8 (кумулятивный показатель).

Ушаков Дмитрий Викторович, академик РАН, д.п.н., профессор, Институт психологии РАН (Москва, Россия).

Битюцкая Екатерина Владиславовна, к.п.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

На втором этапе применялся метод моделирования логических процессов [2] для экспликации алгоритма психолога, создания и проверки модели принятия решения эксперта об отнесении каждого случая к одному из пяти типов классификации ТЖЗ. Оказалось, что на первом шаге разделения на три крупных типа по опроснику точность классификации достаточно высокая (0.885). Однако на втором шаге (при отделении оптимального типа от двух других типов приближения) точность падает (0.769). Для такого разделения обобщенного правила, основанного на показателях опросника, оказалось недостаточно, поэтому используется сочетание профиля опросника и признаков разметки. Кроме того, тестирование порогов, указывающих на выраженность признаков, измеряемых шкалами ГОРС, и изменение двух порогов позволило улучшить показатель точности до 0.79. Введение третьего шага, разделяющего два типа приближения (драйвовый и максимальный) только на основе разметки позволяет разделять их с точностью 0.902. В целом, на имеющейся обучающей выборке данная процедура выполняет классификацию с точностью 0.775 (кумулятивный показатель). Снижение показателей точности на втором шаге моделирования логических процессов связано с тем, что типы приближения смешаны.

Таким образом, на основе проведенного исследования предложен алгоритм, позволяющий пошагово проследить процесс принятия решения психолога при отнесении воспринимаемой ТЖЗ к одному из пяти классов. Это облегчает размышление эксперта и сводит процесс принятия решения к трем простым и проверяемым правилам. В результате рассмотрения двух подходов отметим: несмотря на то, что методы машинного обучения позволяют получить чуть более высокое качество классификации (превышение находится в пределах статистической погрешности), но решающие правила при этом гораздо более сложные. Простота (в том числе, вычислительная) и лучшая интерпретируемость моделирования логических процессов позволяют нам рекомендовать именно этот метод для практического применения.

Литература

1. *Битюцкая Е.В., Корнеев А.А.* Диагностика восприятия жизненных трудностей: ситуационный опросник «Типы ориентаций в трудной ситуации» // Вестник Московского государственного областного университета. 2020. № 4. С. 141–163.
2. *Подколзин А.С.* Компьютерное моделирование логических процессов. Архитектура и языки решателя задач. Физматлит, 2008. 1024 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СЕНСОРНОЙ ПСИХОФИЗИКЕ

А.М. Черноризов, В.Е. Дубровский

amchern53@mail.ru

УДК 159.938.253

Рассмотрена формальная схема представления результатов психофизических экспериментов с использованием концепции сенсорного пространства. Предложена многоканальная модель зрительного различения на основе нейроподобных элементов.

Ключевые слова: психофизика, сенсорные пространства, многоканальные модели обнаружения, пространства Финслера.

Психофизические методы измерения ощущений были первоначально разработаны для однопараметрических стимулов. В дальнейшем, во многом благодаря работам Роджера Шепарда [1], подобные методы стали применяться и для стимулов, зависящих от нескольких параметров. Особенно часто в экспериментах испытуемым предъявляется взвешенная сумма простых стимулов (например, изображений). При этом подразумевается, что стимулы можно складывать и умножать на число, что позволяет их считать элементами линейного пространства — векторами. Основываясь на ответах испытуемого, это пространство можно наделить некоторой субъективной

Черноризов Александр Михайлович, д.п.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

Дубровский Виктор Ефимович, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет психологии (Москва, Россия)

мерой близости стимулов, т.е. рассматривать его, как метрическое. Естественно, такая метрика будет зависеть как от типа эксперимента, так и от конкретного испытуемого. Будем называть пространство стимулов, снабженное субъективной метрикой, сенсорным пространством. Оценки субъективных расстояний, полученные при помощи различных психофизических методов, не всегда согласуются, порождая различающиеся сенсорные пространства.

Методы измерения ощущений, основанные на оценках разностных (дифференциальных) порогов, были предложены Густавом Теодором Фехнером. Если в эксперименте определяются дифференциальные пороги различения пар многопараметрических стимулов, то, вслед за авторами работы [2], будем называть сенсорное пространство обобщенным пространством Фехнера. Один из возможных способов геометризации такого пространства предлагается в настоящей работе. Будем рассматривать сенсорное пространство как дифференцируемое многообразие, каждая точка \mathbf{x} которого соответствует некоторому стимулу, относительно которого измеряются дифференциальные пороги. Испытуемый должен сравнивать \mathbf{x} и различные тестовые стимулы вида $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Формально элементы \mathbf{y} принадлежат касательному векторному пространству в точке \mathbf{x} многообразия.

Используя результаты пороговых экспериментов, касательное пространство можно наделить некоторой нормой, характеризующей меру субъективной близости стимулов [3]. Действительно, для любого стимула \mathbf{x} экспериментально определяется подпороговое множество $\mathcal{Y}_x = \mathcal{Y}(x)$ таких элементов $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_x$, что испытуемый не различает \mathbf{x} и $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Если множество \mathcal{Y}_x обладает центральной симметрией и выпукло, то его можно рассматривать как единичный шар, соответствующий некоторой эмпирической норме, определяемой функционалом Минковского:

$$\mu(\mathbf{y}|\mathcal{Y}_x) \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{y} = 0 \\ \inf\{\lambda > 0 | \lambda^{-1}\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_x\}, & \text{если } \mathbf{y} \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Функционал Минковского соответствует хорошо известному в психофизике методу установки: необходимо подобрать такое минимальное значения коэффициента ослабления интенсивности λ , чтобы стимул $\mathbf{x} + \lambda^{-1}\mathbf{y}$ оказался пороговым относительно \mathbf{x} .

Для того, чтобы функционал Минковского удовлетворял аксиомам нормы, должны выполняться следующие три условия:

\mathcal{Y}_x — поглощающее множество. Если наблюдатель не может различить стимулы \mathbf{x} и $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, то для него неотличим от \mathbf{x} и любой стимул $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ ($\forall \alpha \in [0, 1]$). Это условие выполняется всегда.

\mathcal{Y}_x — уравновешенное множество. Значения функционала Минковского для любых \mathbf{y} и $-\mathbf{y}$ совпадают, что соответствует равенству инкрементных и декрементных порогов.

\mathcal{Y}_x — выпуклое множество, содержащее отрезок, соединяющий любые два его элемента:

$$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}_x \Rightarrow (1 - \alpha)\mathbf{y}_1 + \alpha\mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}_x \quad (\forall \alpha \in [0, 1]) \quad (2)$$

Это означает, что если испытуемый не отличает $\mathbf{x} + \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x} + \mathbf{y}_2$ от \mathbf{x} , то он не сможет отличить от \mathbf{x} и все промежуточные стимулы вида $\mathbf{x} + \mathbf{y}_1 + \alpha(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)$ ($\forall \alpha \in [0, 1]$). Если в эксперименте получено поглощающее, уравновешенное и выпуклое подпороговое множество, то функционал Минковского задает зависящую от точки \mathbf{x} норму в касательном пространстве:

$$\mu(\mathbf{y}|\mathcal{Y}_x) = \|\mathbf{y}\|_x \quad (3)$$

Эта норма порождает метрику:

$$\rho_x(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_x = \mu(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|\mathcal{Y}_x) \quad (4)$$

Множество стимулов, рассматриваемое как дифференцируемое многообразие, каждое касательное пространство которого обладает подобной геометрией, является пространством Финслера [4]. Требование дифференцируемости накладывает определенные ограничения на локальные нормы. В частности, приходится исключить из рассмотрения целый класс моделей различения стимулов, в которых подпороговое множество является многогранником, хотя пространство с соответствующей нормой вполне допустимо.

На возможность использования финслеровых пространств в психофизике вероятно первым указал Роджер Шепард [1]. Частным случаем пространства Финслера с евклидовой квадратичной метрикой на касательных пространствах является риманово пространство. Г. Гельмгольцем

и Э. Шредингером была предложена соответствующая концепции цветового пространства, в которой для вычисления субъективного расстояния между цветами используется дифференциальная квадратичная форма (линейный элемент).

В сенсорном пространстве Финслера расстояние между двумя близкими точками \mathbf{x} и $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ определяется функцией

$$ds = F(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mu(d\mathbf{x}|\mathcal{Y}_x) = \|d\mathbf{x}\|_x \quad (5)$$

Расстояние между удаленными стимулами можно найти только путем вычислений, суммируя цепочку субъективных различий между парами близких элементов. При этом, в отличие от рассмотренного Фехнером одномерного случая, результат зависит от выбора соединяющей два стимула траектории, вдоль которой производится суммирование (точнее говоря, берется интеграл).

Пусть в сенсорном пространстве параметрически задана некоторая кривая $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, в каждой точке которой определен касательный вектор $\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$. Расстояние вдоль кривой между парой точек $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(\tau_1)$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(\tau_2)$, определяется формулой

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|_x d\tau \quad (6)$$

Длина кривой от не зависит от способа параметризации, поскольку норма — однородная функция первого порядка. Минимальное значение длины по всем возможным кривым, соединяющим точки $\mathbf{x}(\tau_1)$ и $\mathbf{x}(\tau_2)$ можно считать расстоянием в обобщенном пространстве Фехнера. Кривая, на которой расстояние минимально, является геодезической. Необходимым условием существования геодезических является выполнение перечисленных выше требований к виду подпорогового множества.

Экспериментальное определение подпороговых множеств для достаточно большого числа элементов является трудоемкой задачей. Ниже описан класс моделей, позволяющих задавать нормы в касательных пространствах в параметрической форме [3, 5]. Сенсорный анализатор будем рассматривать, как совокупность нейроподобных элементов или каналов, независимо реагирующих на предъявленный стимул [6]. Ответ испытуемого моделируется с помощью решающей функции, аргументами которой служат отклики каналов. В простейшем случае предполагается, что стимул обнаруживается испытуемым, если отклик любого из каналов превышает пороговый уровень («пиковое решающее правило»).

Формально каналы являются линейными функционалами. Будем считать, что зависящие, вообще говоря, от точки \mathbf{x} пространства Финслера вектора приращений стимулов $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ (принадлежащие касательному пространству) и вектора весовых коэффициентов каналов $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ являются элементами пары сопряженных пространств, и задана билинейная форма $\langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle$ на $\mathbb{W} \times \mathbb{Y}$, приводящая эти пространства в двойственность. Каждая модель различения определяется набором каналов $\mathcal{W}_x = \{\mathbf{w}_j\}$. Для примера рассмотрим модель с общим правилом решения:

$$\mathcal{Y}_x = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Y} : \left(\sum_{j=1}^n | \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{y} \rangle |^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\} \quad (7)$$

При $p \rightarrow \infty$ получаем пиковое решающее правило. Для выполнения условий применимости финслеровой геометрии необходимо, чтобы $1 < p < \infty$. При этом, вообще говоря, должна быть задана зависимость весовых функций каналов от точки финслерова многообразия: $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_j(x)$, которая согласуется с экспериментом.

Данную модель различения удобно переписать в виде:

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbb{Y}} = \left(\sum_{j=1}^n | \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{y} \rangle |^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \mathcal{Y}_x = \{ \mathbf{y} : \|\mathbf{y}\|_{\mathbb{Y}} \leq 1 \} \quad (7)$$

Можно показать, что

- Модель такого рода всегда допускает эквивалентное представление, как модель с простым пиковым решающим правилом, но, возможно, с бесконечным числом каналов.
- В модели с пиковым решающим правилом для каждого стимула существует оптимальный согласованный канал, отклик которого максимален.

Литература

1. *Shepard R. N.* Attention and the metric structure of the stimulus space // Journal of Mathematical Psychology. 1964. Vol. 1. No. 1. P. 54–87. [10.1016/0022-2496\(64\)90017-3](https://doi.org/10.1016/0022-2496(64)90017-3).
2. *Dzhafarov E. N., Colonius H.* Multidimensional Fechnerian scaling: Basics // Journal of Mathematical Psychology. 2001. Vol. 45. No. 5. P. 670–719. [10.1006/jmps.2000.1341](https://doi.org/10.1006/jmps.2000.1341).
3. *Дубровский В. Е.* Геометрический подход к задаче сенсорного различения // Современная психофизика / Под ред. В. А. Барабанщикова. — М.: Изд-во “Институт психологии РАН”, 2009. С. 110-144.
4. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств — М.: Наука, 1981.
5. *Дубровский В. Е., Гарусев А. В.* Векторная психофизиология Е. Н. Соколова: расширенный математический формализм // Векторная психофизиология: от поведения к нейрону / Под ред. Е. Н. Соколова, А. М. Черноризова, Ю. П. Зинченко — М.: Московский государственный университет, 2019. С. 678-699.
6. *Логвиненко А. Д.* Чувственные основы восприятия пространства — М.: МГУ, 1985.

Секция 20

Математика и философия

ТРАНСФОРМАЦИЯ МЕТОДОВ ДЕСКРИПТИВНОЙ БИОЭТИКИ В ЦИФРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.В. Брызгалина

evbrz@yandex.ru

УДК 17

В докладе концептуализируется трансформация эмпирических исследований биоэтики как междисциплинарного научного направления при использовании цифровых методов в открытом информационном пространстве.

Ключевые слова: биоэтика, дескриптивная биоэтика, цифровая биоэтика, биоэтический ландшафт.

Биоэтика представляет собой разновидность прикладной этики, которая функционирует одновременно как А) исследовательская область, сосредоточенная на дескриптивном описании этических аспектов реальных отношений между субъектами в сфере исследовательских и терапевтических практик биомедицины, а так же на нормативном анализе определенных практик биомедицины с позиции моральных принципов; Б) социальный институт, который регулирует общественные отношения в биомедицине посредством деятельности этических комитетов (биоэтических комиссий) различного уровня; В) учебная дисциплина, формирующая профессиональные компетенции специалистов медико-биологических направлений; Г) коммуникативная площадка, обеспечивающая диалог специалистов в области биологии и медицины, так же в области социально-гуманитарных наук, с различными социальными группами, имеющими отличающиеся ценностные ориентации, религиозными конфессиями, органами государственной власти, принимающими управленческие решения в области здравоохранения и исследований, и СМИ.

Дескриптивная биоэтика осуществляет эмпирическое изучение на основании описания реальных отношений, опросов, мнений, позиций. Формирование цифровых методов дескриптивной биоэтики является одним из проявлений «цифрового поворота», который значительно трансформировал представления об эмпирическом базисе исследований в области социальных наук в целом [1]. Использование термина «цифровой» в данном контексте указывает на любые варианты сведения дискурса и поведения к двоичному коду [2]. В данное время разработка и применение цифровых методов фиксации биоэтического дискурса в сети находится в стадии активного формирования [3].

Цифровые форматы позволяют без опросов и обращения к отдельным субъектам зафиксировать в публичном пространстве активность ключевых акторов биоэтических обсуждений –

Брызгалина Елена Владимировна, к.ф.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, философский факультет (Москва, Россия)

исследователей, испытуемых, врачей, пациентов, членов семей, представителей профессиональных групп. Эвристический потенциал цифровой биоэтики значим в вопросах, которые достигают статуса публичных дискуссий и/или могут быть закреплены конкретным формам принятия решений институциональными органами и субъектами. Наглядно выявляя актуальные темы, удостоенные обсуждения, и обстоятельства возникновения значимых общественных обсуждений, представленных в сети, такие методы как анализ настроений и автоматическое ранжирование тем позволяют оценить, что именно вызывает определенные моральные реакции в обществе. Цифровые методы сбора и анализа данных способствуют развитию эмпирической биоэтики через внимание к субъективному опыту отдельного человека, семей, социально-демографических групп, что формирует цифровой ландшафт современной биоэтики.

Эвристичность методов цифровой биоэтики проявляется по отношению к объяснению механизмов развития моральных взглядов с течением времени при смене экономических, политических, культурных обстоятельств функционирования биоэтики как исследовательской области и социального института. Результаты, полученные различными методами эмпирической традиции биоэтики, в совокупности позволяют зафиксировать биоэтический ландшафт с высокой «разрешающей способностью». Это важно для фиксации реальных мотивов поведения людей в биоэтически размерных ситуациях, содержательных полей биоэтических дилемм, методов и форматов разрешения ценностных конфликтов, возникающих при развитии биомедицины как исследовательской области, а также при изменении социальных практик в здравоохранении.

Выявление специфики существования биоэтики как академического исследовательского поля в цифровой среде значимо для сближения дескриптивной и нормативистской трактовки биоэтики. Цифровые методы могут помочь зафиксировать проявления биоэтических принципов как регуляторов социальных практик в поведении акторов, сделать выводы относительно их актуальных трактовок, зафиксировать перспективы изменения пула и содержания биоэтических принципов. Факты, зафиксированные с помощью цифровых инструментов, могут стать основанием пересмотра механизмов практической реализации ценностных принципов с целью их приведения в соответствие с «моральным видением лучшего мира» в конкретных контекстах. Если цифровая биоэтика станет фактором критического переопределения ценностных принципов в случае кардинального их расхождения с практическими действиями субъектов, это продвинет цифровую биоэтику от «поверхностных исследований» ближе к нормативной традиции.

Цифровую биоэтику можно считать «мостом между представлением морального видения лучшего мира и его фактическим воплощением в жизнь» [4], поскольку оперируя конкретными фактами о жизненном опыте моральных агентов, цифровая биоэтика позволяет сопоставить их с моральными теориями и нормативным анализом [5], то есть зафиксировать континуум между описательными, оценочными и нормативными суждениями [6].

Литература

1. *Брызгалова Е. В.* Цифровая биоэтика: дисциплинарный статус между традицией и вычислением // (2023) Вопросы философии, №1 — 94-103.
2. *Schneider Maniel, Vayena, Effy, Blasimme, Alessandro.* Digital bioethics: introducing new methods for the study of bioethical issues. // (2021) Journal of Medical Ethics. 107387.
3. *Skorburg Joshua A., Sinnott-Armstrong Walter, Conitzer, Vincent.* AI Methods in Bioethics. // (2020) AJOB Empirical Bioethics, Vol.11, No.1 — 37-39.
4. *Solomon Mildred Z.* Realizing bioethics' goals in practice: ten ways "is" can help "ought". // (2005) Hastings Center Report, Vol.35, No.4 — 40-47.
5. *Hedgecoe Adam M.* Critical bioethics: beyond the social science critique of applied ethics. // (2004) Bioethics, Vol.18, No.2 — 120-143.
6. *De Vries Raymond.* How can we help? From «sociology in» to «sociology of» bioethics. // (2004) Journal of Law, Medicine & Ethics. Summer, Vol.32, No2 — 279-292.

ЯЗЫК МАТЕМАТИКИ В ВИДЕНИЯХ ВОЛЬФГАНГА ПАУЛИ И КРИТЕРИЙ РАМСЕИФИКАЦИИ

В.В. Винокуров

ierosph@mail.ru

УДК 001.8

В докладе рассматривается сотрудничество Вольфганга Паули с Карлом Густавом Юнгом в поиске общего для физики и психологии языка науки. Показывается, что на определенном этапе материалом, в котором осуществляется поиск общего языка являются не только концептуальные построения функциональной типологии, глубинной психологии и, возникшей на основе интерпретации видений, «алхимической психологии» Юнга, но и вне психологическое, математическое и физическое содержание образов воображения и сновидений Вольфганга Паули. Доказывается, что общий язык психологии и физики Паули ищет в области математики. Делается вывод, что к этому заключению Паули приходит, используя особый критерий понимания («Рамсификации»), который требует интерпретации символов математики в словах естественного языка. На определенном этапе поиск интерпретации символов принимает форму рисуночного письма, из которого эксплицируется математическое и физическое содержание.

Ключевые слова: Вольфганг Паули, уравнение Эйлера, единичный круг, комплексные числа, сновидения, глубинная психология.

Вольфганг Паули вошел в историю науки как автор разработки математического аппарата квантовой механики. Проблема языка науки оказалась в центре внимания Паули в период его творческого сотрудничества с основателем глубинной и «алхимической психологии» Карлом Густавом Юнгом. Из переписки между ними видно, что проблема языка науки предстает перед Паули как в контексте поиска общей теории поля, так и в контексте персонификации, относящихся к ней теоретических построений, т.е. в образах их авторов. В качестве последних выступали Нильс Бор и Альберт Эйнштейн. Проблема построения общей теории поля заключалась в поиске формулы связи физических констант мира, но в отмеченном выше периоде биографии Паули, поиск проходил через необходимость понимания авторов основных теоретических построений. Такое понимание Паули искал в структуре функциональной дифференциальной психологии Юнга, одновременно добавив в структуру созвездия теоретиков себя и психолога Карла Густава Юнга, разместив всех в диаграмме функциональной типологии.

Обращение Паули к основам психологии Юнга проходило через сеансы психотерапии. В этот период Паули переживал состояние глубокой депрессии и терапевтические сессии с ним проводила Мария Луиза фон Франц — ближайшая сотрудница и ученица Юнга. Проблема поиска общего языка науки не отпускала Паули ни в сновидениях, ни в опытах активного воображения во время терапевтических сеансов. Кроме сеансов и сновидений эта тема развивается в обширной переписке Юнга и Паули. В письмах много тем, но одна из сквозных, а возможно и ключевая — отношение физики и психологии в сновидениях. Другая важная тема — можно ли представить психологию Юнга в научной форме. В современной литературе концептуальные построения Юнга разделяются на теоретические и гипотетические. Первые удовлетворяют критериям научной теории и могут быть подтверждены экспериментально, вторые основываются на клинической практике и ее интерпретации, в которой Юнг использует как метод ассоциаций, так и метод амплификаций. Последний включает обилие исторических и мифологических источников, но не поддается экспериментальному исследованию [2]. Относительно возможности представить творчество Юнга в научной форме мнения психологов расходятся. Метод «активного воображения», который порождает и включает цепь ассоциаций и амплификаций, стал основой направления, которое Юнг определил как «алхимическую психологию». Как замечал Мирча Элиаде процессы психики Юнг уподобил химической реакции, в которой вместо химических веществ в соединения вступают архетипические образы. Взаимодействие архетипических образов в психологии Юнга мало напоминает формулы химических реакций, но сходно с гравюрами и картинками алхимиков, которые они рисовали для изображения химических процессов. Эти образы представляли

либо искусственную форму, либо реликт исторического рисуночного письма. Давид Линдорф — автор глубокого исследования творчества и сновидений Паули — считает, что напряженно и концентрированно проблема языка науки и математики появляется в серии сновидений Паули, которую он обозначает как «уроки игры на фортепьяно». Все начинается со сновидения загадки: «Стоит туманный день; я уже долгое время чувствую себя тревожно. Присутствуют два студента: старший понимает слова, но не их значение, младший же понимает значение, но не сами слова. Я не могу свести их вместе» [цит по: 1, 184]. Первоначально в сновидениях об игре на фортепьяно, Паули следуя советам «Учительницы» играет аккорды попеременно, один — только на белых клавишах, другой — только на черных. Линдорф верно замечает, что тема загадки и тема игры на фортепьяно вращаются между отношениями рационального и иррационального. В традиции психоанализа и, вырастающей из него глубинной и алхимической психологии Юнга, еще никогда не ставилась под сомнение идея, что механизм работы сновидения психогичен. Проблема заключалась только в отнесении содержания сновидения к индивидуальному или коллективному содержанию бессознательных образов. На этот момент обращает внимание в анализе диалога Юнга и Паули Дэвид Линдорф: «Паули настаивал, что его физические сны нельзя трактовать психологически, Юнг предположил, что бессознательное по какой-то причине старается увести его (Паули – В.В.) от психологии. Естественно, утверждал он, что в снах Паули используется язык физики, ведь это область его занятий, однако, психологическое значение этих снов лежит в другой области. Паули не мог принять это замечание. Он считал (свои – В.В.) физические сны отдельными от психологии [1, 164]. По мнению Линдорфа содержание серии снов «уроков игры на фортепьяно» можно определить как относящуюся к области математики. Анри Пуанкаре, геометризировав тему иррациональности в форме единичного круга, проекция точки окружности которого на ось действительных чисел позволяет показать иррациональную точку сечения континуума рациональных чисел. Иррациональность оказывается всегда между рациональными числами. Черные клавиши фортепьяно находятся между белыми. Далее Линдорф завершает анализ серии сюжетом, в котором женщина «с азиатской внешностью» дарит сновидцу «кольцо i ». Верно замечая, что речь идет о математическом обозначении мнимой единицы, Линдорф убедительно переходит к анализу фигуры единичного круга в комплексной области, которая в истории науки известна как функция единичного круга Леонардо Эйлера.

С нашей точки зрения, в целом верные рассуждения Линдорфа должны быть уточнены. Содержание этой серии сновидений следует отнести к математическому аппарату физики. С учетом этого уточнения тема неожиданно получает развитие и поворот, когда в снах Паули появляется «Китайка», которая взбегаёт на лестницу и сбегает с нее, постепенно сокращая амплитуду движения. С одной стороны она демонстрирует танцевальный ритм, с другой — колебательное движение. Как показал Ричард Фейнман комплексные числа и мнимая единица используются в физике именно для описания колебательного движения пружины, когда движения колебания грузика вдоль прямой линии представлены как отражение движения по окружности перпендикулярно плоскости. Поиск действительных интерпретации мнимых компонент комплексных частей физических формул, описывающих колебания, приводит Фейнмана к описанию затухающих колебаний [3], что соответствует в танце «китайки» сокращению амплитуды.

Можно вновь вернуться к содержанию сновидения с загадкой двух студентов, один из которых владеет языком, а второй значениями слов. Здесь Паули предвосхищает проблему Рамсификации (Ramsification) математических символов, которая заключается в переводе математических выражений во вне математические, позволяя понять значения символов на естественном языке [4]. «Китайка» («старший студент») знает китайский язык, ей вполне доступен образ танца в рамках символа «инь и ян» китайской культуры. Ей также вполне доступен перевод на немецкий или английский язык своих движений («танец»), но она не знает языка математики. Она лишь показывает математический символ числа i . В этом отношении она знает только значения символов, но не грамматику уравнений. Младший студент (Паули) знает математический язык, но не знает естественных значений математических символов и выражений. По сути Паули предлагает здесь предельное решение проблемы «показанного» и «сказанного» в языке через рисуночную образную форму представления философских оснований культур. Этот путь реифицируется в дальнейших диалогах с «китайкой» об «инь и ян» и сновидениях. Паули отказывается от этого пути, опасаясь уйти во вне научный дискурс, но обращается к анализу творческого наследия астронома Иоганна Кеплера и его полемике с алхимиком Робертом Флуд-

дом, где продолжает эту тему уже без апелляции к сновидениям.

Литература

1. *Линдорф Д.* Юнг и Паули: встреча великих умов. // (2013) М.: Клуб Касталия, 207.
2. *Roeckelein, J. E.* Elseviers dictionary of psychological theories. // (2006) Amsterdam: Elsevier, 330.
3. *Фейнман Р. Лейтон Р. Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Пространство. Время. Движение. // (1965) М.: Мир, Т.2 — 103.
4. *Leitgeb H.* What if meaning is indeterminate? Ramsification and semantic indeterminacy. // 16th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology. Bridging across academic cultures. (5–10 August 2019) Prague: Czech Technical University, 83.

ОБЪЕКТЫ, ИХ СВОЙСТВА И ФОРМАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

О.М. Григорьев

grig@philos.msu.ru

УДК 167.2, 161.14

В докладе рассказывается о семантической модели, лежащей в основе разработки и анализа стимульного материала, используемого в исследованиях по созданию нейроинтерфейсов.

Ключевые слова: семантическая модель, формальное понятие, нейроинтерфейс.

Одним из важнейших направлений исследований по искусственному интеллекту является разработка технологии нейроинтерфейсов, обеспечивающих наиболее эффективное и быстрое взаимодействие человека и машины. Помимо чисто инженерных и экспериментальных задач, ключевую роль в подобных исследованиях играют теоретические модели, служащие основой для разработки стимульного материала, используемого в экспериментальной работе, в особенности если она связана с когнитивными способностями человека. Эти же теоретические модели могут быть использованы для обучения самих систем искусственного интеллекта.

Для разработки теоретической базы экспериментальных исследований могут быть использованы методы различных дисциплин философского цикла. В частности, это и феноменологические, и логико-семантические исследования, в рамках которых выделяются и уточняются фундаментальные компоненты когнитивной деятельности человека, такие, как категоризация, оперирование понятиями, связь когнитивной деятельности с языком и многое другое.

В докладе будет рассказано об обучающей *семантической модели*, которая в самом общем виде представляет собой множество объектов, обладающих некоторым набором свойств. В наиболее простом случае это может быть множество геометрических фигур, с которым соотнесено множество их возможных свойств, таких как форма, цвет, размер и т. п. Пара этих двух множеств представляет собой то, что в теории, известной как *анализ формальных понятий* (Formal concept analysis, см. подробнее [1, 2]) называется контекстом. Внутри контекста, пусть это некоторая пара множеств (G, M) , выделяются такие пары множеств (A, B) , что A есть подмножество множества G (то есть это множество объектов), B есть подмножество множества M (множество признаков) и при этом для каждого объекта из A множество всех признаков, которыми он обладает, совпадает с B , а для каждого признака из B множество объектов, обладающих этим признаком, совпадает с A . Формально последние два требования можно представить как пару отображений, называемых в теории решеток полярностями. Пары множеств (A, B) описанного вида называются понятием, а множество понятий фиксированного контекста всегда образует полную решетку по отношению включения между понятиями. Отношения включения стандартно задается через прямое включение множеств объектов или (что эквивалентно) обратное включение множеств свойств.

В описываемой модели включение задается через прямое включение множеств свойств, поэтому верхний (наибольший) элемент решетки, кортеж свойств объекта, состоит из единиц, а

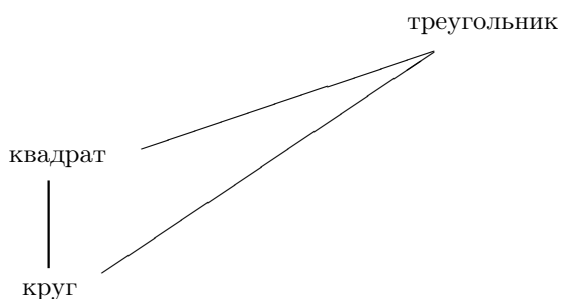
нижний (наименьший) из нулей. Конечно, эта особенность не является существенной. Более важной специфической чертой предлагаемого подхода является то, что множества свойств объектов кодируются бинарными последовательностями, или кортежами, в которых вхождение 1 интерпретируется как наличие свойства, а 0 – как его отсутствие или наличие некоторого «противоположного» свойства (например, круг–квадрат). Таким образом, множество свойств объектов предварительно некоторым образом упорядочивается и этот порядок фиксирован. Для краткости кортеж, соответствующий множеству свойств некоторого понятия B , будем называть кортежем свойств понятия B . Фактически вместо решетки понятий мы будем оперировать решетками кортежей свойств понятий. Далее на множестве кортежей свойств задается семейство унарных операций, позволяющих эксплицировать понятие семантического расстояния между понятиями или, что, по-видимому то же самое, расстояние между объектами в объемах разных понятий. Количество унарных операций в стандартном варианте соответствует количеству элементов кортежа.

Напомним, что мера отношения между объектами \mathbf{a} (лежащего в объеме понятия B_1) и \mathbf{b} (лежащего в объеме понятия B_2) определяется как количество итераций унарных операций, требуемых для того, чтобы из кортежа K_1 свойств понятия B_1 получить кортеж K_2 свойств понятия B_2 . Важно учесть, что в самом простом случае применение любой из операций, требуемых для перехода от K_1 к K_2 , увеличивает меру расстояния между \mathbf{a} и \mathbf{b} на единицу. Если это верно для всех пар кортежей определенной решетки L , то такую решетку будем называть *равномерной*. Однако, как показано в примере с кругом, треугольником и квадратом, семантическое расстояние между объектами, у которых варьируется это свойство (форма) будет разным. Попутно заметим, что этот же пример выводит за пределы бинарности свойств, когда каждое конкретное свойство имеет лишь два значения своей координаты, 0 или 1. В таком случае можно использовать следующую техническую модификацию модели. Во-первых, допускать многозначные кортежи, во-вторых придавать унарным операциям определенный вес. Последняя характеристика выводится преимущественно экспериментальным путем. Относительно многозначности кортежей заметим, что изучение понятий над многозначными контекстами получило отражение в ряде публикаций в последние годы, см., например [3].

ПРИМЕР. Пусть свойства геометрических фигур ограничены набором (форма, цвет, размер). Форма: 0 – круг, 1 – квадрат, 2 – треугольник. Цвет: 0 – черный, 1 – белый. Размер: 0 – малый, 1 – большой.

Тогда, например, кортеж $(0, 1, 1)$ кодирует большой белый круг, а $(2, 0, 0)$ – малый черный треугольник.

Пусть эмпирически установлено, что семантическое расстояние круг – квадрат больше, чем расстояние треугольник – квадрат. Схематически (на диаграмме Хассе) расположение объектов в семантическом поле можно изобразить следующим образом:



Далее, пусть операция $-_{01}$ переводит кортеж $(0, x, y)$ в кортеж $(1, x, y)$, операция $-_{02}$ переводит кортеж $(0, x, y)$ в кортеж $(2, x, y)$; наконец, пусть $-_{03}$ переводит кортеж $(1, x, y)$ в кортеж $(2, x, y)$. Можно распределить веса операций таким образом, что вес $-_{02}$ будет складываться из весов $-_{01}$ и $-_{03}$, что было бы естественно ожидать. Разумеется в процессе экспериментов распределение весов может меняться.

Литература

1. Davey B. A., Priestley H. A. Introduction to lattices and order. —Cambridge university press, 2002.

2. *Ganter B., Wille R.* Formal concept analysis: mathematical foundations. — Springer Science & Business Media, 2012.

3. *Gugisch R.* Many-valued context analysis using descriptions // International Conference on Conceptual Structures. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2001. — 15-168.

ЯЗЫКОВЫЕ МОДЕЛИ И ЛОГИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ

Д.В. Зайцев

zaitsev@philos.msu.ru

УДК 168.52, 004.81

В статье обсуждаются проблемы с оценкой и осуществлением большими языковыми моделями так называемых логических рассуждений. Выдвигается и обосновывается гипотеза об отсутствии сенсорной (в первую очередь пространственной) информации как источнике этих затруднений.

Ключевые слова: большие языковые модели, рассуждения, сенсорный вход, пространственные представления.

Согласно современным исследованиям, одной из трудных тем для больших языковых моделей оказывается продуцирование и проверка рассуждений (см, например, [1,2,3,4,5,6]). Этой теме посвящено несколько обзоров и критических статей. При этом авторы зачастую не различают рассуждения, как они представлены в формальной (логической) трактовке и так называемые естественные рассуждения. Далее я планирую рассмотреть особую разновидность рассуждений, часто обозначаемую как логические рассуждения (logical reasoning). Несмотря на отсутствие точного и строго определения, обычно под логическими понимаются рассуждения, осуществляемые и оцениваемые в соответствии с критериями, выработанными в рамках соответствующих логических теорий. Чаще всего под такой теорией по умолчанию подразумевается классическая логика. Соответственно корректное логическое рассуждение предполагает сохранение истинности при переходе от посылок к заключению.

Несомненно, в рамках проекта искусственного интеллекта наибольший интерес представляет имплементация естественных рассуждений (рассуждений на основании здравого смысла, аргументативных рассуждений, модифицируемых рассуждений и т.п.). Такие рассуждения на данный момент активно исследуются в логике и computer science, но эти исследования далеки до завершения, а их результаты порой весьма сложны и не всегда хорошо систематизированы. Поэтому также естественно предположить, что начинать имеет смысл с рассмотрения способности искусственных систем проводить и проверять логические рассуждения. В данном исследовании акцент был сделан именно на способности больших языковых моделей проверять корректность рассуждений.

В качестве материала исследований были предложены содержательные рассуждения осуществляемые по корректным схемам

Modus Ponens: $A \supset B, A/B,$

Modus Tollens: $A \supset B, \neg B/\neg A,$

а также примеры дедуктивно некорректных рассуждений по схемам

Утверждение Консеквента: $A \supset B, B/A$ и

Отрицание Антецедента: $A \supset B, \neg A/\neg B.$

В обоих случаях использовались как рассуждения с истинными посылками, так и рассуждения с ложными посылками. Кроме того, исследовались силлогистические рассуждения с истинными и ложными посылками (например, "Все планеты имеют форму чемодана. Земля планета, следовательно, Земля имеет форму чемодана"). В подавляющем большинстве случаев модели неправильно оценивали рассуждения, допуская ошибки двух типов. Во-первых, дедуктивно

корректные рассуждения с ложными посылками оценивались как неправильные, во-вторых, дедуктивно некорректные рассуждения с истинными посылками и заключением трактовались как правильные.

Согласно гипотезе исследования, важную роль в осуществлении когнитивных процедур играют перцептивные данные и пространственные представления. Соответственно, отсутствие сенсорного входа у языковых моделей в конечном итоге приводит к неадекватной оценке логических рассуждений. Возможный путь устранения указанного недостатка состоит в развитии систем телесно воплощенного искусственного интеллекта (embodied AI). В качестве примера сошлюсь на работу [7], авторы которой реализуют именно такой подход к автоматическим рассуждениям, основанный на установлении связи между восприятием, памятью и рассуждениями при формировании символических репрезентаций у телесно воплощенных искусственных агентов.

Литература

1. *Espejel, Jessica Lopez, et al.* GPT-3.5, GPT-4, or BARD? Evaluating LLMs reasoning ability in zero-shot learning and performance boosting through prompts // *Natural Language Processing Journal*. 2023. 100032.
2. *Liu, Hanmeng, et al.* Evaluating the logical reasoning ability of chatgpt and gpt-4 // *arXiv pre-print arXiv:2304.03439*. 2023.
3. *Huang J., Chang K. C. C.* Towards reasoning in large language models: A survey // *arXiv preprint arXiv:2212.10403*. 2022.
4. *Xu, Fangzhi, et al.* Are Large Language Models Really Good Logical Reasoners? A Comprehensive Evaluation From Deductive, Inductive and Abductive Views // *arXiv preprint arXiv:2306.09841*. 2023.
5. *Arkoudas, Konstantine* GPT-4 Can't Reason // *arXiv preprint arXiv:2308.03762*. 2023.
6. *Holliday, W. H., Mandelkern, M.* Conditional and Modal Reasoning in Large Language Models. // *arXiv preprint arXiv:2401.17169*. 2024.
7. *Lanchantin, Jack, et al.* A data source for reasoning embodied agents // *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Vol. 37. No. 7. 2023.

О ПРЕДПОСЫЛКАХ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Е.А. Зайцев

e_zaitsev@mail.ru

УДК 51(091)

Рассматривается вопрос о становлении идеи траектории, ставшей предпосылкой формирования представления о возможности геометрического описания движений в пространстве. Высказывается тезис о том, что появление идеи траектории произошло в XVI в. в ходе осмысления практики навесной артиллерийской стрельбы в контексте представления об активной роли среды в движении брошенного тела.

Ключевые слова: траектория, математизация движения, внешняя баллистика.

Для античных и средневековых трактатов по физике и механике не характерно применение математики для описания движения. Обычно движение в них описывается чисто словесно. Если же при этом используется теория пропорций, то подчеркивается, что такой метод описания не относится к движению под действием реальных сил, а к логически возможным феноменам, рассматриваемым в регистре Божественного всемогущества (*potentia Dei absoluta*). В XVIIв. отношение к математическому описанию движения резко изменилось. Поводом для первых попыток математизации стал вопрос о форме траектории полета брошенного тела. Первый результат здесь получил Галилей, который (не без помощи учеников) показал, что траекторией движения при малых скоростях и, соответственно, малом сопротивлении среды будет парабола. Х. Гюйгенс развил идеи Галилея, используя их для рассмотрения бесконечно-малых перемещений,

связанных с вращением по окружности. Наконец, И. Ньютон создал общую теорию движения, в которой кроме полета брошенного тела математически описывались движения небесных тел в поле центральных сил, определяемом законом всемирного тяготения.

Для создателей классической механики «математическое описание» означало «описание на языке геометрии». Общим для почти всех авторов XVIIв. было то, что они связывали нахождение свойств движений с построением соответствующей кривой, которую изучали геометрически. Появление аналитической геометрии Декарта в этом отношении ничего не изменило. Свои знаменитые результаты Ньютон нашел, исследуя линии движения, полученные на основе им же сформулированных законов движения. Отказ от геометрической образности и переход на единый аналитический язык произойдет в механике только во второй половине XVIIIв. (Л. Эйлер, Ж.-Л. Лагранж).

В связи с исключительной ролью линий движения в формировании классической механики в XVIIв., возникает вопрос, имеющий определенное значение, как для философии, так и для истории математики. С точки зрения философии проблема ставится так. В аристотелевской традиции непрерывные количества или величины распадаются на два рода. Первый род составляют величины, которые средневековая схоластика называла «постоянными» (*quantitas permanens*). К нему принадлежат три вида геометрических величин – линии, поверхности и тела. Второй род составляют величины «следующие друг за другом» (*quantitas successiva*). К ним, согласно Аристотелю, принадлежат время и движение. Постоянные величины существуют вместе со своими частями и точками. Величины, следующие друг за другом, напротив, образуют «поток», в котором точки все время сменяют одна другую: существование одного момента времени или движения означает небытие всех остальных – предшествовавших и последующих. Для аристотелевской традиции выражение «линия движения» должно было восприниматься как оксюморон, который нельзя использовать в качестве законного научного понятия, претендующего на адекватное выражение феномена движения. Исключения составляют случаи, когда линии, по которым движется тело, фиксированы до начала движения в виде прямой или окружности и играют для этого движения роль «колеи», с которой тело не может свернуть.

Невозможность выразить идею линии движения сочетается в этот период с отсутствием в научных и философских трактатах графических изображений этих линий (опять-таки за исключением прямых и окружностей). Особенно удивительным это отсутствие представляется в отношении феноменов, исследование которых мы не представляем себе без хотя бы примерной зарисовки траектории. Это – полет брошенного тела (в земной физике) и движение планет и прочих небесных тел (в астрономии).

Первые изображения траекторий в виде геометрических линий появляются только на рубеже XV–XVIвв. Многочисленные примеры таких линий мы встречаем в записных книжках Леонардо да Винчи. В печатных изданиях эта традиция начинается с двух трактатов Н. Тарталья по баллистике (1537, 1546). В астрономии линии движения комет были впервые нарисованы в работе П. Апиана (1532), а планет – И. Кеплера (1608).

Ответственным за представление о линии движения, как об особом идеальном объекте, является человеческая способность, которую философы, начиная с Аристотеля, называют воображением. Кант определял воображение как «способность представлять предмет также и без его присутствия в созерцании» [1, с. 204]. Действительно, обычно брошенное тело, включая артиллерийский снаряд, не оставляет в пространстве видимого следа. След этот конструируется нашим воображением, исходя из того, что тело, находившееся в одном месте, через какое-то время оказывается в другом. Также бывает, что мы заранее планируем перемещение тела, представляя себе линию, по которой оно будет двигаться.

Возникает вопрос: почему потребность в построении линии движения была осознана в европейской культуре только в XVI веке? Почему механизм построения образа сначала в уме, а затем на бумаге был запущен именно в этот период? Без ответа на этот вопрос мы едва ли можем рассчитывать на решение проблемы применения геометрических методов для описания движения в XVII веке. Ибо необходимым условием геометризации служит наличие в культуре идеи траектории.

С нашей точки зрения, в XVIв. сформировались две основные предпосылки, обусловившие возможность геометрических образов движения. Первая из них связана с распространением в этот период практики навесной стрельбы, в ходе которой существенными для достижения цели

стали два технологических параметра, которые артиллерист мог изменять по своему усмотрению. Это – количество пороха, закладываемого в казенную часть орудия, и угол возвышения, т.е. угол, под которым снаряд вылетает из орудия. В предшествующий период стрельба велась прямой наводкой (угол возвышения не изменяли), так что дальность и, соответственно, точность стрельбы определялись только силой порохового заряда. Наличие единственного изменяемого параметра позволяло обходиться без представления о линии движения. Задача попадания в цель решалась чисто эмпирически, путем проведения серии выстрелов с зарядами разной мощности. С распространением практики навесной стрельбы появляется возможность достижения цели посредством варьирования сразу двух параметров, один из которых – угол возвышения – поддавался точной количественной оценке. В этом случае, примитивное представление, согласно которому снаряд, покинув ствол орудия, перемещается в точку нанесения удара, оказывается недостаточным для планирования системы действий, приводящих к достижению результата. Схема деятельности становится более сложной. В нее включается операция по согласованию изменений параметров, для проведения которой полезно представить траекторию движения хотя бы в общих чертах.

Следует, однако, отметить, что представление о линии движения в «пустом» пространстве геометрии является все-таки достаточно сложной абстракцией. Понятие траектории легче возникает по отношению к движению в среде, т.е. в реальном физическом пространстве, заполненном воздухом. В этом случае естественным образом возникает представление о том, что снаряд как бы разрезает воздушную среду, оставляя за собой воображаемый след. По-видимому, не случайно, что Леонардо и Тарталья, оба подчеркивали особую роль воздуха в перемещении снаряда. В духе Аристотеля оба полагали, что воздух не только оказывает сопротивление движению тела, но и одновременно обеспечивает это движение. Оба автора считали, что снаряд «гонит» перед собой воздушную волну, которая «прорезает» в толще воздуха специальный канал, по которому затем перемещается снаряд. Создается своего рода туннель, по которому движутся воздух и снаряд. У Леонардо также присутствует мысль о том, что, занимая место снаряда, воздух сзади подталкивает его.

Парадоксально, но именно эти архаичные образы движения, отвергнутые в средневековой теории импетуса, сыграли ключевую роль в появления представления о линиях движения, которые, в свою очередь, сделали возможным становление классической механики, в которой движение не требует наличия среды и может осуществляться в пустоте.

Литература

1. Кант И. Критика чистого разума. Соч. в 6-ти томах. Т. 3. М., 1964.

ФЕНОМЕНОЛОГИЯ И НЕЙРОИНТЕРФЕЙСНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**Н.В. Зайцева***natvalen@list.ru*

УДК 168.52

В выступлении рассматриваются философские проблемы, возникающие в связи с развитием нейроинтерфейсных технологий, через призму нейрофеноменологического подхода к анализу сознания.

Ключевые слова: интерфейсы мозг-компьютер, нейрофеноменология, агентность..

Главный тезис моего выступления состоит в том, что если мы хотим добиться реального прогресса в развитии нейроинтерфейсов, мы должны отдавать отчет в том, что интерфейсы мозг-компьютер (BCI) или интерфейсы мозг-машина (BMI), предполагающие фиксацию активности мозга пользователя и преобразования его команд для внешнего приложения, претендуют на коммуникацию сознательного телесного агента и машины. Это означает, что развитие технологии, связанной с человеческим сознанием, предполагает исследование самого сознания как междисциплинарной темы с опорой на все доступные ресурсы, теоретические, эмпирические дисциплины и методы, включая методы исследования от первого лица. Применительно к активно разрабатываемым имплантируемым устройствам нового поколения с интерфейсом мозг-компьютер в литературе нет достаточного объема данных о влиянии этих устройств на субъективный опыт пациентов. Ситуация требует привлечения к разработке и апробации новых технологий концептуального феноменологического аппарата и учета нейрофеноменологических исследований, позволяющих выявлять специфику различных модусов переживания агентом своего субъективного опыта.

Исследование имплантируемых BCI, на котором будет сделан акцент, демонстрируют необходимость обращения к парадигме телесно воплощенного познания и предполагает рассмотрение системы мозг-сознание-среда. Клинические инвазивные испытания на людях, целью которых было изучение изменений субъективного опыта до имплантации консультативных устройств BCI и после имплантации, продемонстрировали различные векторы изменения, которые можно охарактеризовать как с позитивной, так и с негативной стороны. Были исследованы пациенты, которые добровольно согласились на имплантацию устройств с искусственным интеллектом BCI. Объективные данные исследований были дополнены исследованиями от первого лица. В частности, был сделан акцент на феноменологически ориентированном интервью пациентов. Результаты показали, что, с одной стороны, BCI могут позитивно влиять, например, на Я-образ и чувство самоконтроля; с другой стороны, они могут вызывать радикальный дистресс, чувство потери контроля и идентичности Я у пациента. Результаты подобных исследований имеют важное значение для понимания необходимости упреждающих действий, которые позволят избежать потенциального ятрогенного вреда. В арсенал таких упреждающих средств должны быть включены как феноменологически обоснованные протоколы, так и исследования фундаментального феноменального опыта, фундирующего сознание.

Эволюция протезов конечностей, контролируемых с помощью BCI, ставит вопросы, которые требуют уточнения понятий самости, самопринадлежности, владения телом, самоидентификации, Я-образа, минимального Я, нарративного Я, чувства независимости и других, развиваемых в феноменологической парадигме. В какой степени имплантируемое устройство BCI интегрируется в самоощущение пациента — вопрос, который имеет серьезные биоэтические основания. Особую актуальность рассматриваемая в моем докладе проблема BCI приобретает в связи с перспективой развития искусственного интеллекта в направлении киборгизации.

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОСТЬ И ТРАНСДИСЦИПЛИНАРНОСТЬ: ИХ ПРОЯВЛЕНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

В.П. Казарян

kazaryanvp@mail.ru

УДК 168

Предпринята попытка наполнить конкретным содержанием оценки современной науки как междисциплинарной и трансдисциплинарной средствами методологии прикладной математики. Предметом рассмотрения являются, прежде всего, математическое моделирование как таковое и моделирование в одной из областей искусственного интеллекта — в машинном обучении.

Ключевые слова: междисциплинарность, трансдисциплинарность, машинное обучение, математическое моделирование..

Междисциплинарность и трансдисциплинарность являются основой современной системы организации науки и образования, как в области математики, так и других наук. Это объясняет, почему представляет интерес попытка детального анализа этих явлений. Прежде всего, поясню, в каком смысле используются в статье эти понятия. «Междисциплинарность» может быть понята в двух смыслах: а) Как взаимное проникновение дисциплин. Примером служит математизация наук. б) Как синтез ряда дисциплин, порождающий новую область научных исследований. Например, системный анализ принятия решений, или математическое моделирование глобальных процессов.

«Трансдисциплинарность» — этот термин означает выход ученого в процессе исследования за пределы научного знания в сферу этики, здравого смысла, мировоззрения и проч. Примером может служить процесс построения алгоритма в области системного анализа как единства формального и неформального аспектов.

I. В философии науки распространено выражение «математизация наук», а также одно время и выражение «компьютеризация наук». Компьютеризация наук породила проблему влияния информационных технологий на развитие науки. Математизация наук представляет собой проникновение математики в другие виды исследовательской деятельности. Математика кажется вездесущей, хотя такие мыслители как Б. Паскаль и Гете предполагали наличие границ процесса математизации. Современная математика является еще более всеобъемлющей, поскольку лежит, в конечном счете, в основе информационных технологий, имеющих тотальный характер. В целостности научного знания математика выделяется как нечто всепроникающее. Мы едва ли найдем область науки, в которой не присутствовала бы в явной форме математика. В теоретических исследованиях в классической науке математика выступает как ментальная основа концептуального каркаса (единство физических и математических абстракций). В постнеклассической науке в области прикладной математики как математическое моделирование.

Наступило время, когда математика предстает не только традиционно как знание, но и как действие. Математика благодаря неклассическому инструменту деятельности — компьютеру, через информационные технологии конструирует проблемную ситуацию (опознает проблему, формулирует и разрешает ее). Таким путем математика сплетается с жизненными проблемами, с социальной практикой — выходит в сферу реальной жизни из искусственных условий абстрактной реальности. Как убеждал А. Пуанкаре, математика прирастает жизненной практикой. Стремительно изменяющаяся жизнь взывает к развитию новых областей математики.

II. Переход к изучению постнеклассических систем оказал влияние на методологические концепции науки. Прежде всего, изменяются требования, предъявляемые к математическому описанию наблюдаемых явлений. Понятие закона уступило место понятию модели. Изменилась и сама система построения научных выводов. Стало меняться отношение к тому, что допустимо и что недопустимо в науке. Сочетание дедукции с рациональными рассуждениями является характерной чертой прикладной математики. Для успеха в работе необходимо развитое неформальное

мышление, умение рассуждать по аналогии. Моделирование – это отнюдь не абстрактно-научная деятельность.

В новой познавательной ситуации важным регулятивом математического исследования становится нематематическое знание. Оно может иметь различный характер. Это могут быть и научные эмпирические факты, и теоретическое знание о поведении тех или иных компонентов системы, и опыт практической деятельности с объектом, и мнения экспертов по исследуемой проблеме и т.д. Такое знание может оказаться необходимым на самых разных этапах исследования.

Имеет место непривычный для классической математики характер математического исследования, заключающийся в "выходе за пределы математики" к другим формам понимания проблемы. Успех опытного математика, в конечном счете, обусловлен привлечением неформальных соображений. В частности, алгоритм как инструмент вычислений является разумным сочетанием формальных и неформальных процедур. В современном математическом моделировании большую роль играет поток внешних по отношению к математике факторов: данные эксперимента, фактор реального времени, экономические ограничения, предопределенные сроки исследования. Эти ограничения оказывают существенное влияние на сам характер выбираемых или разрабатываемых методов исследования, которые, будучи научно состоятельными, вместе с тем позволяли бы решить проблему.

III. Трансдисциплинарное исследование наиболее характерно для неклассического ИИ. Это, прежде всего, модели машинного обучения. Если искусственный интеллект – это наука о создании интеллектуальных машин, в особенности интеллектуальных компьютерных программ, то машинное обучение – это область искусственного интеллекта, занимающаяся вопросами обучения вычислительной техники. Это построение программ, или моделей, которые самообучаются пропорционально опыту. Они играют все более заметную роль в обществе: от прогнозирования преступлений или вероятности возврата кредитов до автоматической генерации текстов.

Существует проблема достоверности ИИ. Корректность прогнозов таких моделей поддерживается и критикуется как различными группами ученых, так и целевыми пользователями. Их уязвимым местом является предвзятость решения. На практике построенные модели, как правило, имеют предвзятости. При решении поставленной задачи система искусственного интеллекта использует данные и знания. Методы решения задачи определяются наличием и доступностью данных и знаний, необходимых для её решения. С ростом влияния машинного обучения растет озабоченность тем, что они могут быть несправедливыми, или предвзятыми, поскольку те данные, на которых обучается машина, несут в себе отпечаток ценностей ученого. Это, например, его отношение к людям в силу их расы, пола или, в более общем смысле, их принадлежности к некоторой группе. Особенно остро стоит вопрос принятия решений на основании этих результатов. В процесс получения алгоритма, который будет решать такую задачу, на первый план выходят данные, на которых этот алгоритм был построен. В этом смысле философские, мировоззренческие, этические проблемы, связанные с такими моделями, чаще все имеют своё начало специфике используемых данных. Также почти все модели машинного обучения используют исторические данные в процессе своего обучения, т. е. они «запоминают» ранее произошедшие события, которые отражены в обучающем наборе данных. Это есть одна из причин, почему прогнозы самой точной модели могут не удовлетворить запросы общества. Принимая решения на основе исторических данных, мы будем как бы создавать будущее, которое сильно похоже на прошлое.

ФИЛОСОФИЯ ПЕРЕД ЛИЦОМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЧЕВИДНОСТИ

А.П. Козырев

kozyrev.ap@philos.msu.ru

УДК 168

Рассматривается вопрос о том, что представляет собой очевидность в математике и в философии, и как философы бунтуют подчас против математической очевидности.

Ключевые слова: очевидность, методическое сомнение, интуиция, абсурд, логические и интуитивные суждения.

Математическая очевидность — то, что дано нам безусловно и не требует доказательств. Она носит аподиктический характер — через одну точку можно провести бесконечное число прямых, прямая пересекает окружность в двух точках, параллельные прямые не пересекаются, натуральный ряд чисел можно продолжить бесконечно и т.д. К ее утверждениям относятся базовые истины арифметики и геометрии, и эта общезначимость носит характер неписанного закона, усомниться в котором — преступно и недозволительно. Утверждения, сделанные с математической очевидностью, носят характер всем известного факта, например, символом чего-то непреложного и в то же время простого и ясного является простейшая математическая формула $2 \times 2 = 4$. Если переводить на язык кантианства, то можно назвать такие истины «априорными синтетическими суждениями». Очевидность в математике более фундаментальна, чем то, что открывает нам интуиция (данность предмета в ней еще подлежит научному доказательству, а интуитивная очевидность еще требует своей проверки логическим сознанием).

Однако природа философии такова, что одним из ее проявлений может быть методическое сомнение. Сомнение это может быть диалектическим моментом на пути к Истине, как, например, у Декарта, делающего допущение, что возможно не Бог, а какой-то злокозненный обманщик допустил, что математические истины есть всеобщий морок, или у Флоренского (глава «Сомнение» входит в «Столп и утверждение Истины» как этап на пути к истине), где суеверие и магия колдуна разрушают чудо математических истин: он обращается к заговорам нерехтского колдуна «три — не три, девять — не девять», ставящим под сомнение очевидность базовой математической истины, на которой строится установленный Богом космический порядок [1].

Оспорить математическую очевидность — непрменная задача философии абсурда от Льва Шестова до ОБЭРИУтов. Но тоже мы находим и в философской прозе XIX века — «подпольный человек», который стал открытием Ф.М. Достоевского, считал, что «дважды два пять тоже премиленькая иногда вещичка», а персонаж романа «Рудин» Пигасов в романе И.С. Тургенева (получившего философское образование в Берлинском университете) считал, что «... мужчина может, например, сказать, что дважды два не четыре, а пять или три с половиной, а женщина скажет, что дважды два — стеариновая свечка». «Врагом самоочевидных истин» называл себя философ и писатель Лев Шестов. Все это не только говорило о том, что мир становился более сложным и человек все чаще оказывается в состоянии «бунта» против мира, но и о том, что математика тоже не стояла на месте, и «человек Эвклидова ума» уступил место другому типу человека. Как писал В.Ф. Асмус, по мере развития математики, «очевидность вступала в противоречие не только с точностью, но и с самой истиной» [2].

Математическая очевидность становится философской проблемой не в последнюю очередь под влиянием Эд. Гуссерля, и неслучайно то, что русские гуссерлианцы работают с термином «очевидность» в философии, и даже в философии права, стремясь к очищению сознания для того, чтобы узреть предмет в его «очевидности» (И.А. Ильин). Спор Пуанкаре с «логицистами», его эвристическое понимание интуиции, как имеющей свои, не опирающиеся на логику интуитивные усмотрения, оказывает влияние на русскую философию (П.А. Флоренский, А.Ф. Лосев) [3].

Литература

1. Флоренский П.А. Столп и утверждение Истины. В 2-х т. М., Правда, 1990.
2. Асмус В.Ф. Проблема интуиции в философии математики. (Очерк истории: XVII – начало XX в.). 2-е изд. М, Мысль, 1965.

3. Лосев А.Ф. Диалектические основы математики. М., Academia, 2013.

ПЕРСПЕКТИВЫ ФИКЦИОНАЛИЗМА В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Е.В. Косилова

implicatio@yandex.ru

УДК 168.51

Доклад посвящен проблемам фикционализма, обильного платонизма, связи обильного платонизма с фикционализмом, связи фикционализма с неклассической математикой, дальнейшего развития фикционализма в сторону логики, а также перспективам искусственного интеллекта в судьбе математики.

Ключевые слова: фикционализм, платонизм, обильный платонизм, логика, искусственный интеллект в математике..

Фикционализм — течение в философии математики, противопоставляющее себя платонизму [1]. Вопрос расхождения между ними — существование абстрактных объектов (то есть объектов математики). Согласно платонизму, 1. математические объекты существуют, 2. математические объекты являются абстрактными, 3. математические объекты не зависят от агентов-математиков (их языка, мышления и практики) [2]. Существует только одна математическая вселенная, и, надо добавить, мы имеем к ней доступ.

По поводу этого доступа шли дебаты, выраженные П. Бенасеррафом [3]. Люди — физические тела, их мозг — физическое тело, получающее информацию из мира от таких же физических тел. Абстрактные объекты — не физические тела. Мозг принципиально не может получить информацию от них. Раньше говорили об интуиции, о созерцании, но сейчас эти разговоры ушли в прошлое. Даже если существует математическая вселенная, мы не имеем к ней эпистемического доступа.

Дебаты о платонизме сильно пересекаются с дебатами о так называемом реализме истинностного значения [2]. Он означает, что каждое математическое утверждение имеет уникальное значение Истина/Ложь, независимо от того, известно ли оно нам и вытекает ли из существующих математических теорий. Реализм истинностного значения не равен платонизму, но в первом приближении их можно сопоставить.

Фикционализм отрицает существование абстрактных объектов. Они являются фикциями. Fiction — по-английски не только фикция, но и рассказ, то есть математические объекты являются рассказами математиков. Математика — это история математического конструирования.

Есть специальные приемы, как говорить о математике на языке фикционализма, прежде всего фикциональный оператор: «Согласно математике... [то-то и то-то]». («Согласно Пушкину, Татьяна не вышла замуж за Онегина»).

Есть и ответ на проблему приложений математики (аргумент незаменимости): утверждение о консервативности математики, то есть о том, что истинные нематематические теории о мире включаются в нее [4]. Она может служить для облегчения синтаксических переходов. Однако это по сути логическая работа математики.

Знаменитый представитель фикционализма Х. Филд переписал теорию Ньютона без чисел (правда, не без геометрии) [5].

Рассмотрим так называемый «Обильный» (plenitudinous) платонизм [2]. Его суть в том, что любые математические объекты, которые могут существовать, действительно существуют. При условии, что наши математические теории непротиворечивы, они гарантированно верны для

некоторой вселенной математических объектов. Это обильный платонизм Балагера. Другая версия принадлежит Лински и Залта: утверждается существование множества абстрактных объектов: для любого набора свойств существует абстрактный объект, который «кодирует» именно эти свойства [2].

Легко видеть, что никакого платонизма в этом нет. Эти «обильные» вселенные строятся, так сказать, снизу, а не сверху. Мы создаем их сами, придумывая математические объекты, проверяя их на непротиворечивость, а потом говорим: значит, где-то они существуют. «Например, поскольку континуум-гипотеза не зависит от стандартной аксиоматизации теории множеств, существует вселенная множеств, в которой гипотеза верна, а другая — где она ложна. И ни одна вселенная не является метафизически привилегированной. Напротив, традиционный платонизм утверждает, что существует уникальная вселенная множеств, в которой континуум-гипотеза либо определено истинна, либо определено ложна» [2].

Таким образом, обильный платонизм — детище того же фикционализма. А фикционализм родился благодаря духу неклассической математики, в которой объекты уже не связаны ни с каким миром, а творятся свободно в головах математиков. Отсюда и кризис интуиции [6], и искушение языком [7], и обилие теорий, не связанных напрямую с физическим миром (их вторичную связь Вигнер назвал чудом, но сколько теорий пока не нашли никакого применения?).

Фактически математика стала отдельным миром со своими законами. В этом мире математики творят новые объекты, теории, целые области. Если раньше набор аксиом был, некоторым образом, естественным, аксиомы были доступны созерцанию, то теперь аксиомы могут быть произвольными и сколь угодно контринтуитивными. Еще более контринтуитивны их следствия, но это никого не останавливает. Этим математика для непосвященных уже сейчас напоминает игру в бисер. Появление фикционализма даже не очень удивительно на таком фоне.

Однако задумаемся о роли логики. Ни один фикционалист не подвергает логику сомнению. Теория может быть какая угодно, но она должна быть непротиворечивой.

Почему? Разве объекты логики не абстрактны? Возможно, еще больше, чем объекты математики. Разве конъюнкция и импликация имеют физический характер? Или правило *modus ponens* воздействует непосредственно на мозг?

Вывод: следующим шагом фикционализма будет сомнение в логике. Будут, как у Филда, попытки обойтись без нее. Будут применены самые разнообразные неклассические логики. Неклассические логики и сейчас существуют, но в математике применяется только логика предикатов первого и второго порядка. Что может соответствовать в математике, например, многозначной логике?

И наконец упомянем тот факт, что мы вступаем в новую эру — эру искусственного интеллекта. Пока ИИ не очень силен в математике, чат GPT иногда не может решить даже простые задачи, но ясно, что это дело времени. Математические модули давно разработаны, и соединить их с ИИ и с чатом GPT — дело времени, причем самого небольшого. И тогда мы получим нечеловеческую математику. Возможно, мы не будем понимать не только доказательства теорем, но и сами их формулировки. Фикционализм станет ИИ-фикционализмом. И уже тут логика не будет препятствием на пути варьирования принципов. Будет использоваться самая неожиданная логика, понятие непротиворечивости, по-видимому, претерпит изменения.

Математика станет игрой по правилам, устанавливаемым машинами.

Литература

1. *Balaguer M.* Fictionalism in the Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), <https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/fictionalism-mathematics/>.
2. *Linnebo, Oystein.* Platonism in the Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>.
3. *Benacerraf* Mathematical Truth // Journal of Philosophy, 1973, 70(19): 661–679.
4. *Bueno O.* Nominalism in the Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), <https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/nominalism-mathematics/>.
5. *Horsten, Leon.* Philosophy of Mathematics // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.),

<https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/philosophy-mathematics/>.

6. Хан Г. Кризис Интуиции в математике // Математики о математике. М., 1972

7. Гуссерль Э. Начало геометрии. Предисловие Ж. Деррида. М.: Ad Marginem, 1996.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МЕТАФОРА ВО ФРАНЦУЗСКОЙ ФИЛОСОФИИ КОНЦА 20 ВЕКА

А.А. Костикова

akostikova04@ya.ru

УДК 512.56

В докладе будет рассмотрена проблема математической метафоры, поставленная как проблема соотношения иррационального и рационального, образного и понятийного в современной французской философии, представленной прежде всего структуралистским психоанализом Ж.Лакана и математической теорией события А.Бадью. В названных концепциях математические образы и понятия становятся смыслообразующими. Эта особенность новейшей философии становится в свою очередь предметом внутренней философской критики.

Ключевые слова: история философии, французская философия, философия метафоры, математическая метафора.

Проблема математической метафоры может быть поставлена как проблема соотношения иррационального и рационального, образного и понятийного. В современной французской философии математические образы и понятия являются смыслообразующими. Ж.Лакан часто использует математические образы, прежде всего топологические. С развитием психоанализа стали очевидны внутренние проблемы психоаналитической интерпретации желания и возникли его символические интерпретации - прежде всего в рамках теории Лакана: субъект в самом процессе своего формирования, со стадии Зеркала, все время оказывается двойственным - "на кого смотрят" и "кто смотрит", далее "кто говорит" и "о ком говорят". Мы чувствуем, переживаем, а в литературе активно используем эту двойственность - язык строится на принципах метафоры и метонимии - то, что Делез называл "эмпиризмом трансцендентальных смыслов" [1].

Образ ленты Мебиуса, который использовал Лакан для понимания процессуального единства-расщепленности Я как «дивида», наиболее характерен для объяснения современной философии идентичности: речь идет о едином перманентном процессе, в котором трудно различить и разделить источник и результат, внутреннее и внешнее, субъект и объект. Все подвержено трансформации, перемене ролей и функций в ходе этого процесса. Мы имеем дело не с отдельными факторами субъектной деятельности, а со сложно организованным многомерным пространством деятельностного, говорящего, воображающего субъекта.

Ключевая для классического психоанализа и психиатрии фигура невротика может объяснена, с точки зрения Ж.Лакана, прежде всего пространственно и есть уже предложенный топологией язык его представления: "пространство - это принимать что-либо как ограниченное, закрытое в этом пространстве наслаждение, топология - это говорить об этом". Топология предлагает, таким образом, структуру понимания. Это предельно широкое толкование, оно не может быть сведено к чисто математической топологии, хотя история ее возникновения сама по себе показательна для философских поисков современности: понятие предела и распространение этого понятия сначала на множества реальных чисел, затем на дифференциальные исчисления и так далее. А ведь Ж.Лакан использует и другие области математических исследований: воображаемые числа и математическая логика.

Следует иметь в виду, что использование современными философами и в частности Ж.Лаканом математических метафор становилось предметом критики и порицания, которое скорее основывалось на общем неприятии идей новейшей структуралистской философии. Так,

авторы нашумевшего бестселлера «Интеллектуальные уловки» А.Сокал и Ж.Брикмон [2] выступают в целом против французского так называемого постмодернизма. Для них это проявление иррационализма вообще и обращение философов постмодерна к математике выглядит скандально. А.Сокал и Ж.Брикмон назвали его аргументом “поэтической лицензии”. Признавая за поэтами и фантастами право использовать образы “черных дыр”, “гиперпространства” как им угодно, авторы «разоблачения постмодернизма» категоричны в отношении философов. Однако позиция Ж.Лакана, использующего математическую логику и топологию, или его последовательница Л.Иригарэй [3], апеллирующая к понятиям механики, - это позиция авторо философских текстов как научных. Обращение к математическим образам, понятиям и теориям, действительно становятся основой вторичного анализа.

В философии А.Бадью, который тоже начинает свою философию с переосмысления субъекта [4], позже [5,6] математика становится основанием необходимой переформулировки вечного и первого философского вопроса о бытии в связи с окончанием «века метафизики». Именно математика способна дать язык вне традиционного дискурса систематической спекулятивной философии. Множественность — это способ предъявления бытия. Единое существует только в виде операции или же ее результата, т.е. счета-за-одно, определенного структурного закона. А.Бадью называет любую предъявленную множественность ситуацией. Нарушение счета в ситуации влечет за собой пустоту. Именно при неудачном счете бытие проявляется как таковое, то есть как пустота, выстраивая различие между множественностями. И для А.Бадью задачей философии становится поиск тождества онтологии и математики как «мысли о бытии», обнаружение проблем онтологических объяснений как трудностей обоснования «событийного ландшафта» как «непредъявленных множественностей» — «на краю пустоты». Понятию события А. Бадью придает строгую математическую форму, которая позволяет ему вывести спорный концепт его философии события.

Математические метафоры позволили французским философам конца XX века предложить новое видение вопросов о соотношении природного и исторического, нормального и особенного, целого и частей, общего и частного, глобального и локального, жизни и действия и других важнейших вопросов философии.

Литература

1. *Лакан Ж.* Семинары. Книга 11: Четыре основные понятия психоанализа. М.: Гнозис/Логос, 2004.
2. *Сокал А., Брикмон Ж.* Интеллектуальные уловки. Критика философии постмодерна / Перев. с англ. Анны Костиковой и Дмитрия Краlechкина. Предисловие С.П. Капицы — М.: «Дом интеллектуальной книги», 2002.
3. *Иригарей Л.* Этика полового различия. Художественный журнал , 2004
4. *Badiou A.* Théorie du sujet, Paris, Seuil, 1982.
5. *Badiou A.* L'Être et l'événement, Paris, Seuil, 1988.
6. *Badiou A.* L'Être et l'événement: Tome 2, Logiques des mondes, Paris, Seuil, 2006.

НАБРОСОК ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ПОНЯТИЙНЫХ СИСТЕМ В МАТЕМАТИКЕ

А.Н. Кричевец

ankrich@mail.ru

УДК 124.4

В нашем докладе мы проследим возникновение и развитие математических систем в период в 17-18 веках. Мы покажем, что история развития математических понятий не укладывается в феноменологическую схему Гуссерля, приведенную в работе Идеи-I.

Ключевые слова: дифференциальное исчисление, комплексные числа, система, история..

Научная революция 17 века продемонстрировала чрезвычайную успешность математического естествознания. Замечательно, что довольно неуклюже толкуемое дифференциальное и интегральное исчисление давало такие яркие и практически значимые плоды, несмотря на неясность используемых понятий.

В. А. Успенский пишет: «Введенное ими [Ньютоном и Лейбницем] в обиход понятие «бесконечно малой» определялось весьма туманно и казалось загадочным современникам (в том числе, по-видимому, и самим его авторам). Тем не менее, оно с успехом использовалось в математике. Разработанный Ньютоном и Лейбницем символический язык не имел точной семантики (которая в удовлетворяющей нас сейчас форме была найдена лишь через полтора столетия), но даже и в таком виде позволял описывать важнейшие явления действительности» [1, с. 14]. (Отметим, что альтернативный вариант семантики бесконечно малой, более соответствующий идее Лейбница, разработан еще на сто лет позже — об этом сам В. А. Успенский пишет в прекрасной брошюре [2]).

Как мне кажется, смысловое ядро дифференциального и интегрального исчисления того периода как раз лежит в инструментальном слое, в использовании символов для решения практических и теоретических задач. То есть первоначально новая теория представляла собой «сподручный» инструмент, скорее, чем ясную идеализацию, которая тем не менее «просвечивала» сквозь эти несомненные успехи инструмента. Проиллюстрируем этот процесс вторым примером — развитием понятия комплексного числа в XVIII — начале XIX века.

Проблема в отношении будущих комплексных чисел состояла в том, что математики XVIII века не знали, исчерпываются ли все нужные им для работы «мнимости» комбинациями вещественных чисел и числа $\sqrt{-1}$. По мнению А. П. Юшкевича, какую-то роль в замедлении процесса исследования сыграл недосмотр Лейбница, который, исследуя уравнение $x^4 + y^4 = 0$ не заметил разложения двучлена в произведение двух трехчленов второй степени. Это привело к тому, что $\sqrt{\sqrt{-1}}$ рассматривался им как отличная от $\sqrt{-1}$ мнимость [3].

Открытие тригонометрического представления комплексных чисел в середине 18 века в работе Муавра (1738 год) связало умножение комплексных чисел со сложением их аргументов. Затем появились все более строгие доказательства основной теоремы алгебры, в которых последовательно устранялись неточности, а завершился процесс выходом в 1815 году работы Гаусса, строгой уже по современным стандартам [3]. Заметим, что только после появления приемлемого доказательства основной теоремы алгебры стало возможно определять множество комплексных чисел как минимальное поле, замкнутое относительно операции нахождения корней многочленов над этим полем (это очень короткое, но исчерпывающее определение, в котором история возникновения комплексных чисел глубоко спрятана). Добавим, что применения комплексных чисел в физике далеко выходят за рамки соображений, их породивших.

В обоих примерах кажется уместным введение какой-то телеологической схемы, но для Гуссерлевского «чистого Я» из Идеи-I она совершенно неуместна. Об этом косвенно можно судить по появлению в поздней работе такого высказывания:

«Дело не в том, что очевидность позитивно-научного метода обманывает нас, а его достижения суть одна лишь видимость, а в том, что эта очевидность сама является проблемой, что этот объективно-научный метод покоится на никогда прежде не исследованном, глубоко скрытом субъективном основании, философское прояснение которого только и выявляет истинный смысл достижений позитивной науки и, коррелятивно, истинный бытийный смысл объективного мира — и именно как трансцендентально-субъективный смысл.» [4, с. 141]. Сам Гуссерль на этом пути не продвинулся, насколько мне известно, также не известны мне работы на эту тему в рамках феноменологического направления и в последующие годы, хотя обсуждению «непостижимой эффективности математики в естествознании» посвящено множество работ.

Литература

1. Успенский В. А. Апология математики. С.-Пб., Амфора, 2011. 546 с.
2. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.
3. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия (ред.). Т. 3. М. Наука, 1972.
4. Гуссерль Э. Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология: Введение в феноменологическую философию. СПб. Фонд Университет; Владимир Даль, 2004, 749 с.

МАТЕМАТИКА И ФИЛОСОФИЯ: ОБЪЕДИНЕНИЕ ДИСЦИПЛИН ДЛЯ ПОНИМАНИЯ МИРА

Т.В. Кузнецова

89163805403@mail.ru

УДК 7.01

Математика и философия помогают понять мир через объективные и субъективные призмы. Это взаимодействие расширяет наше понимание мира, анализируя математические концепции и их связь с человеческим восприятием, включая эстетику. Эстетическое восприятие красоты в искусстве и природе исследуется через математические структуры, гармонию и симметрию, что помогает понять их значение для нашего понимания реальности.

Ключевые слова: математика, философия, эстетика, искусство..

Математика и философия представляют собой две краеугольные дисциплины, каждая из которых стремится к пониманию мира через свой собственный уникальный объективный и субъективный подходы. И хотя они могут казаться разными по своей природе и методологии, их объединение может пролить свет на глубинные аспекты реальности, которые не всегда доступны для исследования в пределах одной дисциплины. Математика, в своей сути, представляет собой язык, на котором мир изучается через формальные структуры, логику и абстрактные концепции. Она описывает законы природы, физические явления и отношения между объектами. Философия же, в то время как она также стремится к пониманию мира, фокусируется на вопросах о смысле, ценностях, этике и сущности реальности.

Объединение этих дисциплин позволяет нам подойти к пониманию мира с различных точек зрения, включая как объективные, так и субъективные аспекты. Математика предоставляет нам инструменты для анализа и формализации различных аспектов мира, в то время как философия помогает нам понять значения и последствия этих аспектов.

Одним из интересных аспектов, где математика и философия пересекаются, является эстетика. Эстетика, как философская дисциплина, изучает природу красоты и искусства, а также восприятие и оценку красоты человеком. В то время как эстетика в первую очередь считается частью философии, математика играет важную роль в ее исследовании и понимании.

Когда речь заходит об эстетике, математические концепции играют ключевую роль в объяснении и понимании красоты в искусстве и природе. Например, гармония и симметрия, которые могут быть формализованы и описаны с помощью математики, являются основными аспектами эстетического восприятия. Понимание этих математических структур позволяет философам исследовать, как человек воспринимает и оценивает красоту, и как она связана с его внутренним миром и ценностями.

Философия также вносит важный вклад в понимание математических концепций и их роли в построении нашего знания о мире. Философские вопросы о природе математики, такие как ее отношение к реальности или ее роль в нашем понимании мира, помогают нам осознать глубинные аспекты математических конструкций и их значения для нашего понимания реальности.

Таким образом, объединение математики и философии позволяет нам глубже понять мир через разнообразные призмы анализа и исследования. Взаимодействие между этими двумя дисциплинами не только обогащает наше понимание мира, но и позволяет нам взглянуть на реальность с новой перспективы, интегрируя объективные и субъективные аспекты, а также аспекты красоты и эстетики.

Литература

1. Кузнецова Т.В., Андреев А.Л. Искусство и наука в сравнительной перспективе Вестник ВГИК, том 14, № 3, с. 110-119, 2022г.

ОПРАВДАНИЕ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ КОНЦЕПЦИЯМИ

С.М. Кускова

adiafora@tut.by

УДК 119

Философия математики сохраняет актуальность при отбрасывании псевдопроблем редукции всех разделов к единому основанию и онтологических обязательств математических теорий, требующих определенной метафизики. Предлагаем обратить порядок обоснования: стандарты рациональности математики автономны, её достижения и проблемы корректируют философию.

Ключевые слова: основания математики, монизм, платонизм, фундирование..

Основные подходы к пониманию оснований математики направлены на поиск единства всех разделов этой науки, единство изучаемого ею мира и его онтологии. Устанавливаются связи оснований математики с философскими концепциями пифагореизма, платонизма, трансцендентализма или натурализма. Но они исходят из приоритета философских метатеорий, руководящей и направляющей роли философии в развитии науки, что было оправдано в античности, но не актуально сейчас, когда темпы развития математики существенно опережают философский анализ. Философия не выносит окончательного решения вопросов «что изучает математика», «как она возможна», «почему она эффективно применима к эмпирической реальности», поскольку не нормирует автономных источников развития науки. На наш взгляд, все хорошие результаты исследований по основаниям математики, как то определенность теорий в терминах языков логики предикатов, интуиционистские логики, теории типов, теория категорий получены средствами логики как самостоятельной науки без прямого обращения к метафизике. Результаты же, вызывающие сожаление о нереализуемости конечных целей логицистских и финитистских программ, связаны с ограниченностью философского монизма. Монизм предпочитают не по объективным основаниям. Если натуральные числа редуцируют к множествам, а множества к объектам платоновского мира, то проблематический статус последнего вызывает вопрос об онтологическом статусе чисел и способах верификации и фальсификации математических высказываний.

По нашему мнению, иллюзия кризиса оснований математики связана с философскими псевдопроблемами, которые ведут к кризису не сколько оснований математики, сколько философии вообще. Когда философия обращается с математикой так, как привыкла обращаться с метафизикой или эмпирическим знанием. Философия предъявляет требование, чтобы теорема была не только доказана из аксиом, но и удостоверена внелингвистическим путем вроде платонического созерцания, конструирования объектов, физического опыта и чуть ли не психологической очевидности.

Философия устанавливает, какие внелогические, но не эмпирические, переходы между математическими мыслями легитимны, а какие нет. Философия унифицирует операции с конечными и бесконечными структурами. Устанавливает порядок фундирования одних разделов математики другими, а также последний фундамент по ту сторону математической реальности, например, платоновскую метафизику.

«Сама по себе философия платонизма вызывает множество возражений опять-таки чисто философского толка. Но коль скоро математика играет важнейшую роль в этой философии, возникает вопрос, в какой степени математика ответственна за те неприемлемые по философским основаниям положения, которые свойственны платонизму»^{Ё[1]}. Возникает вопрос: детерминирует ли работа с объективными математическими структурами обязательного верования в определенную философскую онтологию? Человек как гражданин двух миров, ответственно созидаящий математические истины, должен ли принимать объекты другого мира, кроме математического, более широкий тип объектов, частным случаем которого являются объекты математические?

Допустим, платонизм есть философский фундамент теории множеств. Следует ли отсюда, что стандарты рациональности платонизма должны налагаться на теоретико-множественные исследования? Предполагается, что наоборот, нормативная система, регулирующая создание теории множеств, должна предшествовать нормативности в основаниях платонистической метафизики. Не пороки платонизма транслируются на теорию множеств, а добродетели последней — на платонизм. Значит, проблемы, обнаруженные в ходе математических исследований, проливают свет на ситуацию в соответствующей философии, способствуя исправлению самого платонизма и приведению его в состояние, плодотворное для усмотрения новых математических гипотез.

Борьба с платонизмом вызвала новые подходы к обоснованию математики, особенно прикладной, обеспечивающей успех естествознания. Но они скрывают похожую иллюзию первичности философской позиции, например, натурализма, в принятии или отвержении тех или иных математических положений. Чисто философское убеждение, никакой логикой не доказанное, что идеальные объекты проблематичны, а эмпирические явления достоверны, распространяет каузальную гносеологию на мир математики. Однако ссылка на удачное устройство дискретных неизменных твердых тел или на оборудование мозга, обеспечивающее восприятие животным количества, не оправдывает математических знаний сложнее подсчета небольших сумм. «Никакой опыт не приближает нас к пониманию онтологической сущности мнимых чисел и бесконечно малых величин» [2].

Неявно предполагается, что философия «более истинна», чем математика, но, если так было в античности, не значит, что этот порядок сохранился в новое время. Материалистическая философия истолковывает идеальное в материальных терминах. Например, есть процедура экономического обмена вещей. То общее, чем обладают равноценные вещи в этой деятельности, становится стоимостью. Но эта характеристика, подобная длине или массе, выявленная в процессе обмена, не порождена обменом, а уже есть, как отображение множества вещей на множество чисел. Нерастворимый осадок идеализма показывает ограниченность всех экстерналистских попыток сведения математики к чему-то случайному.

Если интерес философии к математике вызван кризисами в математике, которая нынче вступила в спокойную стадию, поэтому «возможно, математика не нуждается в основаниях и не подлежит обоснованию» [3].

Мы считаем полезным отказаться от философского монизма и единства математического мира, а рассматривать философские основания отдельных теорий и разделов математики. Для одних подходящей окажется платонистическая теория познания, для других — трансцендентальная, для третьих — натуралистическая. Единство создает анализ языка теорий и их семантики. Язык скрывает такие закономерности и факты, которые способны продвинуть математические исследования. Не математика должна оправдываться перед лицом философии, а наоборот, философия должна корректироваться под влиянием соответствующих математических открытий. Перестроенные же разделы первой философии стимулируют развитие новых математических идей.

Литература

1. *Целищев В.В.* Философия математики. Ч. 1. — Новосибирск: Наука, 2002, - 212 с. С. 32.
2. *Перминов В.Я.* Математика и реальность: гносеологические проблемы математизации знания. // Вестник московского университета. Серия 7. Философия. 2014. №1. с. 45.
3. *Лолли Г.* Философия математики. Наследие двадцатого столетия. / Пер. с итал. А.Л. Сочкова, С.М. Антакова, под ред. проф. Я.Д. Сергеева. — Н. Новгород: изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2012, — 299 с. С. 283.

ОНТОЛОГИЯ ЧИСЕЛ

А.Е. Лестев

antonlestev@mail.ru

УДК 111:51

В докладе рассматривается проблема онтологии чисел с позиций теории онтологии формы О.М. Ноговицына и античной философии. Рассматривается представление о числе как форме (идее, смысле).

Ключевые слова: онтология, онтология формы, онтология чисел, число как форма.

Математика занимается изучением чисел и операций с ними. Но изучением существования чисел, их происхождения и появления в человеческом разуме математика не интересуется [1, с. 126]. Такие вопросы в компетенции философии, которые она начала решать с момента своего возникновения. Пифагорейцы начинали экзаменовывать новопришедших с казалось бы элементарных вопросов: у ученика спрашивают: «Скажи, ты знаешь, что такое два?». Тот отвечает: «Знаю». «А ты точно знаешь, что такое два?», – ученик обижается, говорит: «Разумеется, я знаю, что такое два». «А тогда объясни». Раз понимаешь, значит, можешь объяснить. И ученик довольно смело начинает говорить, что «два – это вот две лошади». «А я тебя спрашивал, что такое две лошади? Я спрашивал тебя, что такое два». Ученик холодеет и уже без всякого энтузиазма говорит: «Ну два – это два куста», и сам понимает, что говорит ерунду [2, с. 101]. Выяснилось, что экзаменуемый не мог оторвать число от предмета, объяснить число само по себе без отнесения к какому-либо предмету. Оказывается, нельзя указать на два. Нельзя объяснить, что такое два путём указания. Естественно, ни один современный математик не оперирует числами при расчетах, представляя себе предметы. Вычисление матриц, производных, интегралов и даже квадратных уравнений не требует предметности, т.е. представления разумом. Числа и переменные существуют сами по себе. Есть смыслы, которые не имеют предметного вида, ясное понимание двоичности – лишено образа. Т.е. число – это чистый смысл. Пифагорейцы считали единицу божественным числом, т.к. она позволяет делить мир на предметы: одно яблоко, один человек. Единица божественна, т.к. то первое число, первый смысл, который позволяет делить мир на предметы, остальные же числа позволяют вести счёт и сравнивать количество. Единица мыслится сама по себе, остальной же счёт относительно единицы [4, с. 58]. Сам же счёт появляется только после того, как появляется идея больше / меньше. Без этой идеи больше / меньше есть только идея разного [4, с. 78-80]. Т.е. согласно античной философии человеку предстоит не готовый мир, а хаос (а хаос – это абсолютное смешение и неразличимость). И то, что человек вносит в хаос – это форма. Форма сначала пространственная, потом временная форма, потом логические смыслы. Привнёс идею больше/меньше – увидел, что один отрезок больше, а другой меньше; привнёс идею числа и увидел, что один отрезок в два раза больше другого. Более простой смысл предшествует более сложному смыслу. В этом представлении есть серьёзный педагогический потенциал: если ученик не способен ухватить новую тему, то возможно у него просто нет предшествующих смыслов и ему необходимо сделать шаг (или несколько) назад в своём обучении. Поменяли два апельсина на два яблока, и ребёнок не может решить задачу, не надо его третировать, ругать и т.д., необходимо сделать шаг назад, чтобы у ребёнка появился чистый смысл числа. Таким образом, число – это чистая форма, а математика имеет дело с чистыми формами. Именно поэтому Аристотель определял предмет математики как то, что не движется и то, что не существует отдельно, т.е. математика изучает не природный мир, а мир идей, но при этом как созерцательная наука она по Аристотелю достойна всяческого уважения [5, 44-45].

Литература

1. *Ноговицын О.М.* Предмет и предпосылки философии (Курс лекций по философии. Лекция 1) // Казанское востоковедение. 2023. Т. 1 (2). № 1 – 123–136. EDN: LKGSGO.
2. *Ноговицын О.М.* Предпосылка и начало философии (Курс лекций по философии. Лекция 2) // Казанское востоковедение. 2023. Т. 1 (2). № 2 – 137–145. EDN: GYOLPD.

3. *Ноговицын О.М.* Онтология формы. – СПб.: Издательство РХГА, 2019, с.196.
4. *Ноговицын О.М.* Хаос и порядок. Форма. Число (Курс лекций по философии. Лекция 3) // Казанское востоковедение. 2023. Т. 1 (2). № 3 — 72–87. EDN: CGNDAZ.
5. *Мельников С.А.* Введение в философию Аристотеля: 8 лекций для проекта Магистерия. – М.: Rosebud Publishing, 2018, с.248.

О ПОПЫТКАХ ПОСТИЧЬ «НЕПОСТИЖИМУЮ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ»

З.А. Сокулер
zasokuler@mail.ru

УДК 167, 168

Ю.Вигнер, говоря о «непостижимой эффективности математики» подчеркивает, что математические понятия, создававшиеся в одном контексте, для одних задач, оказываются удивительно подходящими для применения к совсем другим. Рассматриваются некоторые попытки трактовать или понять эту непостижимость.

Ключевые слова: Ю. Вигнер, Л.Витгенштейн, непостижимая эффективность математики, значение как употребление..

Слова о «непостижимой эффективности математики» [1] принадлежат Юджину Вигнеру, нобелевскому лауреату по физике 1963 г. Многих они восхищают, однако другим они представляются преувеличением, загуманивающим определенные моменты развития математики и ее применений. Если для М. Тегмарка «непостижимая эффективность математики» указывает на математическую структуру самой Вселенной [2], то Я. Хакинг [3] обращает внимание на применимость методов одной математической дисциплины для решения проблем из совсем другой, например, использования геометрии для решения проблем теории чисел и алгебры. Представляется, что размышления над проблемой эффективности математики для самой математики должны вести к структурам сознания, а не к математической структуре универсума.

Вигнер придает особое значение тому, что математические понятия, создававшиеся для одних проблем, неожиданно оказываются эффективными в применении к совсем другим проблемам, например, число π в статистических распределениях.

Б. Кларк в попытках понять отношения математики и физической реальности обращается к идеям Л.Витгенштейна [4]. Проблема эффективности математики в применениях к физическому миру, замечает он, является одной из центральных в философских дискуссиях о природе математики. Ее решение невозможно упаковать в одну фразу. Оно требует внимательного исследования понятий и неявных допущений, задействованных в формулировках и обоснованиях предлагаемых ответов.

Проблема представляется мистически загадочной, если исходить из представления об отдельно существующих независимых реальностях — математических объектов и физического мира. Поэтому нужно критически рассмотреть оба эти допущения. Идее независимой математической реальности Кларк противопоставляет витгенштейновское понимание значения. Для Витгенштейна, математические понятия это не имена неизменных идеальных сущностей; их значение определяется их употреблением. А употребления математических понятий меняются, расширяются, и, соответственно, меняются их значения. Ярким примером может служить число π , о котором упоминал Вигнер. Конечно, непостижимо, как связаны отношение периметра окружности к ее диаметру и демография, однако в современной математике π имеет другое значение и встроено в иные понятийные связи. Проследивая историю некоторых математических понятий, Кларк показывает историю изменений, которые они претерпевали, подчеркивая, что изменения мотивировались желанием приспособить данные понятия для решения нового круга задач.

С другой стороны, Кларк показывает, что и физическая реальность вовсе не независима от математики. Прежде всего, применимость математики обусловлена тем, что она представляется как \mathbb{R}^3 .

Литература

1. *Вигнер Ю.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Ю. Этюды о симметрии. М., 2021.
2. *Тегмарк М.* Наша математическая Вселенная. В поисках фундаментальной природы реальности. М.: АСТ, 2017.
3. *Хакинг Я.* Почему вообще существует философия математики? М.: Канон+, 2020.
4. *Clark B.* Wittgenstein, Mathematics, and World. Springer International Publ., 2017.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ФОРМИРОВАНИЯ АНТИТЕЗЫ ПСИХОЛОГИЗМА-АНТИПСИХОЛОГИЗМА В КОНЦЕ XIX – НАЧАЛЕ

XX ВЕКОВ

Г.В. Сорина

gsorina@mail.ru

УДК 160.1

В докладе будет прослежена эволюция формирования антитезы психологизма-антипсихологизма в логике и методологии науки, выявлена роль математического начала в формировании данной антитезы, показана взаимосвязь между математикой и философией в рамках интеллектуальной биографии Э. Гуссерля как мыслителя, который способствовал институализации данной антитезы.

Ключевые слова: психологизм, антипсихологизм, математика, логика, философия..

Спор между психологизмом и антипсихологизмом как антитеза, принадлежащая логико-методологическому проблемному полю, начал явным образом конституироваться в самом конце XIX – начале XX веков. Мы можем позволить себе сказать, что фактически институализация этого проблемного поля была зафиксирована в первом томе «Логических исследований» Э. Гуссерля [1]. Исследователи, которые обсуждают проблему спора между психологизмом и антипсихологизмом традиционно рассматривают именно философские основания спора, не обращая внимания на то, что спор приобрел всеохватывающий характер для разных областей научного знания, в первую очередь гуманитарного знания, благодаря его явной формулировке в методологических спорах о характере и статусе логики. Именно эти споры, ориентированные на анализ методологических проблем, привели в последующем к институализации данной антитезы уже в культуре в целом [2]. В то же время тот вектор исследования проблем психологизма и антипсихологизма, который был задан в первом томе «Логических исследований», был бы невозможен вне математических предпосылок такого анализа. В конце XX века эти предпосылки в целом были представлены в работе автора данных тезисов «Логико-культурная доминанта. Очерки теории и истории психологизма-антипсихологизма в культуре» [3]. В то же время последовательное исследование именно математических предпосылок данного спора стало возможно на базе большой архивной работы, которую провела Н.В. Мотрошилова уже в наше время и впервые представила в своей монографии «Гуссерль в Галле» [4].

Математический контекст формирования антитезы психологизма-антипсихологизма в конце XIX – начале XX веков был связан с тем, что первая большая работа именно математика, а не философа Э. Гуссерля «Философия арифметики» была написана с психологистических позиций. Работа Гуссерля имела подзаголовок «Ряд психологических и логических исследований». Гуссерль имел базовое математическое образование. Он защитил математическую диссертацию на тему: «Очерки по теории исчисления вероятностей». Его научным руководителем был К.

Вейерштрасс, один из крупнейших математиков своего времени и, как отмечается в различных источниках, основатель современного математического анализа.

В докладе будут рассмотрены вопросы, связанные с особенностями математических интересов Гуссерля. В частности, будет проанализирован (вслед за Н.В. Мотрошиловой) вопрос о том, что привело молодого математика, который защитил диссертацию по математике, в философию. Будет представлено авторское видение того, почему движение математика в сторону философии можно объяснить пересекающимися методологическими установками в рамках этих двух разных наук.

Кроме того, в докладе будет прослежено влияние на Гуссерля его друга великого математика Георга Кантора. В тоже время будет показано, что Гуссерлевская габилитационная работа «О понятии числа» уже по своему названию свидетельствует о ее междисциплинарном характере. Немецкая математика той эпохи явным образом взаимодействует с философией.

Эта линия коммуникации в целом будет более последовательно рассмотрена в докладе. При этом будет показано, как критика математика и логика Фреге психологизма Гуссерля в математике стала одним из оснований для перехода Э. Гуссерля из математики в философию.

Литература

1. *Гуссерль Э.* Логические исследования. Прологомены к чистой логике. — СПб.: Образование, 1909. Т. 1.
2. *Сорина Г.В.* Методология логико-культурной доминанты: психологизм, антипсихологизм, субъект // Электронное научное издание «Альманах Пространство и Время» (ISSN 2227-9490), 2013. Т. 3. Вып. 2). <http://www.j-spacetime.com/actual%20content/t3v2/index.php>
3. *Сорина Г.В.* Логико-культурная доминанта. Очерки теории и истории психологизма и антипсихологизма в культуре. М.: Прометей, 1993. (Монография, лауреат премии А.Ф. Лосева).
4. *Мотрошилова Н.В.* Ранняя философия Эдмунда Гуссерля (Галле, 1887–1901 годы): монография. М.: Прогресс-традиция, 2018.

К ВОПРОСУ О ПРЕДМЕТНОЙ РОЛИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОНТОЛОГИЙ В ГЕНЕЗИСЕ ФИНАНСОВЫХ ОТНОШЕНИЙ

И.Э. Фролов

frolovecfor@gmail.com

УДК 111, 330.113.4, 336.011, 336.717.6

Использование математических онтологий, рассматриваемых на основе соответствия между математическими структурами и предметно-чувственной деятельностью, с учетом концепции «предметных понятий» (В.Н. Романов), позволяет провести конкретную реконструкцию возникновения финансовых отношений в период Высокого Средневековья (XIII в.).

Ключевые слова: математическая онтология, предметные понятия, финансы..

Математические модели и средства воспроизводятся в разных сферах человеческой деятельности, вплоть до экономики и финансов. Анализируя это обстоятельство, примем ряд констатаций, определений и положений.

Будем рассматривать математические структуры как принципиально и изначально укорененные в предметно-чувственной деятельности (практиках) индивидов и коллективов. И непосредственно для человека они имеют смысл лишь как компоненты предметно-чувственной деятельности.

Можно полагать, что фундаментальные математические объекты (величина, число, функция и т.п.) имеют предметно-конструктивный характер и конституируются в деятельности. Математические подструктуры деятельности выделяются (абстрагируются и идеализируются), воспроизводятся, фиксируются и объективируются. При этом, в связи с развитием математических

структур, могут возникать новые превращенные формы деятельности. Иначе говоря, связи базовых конструкций математики с внешней действительностью, опосредованные человеческой деятельностью, предполагаются имманентными как в генезисе математики, так и генезисе возникающих в ходе истории новых сфер и их профессионализации, что отчасти снимает известную проблему «непостижимой эффективности математики» [1, 2].

Будем рассматривать «онтологию» неклассически — как «систему предположений о типах существования и несуществования в рамках данной модели» [5, с. 66], развитую в отношении математической и экономической онтологий в [6]. Математику будем рассматривать как реализацию «абстрактных структур» (Н. Бурбаки).

«Реальность» объекта, в связи с идеями Х. Ортеги-и-Гассета, трактуется как неотменимость и относительная самостоятельность его существования в том или ином мире (будь то природном или идеальном). Будем понимать математическую практику — как многообразие форм включающей математические объекты и операции с ними деятельности субъектов, существующих в ходе как воспроизводства и использования символических систем, так и обучения использованию этих систем. Математическая реальность — это воспроизводство многообразия актуальных реализаций абстрактных и идеализированных конструкций (структур) математической практики. Математические объекты рассматриваются как объективированные формы деятельности субъектов, созданные, в том числе, и прошлыми поколениями математиков. Математическая онтология выражена в языковых структурах как предпонятийная система «мест» в универсуме коллективного представления субъектов. Она создает условия понимания математической реальности, позволяя оформить осмысленное восприятие математических объектов и операций с ними.

Всякая конкретная предметная онтология выражается в соответствующей системе категорий, которая предполагает все «места», в которые могут или не могут «попадать» объекты в представлениях (описаниях) данной предметной области. что предопределяет выделение типов таких объектов как существующих или несуществующих. Т.о., в онтологии присутствуют структуры, имеющие как объективное, так и субъективное происхождение. При этом категории суть не «наиболее общие понятия», а частично интериоризируемые объективированные формы деятельности, формирующие конкретные предметные области. Категории — это особый объективированный синтез предметных структур. Они, во-первых, фиксируют компоненты данностей, обусловленные объективированными коллективными практиками («внешняя сторона»). Во-2-х, это объективированные предпонятийные структуры «мест» в универсуме представления, предопределяющие строение смысловых компонентов знания («внутренняя сторона») [6]. И «пустые» места в универсуме математических представлений имеют тенденцию к заполнению их новыми объектами в ходе объективации структур новой деятельности, включающей их в старую систему и тем самым изменяющей последнюю. Заполнение «места» в ходе введения нового типа математического объекта изменяет онтологию реальной математической системы, пополняет ее. И вначале индивиды не вполне осмысливают это пополнение: требуется переосмысление математической реальности в связи с изменениями практического воспроизводства ранее фиксированных референций, значений и смыслов математических объектов.

Пополнение онтологии не является произвольным. В реальность математики, как новые, пополняющие ее объекты, вводятся лишь те конструкции, которые: 1) удовлетворяют базисным законам конструирования; 2) соответствуют предметной определенности тех сфер деятельности, развитие которых сформировало потребности, вызвавшие, в свою очередь, развитие математических структур.

Примем (с модификациями) концепцию образования первичных предметных определенностей содержания понятий («предметных понятий») В.Н. Романова [7]. Его схему возникновения первичных предметных смыслов надо дополнить различениями внешних объектов и предметных структур форм деятельности, а также более сложным учетом подручных человеку объектов (которые не являются непосредственно вещественными знаками, как считал В.Н. Романов, а представляют собой объективированные структуры практик).

Ключевой тезис доклада заключается в следующем: воспроизводство сферы финансов как особой сферы расширения долговых отношений в денежной форме, началом генезиса которой принято считать появление вексельного оборота и первых форм бухучета («двойной записи») (XIII в.) [3], с необходимостью предполагают объективированные формы деятельности опре-

деленного типа субъектов, связанные с переходом от одной практически подручной знаковой системы представления чисел (натуральные числа в римской непозиционной системе) к другой такой системе представления чисел (рациональные числа в арабской). И ключевым стало введение в оборот торговых сделок отрицательных чисел и нуля. Позитивным смыслом этих новых математических объектов стало представление финансовых понятий долга и баланса) [4]. Рассмотрим это подробнее.

Долг — в отличие от конкретных товаров или денежных средств — есть “в наличии” тогда, когда он представлен: требуется некая форма представления того, чего нет (появляется запись в виде отрицательного числа), что требует не типичных видов референции знака на объект, а расширенного использования семиотических структур символического типа: в них знак означает не единичный объект, а правило присвоения значений. Это фиксируется в воспроизводстве специальных практик (появление «двойной записи» арабскими цифрами в бухгалтерии), которые обнаруживают инвариантность представленных в ней объектов (долгов) в общем потоке совершения торговых сделок, что ранее не существовало. Инвариантность представления долга обеспечивается воспроизводством торговых практик (рынка) в условиях внешних гарантий осуществления и воспроизводства этих практик [8]. Это, в свою очередь, возникает с началом бурного развития городской экономики в Западной Европе после 1180-х годов, когда интересы покупателя к приобретению партии товара стали зачастую не обеспечиваться наличными денежными средствами (монетами) [3]. Денежные барьеры (отсутствие должного количества монет) были сняты с появлением вексельного (квазиденежного) оборота между торговыми домами, что уже на начальном этапе породило новую структуру доверительных отношений. Доверительные отношения (изначально обеспеченные, в частности, родственными связями) дают возможность выполнять отложенные во времени многосторонние обязательства по сделкам. В новых условиях возникает принципиально новая для того времени реальность (в т.ч. и онтология) и, соответственно, знание о возможностях воспроизводства ресурсов торговых партнёров, гарантирующая справедливость будущего закрытия сделок (а значит и их воспроизводства), что стало необходимым условием действий субъектов с неявными, непосредственно не наличными объектами, возникают актуальные способности субъектов создавать представления в математической форме (в частности, записей долгов и долговых отношений в виде отрицательных чисел).

Следствия:

- возникают новые уровни расчетов стоимости товарного производства, над которыми надстраиваются долговые обязательства с разными масштабами перерасчетов финансовых инструментов, в частности, оценка и расчет процентов на долг (что требует позиционной системы счисления), а, в последствии и правил расчетов реструктуризации основного тела долга;

- возникающие финансовые отношения (инструменты) позволяют повысить надежность закрытия сделки через типовой временной интервал, т.е. они структурируют будущее;

- постоянное увеличение сферы долговых обязательств выступает как фиксация перераспределения форм стоимости под предполагаемые закрытия в будущем, что часто описывается как рост возможных рисков срыва сделок, но в действительности, скорее всего, означает предположение устойчивости удлиняемых циклов воспроизводства стоимости, т.е. предположение того, что в будущем будет осуществлено полагание актуального производства в типологически схожих условиях.

И можно полагать, что значимость «предметных понятий» В.Н. Романова выходит за пределы его антропоцентричного подхода к значению языковых конструкций, и в перспективе позволит продвинуться в объяснении возникновения «нуля» именно в индийской математике в связи с особенностями ее симпрактической культуры [7].

Литература

1. *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Этюды о симметрии. М., 1971.
2. Математика и опыт / под ред. А.Г. Барабашева. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 624 с.
3. *Ле Гофф Ж.* Средневековье и деньги: очерк исторической антропологии / Пер. с франц. – СПб.: ЕВРАЗИЯ, 2010.
4. *Рыбников К.А.* История математики. Изд. 2. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 456 с.
5. *Чусов А. В.* Об изменении онтологии понимания пространства в XIX веке // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. 2010. № 4. С. 64-74.

6. Кошовец О.Б., Фролов И.Э., Чусов А.В. Онтологический анализ отношения теории и реальности в методологии экономической науки // *Философия и общество*. 2015. № 1-2 (76). С. 156-176.

7. Романов В.Н. Что значит позднневедийское UPA - ĀS: К проблеме значения слова. — М: МАКС Пресс, 2008. С. 88.

8. Фролов И.Э. Историческая реконструкция возникновения денег и рынка и их теоретико-систематическое описание как экономических объективаций // *Экономика в переломные эпохи. История мировой экономики*, вып. 6. Сборник статей. М.: ИЭ РАН. 2017. С. 75-12.

СООТНОШЕНИЕ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ: НЕКОТОРЫЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ

В.А. Шапошников

shaposhnikov@philos.msu.ru

УДК 168.51

Изучается вопрос о том, как соотношение математики и физики понималось от античности и до нашего времени. Выделяются две «сквозные» конкурирующие концепции — «пифагорейско-платоническая» и «аристотелианская» — полемика между сторонниками которых, с попеременным доминированием одного из подходов, составляет «ось» споров о соотношении названных областей науки.

Ключевые слова: классификация наук, смешанная математика, прикладная математика..

Впервые различие «физики» и «математики» в рамках единой классификации наук было введено Аристотелем (4 в. до н.э.) и около двух тысяч лет именно аристотелевская концепция оставалась основным ориентиром в обсуждении проблемы их соотношения. Аристотель, как известно, выделил три теоретические науки, расположив их в иерархическом порядке подчиненном уровню абстрактности: первая философия (она же — метафизика и/или теология); математика; физика (понимаемая широко, как естествознание в целом).

Два основных вопроса, которые хотелось бы обсудить в этой связи следующие:

1) нужно ли понимать отношение между аристотелевскими математикой и физикой как отношение жесткой субординации (например, математика — первична, физика — вторична и полностью зависима от нее) или, скорее, как отношение координации, предполагающей более равноправный взаимообмен и взаимозависимость; 2) предполагает ли аристотелевская классификация наличие четкой демаркационной линии, отделяющей математику от физики или между ними существует некая переходная область; в частности, есть ли принципиальная разница между математическими и физическими объектами и, если да, то в чем она состоит.

Состав математики уточнялся Аристотелем, в свой черед, следующим образом: арифметика; геометрия; оптика, музыка (гармоника) и астрономия. Три последние дисциплины — которые у самого Аристотеля никакого специального названия не имели, но были охарактеризованы, как «наиболее физические из математических» — имеют для нашего обсуждения решающее значение. В дальнейшем они получили название «промежуточных», а затем — «смешанных», список же их существенно расширился.

Аристотелевская триада теоретических наук воспроизводила иерархию Платона: от чувственно воспринимаемого мира через посредство математики к миру умопостигаемых идей. Однако Аристотель привнес в свои рассуждения о математике и ряд настроений, если и не полностью противоположных платоновским, то чуждых его учителю. Высказывания Аристотеля о математике не так-то легко согласовать между собой, будучи наделены особым авторитетом они служили источником различных интерпретаций соотношения математики и физики.

Нет единства интерпретаторов даже в вопросе о порядке расположения трех теоретических наук Аристотеля: следует ли сохранить платонический порядок, разместив математику между первой философией и физикой (именно так было сделано выше), или математика должна занимать лишь третье место, уступив среднее место физике, как «второй философии»?

В среде античных ученых аристотелевская классификация могла получать отчетливо эмпирически и практически ориентированную интерпретацию, как это видно на примере Гемина (вероятно 1 в. до н.э.), чья версия классификации наук, в особенности математических дисциплин, сохранилась благодаря ряду позднеантичных авторов. Гемин, во-первых, четко различает ту часть математики, которая занимается умопостигаемым (можно назвать ее чистой математикой) и ту, которая занимается чувственно воспринимаемым (сюда относятся «промежуточные» или «смешанные» дисциплины Аристотеля). Во-вторых, он включает в состав математики много новых, по сравнению с Аристотелем, дисциплин: логику, геодезию, механику и др. [1]

Споры о том, как правильно интерпретировать место математики и физики в системе наук, равно как и их соотношение друг с другом, приобрели ряд важных уточнений в высоком европейском средневековье. Особый интерес в этом отношении представляют рассуждения Альберта Великого и Фомы Аквинского (13 в. н.э.). Важнейшей отправной точкой для обсуждения аристотелевской системы теоретических наук для латинского средневековья служил трактат Боэция (начало 6 в. н.э.) «О Троице», в котором они разделены на естественные (*naturales*), математические и божественные (именно в таком порядке). Вопрос о том, какая дисциплина стоит выше в иерархии наук, математика или физика, был так важен, поскольку из него вытекало то или иное представление о степени зависимости физики от математики.

Альберт Великий предостерегал от «ошибки Платона» (*error Platonis*) — состоящей в идее строгой иерархичности, согласно которой природные объекты имеют основание в математических объектах, а математические, в свою очередь, в божественных — поскольку тезис, согласно которому именно математические объекты служат принципами объектов природных, полностью, по его убеждению, ложен. Фактически Альберт сохраняет лишь два иерархических уровня: метафизика (теология); физика и математика.

Математика и физика оказываются у него на одном и том же уровне, отношения между ними это, скорее, отношения взаимной координации, чем строгой субординации. И та и другая имеют дело с материей и движением, однако, в случае математики, это особые материя и движения, имеющиеся в мышлении и воображении. С одной стороны, математика не способна полностью определять собой принципы физики. Например, световой луч преломляется на границе сред или отражается от зеркальной поверхности. Если предположить, что подлинная природа светового луча сводится к природе геометрической прямой, то такое его поведение будет необъяснимо. С другой стороны, математика не может рассматриваться и как что-то целиком вторичное по отношению к физике. На это указывает, например, геометрическая точность, которой мы не находим в природных объектах, но лишь в мире теоретического воображения. Совершенные формы, которые изучает геометр практически не встречаются в природе, а реальные формы животных и растений не удается описать средствами геометрического искусства. Сходный конфликт имеется между конечностью аристотелевского физического космоса с его абсолютной системой мест и бесконечностью, однородностью и изотропностью воображаемого космоса геометров. В целом, Альберт Великий подчеркивал ограниченность математического подхода к пониманию природного мира [2].

Фома Аквинский, на первый взгляд, трактует соотношение математики и физики ближе к букве Аристотеля, однако он вводит термин «промежуточные науки» (*scientiae mediae*), который указывает на промежуточное положение между математикой и физикой (естествознанием) аристотелевской группы «оптика, музыка и астрономия». Эти науки, объясняет он, принципы математики «прилагают к природным вещам» (*ad res naturales applicant*). Есть науки чисто математические, есть — чисто физические, а есть «промежуточные» между ними, которые «доказывают свои заключения о вещах физических (*res naturales*), но при помощи математических средств (*per media mathematica*)». «Поэтому — продолжает Аквинат — ничто не препятствует тому, чтобы они — настолько, насколько совпадают с естествознанием — рассматривали чувственно воспринимаемую материю, а настолько, насколько совпадают с математикой, были от нее отвлечены (*abstractae sunt*)» [3, с. 250-251]. Позднее термин Фомы Аквинского «промежуточные» (*mediae*) был вытеснен другим — «смешанные» (*mixtae*), подразумевавшим «смешение»

математики и физики в рамках соответствующих дисциплин. Именно термин «смешанная математика» станет стандартным для 17 и 18 вв.

Если несколько огрубить ситуацию, мы в итоге получаем две конкурирующие концепции: одна из них (условно «пифагорейско-платоническая») полагает, что математика безусловно первична по отношению к физике (в ее широком понимании) и физика становится подлинной наукой ровно настолько, насколько ее удастся свести к применению математики. Вторая (условно «аристотелианская») — не изолирует физику полностью от математики, но и не отождествляет ее с последней, а выстраивает их отношения как более симметричные, взаимные, кроме того, выделяя между ними некоторую общую для них область, в которой их отношения проявляют себя наиболее явным образом. В терминах противостояния этих двух концепций можно попробовать описать и дальнейшую историю отношений между физикой и математикой вплоть до настоящего времени.

При переходе к Новому времени мы встречаем вариант полемики этих двух концепций, сравнивая отношение к математике и ее роли в физике у Ф. Бэкона и Р. Декарта. Первый из них, подобно Альберту Великому, предостерегает против самоуверенности математиков и недооценки «тонкости» (*subtilitas*) природы. В своей же классификации наук, он отводит математике роль «приложения» (*appendix*) к физике (как и к метафизике). В «древе наук» Декарта, при поверхностном взгляде, математика вообще отсутствует, однако это так лишь потому, что математика превращается у него в универсальный метод познания, в соответствии с которым строятся и метафизика, и физика, и частные науки (от медицины и механики до этики).

Если самая известная классификация наук 18 в., классификация великой французской энциклопедии Даламбера и Дидро, строится (в целом) на тех же принципах, что и классификация Ф. Бэкона, то 19 в. и первая половина 20 в. — время явного преобладания ее конкурента. Это проявилось, в частности, в вытеснении терминов «промежуточные науки» и «смешанная математика» термином «прикладная математика». В последние же полвека наблюдается — в согласии с «эффектом маятника» — возвращение популярности «аристотелианского» взгляда на соотношение физики и математики. Правда, сам возможный список претендентов на роль новых «промежуточных наук» оказывается, конечно же, совсем непохожим на тот, который предложил в свое время Аристотель.

Литература

1. Жмудь Л.Я. Две античных классификации наук: Аристотель и Гемин // СХОЛН. 2021. Т. 15. №1. С. 265-288.
2. Molland A.G. Mathematics in the Thought of Albertus Magnus // Albertus Magnus and the Sciences: Commemorative Essays 1980 / Ed. by J.A. Weisheipl. Toronto: Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1980. P. 463-478.
3. Фома Аквинский. Комментарий к трактату Боэция «О Троице»: Билингва латинско-русский / Пер. А.В. Апполонова. М.: URSS, 2014. 344 с.

ПРОБЛЕМА ИНФОРМАЦИОННОГО ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

В.А. Яковлев

goroda460@yandex.ru

УДК 111.81

С метафизической точки зрения информации рассматривается в качестве новой фундаментальной структуры бытия. Математика наиболее полно выражает её суть, поскольку является связующим звеном между физическим миром и миром трансцендентальным. Логико-исторический анализ показывает, что платонистский подход к математике в настоящее время дополняется информационным подходом к метафизике бытия.

Ключевые слова: информация, математика, трансцендентальность..

Ближайшие эпистимические структуры по отношению к метафизическим принципам — математические и логические структуры. На это первым указал Платон. Согласно его учению, глобальная креативная функция прежде всего реализуется (а может быть это даже своеобразная материализация) в правильных геометрических фигурах и числовых пропорциях. Вслед за пифагорейцами Платон математизировал принцип архэ.

По мере развития математики, а также математической физики исследователи нередко становились на сторону Платона. «Платонистами» были Галилей («Книга природы написана на языке математики»), Кронекер («Натуральный ряд чисел дан Богом»), Кантор («В множествах выражается актуальная бесконечность»), Герц («Уравнения Максвелла продиктованы Богом»). Из математиков 20 в. назовём Фреге, Гёделя, Поля Эрдоса («Существует божественная книга, где записаны все лучшие доказательства»).

Особенно выделим крупного ученого современности, известного своими трудами в различных областях математики, общей теории относительности и квантовой теории, — Роджера Пенроуза, который утверждает, что «Богом данные» математические идеи существуют как бы вне времени и независимо от людей, что Платоновский мир идей — это та реальность, куда проникает ум человека в творческом вдохновении. Согласно Пенроузу, математики в самых великих своих открытиях наталкиваются на «творения Бога», на истины уже где-то существующие «там вовне» и не зависящие от них самих.

Наиболее убедительными примерами, по мнению Пенроуза, стали: 1. Открытые в 16 в. Кардано комплексные числа, которые являются неотъемлемой частью структуры квантовой механики, а следовательно, лежат в основе поведения самого мира, в котором мы живем. 2. Открытие в конце 20 в. Бенуа Мандельбротом (одним из главных разработчиков теории фракталов) сложного множества, которое также обладает онтологическим статусом.

В отечественной литературе платонистская позиция наиболее отчетливо выражена в работах Ю.И. Кулакова, который считает, что и в математике, и в физике можно выделить некие сакральные структуры, причем, сакральная физика рассматривается как часть сакральной математики, так называемой физической структуры.

Итак, в приведенных выше точках зрения априорность (трансцендентальность) понимается в абсолютном плане — как некая беспредпосылочная, вневременная, идеальная реальность, раскрытие структуры которой и составляет цель метафизики математики.

Важно подчеркнуть, что с метафизической точки зрения, речь идёт о новой фундаментальной структуре бытия — информации, поскольку математика лишь наиболее полно выражает её суть.

Секция 21

Моделирование и прогнозирование глобальных процессов

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ «БОЛЬШИХ ДАННЫХ» ДЛЯ АНАЛИЗА МИГРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

И.А. Алешковский, А.А. Гребенюк, А.С. Максимова
aleshkovski@yandex.ru, lubijizn@yandex.ru, gaa-mma@mail.ru

УДК 312

В докладе рассмотрены возможности и особенности применения методов обработки «больших данных» при исследовании миграции населения. Особое внимание уделено основным проблемам получения первичной информации из цифровых источников и ограничениям их использования.

Ключевые слова: миграция населения, большие данные, источники данных.

«Большие данные» («Big Data») представляют собой объемные наборы как структурированных, полуструктурированных, так и неструктурированных данных, при этом их анализ требует много ресурсов [1]. Технологии обработки «больших данных» работают с данными, создаваемыми как пользователями мобильных устройств, интернет-платформ, так и цифровыми датчиками и измерителями, например, спутниковыми устройствами. Использование технологий анализа информации в формате «больших данных» позволяет добиться совершенствования арсенала исследовательских методов и расширить круг исследовательских задач.

По мнению экспертов, «большие данные» пока не могут быть альтернативой традиционным источникам статистической информации о миграции населения в России [2, 3]. Данная позиция обоснована, во-первых, разрозненностью существующих баз данных, в которых собираются цифровые следы мигрантов. Во-вторых, имеется незавершенность цифровой трансформации системы управления миграционными потоками в России. Вместе с тем, источники информации в формате «больших данных» уже сегодня позволяют расширить возможности анализа отдельных видов миграции (Табл. 1).

Рассмотрим особенности трех источников «больших данных» [4, 5, 2]:

Алешковский Иван Андреевич, к.э.н., доцент кафедры демографии Высшей школы современных социальных наук, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Гребенюк Александр Александрович, д.э.н., профессор кафедры социологии знания Высшей школы современных социальных наук, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Максимова Анастасия Сергеевна, к.э.н., доцент кафедры социологии знания Высшей школы современных социальных наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, (Москва, Россия)

| | Источники | Способ идентификации миграционного перемещения | Вид миграции |
|---|---|---|---|
| 1 | Данные активности аккаунта в социальных медиа (социальные сети, блоги и т.д.) | Сообщения о переезде, о работе в регионе, отличающемся от места постоянного проживания, информация о месте рождения, месте окончания учебного заведения, месте проживания | Постоянная, временная (в том числе образовательная, трудовая) |
| 2 | Данные сотовых операторов о передвижении устройств | Регистрация подключений к вышкам мобильных операторов | Маятниковая, временная |
| 3 | Данные маршрутизации мобильных устройств | Данные о запросах маршрутов | Маятниковая |
| 4 | Данные о банковских операциях | Геолокация совершения банковских операций | Маятниковая, постоянная, трудовая |
| 5 | Данные о научной публикационной активности | Аффилиация публикаций автора в научных изданиях | Постоянная миграция (утечка умов), временная (трудова, циркуляция умов) |

Таблица 1: Источники информации и анализируемые виды миграции

1. *Данные запросов маршрутизации мобильных устройств* — данные, генерируемые самими пользователями. Аналитические возможности этого источника информации позволяют выявлять маятниковую миграцию за счет сравнения различий запросов одного аккаунта в динамике, в частности, по дням недели за длительный интервал времени. Если несколько дней в неделю запросы локализованы по точке отправления в одном населенном пункте, а оставшиеся — в другом, можно предполагать, что два населенных пункта являются местом постоянного проживания и местом ведения трудовой деятельности данного индивида. Следует заметить, что данные маршрутизации помогают сепарировать маятниковую миграцию и разовые поездки, что немаловажно при изучении мобильности. Вместе с тем проанализировать потоки долгосрочных переселенцев с помощью данного инструмента сложно.

2. *Данные сотовых операторов*. Данные о перемещениях можно также получить с помощью регистрации подключений пользователей к вышкам мобильных операторов. Среди недостатков таких данных следует отметить то, что регистрация мобильных устройств позволяет получить информацию о местоположении только тогда, когда человек пользуется сотовым телефоном. При этом пользователи мобильных устройств, как правило, совершают большую часть своих звонков за короткие интервалы времени, за которыми следуют длительные периоды без звонков. В течение них отсутствует какая-либо информация о местоположении пользователя.

3. *Данные социальных сетей*. Отличие электронных социальных сетей как источника информации о миграции от первых двух рассмотренных источников состоит в том, что эти данные обладают гораздо более широким спектром параметров. Если сведения о мобильных подключениях и звонках с мобильных телефонов имеют набор характеристик, которые известны в полном объеме (дата, время, точка подключения, продолжительность подключения, точка отправления, точка назначения, протяженность маршрута и др.), то набор характеристик страниц социальных сетей гораздо более вариативен. Одни страницы позволяют получить информацию о полном на-

боре социально-демографических характеристик индивида, в том числе о семейном положении, возрасте, количестве детей, месте рождения, месте работы и др., другие не позволяют получить информацию ни по одному из вышеперечисленных пунктов. Но даже в случае наличия нужной информации на личной странице пользователя следует поставить вопрос о ее достоверности, поскольку, как уже было упомянуто, зачастую цифровая идентификация личности весьма далека от идентификации в реальности. Вместе с тем, социальные сети дают возможность специалистам выявлять новые социальные практики, в частности, миграционные. Использование социальных сетей позволяет решить проблему отсутствия переменных, характеризующих структуру миграционных потоков и континентов. В настоящее время социальные сети дают нам возможность агрегировать данные о миграции из двух источников. Во-первых, широко используется информация аккаунта, которую человек самостоятельно указывает при регистрации и заполнении своей страницы в социальной сети. Как уже говорилось, у этих сведений есть ограничения для использования, связанные с верификацией данных. Вместе с тем на больших выборках мы можем оперативно отслеживать определенные тенденции существующих или зарождение новых миграционных процессов.

Во-вторых, большое количество данных генерируется социальной активностью аккаунта в сети. Для анализа социальных процессов это наиболее интересная информация, так как позволяет получать субъективное отношение индивида посредством не классического социологического опроса, а, по сути, включенного наблюдения. Конечно, у этого метода также имеется достаточно много ограничений, которые находятся в плоскости социальной психологии и сферы контроля содержания контента, и которые социальному знанию только предстоит преодолеть.

По итогам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Разнообразие источников наполнения «больших данных» обуславливает перспективность их использования для анализа различных миграционных процессов. При этом важно отметить, что качество получаемой информации будет достижимо не за счет дальнейшего улучшения определенного метода, а за счет синхронизации всех источников в целях формирования так называемого «озера данных» о миграции. Например, значительным потенциалом обладает синхронизация данных сотовых операторов, финансовых организаций и транспортных компаний для учета иностранных граждан или внутренних мигрантов.

2. Данные маршрутизаторов, в первую очередь, интересны для анализа миграционных процессов и передвижения населения в крупных городских агломерациях. Уже сегодня эти данные позволяют регулировать потоки людей, снижать нагрузку на социальную инфраструктуру, бороться с пробками на дорогах и др. Также большое значение имеет использование этого инструмента для развития туристической отрасли, поскольку позволяет выявить места притяжения мигрантов, которые не учитывались ранее.

3. Изучение электронных социальных сетей, в отличие от классических статистических методов, позволяет получить богатый социальный контекст миграционного процесса, в особенности, если анализ проводится на микроуровне и затрагивает малые социальные группы или конкретных индивидов. Благодаря определению коннотации сообщения, анализу «лайков» и «репостов», исследователь имеет возможность оценить, насколько мигрант доволен своим переселением, насколько успешна адаптация той или иной социальной группы, какова вероятная миграционная стратегия индивида: закрепление, миграция в третью страну или возвращение в страну (регион) выезда.

Таким образом, возможность обогащения первичной информации текущего учета миграции, переписей населения данными цифровых следов может значительно улучшить качество результатов исследований. Вместе с тем, как показал проведенный нами анализ осуществленных эмпирических исследований, на текущий момент «больших данных» все еще недостаточно для всеобъемлющего изучения миграционных процессов.

Литература

1. Губа К. Большие данные в социологии: новые данные, новая социология? // Russian Sociological Review. 2018. Vol. 17. No 1, pp. 213–236. [10.17323/1728-192X-2018-1-213-236](https://doi.org/10.17323/1728-192X-2018-1-213-236).
2. Мусин У.Р., Нусратуллин И.В. Применение «больших данных» в оценке миграционных процессов. // Вестник Московского университета. 2017. № 7-8. С. 192.
3. Чудиновских О.С. Большие данные и статистика миграции. // Вопросы статистики. 2018. №25(2). С. 48.

4. Big data, migration and human mobility. Электронный ресурс: <https://www.migrationdataportal.org/themes/big-data-migration-and-human-mobility>. Дата обращения: 15.11.2023.

5. *Righi A.* Assessing migration through social media: a review. // *Mathematical Population Studies*. 2019. V. 26, no. 2. Pp. 80-91. [10.1080/08898480.2019.1565271](https://doi.org/10.1080/08898480.2019.1565271).

СОЦИАЛЬНО-ПОЛИТИЧЕСКАЯ ДЕСТАБИЛИЗАЦИЯ ГОСУДАРСТВ НА ПОСТСОВЕТСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ: МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА И ПРОГНОЗА

С.Э. Билюга

bilyuga@fgp.msu.ru

УДК 323.272

С начала XXI века новый регион постсоветского пространства стал самым дестабилизационным регионом по двум причинам: во-первых, появилось достаточно большое количество стран, чьим национальным благосостоянием стали те или иные значимые ресурсы; во-вторых, новообразовавшиеся в начале 90-ых годов демократические страны перестали быть оплотом безопасности для Российской Федерации. На этом фоне западные или прозападные акторы шаг за шагом используют технологии «цветной революции» по быстрой смене неугодного политического руководства стран. Несмотря на достаточно большое количество научных исследований по данной исследовательской тематике за последние 13 лет существует актуальная потребность в количественных подходах, в частности, к прогнозированию дестабилизационных событий в различных странах мира. В данной работе будут описаны текущие проблемы количественного измерения социально-политической дестабилизации.

Ключевые слова: социально-политическая дестабилизация, постсоветское пространство, цветные революции, прогноз.

За последние 13 лет политические науки довольно сильно продвинулись в исследовании по сути одного из самых новых направлений в политических процессах, а именно «цветных революций». Так, например, теоретические аспекты проблем изучения социально-политической дестабилизации зарубежных ученых [1-10] были подхвачены российскими коллегами [11-23].

Однако из анализа огромного пласта научной литературы относительно количественных методов анализа социально-политической дестабилизации можно сделать вывод, что до сих пор отсутствует теоретико-методологическая база для анализа, моделирования и прогнозирования феномена «цветной революции». По большей части исследуются либо какие-то отдельные факторы, имеющие какую-то положительную/отрицательную/нелинейную связь с различными видами социально-политической дестабилизации [24-27], либо идет машинный перебор факторов по какому-то вшитому внутри программу алгоритму анализа [28-29].

В этой связи хорошей попыткой можно считать методологию, разрабатываемую С.Ю. Малковым и С.Э. Билугой, в основе которой лежит динамический процесс протекания революций [30-31] с последующим написанием динамической модели в виде трехуровневых индексов и поиском с последующим анализом зависимых переменных.

Отсутствие модельного или количественного системного подхода к анализу процесса социально-политической дестабилизации также идет от невозможности операционализировать различные особенности и условия в одной универсальной модели, которая позволяла бы применить ее ко всем страновым случаям. Так, например, в каждом регионе мира есть свои особенности протекания тех или иных типов социально-политической дестабилизации, которые связаны в большинстве своем как с другими культурными ценностями, так и с различными этапами развития общества и государства. Кроме того, понимание данных особенностей и условий не влечет за собой автоматическую операционализацию – на следующем этапе данная проблема перейдет в

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФ № 23-78-01252

Билюга Станислав Эдуардович, к.полит.н., доцент кафедры ЮНЕСКО по изучению глобальных проблем факультета глобальных процессов МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

разряд проблемы поиска соответствующих показателей для каждой страны и каждого региона. И с учетом различий между регионами эти показатели должны быть близко или равнозначны друг с другом.

С точки зрения построения модельных уравнений есть перспектива, как решить, как минимум, проблему учета нового фактора и соответствующей степени свободы, но это вторично. Первичным же в данной ситуации будет поиск данных для каждого региона, которые бы: а) полностью охватывал все страны внутри конкретного региона; б) имел каждую точку в каждом году.

Несмотря на довольно продолжительное время исследования данной тематики, к сожалению, поиск переменных, которые влияют на процесс социально-политической дестабилизации, остается открытым. Существует огромное количество различных индексов (Political Instability Task Force; Fragile States Index; Country Indicators for Foreign Policy: Failed and Fragile States и др.), которые пытаются учесть те или иные факторы, значимые для дестабилизации. Однако большинство из них либо носит акцентированный характер (например, в зависимости от целей и задач финансирующей организации), либо останавливаются на каких-то совершенно общих принципах, что не показывает общей картины всего процесса (например, прогнозное сопоставления этих индексов с реальными событиями из жизни показывает несоответствия в методологии их построения).

И наверное одной из самой важной и в то же самое время самой сложной проблемой в изучении теории дестабилизации это отсутствие научно-обоснованного прогностического потенциала событий на 1-2-5-10-25 лет. В первую очередь связано это с тем, что большинство ученых исследует не процесс, а какой-то зафиксированный конкретный промежуток времени (например, на 2023 год). При этом, нередко случается, что статистические данные могут желать лучшего. В итоге, этот фотографический срез не дает ничего общего с реальностью и расходится с конкретными историческими событиями [32]. В данном случае дело касается как эконометрических регрессий, так и построения собственных индексов. Что касается теоретических прогнозов, к сожалению, они носят весьма субъективный характер, несмотря на то, что мнения того или иного эксперта может основываться как на очень хорошем знании внутренней ситуации в той или иной стране, так и опыте эксперта в анализе других кейсов. Такой методологический подход весьма ограничен в своем использовании и не может претендовать на универсальность для любого случая с конкретными прогнозами на краткосрочную, среднесрочную или долгосрочную перспективу.

Таким образом, в методологическом аспекте количественного изучения данной исследовательской тематики за 13 лет исследований было выявлено и сведено достаточное количество содержательных проблем, решить которые удастся в рамках соответствующего научно-исследовательского гранта при поддержке РФФ.

Литература

1. *Beck, C.J.* The Structure of Comparison in the Study of Revolution / C.J. Beck // *Sociological Theory*. 2018. Т. 36. №. 2. P. 134-161.
2. *Goldstone, J.* *Revolutions. A Very Short Introduction* // J. Goldstone. Oxford: Oxford University Press, 2014.
3. *Goldstone, J., Bates, R., Epstein, D., Gurr, T., Lustik, M., Marshall, M., Ulfelder, J., Woodward, M.* A Global Model for Forecasting Political Instability / J. Goldstone, R. Bates, D. Epstein, T. Gurr, M. Lustik, M. Marshall, J. Ulfelder, M. Woodward // *American Journal of Political Science*. 2010. Vol. 54 (1). P.190-208.
4. *Revolution and Social Movements* / J.A. Goldstone, D.P. Ritter // *The Wiley Blackwell Companion to Social Movements*. 2018. P. 682-697.
5. *Calvert, P.* *Revolution and International politics* / P. Calvert. Bloomsbury Publishing, 2016.
6. *Quinn, R.* *States and Social Revolutions: A Comparative Analysis of France, Russia, and China* / R. Quinn. Macat Library, 2017.
7. *Mason, D.* *Revolution and Transition in East-Central Europe* / D. Mason. Routledge, 2018.
8. *Paige, J.* *Finding the Revolutionary in the Revolution: Social Science Concepts and the Future of Revolution* / J. Paige // *The Future of Revolutions: Rethinking Radical Change in the Age of Globalization*. London: Zed Books, 2003.
9. *Sanderson, S.K.* *Revolutions: A Worldwide Introduction to Political and Social Change* / S.K. Sanderson. Routledge, 2015.
10. *Tilly, C.* *Regimes and Repertoires* / C. Tilly. London; Chicago: University of Chicago Press, 2006.

11. Атанесян, А.В. «Бархатная революция» в Армении: потенциал, достижения и риски политико-протестной активности / А.В. Атанесян // Полис. Политические исследования. 2018. Т. 6. №. 6. С. 80-98.
12. Васильев, А.М., Петров, Н.И. Рецепты Арабской весны: русская версия / А.М. Васильев, Н.И. Петров. М.: Алгоритм, 2012.
13. Внешняя политика России в условиях глобальной неопределенности / Под ред. П.А. Цыганкова. М.: Русайнс, 2015.
14. Гапич, А.Э., Лушников, Д.А. Технологии цветных революций / А.Э. Гапич, Д.А. Лушников. М.: РИОР. 2010.
15. Гринин, Л.Е. Русская революция и ловушки модернизации / Л.Е. Гринин // Полис. Политические исследования. 2017. № 4. С. 138-155.
16. Коротаев, А.В., Мещерина, К.В., Куликова, Е.Д., Дельянов, В.Г. Арабская весна и её глобальное эхо: количественный анализ / А.В. Коротаев, К.В. Мещерина, Е.Д. Куликова, В.Г. Дельянов // Сравнительная политика. 2017. Т. 8, № 4. С. 113-126.
17. Максимов, И.В. Цветная революция–социальный процесс или сетевая технология / И.В. Максимов. М.: Книга по требованию, 2010.
18. Манойло, А.В. Цветные революции и технологии демонтажа политических режимов / А.В. Манойло // Мировая политика. 2015. №. 1. С. 1-19.
19. Пономарева, Е.Г., Рябинин, Е.В. «Цветные революции» в контексте стратегии управляемого хаоса / Е.Г. Пономарева, Е.В. Рябинин // Обозреватель-Observer. 2015. №. 12. С. 38-51.
20. Сайфуллин, И.С. О политической технологии «управляемого хаоса» и возрастании рискогенной политической активности в современной России / И.С. Сайфуллин // Изв. Саратов. ун-та Нов. сер. Сер. Социология. Политология. 2015. Т. 15. Вып. 1. С. 108-110.
21. Сундиев, И.Ю., Смирнов, А.А. Теория и технологии социальной деструкции (на примере «цветных революций») / И.Ю. Сундиева, А.А. Смирнова. М.: Русский биографический институт, Институт экономических стратегий, 2016.
22. Цирель, С.В. Революции, волны революций и Арабская весна / С.В. Цирель / под ред. А.В. Коротаева, Ю.В. Зинькиной, А.С. Ходунова // Системный мониторинг глобальных и региональных рисков: Арабская весна 2011. М.: ЛКИ/URSS, 2012. С. 128-139.
23. Turchin, P. Modeling Social Pressures Toward Political Instability / P. Turchin // Cliodynamics: The Journal of Theoretical and Mathematical History. 2013. № 4 (2). P. 241-280.
24. Билога, С.Э., Романов, Д.М., Халтурина, Д.А. Молодежная составляющая взрослого населения как фактор дестабилизации в новейшей истории / С.Э. Билога, Д.М. Романов, Д.А. Халтурина // История и современность. 2019. Т. 2, № 32. С. 36-68.
25. Коротаев, А.В., Цирель, С.В., Билога, С.Э. Коррупция, ценности и попытки насильственных изменений государственной власти в странах с различным уровнем ВВП на душу населения: опыт количественного компаративного и корреляционного анализа / А.В. Коротаев, С.В. Цирель, С.Э. Билога // Сравнительная политика. 2019. Т. 10, № 1. С. 98-123.
26. Korotayev, A., Belalov, I., Goldstone, J., Bilyuga, S. Oil Prices, Socio-Political Destabilization Risks, and Future Energy Technologies / A. Korotayev, I. Belalov, J. Goldstone, S. Bilyuga // Technological Forecasting and Social Change. 2018. No. 128. P. 304-310.
27. Korotayev, A., Bilyuga, S., Shishkina, A. GDP per Capita and Protest Activity: A Quantitative Reanalysis / A. Korotayev, S. Bilyuga, A. Shishkina // Cross-Cultural Research. 2018. Vol. 52, no. 4. P. 406-440.
28. Билога, С.Э., Ковалев, В.И., Малков, С.Ю. Современные системы мониторинга и прогнозирования социально-политической дестабилизации / С.Э. Билога, В.И. Ковалев, С.Ю. Малков // Информационные войны. 2018. Т. 4, № 49. С. 33-44.
29. Медведев, И.А., Коротаев, А.В. Построение предсказательного индекса революций: опыт использования методов машинного обучения / И.А. Медведев, А.В. Коротаев // В кн.: Системный мониторинг глобальных и региональных рисков / Отв. ред.: Л.Е. Гринин, А.В. Коротаев, Д.А. Быканова. Т. 12: Революционные процессы в афразийской макроне нестабильности и их глобальный контекст. Издательство "Учитель 2021. Гл. 9. С. 242-273.
30. Билога, С.Э., Малков, С.Ю. Опыт построения индекса динамики социально-политической нестабильности / С.Э. Билога, С.Ю. Малков // Системный мониторинг глобальных и региональных рисков. Т. 11. Московская редакция издательства Учитель Москва, 2020. С. 458-472.
31. Билога, С.Э., Малков, С.Ю. Индекс динамики социально-политической нестабильности / С.Э. Билога, С.Ю. Малков // Информационные войны. 2021. № 4(60). С. 25-31
32. Коротаев, А.В., Медведев, И.А., Шульгин, С.Г., Смилько, Е.В., Билога, С.Э., Малков, С.Ю., Халтурина, Д.А., Дербилова, Е.В., Зинькина, Ю.В., Романов, Д.М. Системы глобального мониторинга рисков социально-политической дестабилизации: опыт систематического обзора / А.В. Коротаев, И.А.

Медведев, С.Г. Шульгин, Е.В. Слинко, С.Э. Билуа, С.Ю. Малков, Д.А. Халтурина, Е.В. Дербилова, Ю.В. Зинькина, Д.М. Романов // Системный мониторинг глобальных и региональных рисков // Социально-политическая и экономическая дестабилизация: анализ страновых и региональных ситуаций в мир-системном аспекте. 2018. С. 5-94.

МОДЕЛЬНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧЕЛОВЕКА И ПРИРОДЫ НА ПРИМЕРЕ СТРАН БРИКС

Е.Е. Гиричева, В.Н. Бочарников

evg.giricheva@yandex.ru, vbocharnikov@mail.ru

УДК 51.77

В работе предлагается модельный подход к описанию взаимодействия природы и человека (Nature-human participance) на основе статистического анализа основных социальных, экономических и демографических показателей страны.

Ключевые слова: регрессионная модель, система индикаторов, nature-human participance, БРИКС.

Взаимодействие природы и человека как части социо-экономико-экологической системы обычно описывается детерминированными моделями, основанными на физических и биологических законах и представляющих аналитическое описание закономерностей между компонентами социо-экологической системы. Примерами таких моделей, учитывающих демографические процессы и загрязнение окружающей среды, являются имитационные модели глобальной динамики Форрестера [1] и Медоуза [2].

В настоящее время актуальным является создание математических моделей, помогающих выработать стратегию поддержания устойчивости окружающей среды; одна из таких моделей Wonderland [3]. Другой тип, метамодель биосферы GUMBO [4] представляет глобальную имитационную модель, позволяющую оценить экосистемные товары и услуги и их вклад в благосостояние людей.

Сложность выполнения научных исследований в области взаимодействия природы и общества обусловлена необходимостью учета множества природных закономерностей, антропогенных факторов и показателей, определяющих качество жизни людей, для которых не существует точных аналитических описаний. Построение модели на основе регрессионного анализа различных показателей системы «общество-природа» позволяет установить связи между различными показателями в виде уравнения, оценить устойчивость и степень их взаимного влияния.

Для построения регрессионной модели разработана система индикаторов, оценивающих состояние компонент "Общество", и "Природа", а также их взаимное влияние. Для пяти стран, участниц БРИКС, на основе динамики сводных показателей за период с 2000 по 2022 гг. рассчитаны четыре индикатора, I_j , $j = 1, \dots, 4$, определяющих изменение каждого блока компонент "Общество и "Природа" в течение рассматриваемого периода. Связь полученных индикаторов с показателем, характеризующим взаимодействие общества и окружающей среды страны (y_t) в момент времени t , определяется на основе авторегрессионной модели с распределенным лагом:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j y_{t-j} + \sum_{j=0}^q \gamma_j^1 I_{t-j}^1 + \dots + \sum_{j=0}^q \gamma_j^4 I_{t-j}^4 + \epsilon_t, \quad (1)$$

где β_j, γ_j — коэффициенты, ϵ_t — случайные ошибки.

В качестве интегрального показателя, оценивающего взаимное участие человека и природы, авторами предложен социально-экологический индекс ННР (Nature-human participance), выражающий степень территориального взаимодействия общества и природы. Сопричастность рассматривается как актуальная доля природопользования и степени удовлетворения потребностей общества в пределах государства. Этот показатель построен на основе динамики следующих индикаторов: экологический след (EFP), емкость среды (BC) и индекс человеческого развития (HDI). Вычисление индекса ННР для года t и страны i осуществлялось по следующей формуле:

$$NHP_{ti} = \alpha_1 EFP_{ti} + \alpha_2 BC_{ti} + \alpha_3 HDI_{ti}. \quad (2)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — весовые коэффициенты, которые определяются на основе серого реляционного анализа.

Рис. 1 представляет динамику социально-экологического индекса для стран БРИКС. График демонстрирует восходящий тренд ННР для России, Бразилии и Южной Африки. Спад показателя для Индии и КНР начиная с 2015 г. вызван снижением емкости среды и ростом экологического следа этих стран при небольших изменениях индекса человеческого развития.

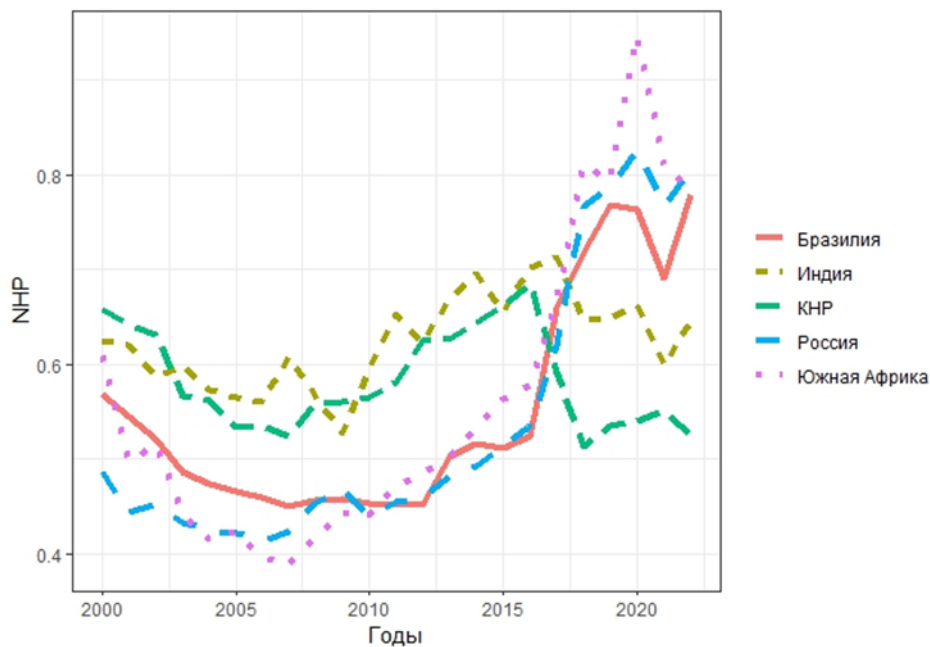


Рис. 1: Динамика социально-экологического индекса для стран БРИКС

Источник: составлено авторами на основе данных, находящихся в открытом доступе по адресам <https://data.world/footprint/nfa-2019-edition> и <https://hdr.undp.org/data-center/human-development-index#/indices/HDI>.

Литература

1. Форрестер Дж. Мировая динамика. — М.: Наука, 1978.
2. Медоуз Д. Пределы роста. 30 лет спустя. — М.: ИКЦ "Академкнига 2007.
3. Sanderson W. C. Simulation models of demographic, economic, and environmental interactions // Population—Development—Environment: Understanding their Interactions in Mauritius. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1994. — 33-71.
4. Boumans R. et al. Modeling the dynamics of the integrated earth system and the value of global ecosystem services using the GUMBO model // Ecological economics, 41:3 (2002), 529-560.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ РОССИЙСКОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ

Н.Н. Голуб, Н.В. Лактионова, О.М. Олефиренко, О.А. Шпырко

golubnn@my.msu.ru, k_laktionova07@mail.ru, helga_sev@mail.ru, shpyrkoaa@my.msu.ru

УДК 55.77

В статье представлена попытка формализации духовно-нравственных ценностей цивилизации на примере построения матрицы таких ценностей для российской цивилизации с использованием метода попарных сравнений альтернатив по каждому из критериев, а также попарное сравнение критериев с точки зрения важности для поставленной цели — метода Т.Л. Саати.

Ключевые слова: цивилизация, российская цивилизация, матрица духовно-нравственных ценностей, метод парных сравнений, столбец приоритетов.

В п. 4 части 1 Концепции внешней политики Российской Федерации, утвержденной Президентом РФ В.В. Путиным 31 марта 2023 года Российская Федерация определяется как «самобытное государство-цивилизация, обширная евразийская и евро-тихоокеанская держава, сплотившая русский народ и другие народы, составляющие культурно-цивилизационную общность Русского мира» [1]. Таким образом, в важнейшем доктринальном документе постулируется цивилизационный подход в представлении глобальной структуры мира.

В настоящее время в научном дискурсе встречаются такие понятия, как «русская цивилизация», «Восточнославянское-Православная цивилизация», «российская цивилизация» и другие определения. В данном исследовании мы будем оперировать понятием «российская цивилизация».

Несмотря на активное использование в российской науке с начала 80-х гг. XX в. термина «цивилизация», его понятие до настоящего времени не имеет однозначного определения в научной среде. В данном исследовании под термином «цивилизация» будем подразумевать «отдельную относительно автономную, как правило, полиэтническую социокультурную систему, имеющую свои пространственно-временные измерения, базовые духовно-культурные ценности и относительно устойчивые долговременные (инвариантные) структуры экономических, общественно-политических и культурных связей» — определение, данное авторами трёхтомной коллективной монографии «Цивилизационная структура современного мира», [2, С. 7].

В российском экспертном сообществе к 2015 году было выработано понимание о первостепенности аспектов, связанных с культурой, мировоззрением, не только в контексте обеспечения стабильности внутри государства, но и во внешнеполитической сфере. В качестве примера приведём вывод доктора социологических наук, профессора факультета мировой политики МГУ имени М.В. Ломоносова В.В. Кочеткова: «Последние три десятилетия стали временем масштабной трансформации микрополитической реальности. Если в XX веке определяющую роль в международных отношениях играла идеология, то в XXI веке все большее значение приобретают цивилизационные факторы, такие как идентичность, культура и религия», [3, С. 8]. На государственном уровне в последние годы актуализирована роль духовно-ценностного компонента в системе обеспечения национальной безопасности: в 2021 г. на государственном уровне была поставлена задача защиты традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в 2022 г. — обнародован Указ № 809 Президента РФ от 09.11.2022 «Об утверждении Основ государственной политики по сохранению и укреплению традиционных российских духовно-нравственных ценностей», [4].

Голуб Николай Николаевич, к.филос.н., доцент кафедры управления Филиала МГУ в г. Севастополе, (Севастополь, Россия)

Лактионова Наталья Владимировна, старший преподаватель кафедры вычислительной математики Филиала МГУ в г. Севастополе, (Севастополь, Россия)

Олефиренко Ольга Михайловна, к.полит.н., старший преподаватель кафедры истории и международных отношений Филиала МГУ в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

Шпырко Ольга Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, директор Филиала МГУ в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

Ввиду вышеизложенного, представляется актуальным формализовать подход к определению комплекса ценностей, лежащих в основе как отечественной цивилизации, так и других цивилизаций, в частности, путем формирования идентификации цивилизации с помощью матрицы духовно-нравственных ценностей.

В качестве объектов сравнения будем использовать ценности Российской государственности, сформулированные в п. 5 Указа №809 Президента РФ от 09.11.2022 [4].

Введем обозначения: А: Жизнь, В: Достоинство, С: Права и свободы человека, D: Патриотизм, Е: Гражданственность, F: Служение Отечеству и ответственность за его судьбу, G: Высокие нравственные идеалы, H: Крепкая семья, I: Созидательный труд, J: Приоритет духовного над материальным, K: Гуманизм, L: Милосердие, M: Справедливость, N: Коллективизм, O: Взаимопомощь и взаимоуважение, P: Историческая память и преемственность поколений, R: Единство народов России.

В качестве инструмента построения модели матрицы духовно-нравственных ценностей предполагается использование метода парных сравнений, [5]. Для установления относительной важности рассматриваемых элементов будем использовать шкалу отношений, приведенную в Табл. 1.

Правомочность предложенной шкалы доказана теоретически при сравнении со многими другими шкалами [5]. Заметим, что может быть выбрана и другая шкала оценок. С помощью введенной выше шкалы отношений была составлена матрица парных сравнений относительно общей цели — благополучного существования цивилизации, и построен столбец приоритетов, который позволяет идентифицировать Российскую цивилизацию способом, приведенным на Рис. 1.

Объективность сделанных расчетов можно определить по значению индекса согласованности полученной матрицы: $IS=0,0627$. Выводы: метод парных сравнений (метод Т.Л. Саати) вполне успешно может быть применен для построения матриц духовно-нравственных ценностей различных цивилизаций. Дальнейшее сравнение подобных матриц для различных цивилизаций должно помочь формализовать различия между цивилизациями или установить их близость.

| Степень значимости (оценка) | Определение | Объяснение |
|-----------------------------|---|--|
| 1 | Одинаковая значимость | Два объекта вносят одинаковый вклад |
| 3 | Некоторое преобладание значимости одного объекта над другим (слабая значимость) | Существуют соображения в пользу предпочтения одного из объектов, однако эти соображения недостаточно убедительны |
| 5 | Существенная значимость | Имеются надежные данные или логические суждения для того, чтобы показать предпочтительность одного из объектов |
| 7 | Очевидная или очень сильная значимость | Убедительное свидетельство в пользу одного объекта перед другим |
| 9 | Абсолютная значимость | Свидетельства в пользу предпочтения одного объекта другому в высшей степени убедительны |
| 2,4,6,8 | Промежуточные значения между двумя соседними суждениями | Ситуация, когда необходимо компромиссное решение |

Таблица 1: Шкала отношений

Литература

1. Концепция внешней политики Российской Федерации (утверждена Президентом Российской Федерации В.В.Путиным 31 марта 2023 г.), [Электронный ресурс]. <https://www.mid.ru/ru/detail-material-page/1860586/> (дата обращения: 18.02.2024).
2. Цивилизационная структура современного мира / Под ред. Ю.Н. Пахомова и Ю. В. Павленко. – Т. 3: Глобальные трансформации современности. – К.: Наукова думка, 2006. – 685 с.



Рис. 1: Распределение приоритетов ценностей Российской цивилизации

3. Кочетков, В.В. Идентичность и культура в современных международных отношениях : учебное пособие / В.В. Кочетков. — Москва : МГУ имени М.В.Ломоносова, 2015. — 320 с. — ISBN 978-5-19-010864-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — <https://e.lanbook.com/book/114605> (дата обращения: 30.10.2019).

4. Указ №809 Президента РФ от 09.11.2022, [Электронный ресурс]. <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202211090019/> (дата обращения: 18.02.2024).

5. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process. New York: McGraw Hill, 1980.

АФРИКА В 21 СТОЛЕТИИ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ В МИР-СИСТЕМНОМ И ГЕОПОЛИТИЧЕСКОМ АСПЕКТАХ

Л.Е. Гринин, А.Л. Гринин

leonid.grinin@gmail.com, algrinin@gmail.com

УДК 327

Рассматриваются проблемы и перспективы развития Африканского континента в будущем в связи с его бурным развитием и повышением роли в Мир-Системе; геополитическое соперничество ведущих держав в Африке в настоящем и в будущем, включая возможности развития российско-африканских отношений.

Ключевые слова: Африка, геополитика, соперничество за Африку, российско-африканские отношения.

Африканский регион насчитывает 54 государства, очень различных по политическим, экономическим, демографическим и иным показателям. Тем не менее, в этих странах много общего, что позволяет говорить о них как об определенном единстве. Африка — континент колоссальных контрастов, где идет быстрая модернизация. Процесс быстрой модернизации в любом случае создает повышенный риск дестабилизации [1], в условиях Африки же — риск сильно возрастет. Поэтому мы прогнозируем, что в XXI столетии именно Африка станет самым беспокойным континентом Мир-Системы, где произойдет наибольшее число революций, конфликтов, взрывов экстремизма [2].

С другой стороны, мы верим, что Африка в целом — это континент будущего, где длительное время будет наблюдаться мощная динамика, которая уже исчерпывается в Западном мире. И чем выше будет роль Африки, тем больше на ней будут сказываться мир-системные процессы и наоборот, тем сильнее она будет влиять на Мир-Систему. Растущий демографический ресурс черного континента, помимо проблем, о которых много говорят, в мир-системном аспекте может способствовать развитию регионов с пожилым населением. В частности, вовлечение образованной африканской молодежи в систему удаленной работы в глобальном Севере — это проект на десятилетия, который одновременно смягчит проблему нехватки трудовых ресурсов в Западной мире и Китае и может стать одним из способов снизить безработицу в Африке, поднять уровень жизни в этих странах.

В настоящее время активизировалась борьба крупных держав за влияние в Африке. Можно прогнозировать, что конкуренция за ее рынки, ресурсы, политическую поддержку будет ужесточаться. Причем, чем быстрее будет развиваться Африка, тем активнее и острее будет идти геополитическая борьба за влияние в африканских странах и в Африке в целом.

Рост значения африканских стран делает актуальным развитие разнопланового сотрудничества РФ с ними. Тем более, что Россия имеет ряд важных преимуществ перед западными странами в Африке. Активизация РФ на африканском направлении и рост соперничества на черном континенте в целом будут позитивными факторами для Африки. В докладе будут рассмотрены 1) проблемы и перспективы развития Африканского континента в будущем в связи с его бурным развитием и повышением роли в Мир-Системе; 2) геополитическое соперничество ведущих держав в Африке в настоящем и в будущем, включая возможности развития российско-африканских отношений.

Литература

1. *Grinin L.* 2022. Revolution and Modernization Traps // Handbook of Revolutions in the 21st Century: The New Waves of Revolutions, and the Causes and Effects of Disruptive Political Change / ed. by J. A. Goldstone, L. Grinin, A. Korotayev. Cham : Springer, 2022. Pp. 219–238. [10.1007/978-3-030-86468-2_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86468-2_8).
2. *Grinin L.* 2022. Revolutions of the 21st Century as a Factor of the World System Reconfiguration // Handbook of Revolutions in the 21st Century. Pp. 973–996. [10.1007/978-3-030-86468-2_38](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86468-2_38).

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00160)

Гринин Леонид Ефимович, д. филос. н., главный научный сотрудник Центра изучения стабильности и рисков, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Москва, Россия)

Гринин Антон Леонидович, к. б. н., научный сотрудник факультета глобальных процессов, МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, Россия)

КОСМИЧЕСКАЯ ГРАВИМЕТРИЯ GRACE И GFO

Л.В. Зотов, В.Д. Юшкин, Н.Л. Фролова, А.А. Фадеев

wolftempus@gmail.com, yusvic@ya.ru, frolova_nl@mail.ru, allexfadeev@mail.ru

УДК 528.27, 556

Спутники GRACE и GRACE-FO предоставляют данные по изменениям гравитационного поля Земли и являются одними из самых успешных геодезических миссий NASA/DLR последних десятилетий. На основе их данных исследуют таяние ледников, перераспределения масс в бассейнах рек, изменения массы океана. Мы применяем многоканальный сингулярный спектральный анализ (МССА) для фильтрации этих данных и разделения их на главные компоненты. МССА основан на SVD-разложении блочной траекторной матрицы, в которую вложен сигнал, с последующим извлечением главных компонент (ГК) изменчивости многомерного временного ряда.

Ключевые слова: спутниковая гравиметрия, GRACE, изменения климата, гидрология, вращение Земли.

2017-2003 RL 06

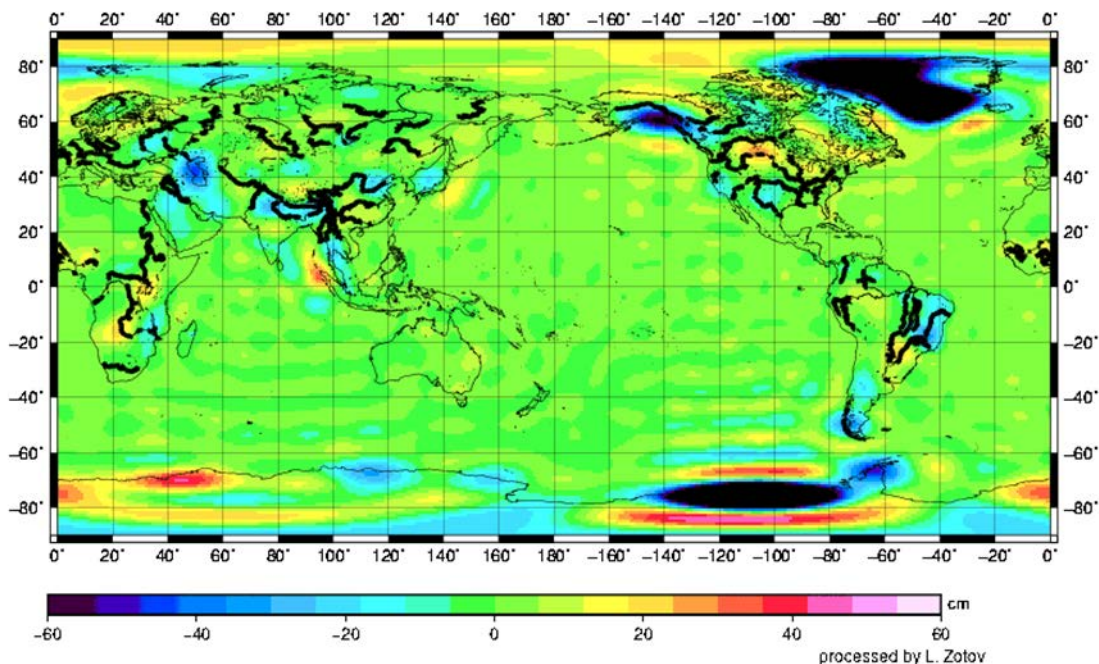


Рис. 1: Изменения масс (тренды) с 2003 по 2017 г по данным GRACE JPL L2

В результате удается отследить как региональные тренды, связанные с паводками, засухами и другими климатическими аномалиями (Рис. 1), так и выявить глобальные изменения сжатия

Зотов Леонид Валентинович, д.ф.-м.н., ст.н.с. лаборатории гравиметрии ГАИШ МГУ имени М.В. Ломоносова; профессор департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ (Москва, Россия)

Юшкин Виктор Дмитриевич, м.н.с. отдела гравитационных измерений, ГАИШ МГУ имени М.В. Ломоносова, МИЭМ НИУ ВШЭ (Москва, Россия)

Фролова Наталья Леонидовна, д.г.н., зав. кафедрой гидрологии суши географического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Фадеев Александр Александрович, ассистент, каф. геофизических методов исследования земной коры геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

фигуры Земли, влияющие на скорость вращения планеты. Измеряемая из космоса массовая компонента сказывается также на дрейфе полюса Земли (Рис. 2), который в последние десятилетия сменил направление.

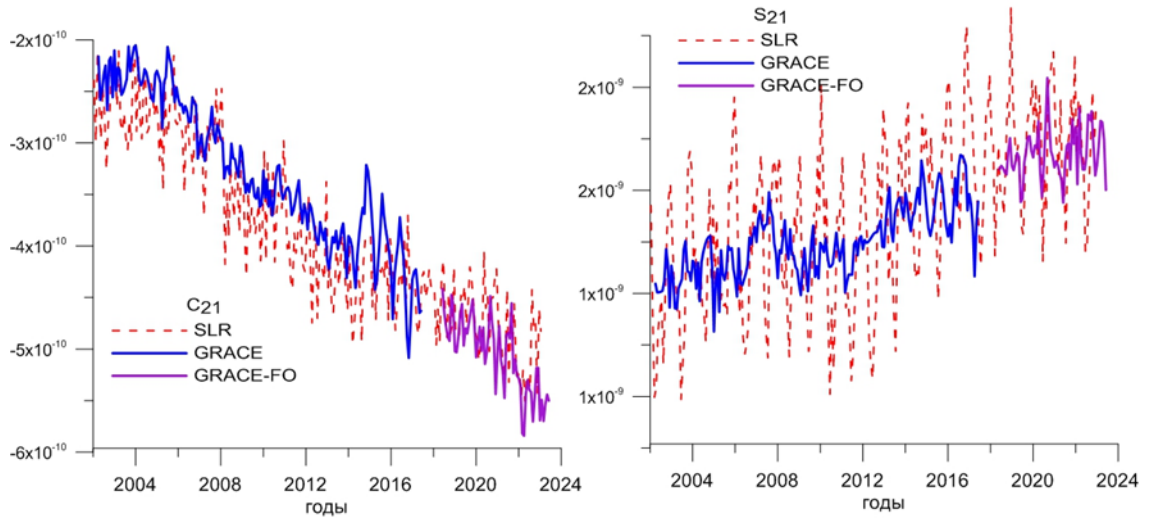


Рис. 2: Тренды в коэффициентах гравитационного потенциала C21, S21 по данным GRACE, GFO и лазерной локации спутников (SLR), характеризующие асимметрию в распределении масс и влияющие на дрейф полюса Земли

В 2023-2024 гг. зима на европейской территории России оказалась очень снежной (полторы-две нормы) и, в преддверии весеннего половодья, это вызывает большую озабоченность. По данным GRACE и GFO (по 11.2023) получены графики массонакопления в бассейнах крупных рек России (Рис. 3), на основе которых можно делать некоторые прогнозы. В частности, по бассейну Волги возможно превышение максимума 2013 года в 2% обеспеченности. Режим паводков будет зависеть от влагозапаса почвы, который велик, и ее промерзания (не так велико).

Сравнение данных спутниковой гравиметрии (с разрешением ~ 300 км) с данными абсолютных измерений гравиметром ГАБЛ-М на бывшем Главном гравиметрическом пункте СССР в Астрономической обсерватории МГУ на Красной Пресне (Рис. 4) в Москве показывают хорошее согласие на уровне микроГал.

Таким образом, можно констатировать, что спутниковая гравиметрия является уникальным методом получения сведений о гравитационном поле Земли высокой точности и больших пространственных покрытий. Извлекаемая из этих данных информация важна для геофизики, гидрологии, океанологии, климатологии и геодезии.

Литература

1. *Зотов Л.В.*, Вращение Земли и климатические процессы, монография, М., МИЭМ НИУ ВШЭ, 2022
2. *Зотов Л.В., Фролова Н.Л., Шам С.К.*, Гравитационные аномалии в бассейнах крупных рек России, Природа РАН, N 5, стр. 3-8, Апрель 2016, Москва.
3. *L.V. Zotov, C.K. Shum, N.L. Frolova*, Gravity changes over Russian rivers basins from GRACE, Chapter 3 in Planetary Exploration and Science: Recent Results and Advances, Springer, 2015
4. *Zotov L., V. Yushkin, N. Frolova, C.K. Shum*, Changes over Russia from GRACE and GRACE-FO, poster at GFO-STM meeting, Boulder, Colorado, 2023

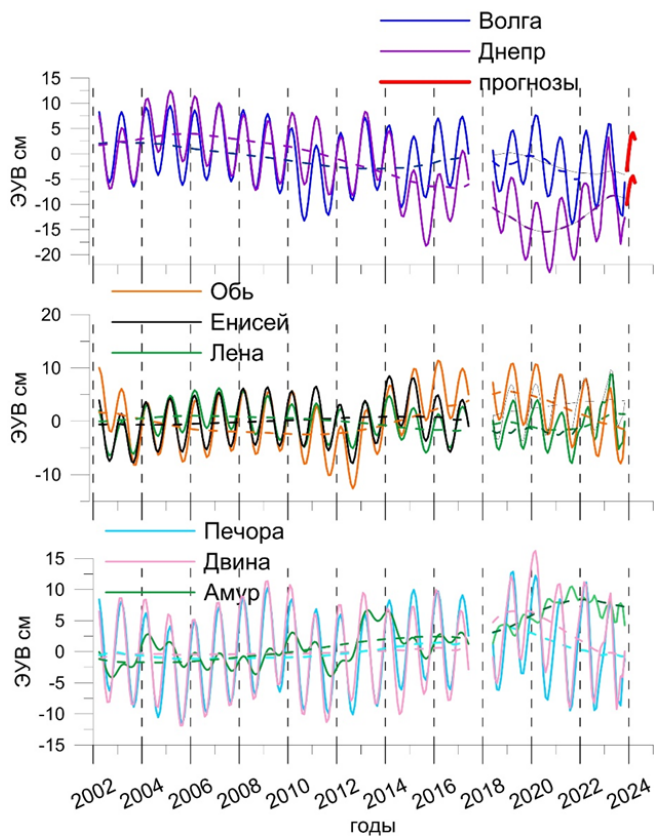


Рис. 3: Отфильтрованные МССА (ГК 1-10) изменения масс в бассейнах крупных рек России с 2003 по 2024 г по данным GRACE JPL L2 и GRACE FO L2 RL06.1 в сантиметрах эквивалентного уровня воды (ЭУВ)

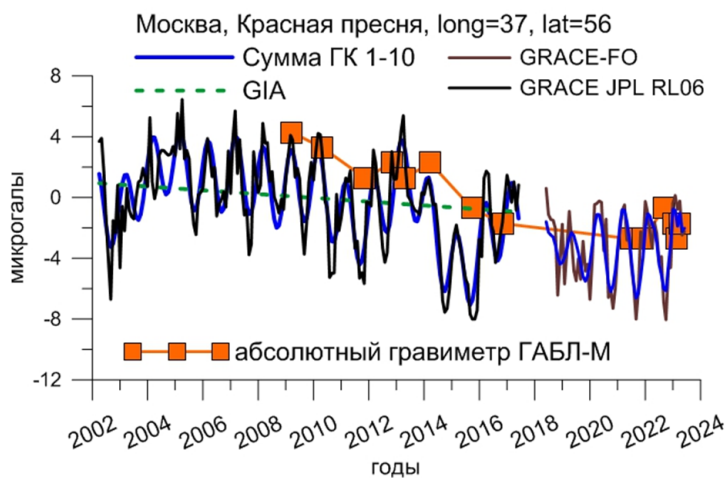


Рис. 4: Сравнение измерений силы тяжести абсолютным гравиметром ГАБЛ-М на Краснопресненской обсерватории ГАИШ МГУ в Москве с данными GRACE/GFO. Зеленым пунктиром показан эффект послеледникового поднятия GIA

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ (НЕМАТЕМАТИЧЕСКИЕ) ПОДХОДЫ К ПРОГНОЗИРОВАНИЮ ГЛОБАЛЬНЫХ ПОЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

О.Г. Леонова

politolga@gmail.com

УДК 339.9, 327

Метод глобального политического прогнозирования применяет экстраполяцию сложившихся в настоящем глобальных политических вызовов на будущие тренды развития глобальных политических процессов. Такой метод представляет вероятностный подход к явлениям будущего с учетом широкого набора возможных вариантов и может быть использован для краткосрочных прогнозов. На основе использования принципа «вызов – ответ» становится возможным прогнозировать не вероятность появления каких-либо событий, но некую заданную реакцию на глобальные политические вызовы.

Ключевые слова: политическое прогнозирование, «вызов – ответ», глобальные политические вызовы, глобальные политические процессы.

Политическое прогнозирование — одна из важнейших составляющих политического анализа, объектом которого выступает политика, а предметом — исследование возможных состояний политических событий, явлений и процессов. Прогностический детерминизм всегда традиционно делал ставку на так называемого экономического человека и теорию рационального выбора и исходил из идеи объективного и закономерного ограничения роли и функции политики, которая рассматривалась проекцией базисных отношений и, считалось, выполняет надстроечно-производственную функцию.

Долгое время наблюдалась недооценка места и роли политической составляющей в прогнозировании. Однако история, особенно события конца XX-ого века, подтвердили принципиальную непредсказуемость будущего, методы детерминистского прогнозирования здесь не работали, детерминистская футурология потерпела фиаско.

Как показали события последних лет, именно политические цели и задачи, ценности и смыслы становятся доминирующим локомотивом глобального политического развития и мотиваторами политического действия глобальных политических акторов, а их экономические интересы отходят на второй план и даже приносятся в жертву. Поэтому будущее можно рассматривать как продукт политики, а политическую деятельность как важную составляющую процесса его зарождения, которая во многом может определять тенденции развития глобальных политических процессов.

Мы рассматриваем *глобальное политическое прогнозирование* как экстраполяцию сложившихся в настоящем глобальных политических вызовов, предопределяющих тренды развития глобальных политических процессов, на будущее состояние глобальной политической системы. Такое прогнозирование не занимается предсказанием судьбы глобального мира и событий мировой политики, но представляет вероятностный подход к явлениям будущего с учетом широкого набора возможных вариантов.

Разумеется, глобальное политическое прогнозирование не в состоянии учесть сложный комплекс внешних и внутренних факторов, действующих в условиях нарастания неопределенности и турбулентности глобального мира. Но оно учитывает закон причинности, согласно которому всякое явление в мире имеет свою причину. Глобальное политическое прогнозирование в состоянии предсказать возможные следствия, вытекающие из данных причин. Такими «причинами» могут выступать глобальные политические вызовы [1]. Используя данный принцип «вызов — ответ», сформулированный А. Дж. Тойнби, где стадия «вызов» означает «импульс или мотив», который заставляет объект реагировать и «перейти в стадию деятельности» [2], становится возможным достаточно достоверно составить суждение о возможных тенденциях развития глобальных политических процессов.

В условиях нарастающей нестабильности и турбулентности глобального мира длительные прогнозы не могут предвидеть сложный комплекс объективных и субъективных факторов и

коррелятов, влияющих на глобальное развитие и определяющих возможность тех или иных событий и появления точек бифуркации. Более точный прогноз возможен только на краткосрочную перспективу на основе анализа глобальных политических вызовов при условии, что они имеют достаточно устойчивый характер и проявляют себя в течении определенного и длительного времени.

Разумеется, этот метод прогнозирования не универсален и не всемогущ, и не в состоянии четко и достоверно предвидеть будущее. Однако он может в целом предсказать некие последствия и ответную реакцию на то, что мы называем «политическим вызовом».

Попытка осмыслить возможную ответную реакцию на такие вызовы позволяет выявить зарождающиеся или укрепляющиеся тенденции, благодаря которым можно предвидеть некоторую определенность будущего. Прогнозируется не вероятность появления каких-либо событий, но некая *заданная реакция* глобальной политической системы на внешние (глобальные политические) вызовы.

Таким образом, глобальное политическое прогнозирование использует технику экстраполяции настоящего на вероятное будущее. В результате становится возможным сделать некий прогноз на краткосрочную перспективу, а именно на ближайшие несколько лет. В целом в сложившейся ситуации можно наблюдать увеличение роли политической составляющей глобальных процессов. Альтернативное будущее рождается в диалектическом взаимодействии циклического и инерционного характера развития. Исторический цикл и инерция, взаимодействуя друг с другом, формируют будущее.

На составлении краткосрочного политического прогноза влияют следующие факторы: А) неодинаковая восприимчивость различных глобальных акторов (развитых и развивающихся, находящихся на глобальной периферии и восходящих глобальных держав) к гетерогенному будущему; Б) инерционные типы поведения, свойственные развитым странам Запада, т.е. экономически благополучным социумам, которые ведут к исчерпанию ресурсных возможностей своего развития; В) стремление политических элит стран — мировых лидеров глобальных процессов, исходя из своих интересов, сделать будущее одновариантным, насаждая всеобщую универсальную экономическую и политическую модель для всех народов и цивилизаций, их попытки нейтрализовать возможные исторические альтернативы, которые предлагают восходящие державы; Г) накапливающаяся реакция отложенного будущего, актуальные тенденции которого из-за сопротивления мировой политической элиты не имеют возможности реализовываться в настоящем, но тем более они энергично заявят о себе в будущем; Д) высокая вероятность фазовых инверсий, меняющих плюсы на минусы, а минусы на плюсы; инверсий, предусматривающих неизбежную ротацию мировых политических элит, глобальных политических акторов, полюсов и центров силы глобального мира.

На основе применения данного подхода нами были выявлены и описаны следующие тенденции развития глобальных политических процессов: геополитический разлом в результате эскалации напряженности между США и Китаем; продолжающийся кризис глобального управления; гуманитарные катастрофы, вызванные рядом глобальных кризисов (климатическим, энергетическим, продовольственным, миграционным) и нарастанием конфликтного потенциала; возрастающая роль стран Глобального Юга в геополитике; развитие формата минилатерализма и его влияния на международное сотрудничество.

Выводы. Сегодня становится все более очевидным роль политической составляющей глобальных процессов [3]. Международный порядок разрушается, порождая кризисы, не поддающиеся урегулированию, поиск финансирования и усилия по предотвращению гуманитарных катастроф, в том числе ликвидации последствий антропогенных и стихийных бедствий, не дают должных результатов. Число чрезвычайных гуманитарных ситуаций, вызванных конфликтами и природными катаклизмами, растет, а ресурсы для решения таких гуманитарных катастроф оскудевают.

Есть три геополитических вызова, которые подрывают глобальные усилия по противодействию этим угрозам и оказывают значительное влияние на глобальные политические процессы. Это растущая конкуренция между США и Китаем, углубляющийся растущий раскол между Россией и Западом, меняющееся глобальное распределение власти и новый баланс сил.

Однако история показала, что только переход от противостояния к конструктивному сотрудничеству великих держав может внести решающий вклад в решение глобальных проблем и стабилизации глобальных политических процессов [4]

Литература

1. *Леонова О.Г.* Глобальные политические вызовы современности // Век глобализации. 2019. №3. С.61-72 [10.30884/vglob/2019.03.05](https://doi.org/10.30884/vglob/2019.03.05)
2. *Тойнби А. Джс.* Постигание истории. М.: Прогресс, 1991. С. 736
3. *Lyin I., Leonova O.* 'Non-global' Globalization. New features of political globalization' // Journal of Globalization Studies. 2022. Vol.13. No 1. Pp. 21-38. [10.30884/jogs/2022.01.02](https://doi.org/10.30884/jogs/2022.01.02)
4. Challenges of Globalization and Prospects for an Inter-civilizational World Order. Ed. I. Rossi. New York: Springer, 2020. 1126 p.

МАТРИЦА ДУХОВНО-ПРАВСТВЕННЫХ ЦЕННОСТЕЙ АРАБО-ИСЛАМСКОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ

Н.В. Лактионова, А.В. Мартынкин, А.В. Сулимов, О.А. Шпырко

k_laktionova07@mail.ru, martynkin.a.v@mail.ru, avsu7@mail.ru, shpyrkoaa@my.msu.ru

УДК 55.77

В статье представлена попытка формализации духовно-нравственных ценностей цивилизации на примере построения матрицы духовно-нравственных ценностей арабо-исламской цивилизации с использованием метода попарных сравнений альтернатив по каждому из критериев и попарное сравнение критериев с точки зрения важности для поставленной цели.

Ключевые слова: цивилизация, матрица духовно-нравственных ценностей, метод анализа иерархий, матрица парных сравнений, столбец приоритетов.

В п. 4 части 1 Концепции внешней политики Российской Федерации, утвержденной Президентом РФ В.В. Путиным 31 марта 2023 г. Российская Федерация определяется как «самобытное государство-цивилизация, обширная евразийская и евро-тихоокеанская держава, сплотившая русский народ и другие народы, составляющие культурно-цивилизационную общность Русского мира» [1]. Таким образом, в важнейшем доктринальном документе постулируется цивилизационный подход в представлении глобальной структуры мира.

Вместе с тем, несмотря на активное использование в российской науке с начала 80-х гг. XX в. термина «цивилизация», его понятие до настоящего времени не имеет однозначного определения в научной среде. Даже поверхностный взгляд на работы О. Шпенглера, А. Тойнби, Н. Данилевского, М. Барга, Л. Рейснера, Б. Ерасова, Я. Шемякина выявляет существенную разницу в подходах исследователей к определению того, что подразумевается под термином «цивилизация». Однако, подавляющее большинство исследователей сходятся во мнении, что одним из важнейших отличительных признаков конкретной цивилизации является ее «культурный код», т.е. морально-этические или духовно-нравственные ценности, определяющие в значительной степени пути ее развития и правила взаимодействия с другими цивилизациями.

В этой связи представляется актуальным формализовать подход к определению комплекса таких ценностей, в частности, путем формирования матрицы духовно-нравственных ценностей для конкретных цивилизаций. В качестве инструмента построения модели такой матрицы предполагается использование метода парных сравнений, предложенного Т.Л. Саати [2].

В качестве объектов сравнения использовались ценности арабо-исламской цивилизации, аналогичные перечню ценностей Российской государственности, сформулированному в п. 5 Указа

Лактионова Наталья Владимировна, старший преподаватель кафедры вычислительной математики Филиала МГУ в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

Мартынкин Андрей Владимирович, к.и.н., доцент кафедры дисциплин общего профиля Филиала МГУ в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

Сулимов Андрей Валерьевич, старший преподаватель кафедры физики и геофизики Филиала МГУ в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

Шпырко Ольга Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, директор Филиала МГУ в г. Севастополе (Севастополь, Россия)

№809 Президента РФ от 09.11.2022, [3]. Представляется, что унифицированный набор ценностей при построении матрицы позволит впоследствии сравнить между собой матрицы духовно-нравственных ценностей различных цивилизаций, либо матрицы духовно-нравственных ценностей какой-либо одной цивилизации в различные временные промежутки ее развития.

Введем обозначения: А: Жизнь, В: Достоинство, С: Права и свобода человека, D: Патриотизм, Е: Гражданственность, F: Служение Отечеству и ответственность за его судьбу (в качестве Отечества рассматривался не весь арабский мир, а конкретная арабская страна), G: Высокие нравственные идеалы, H: Крепкая семья, I: Созидательный труд, J: Приоритет духовного над материальным, L: Милосердие, M: Справедливость, N: Коллективизм, O: Взаимопомощь и взаимоуважение, P: Историческая память и преемственность поколений, R: Единство народов арабского мира (рассматривалось представление о единстве арабского мира народов 23 арабских стран с суммарной численностью населения около 373 млн. человек). В качестве общей цели рассматривалось благополучное существование и развитие цивилизации в окружающем мире.

Для установления относительной важности введенных выше элементов будем использовать 9-бальную шкалу отношений (Табл. 1):

| Степень значимости (оценка) | Определение | Объяснение |
|-----------------------------|---|--|
| 1 | Одинаковая значимость | Два объекта вносят одинаковый вклад |
| 3 | Некоторое преобладание значимости одного объекта над другим (слабая значимость) | Существуют соображения в пользу предпочтения одного из объектов, однако эти соображения недостаточно убедительны |
| 5 | Существенная значимость | Имеются надежные данные или логические суждения для того, чтобы показать предпочтительность одного из объектов |
| 7 | Очевидная или очень сильная значимость | Убедительное свидетельство в пользу одного объекта перед другим |
| 9 | Абсолютная значимость | Свидетельства в пользу предпочтения одного объекта другому в высшей степени убедительны |
| 2,4,6,8 | Промежуточные значения между двумя соседними суждениями | Ситуация, когда необходимо компромиссное решение |

Таблица 1: Шкала отношений

Правомочность предложенной шкалы доказана теоретически при сравнении со многими другими шкалами [2]. Отметим, что может быть выбрана и другая шкала оценок. Применяя метод парных сравнений построения матрицы духовно-нравственных ценностей арабо-исламской цивилизации необходимо учитывать ряд особенностей этой цивилизации. Прежде всего, следует оговориться, что исследовались духовно-нравственные ценности именно арабской ветви исламской цивилизации ввиду достаточно существенных ее отличий от других субцивилизационных структур исламской цивилизации, в частности, персидско-исламской или тюрко-исламской.

Используя введенную выше шкалу сравнений, была составлена матрица парных сравнений относительно общей цели существования цивилизации и подсчитан столбец приоритетов, который и определяет степень важности каждой ценности в структуре арабо-исламской цивилизации.

Объективность сделанных расчетов можно определить по значению индекса согласованности полученной матрицы, который равен: $IS=0,0509$.

Столбец приоритетов построенной матрицы парных сравнений позволяет идентифицировать арабо-исламскую цивилизацию способом, приведенным на Рис. 1 следующим образом:

Выводы: метод анализа парных сравнений (метод Т.Л. Саати) вполне успешно может быть применен для построения матриц духовно-нравственных ценностей различных цивилизаций.

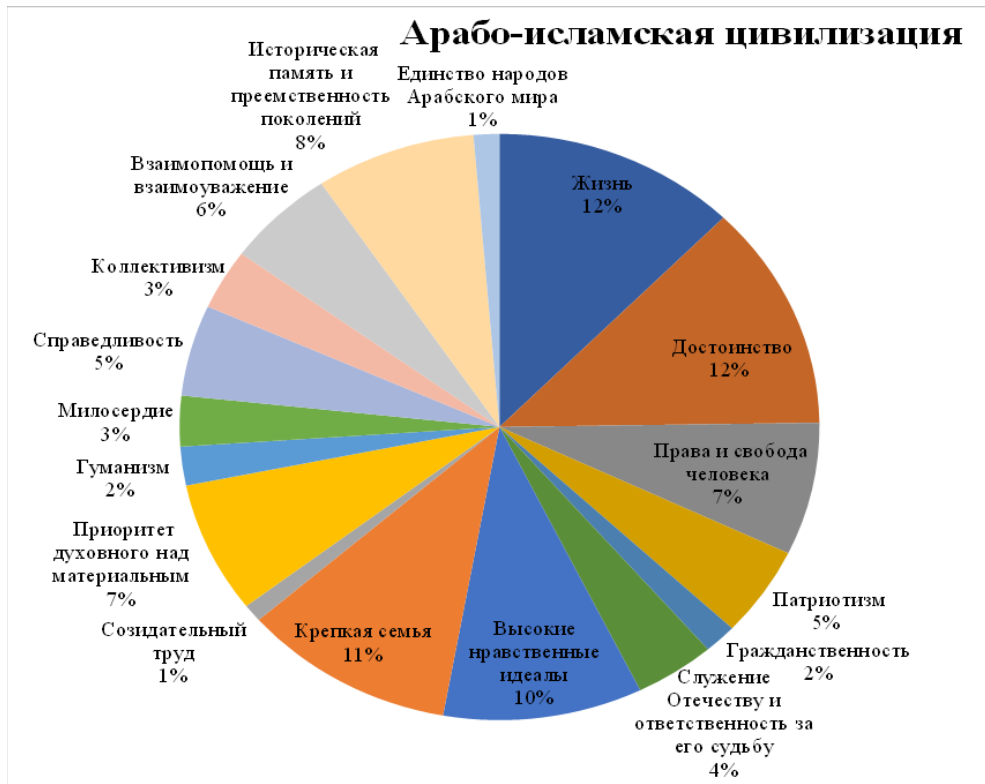


Рис. 1: Распределение приоритетов ценностей Арабо-исламской цивилизации

Сравнение таких матриц для различных цивилизаций должно помочь формализовать различия между цивилизациями, а сравнение матриц духовно-нравственных ценностей одной цивилизации, но в разные периоды ее развития может помочь формализовать динамику развития данной цивилизации и определить, возрастание удельного веса каких конкретно ценностей ведет к подъему или спаду в общей глобальной динамике цивилизационного развития.

Литература

1. Концепция внешней политики Российской Федерации (утверждена Президентом Российской Федерации В.В.Путиным 31 марта 2023 г.), [Электронный ресурс]. <https://www.mid.ru/ru/detail-material-page/1860586/> (дата обращения: 18.02.2024).
2. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process. New York: McGraw Hill, 1980.
3. Указ №809 Президента РФ от 09.11.2022, [Электронный ресурс]. <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202211090019/> (дата обращения: 18.02.2024).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ: ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ИТОГИ И ЗАДАЧИ НА БУДУЩЕЕ

С.Ю. Малков

s@malkov.org

УДК 327

Сделан обзор результатов исследований, проводимых начиная с 2009 года научной группой, возглавляемой академиком В.А. Садовничим и иностранным членом РАН А.А. Акаевым, по моделированию и прогнозированию мировой динамики с использованием динамических математических моделей. Обсуждены промежуточные итоги работы коллектива, а также перспективные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: мировая динамика, глобальные процессы, математическое моделирование и прогнозирование.

В докладе проведен анализ результатов исследований, проводимых начиная с 2009 года междисциплинарной научной группой, созданной и возглавляемой академиком В.А. Садовничим и иностранным членом РАН А.А. Акаевым. Группа создана и работает на базе факультета глобальных процессов, ее задачей является развитие методов математического моделирования и долгосрочного прогнозирования мировой динамики как единого процесса, охватывающего демографическую, экологическую, технологическую, экономическую, социальную, политическую сферы развития общества как на региональном, так и на глобальном уровнях развития. Данные исследования проводились в рамках различных проектов, поддержанных РАН и другими организациями, в том числе в проектах «Математическое моделирование и системный анализ мировой динамики» (2009-2011 гг., в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Экономика и социология науки и образования»), «Математическое моделирование глобальной и региональной динамики в условиях модернизации систем науки и образования» (2012-2013 гг., в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Экономика и социология науки и образования»), «Математические методы прогнозирования мирового и странового социально-экономического развития» (2014-2018 гг., проект РНФ № 14-11-00634), «Историческая глобалистика: историческая эволюция, современность и прогнозные сценарии развития глобальных сетей связей, глобальных процессов и институтов планетарного масштаба, а также роли в них России и БРИКС» (2015-2017 гг., грант РНФ № 15-18-30063), «Мировое развитие и «пределы роста» в 21 веке: моделирование и прогноз» (2020-2022 гг., проект РНФ № 20-61-46004), «Математическое моделирование социальной динамики и ловушек социально-экономического развития (2013-2015 гг., грант РФФИ № 13-06-00576), «Моделирование и прогнозирование нестационарных социально-экономических процессов: Россия в контексте мировой динамики» (2016-2018 гг., грант РФФИ № 16-06-00245-а) и др.

В ходе проведенных исследований членами коллектива:

— рассмотрены методические вопросы моделирования социально-экономической и исторической динамики. Предложена методология моделирования социальных систем, использующая математическое описание с помощью дифференциальных уравнений механизмов взаимодействия (экономического, политического) между различными социальными группами и слоями общества. Исследованы возможности использования разработанного методического аппарата для изучения устойчивости функционирования и развития социально-экономических систем;

— разработаны базовые модели экологических, социально-экономических процессов, процессов социально-политической самоорганизации, предназначенные для исследования исторической динамики как на уровне Мир-системы в целом, так и на уровне отдельных регионов и стран;

— разработаны методы моделирования изменений природной среды и климата под действием антропогенных и естественных факторов, выполнены прогнозные оценки климатических изменений, разработаны модели и методы прогнозирования прикладных климатических характеристик;

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00160)

Малков Сергей Юрьевич, д.т.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет глобальных процессов (Москва, Россия)

- созданы базовые модели устойчивости демографических, экономических, политических процессов, позволяющие исследовать нелинейную динамику социальных систем;
- разработана система комплексного моделирования, на основе которой были проанализированы варианты мирового развития в XXI веке;
- разработана методология описания демографических и экономических циклов в обществах различного типа, исследованы возможности моделирования «мальтузианской ловушки», «ловушки сырьевых стран», «ловушки средних доходов», в которые попадают развивающиеся страны, а также проведен анализ ловушек, в которые попадают развитые страны;
- с использованием моделей проведена оценка устойчивости рассматриваемых социально-экономических и политических процессов, исследованы механизмы цикличности, проведен анализ фазовых переходов в историческом развитии и процессов глобализации;
- разработана базовая динамическая модель экономики России, учитывающая экономическую структуру общества и способная описывать нестационарные процессы. С помощью модели проведен анализ особенностей современного экономического состояния России, рассмотрены различные ситуации дестабилизации экономики, предложены способы парирования угроз дестабилизации и укрепления экономической безопасности страны;
- предложена методология использования логико-математического моделирования для исследования вопросов национальной безопасности. Предложенный подход позволяет на основе теории рисков оптимизировать мероприятия по укреплению национальной безопасности, обосновать необходимую систему мониторинга и контроля значимых характеристик;
- проведен анализ возможностей использования логико-математического моделирования в интересах стратегического планирования и управления в Российской Федерации. В докладе обобщены промежуточные итоги работы коллектива, а также перспективные направления дальнейших исследований. Проведен анализ имеющихся научных проблем и возможных путей их решения.

ИДЕОЛОГИЯ, МЕНТАЛИТЕТ, МОРАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ: ВОЗМОЖНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ И АНАЛИЗА

С.Ю. Малков

s@malkov.org

УДК 327

Рассматриваются проблемы и перспективы развития методов логико-математического моделирования процессов в гуманитарной сфере. Обсуждаются возможности математического моделирования влияния на поведение человека и на социально-политическую устойчивость общества деонтологических факторов (связанных с моралью, нравственностью, идеологией и т.п.).

Ключевые слова: математическое моделирование в гуманитарной сфере, идеология, моральный выбор, менталитет, цивилизационные отличия.

В последнее время в СМИ, в заявлениях государственных деятелей (вплоть до первых лиц страны), посвященных анализу современной ситуации в мире, все чаще звучат слова «цивилизация», «цивилизационный конфликт», «коллективный Запад» (как собирательный образ стран, принадлежащих к западной цивилизации), «цивилизационные ценности», «цивилизационный/культурный код» и т.п. Более того, весной 2023 года выражение «Россия — государство-цивилизация» вошло в качестве важного концепта в государственный документ стратегического уровня — в «Концепцию внешней политики Российской Федерации» (утверждена указом Президента РФ 31 марта 2023 года).

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00160)

Малков Сергей Юрьевич, д.т.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет глобальных процессов (Москва, Россия)

Такое внимание к цивилизационной тематике обусловлено тем, что в современную эпоху роль основных геополитических акторов переходит от национальных государств к более крупным игрокам — наднациональным объединениям и союзам, скрепой в которых является, в том числе, общая цивилизационная принадлежность.

Однако определенный парадокс заключается в том, что хотя цивилизационный подход к анализу современных политических процессов стал общепринятым, общепринятого определения того, что такое «цивилизация» до сих пор нет. Существует более двух десятков трактовок понятия «цивилизация» (см., например, обзор в работе [1]), отличающихся друг от друга по форме и по сути. При этом вопросы, связанные с цивилизационной тематикой, рассматривались до сих пор лишь учеными-гуманитариями: философами, историками, культурологами, политологами, социологами, каждый из которых рассматривал и анализировал те аспекты, которые были ближе всего его научным интересам (этим обусловлена чрезвычайно пестрота трактовок понятия «цивилизация»). Для того, чтобы цивилизационная тематика перешла из сферы сугубо гуманитарных исследований, в сферу междисциплинарности, с подключением количественного анализа процессов в демографии, экономике, экологии и т.д., необходимо введение и изучение количественных критериев, показателей, зависимостей, закономерностей, характеризующих цивилизации и их динамику. Это сложная и пока не решенная задача. Если прежние геополитические акторы — государства — имели четкие территориальные границы, отделяющие одного актора от другого, что позволяло внутри этих границ вводить количественные показатели (например, численность населения, величина ВВП, имеющиеся природные ресурсы, человеческий потенциал и т.п.), то для границ между новыми акторами — цивилизациями — пока нет общепринятого определения, они размыты, характеризуются разными исследователями по-разному, что затрудняет и введение количественных показателей.

Чрезвычайно важной и сложной научной задачей является разработка методов формализации и операционализации таких гуманитарных понятий как «духовность», «культурный/цивилизационный код», «пассионарность», «нравственность», «менталитет» и т.п. с целью использования их в логико-математическом моделировании цивилизационной динамики.

В докладе в развитие идей В.А.Лефевра [2] обсуждаются возможности математического моделирования влияния на поведение человека и на социально-политическую устойчивость общества деонтологических факторов (связанных с моралью, нравственностью, идеологией и т.п.). Приведена базовая математическая модель, обсуждаются результаты моделирования.

Литература

1. Сравнительное изучение цивилизаций. 1998. Хрестоматия / Сост., ред. и вступ. ст. Б.С.Ерасов. — М.: Аспект Пресс, 1998.
2. *Лефевр В.А.* 2003. Алгебра совести. — М.: Когито-Центр, 2003.

ИНДЕКС КАЧЕСТВА ЖИЗНИ LQI

Д.М. Мусиева

musdjam@mail.ru

УДК 330.341

В условиях наблюдаемого сегодня перехода от «эпохи роста» к «эпохе стабильности» глобальной экономической динамики, в оценке эффективности развития стран особое значение приобретают качественные подходы, вместо количественных. В связи с этим, среди показателей, характеризующих эти изменения, важную роль играют показатели качества жизни населения в различных странах мира.

Ключевые слова: экономическое развитие, благосостояние населения, качество жизни.

Глобальный экономический рост позволил существенно повысить уровень жизни во всех странах мира, что привело к невиданным ранее условиям жизни. Особенно это касается менее развитых стран, условия в которых значительно улучшились, позволив обеспечить базовые потребности населения и преодолеть бедность, нищету и прочие острые социально-экономические проблемы. Безусловно данные изменения не носят равномерного характера, и варьируются от страны к стране. Однако, в измерении прогресса, ключевым параметром остается уровень доходов в виде ВВП, который оценивает размер национальной экономики и не отражает в должной мере социально-экономический прогресс. В результате, экономическая политика многих стран ориентируется на показатели экономического (количественного) роста, который сейчас считается наиболее необходимым для общества.

Однако, как показывает практика, сосредоточение внимания исключительно на эконометрических показателях, игнорирует множество негативных последствий самого экономического роста для общества. Так, ВВП учитывает количество произведенной продукции, но ее последующее воздействие на людей и окружающую среду остается неучтенным. ВВП не включает неэкономические элементы (образование, здравоохранение, равенство в распределении доходов, состояние окружающей среды и пр.), которые необходимы для оценки реального прогресса. Отмечается также, что современные трансформации в связи с процессами роста информационных и цифровых технологий, приводящих к совершенно новым условиям хозяйственной деятельности, показатель ВВП не способен отразить [1].

Таким образом, популярный сегодня тезис о пересмотре количественных параметров благополучия в пользу качественных, выражается в поиске новых подходов к его измерению. Еще в 1968 г. Р. Кеннеди отмечал, что «ВВП измеряет все, кроме того, что делает жизнь значимой» [2]. Ограничения ВВП и необходимость расширения методологии и в целом подходов к оценке развития уже широко обсуждаются как в общественно-политическом дискурсе, так и в рамках соответствующих экспертно-аналитических и научных исследований. Несмотря на то, что имеется множество попыток представить альтернативу ВВП, ни одному из них пока не удалось заменить его. По мнению авторов доклада, показатель качества жизни сейчас представляется наиболее оптимальным вариантом, призванным более эффективно сопоставить количественные и качественные параметры развития стран.

Таким образом, нами была предпринята попытка создания интегрированного индекса, учитывающего как субъективные, так и объективные параметры условий жизни населения. Для этого используемая методология базируется на иерархии потребностей А. Маслоу [3, 4, 5]. Для каждого вида потребностей были подобраны показатели, характеризующие степень их удовлетворения/неудовлетворения: **физиологические потребности** (*младенческая смертность, ожидаемая продолжительность жизни*); **безопасность** (*число преднамеренных убийств, смертность от загрязнения окружающей среды*); **любовь, общение** (*уровень браков, разводов*); **уважение** (*уровень экономически активного населения, уровень безработицы*); **самовыражение, творчество** (*количество исследователей, среднее количество лет обучения*); **самоактуализация** (*индекс счастья, уровень самоубийств*).

Процесс формирования интегрального индекса качества жизни состоит из следующих последовательных этапов:

А) унификация значений показателей с использованием следующей формулы:

в случае соответствия наилучшего показателя его максимальному значению:

$$\tilde{x} = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}, \quad (1)$$

в случае соответствия наилучшего показателя его минимальному значению:

$$\tilde{x} = \frac{x_{max} - x}{x_{max} - x_{min}}, \quad (2)$$

где \tilde{x} — унифицированные данные; x — исходные данные (значение рассматриваемого показателя для i -й страны); x_{max} — максимальное значение показателя для рассматриваемой выборки стран; x_{min} — минимальное значение показателя для рассматриваемой выборки стран.

Б) формирование интегрального индекса качества жизни на базе мультипликативной свертки.

В соответствии с вышесказанным расчёт интегрального индекса качества жизни проводился по следующей формуле:

$$LQI = \tilde{x}_1^{n_1} \times \tilde{x}_2^{n_2} \times \dots \times \tilde{x}_k^{n_k} \times, \quad (3)$$

где LQI — значение индекса качества жизни в рассматриваемой стране; k — число показателей, которые определяют уровень качества жизни; n_k — значение веса показателя; \tilde{x}_k — унифицированное значение показателя после их логарифмирования.

Важной проблемой стало определение n_k — веса (значимости) каждого показателя.

В данной версии интегрального индекса было сделано допущение, что удовлетворение всех потребностей «пирамиды» А.Маслоу одинаково важно для людей вне зависимости от того, в какой стране они проживают. С учетом того, что каждая потребность впрдставлена одинаковым числом показателей (а именно — двумя показателями), то каждому показателю был присвоен единичный вес. Необходимо отметить, что в соответствии с логикой построения индекса он отражает не столько абсолютное значение качества жизни в данной стране, сколько сравнительную его характеристику по отношению к учитываемым в индексе странам.

На Рис. 1 представлены некоторые результаты расчетов индекса качества жизни LQI по изложенной методике. На фоне возрастающего интереса к БРИКС и новостей о том, что совокупный потенциал объединения уже превосходит потенциал G7, актуальность представляет рассмотрение качества жизни в этих странах. Ввиду того, что Бразилия, Индия и ЮАР значительно отстают в показателях LQI, на рисунке 10 наряду со странами G7 приведены лишь Китай и Россия, как наиболее приближенные к ним страны.

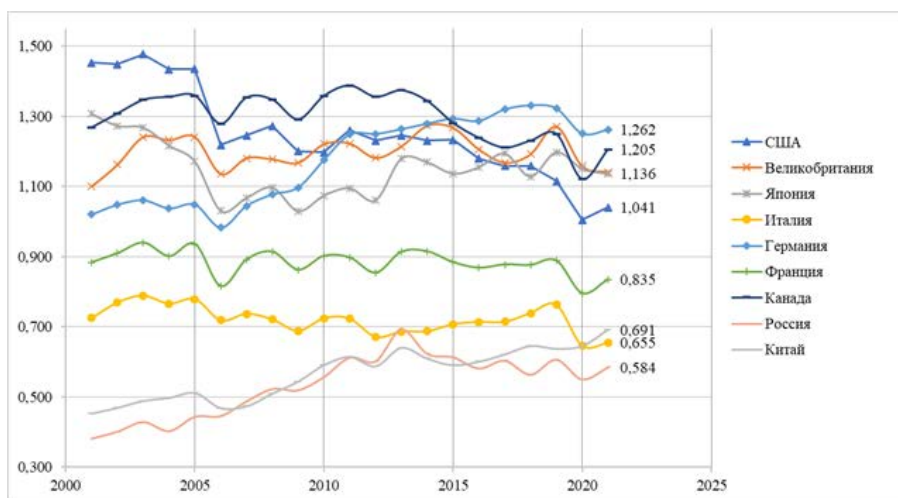


Рис. 1: Значения индекса качества жизни LQI с 2001 по 2021 гг. для стран «Большой семерки», а также Китая и России

Более подробно с результатами расчетов, а также расширенным описанием методологии построения индекса можно ознакомиться в статье [6], а также в коллективной монографии под руководством В.А. Садовниченко «Reconsidering the limits to growth» [7: 521-530].

Представленная методология формирования индекса качества жизни позволяет проследить динамику развития стран без прямого учета их экономических достижений. Отход от измерения благополучия доходами посредством косвенных показателей на примере выбранных позволяет по настоящему оценить именно качество, а не уровень доходов стран. Использование косвенных показателей как раз отражает то, как вложенные средства оказывают эффект и в какой степени они результативны. Относительные значения индекса позволяют провести сравнительный анализ между странами в динамике качества жизни. Более того, сопоставление рейтингов, полученных на основе разработанного индекса LQI и индекса ИЧР [4], показало, что индекс качества жизни LQI имеет достаточно высокий уровень корреляции с этими наиболее известными и широко используемыми в международной практике индексами.

Литература

1. GDP Is Not a Measure of Human Well-Being.
<https://hbr.org/2019/10/gdp-is-not-a-measure-of-human-well-being>
2. Remarks at The University of Kansas, March 18, 1968. <https://www.jfklibrary.org/learn/about-jfk/the-kennedy-family/robert-f-kennedy/robert-f-kennedy-speeches/remarks-at-the-university-of-kansas-march-18-1968>
3. Maslow A.H. Motivation and Personality. 2nd ed. Harper and Row, 1970.
4. Малков С.Ю., Биллога С.Э., Мусиева Д.М. Методика межстрановой оценки качества жизни на основе индекса LQI // Информационные войны, 2019. — Т. 52. — №4. — С. 38-44.
5. Малков С.Ю., Любовикова Д.О. Индекс качества жизни как показатель развития общества и государства // Информационные войны, 2014. — Т. 30. — 2. — С. 48-52.
6. Малков С. Ю., Биллога С. Э., Мусиева Д. М. Качество жизни в странах БРИКС на основе индекса LQI // Информационные войны, 2021. — Т. 3, № 59. — С. 13-25.
7. Sadovnichy V., Akaev A., Pysin I., Malkov S., Grinin L., Korotayev A. Reconsidering the Limits to Growth. A Report to the Russian Association of the Club of Rome. Springer, 2023.

СОВРЕМЕННАЯ АКТИВИЗАЦИЯ ПЛАНЕТЫ — ОПАСНАЯ ТЕНДЕНЦИЯ ИЛИ ПУГАЮЩИЙ МИФ?

В.Л. Натяганов

tenzor-home@yandex.ru

УДК 502.5, 551

Рассматриваются статистические признаки и возможные причины современной активизации планеты, которая сказывается в росте числа и энергетики опасных явлений природы различных геофизических типов.

Ключевые слова: опасные явления природы, особые астрономические конфигурации, современная активизация планеты, триггерные факторы.

1. Введение в проблему и основные геофизические понятия

Современная активизация планеты (САП) проявляется в росте числа и энергетики опасных явлений природы катастрофического характера (сильных землетрясений и извержений вулканов, мощных ураганов и серийных торнадо, продолжительных ливней и наводнений...) при существенном расширении географии их проявлений.

Особыми астрономическими конфигурациями (ОАК) в Солнечной системе назовем те взаиморасположения (по годам), когда Солнце, Земля и Венера или Юпитер находятся на одной из 3-х основных линий земной орбиты: апсид (4 июля — афелий и 3 января — перигелий), узлов или равноденствий и солнцестояний.

К ОАК следует отнести Великие противостояния Земли с Марсом, когда расстояние между ними сокращается с более 400 млн. км до менее 60 млн. км. К специфическим ОАК необходимо отнести и годы, когда барицентр Солнечной системы выходит за пределы Солнца: 1901, 1932, 1969-70, 2011-12 гг. Такие конфигурации являются аналогами “парада” внешних планет (от Земли до Сатурна включительно).

С начала XX века ОАК были по 6 раз с Венерой (1908, 1912, 1916, 1920, 1924 и 1956 гг.) и с Юпитером (1913, 1919, 1960, 1969, 1996 и 2002 гг.); причем вблизи некоторых из этих лет произошли и Великие противостояния с Марсом (1909, 1924, 1956 и 2003 гг.), когда его расстояние до Земли сокращается почти на порядок.

Подчеркнем, что геомагнитные толчки (резкие изменения основных параметров магнитного поля Земли, которое генерируется в жидком ядре планеты на глубине более 3000 км) были

Натяганов Владимир Леонидович, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра газовой и волновой динамики (Москва, Россия)

зафиксированы в 1901, 1909, 1913, 1925, 1969, 1978, 1992, 1999 и летом 2004 гг. после серии рекордных по мощности геомагнитных бурь и за полгода до катастрофического землетрясения вблизи Суматры с генерацией цунами планетарного масштаба и огромными (около 300 тысяч) человеческими жертвами.

Фактически уже в вводной главе коллективной монографии [1] речь идет о САП, а в следующих томах [2-4] анализируются причины разных типов опасных явлений природы (ОЯП) и признаки САП без явного использования этого термина. С середины XIX века (более ранние данные по многим регионам планеты мало достоверны) статистически выявлена тенденция роста почти в 4 раза числа, а также энергетики землетрясений. Причем за последние 30-50 лет в 5-летних интервалах со средним трендом около 0.25 событий в год стабильно росло и число мощных землетрясений с магнитудой $M \geq 7.5$ [1].

Рост вулканической активности Земли более достоверен [1, 3, 5], т.к. достаточно сильные вулканические извержения оставляют характерные материальные следы в виде тонких прослоек, обогащенных частицами вулканического пепла со специфическим набором различных химических элементов. Подобные следы-прослойки особенно хорошо сохраняются в многолетних ледниках, что часто позволяет не только восстановить временные интервалы глобальной активизации вулканизма, но иногда можно даже идентифицировать мощные извержения конкретных вулканов. Исследования хронологии вулканической активности показывают, что с конца XVIII века отмечается почти двукратный рост числа действующих вулканов (сегодня их около 850) и устойчивый тренд волнообразного нарастания их деятельности: ежегодно в среднем бывает до 30 заметных извержений, а иногда около 60.

С начала прошлого века для ОЯП катастрофического характера гидрометеорологического типа (тайфунов и ураганов, мощных торнадо и струйных низовых прорывов из грозовых облаков, резких скачков температуры, продолжительных ливней и снегопадов, наводнений и т.д.) также отмечается рост их числа почти в 4 раза [3-4] и интенсивности с расширением как географии, так и времени года их проявлений.

Космо-геофизические причины активизации планеты

О глобальных причинах САП в геофизической литературе обычно пишут редко, предпочитая рассматривать ОЯП отдельных типов и анализировать возможные причины сейсмической, вулканической, гидрометеорологической и т.д. активностей по отдельности [1-5]. Частично это обусловлено спецификой понятийного и физико-математического аппаратов, методик наблюдений и их статистической обработки, используемого инструментария для контроля основных параметров и их анализа в различных разделах наук о Земле; частично — большой сложностью исследования даже отдельных типов ОЯП с явной неоднозначностью причинно-следственных связей, многофакторностью механизмов межгеосферных взаимодействий, ограниченным числом контролируемых в натуральных условиях параметров, а иногда и недостаточной точностью их инструментальной фиксации.

Основные причины САП должны иметь глобальный для всей Земли масштаб и достаточно долгосрочный характер, с вероятными квазипериодическими вариациями из-за естественной цикличности гелиокосмических и геодинамических процессов. Подобные причины могут служить долговременными триггерными факторами для практически одновременной (может быть с некоторым сдвигом по времени) активизации сейсмичности, вулканизма, гидрометеорологических ОЯП и т.д.

Анализ геофизической литературы показывает, что к таким глобальным триггерным факторам космо-геофизической природы обычно относят:

1. Постепенный рост солнечной радиации, реконструированный на основе установленной связи количества солнечных пятен на баттерфляй-диаграммах Маундера или чисел Вольфа [1, 3, 5] с излучением солнечной энергии;
2. Долгосрочные вариации угловой скорости собственного вращения и других параметров орбитального движения Земли;
3. Особые астрономические конфигурации типа “парада планет” с выходом барицентра Солнечной системы за поверхность Солнца и так называемых непарных пересоединений или соединений Земли с Солнцем и другими планетами.

Из этого перечня исключены: лунно-солнечные морские и твердотельно-литосферные приливы, наиболее сильно выраженные в ново- и полнолуния, вблизи дат которых реализуется максимальное отклонение Луны от плоскости эклиптики и отмечен резкий рост (до 250-300% отклонения от среднего) тектонической активности в виде землетрясений и вулканических извержений [6], а также на порядок чаще случаются крупные аварии со взрывами газа в шахтах; резкие всплески солнечной активности типа вспышек или корональных выбросов массы, которые по эмпирической схеме [7] являются краткосрочными (обычно через 1, 2 или 3 недели) триггерами землетрясений в зонах пересечения сейсмомагнитных меридианов с границами литосферных плит; аномальные колебания чандлеровских траекторий движения геополюса и некоторые другие триггерные факторы среднесрочного характера; однако учитываются геомагнитные толчки — резкие изменения основных параметров магнитного поля Земли [6]. Причем часто различные триггерные факторы по времени накладываются друг на друга, что существенно затрудняет анализ и так сложных причинно-следственных связей.

В докладе будут представлены в виде таблиц примеры наиболее неординарных проявлений ОЯП различных геофизических типов, приуроченных по времени к ОАК, а по пространству к критическим параллелям планеты [8]. Такие примеры начинаются с Тунгусской катастрофы как вулканогенного землетрясения [3] в Сибири, мощного землетрясения с цунами в Мессинском проливе между Сицилией и Италией и активизации вулкана Эребус в Антарктиде с выбросом на перевале с горой Берд гигантской паро-газовой струи высотой около 10 км (все это в 1908 г.), а заканчиваются в 2011 г. мегаземлетрясением Тохоку с генерацией цунами и техногенной аварией на АЭС Фукусима в Японии, рекордной серией за две недели апреля из более 550 торнадо (половина среднегодовой нормы) в США, мощным и внезапным пробуждением потухшего вулкана Пуйеуе в Чили с материальным ущербом более 1.5 млрд долларов.

Обсуждаются возможные последствия глобальной активизации планеты (в том числе и влияние на климат), а также среднесрочный прогноз возможного резкого роста ОЯП катастрофического характера в 2033-2036 гг. (Венера и Марс) и 2042-2052 гг. (Юпитер, Венера, Марс и барицентр Солнечной системы).

Литература

1. Современные глобальные изменения природной среды. Т.1. М.: Научный мир, 2006.
2. Современные глобальные изменения природной среды. Т.2. М.: Научный мир, 2006.
3. Современные глобальные изменения природной среды. Т.3. М.: Научный мир, 2012.
4. Современные глобальные изменения природной среды. Т.4. М.: Научный мир, 2012.
5. *Хаин В. Е., Халимов Э. Н.* Цикличность геодинамических процессов: ее возможная природа. М.: Научный мир, 2009.
6. *Маслов С. А., Натяганов В. Л., Скобенникова Ю. Д.* Механические причины современной активизации планеты и ее последствия. Сб. мат. XII Всерос. съезда по фундаментальным проблемам теор. и прикладной механики, серия Механика жидкости и газа. Уфа: РИЦ БашГУ, Т.2. С. 619-621.
7. *Дода Л. Н., Натяганов В. Л., Степанов И. В.* Эмпирическая схема краткосрочного прогноза землетрясений // Доклады Академии Наук, 2013. Т.453. N 5. С. 551-557.
8. *Стовас М. В.* Избранные труды. М.: Недра, 1975.

ГЛОБАЛЬНОЕ ВЛИЯНИЕ ОЗОНА НА АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ

С.Н. Ткаченко, И.С. Ткаченко

timis@timis.ru, i-t@timis.ru

УДК 546

Рассматривается глобальное влияние озона на атмосферу земли, в том числе обзор моделирования гетерогенных химических реакций озона с различными классами хлорсодержащих веществ-загрязнителей атмосферы, а также выявление закономерностей протекания данных процессов и влияние характеристики атмосферы земли. Приведены исследования синтеза озона в электрическом разряде из кислорода с помощью численного моделирования.

Ключевые слова: озон, глобализм, атмосфера Земли.

Озон относят к малым составляющим атмосферы Земли, поскольку его общее содержание достигает лишь $0.64 \cdot 10^{-6}$ от всей её массы. Но значимость озона [1] в атмосферных явлениях существенна. Стратосферный озон, поглощая ультрафиолетовое излучение Солнца с длиной волны порядка 220 нм, определяет термический режим стратосферы, препятствует проникновению биологически активного ультрафиолета на поверхность планеты и существенно влияет на стратификацию атмосферы Земли.

Целью данной работы являлось лабораторное моделирование гетерогенных химических реакций озона с различными классами хлорсодержащих веществ-загрязнителей атмосферы, а также выявление закономерностей протекания данных процессов и влияние характеристики атмосферы Земли. Исследовался синтез озона в электрическом разряде из кислорода с помощью численного моделирования.

Существуют различные математические модели для предсказания изменения концентрации озона со временем в различных регионах планеты на основании экспериментальных данных о составе атмосферы. При моделировании принимаются газофазные процессы, в качестве основополагающих. Их кинетика изучалась современными физико-химическими экспериментальными методами. Наиболее значимые при этом имеют фотохимическую природу и связаны с присутствием активных радикалов галогенов, оксидов азота и HO_2 . Тем не менее, учет всех известных газофазных процессов, приводящих так или иначе к разрушению озона, наряду с известными корреляциями содержания озона и CO_2 , эмитируемого планетой, демонстрирует наличие одного или нескольких дополнительных путей разрушения озона, не принимаемых во внимание. С учетом демонстрируемой сезонности разницы фактического и прогнозируемого содержания O_3 в стратосфере, они могут соответствовать именно гетерогенным процессам с участием галогенов и азотосодержащих соединений.

Численное моделирование синтеза озона в электрическом разряде из кислорода позволило рассчитать энергетику процесса.

Литература

1. *Лунин В.В., Попович М.П., Ткаченко С.Н.* Физическая химия озона. М.: Изд-во МГУ. 1998. 472 с.

Ткаченко Сергей Николаевич, д.х.н., профессор, лаб. катализа и газовой электрохимии кафедры физической химии химического факультета, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Ткаченко Илья Сергеевич, к.ф.-м.н., ст.н.с., лаб. катализа и газовой электрохимии кафедры физической химии химического факультета, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОФАЗНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА

А.Х. Шахвердиев, Ю.В. Шестопапов, С.В. Арефьев
 ah_shah@mail.ru, shestop@hotmail.com, sergey.v.arefiev@lukoil.com

УДК 622.276.43

Впервые предлагается динамическая модель многофазной фильтрации в условиях неустойчивости контактов фаз. Решение прямой и обратной задачи динамической системы, позволяет прогнозировать параметры процесса и оптимизировать её функционирование, с учётом влияния неустойчивости.

Ключевые слова: динамические системы, неустойчивость, прогноз параметров, модели роста, теория катастроф.

В мировой практике, разработка большинства нефтяных месторождений, осуществляется с применением технологий заводнения. Первые версии решения глобальной проблемы фильтрации двухфазного потока, предложенные Бакли-Левреттом, оказались не адекватны физическому механизму динамического процесса [1]. Согласно полученному решению, в одной точке пространства одновременно получались три значения водонасыщенности и наблюдался скачок водонасыщенности в зоне неустойчивости, что на практике приводило к преждевременному и повсеместному прорыву воды к нефтедобывающим скважинам. В результате происходило существенное снижение нефтеотдачи пластов, что приводило к пересмотру проектных решений.

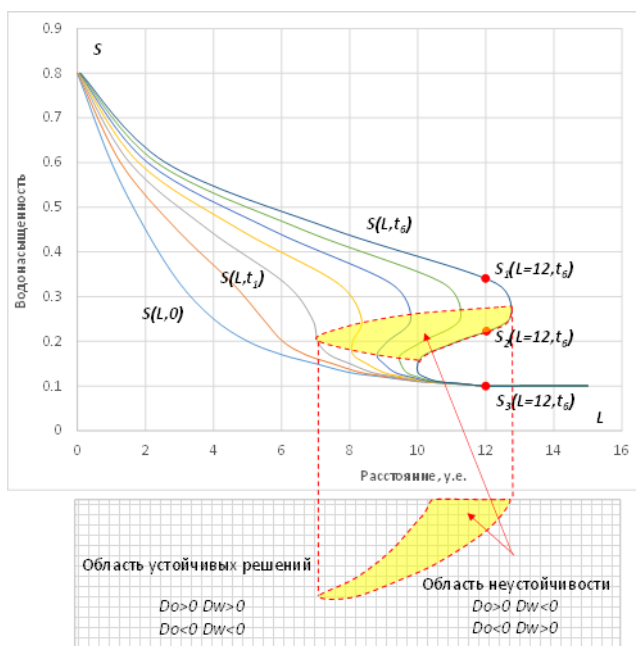


Рис. 1: Зона неустойчивости, образованная скачком и тройственностью водонасыщенности

Шахвердиев Азизага Ханбаба Оглы, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой геологии и разведки месторождений углеводородов, Российский государственный геологоразведочный университет имени С. Орджоникидзе (МГРИ) (Москва, Россия)

Шестопапов Юрий Викторович, д.ф.-м.н., профессор Российский Технологический Университет МИРЭА (Москва, Россия)

Арефьев Сергей Валерьевич, к.г.-м.н., начальник управления разработки нефтяных и газовых месторождений Западно-Сибирского и Пермского регионов ПАО «ЛУКОЙЛ» (Москва, Россия)

Решение поставленных проблем управления с использованием оригинальной динамической модели многофазной фильтрации в условиях неустойчивости контактов фаз возможно реализовать с помощью двухфазной [3-6] (и затем трёхфазной [7, 8]) модели роста из теории катастроф [2] для автономной полиномиальной динамической системы (ДС)

$$\begin{aligned} \frac{dQ_0}{dt} &= a_0 Q_0^2 + b_0 Q_0 + c_0; D_0 = b_0^2 - 4a_0 c_0 \\ \frac{dQ_w}{dt} &= a_w Q_w^2 + b_w Q_w + c_w; D_w = b_w^2 - 4a_w c_w \end{aligned}$$

Для двухфазной модели показано [3], что ДС интегрируема в квадратурах и общее решение исследуемой ДС может быть получено в явном виде.

После факторизации и введения в решение дискриминантов полиномов ДС для каждой фазы в качестве управляющего параметра, удаётся изучить и описать поведение и свойства решений многофазной полиномиальной динамической системы на фазовой плоскости переменных и времени [3-8].

Классификация свойств решений ДС и всех возможных сингулярностей может быть проведена [3-6] для двухфазной модели в рамках ровно 9 классов эквивалентности D^{++}, D^{-+}, \dots , сформированных в соответствии со всеми возможными комбинациями знаков дискриминантов полиномов и с учетом обращения дискриминантов в 0.

Для трёхфазной модели классификация свойств решений и сингулярностей ДС может быть проведена [7, 8] в рамках 27 таких классов эквивалентности В таблице приведены все возможные решения ДС в каждом из этих классов для двухфазной модели (Решение прямой задачи для двухфазной модели: общие решение ДС и классы эквивалентности согласно дискриминантному критерию).

Такой подход получил название дискриминантного критерия.

| № | Класс | Общие решения |
|---|----------|---|
| 1 | D^{++} | $Q_w(Q_0; C) = Q_w^1 - \frac{\sqrt{D_w}}{a_w \left(-1 + C \left \frac{Q_0 - Q_0^2}{Q_0 - Q_0^1} \right ^\rho \right)}; \quad \rho = \sqrt{\frac{D_w}{D_0}} > 0$ |
| 2 | D^{+0} | $Q_w(Q_0; C) = Q_w^0 + \frac{1}{\frac{a_w}{\sqrt{D_0}} \ln \left \frac{Q_0 - Q_0^2}{Q_0 - Q_0^1} \right + C}$ |
| 3 | D^{0+} | $Q_w(Q_0; C) = Q_w^1 + \frac{\sqrt{D_w}}{a_w} \frac{1}{1 + C e^{\frac{\sqrt{D_w}}{a_0(Q_0 + Q_0^0)}}}$ |
| 4 | D^{00} | $Q_w(Q_0; C) = Q_w^0 - \frac{1}{\frac{a_w}{a_0(Q_0^0 - Q_0)} + C}$ |
| 5 | D^{+-} | $Q_w(Q_0; C) = -Q_w^0 + P \tan \left(\frac{\rho}{2} \ln \left \frac{Q_0 - Q_0^2}{Q_0 - Q_0^1} \right + C \right);$ $\rho = \sqrt{-\frac{D_w}{D_0}} > 0, \quad P = \frac{\sqrt{-D_w}}{2a_w}$ |

| | | |
|---|----------|---|
| 6 | D^{-+} | $Q_w(Q_0; C) = Q_w^1 - \frac{\sqrt{D_w}}{P} \frac{1}{-1 + Ce^{-2\rho t g^{-1} \left(\frac{Q_0^0 + Q_0}{P} \right)}};$ $\rho = \sqrt{-\frac{D_w}{D_0}} > 0, \quad P = \frac{\sqrt{-D_0}}{2a_0}$ |
| 7 | D^{--} | $Q_w(Q_0; C) = -Q_w^0 + P_2 t g \left(\rho t g^{-1} \left(\frac{Q_0^0 + Q_0}{P_1} \right) + C \right);$ $\rho = \sqrt{\frac{D_w}{D_0}} > 0, \quad P_1 = \frac{\sqrt{-D_0}}{2a_0}, \quad P_2 = \frac{\sqrt{-D_w}}{2a_w}$ |
| 8 | D^{0-} | $Q_w(Q_0; C) = Q_w^0 + P t g \left(\frac{\sqrt{-D_w}}{2} \left(\frac{1}{a_0(Q_0^0 - Q_0)} + C \right) \right); \quad P = \frac{-D_w}{2a_w}$ |
| 9 | D^{-0} | $Q_w(Q_0; C) = Q_w^0 - \frac{1}{\frac{2a_w}{\sqrt{-D_0}} t g^{-1} \left(\frac{Q_0^0 + Q_0}{P} \right) + C}, \quad P = \frac{-D_0}{2a_0}$ |

Заключение. Построенная качественная теория двух- и трёхфазных ДС включает анализ её сингулярных точек и особенностей решений в зависимости от всех параметров задачи на основе оригинального дискриминантного критерия.

Показано, что дискриминанты полиномов в качестве управляющих параметров контролируют существенные свойства решений. Предложенная классификация, в зависимости от величин и знаков дискриминантов, позволяет формулировать критерии и решающие правила при управлении динамическими процессами.

Следующим шагом, решая обратную задачу и используя фактические данные процесса, удастся построить методику [8-10], позволяющую прогнозировать преждевременный прорыв воды к нефтедобывающим скважинам.

В целом, разработанная методика, успешно применяется при прогнозировании любых оперативных и краткосрочных неустойчивых процессов.

Литература

1. Buckley S.E., Leverett M.C., Mechanism of fluid displacement in sands. // Transaction of the AIME, Vol 146(01), (1942) pp. 107-116, [10.2118/942107-g](#).
2. V. I. Arnold, Theory of Catastrophes // Moscow: Nauka (1990).
3. Yury Shestopalov, Azizaga Shakhverdiev, Sergey V. Arefiev Bifurcations Associated with Three-Phase Polynomial Dynamical Systems and Complete Description of Symmetry Relations Using Discriminant Criterion // Symmetry (2024), 16, 14 [10.3390/sym16010014](#).
4. A. Kh. Shakhverdiev, Yu. V. Shestopalov. Qualitative analysis of quadratic polynomial dynamical systems associated with, the modeling and monitoring of oil fields // Lobachevskii Journal of Mathematics (2019). Т. 40. № 10. С. 1695-1710. [10.1134/S1995080219100226/](#).
5. Y. Shestopalov, A. Shakhverdiev. Qualitative theory of two-dimensional polynomial dynamical systems // Symmetry. (2021). Т. 13. № 10. pp. 1884-1899. [10.3390/sym13101884](#).
6. A. Kh. Shakhverdiev, Y.V. Shestopalov, I.E. Mandrik, S.V. Arefyev, Optimization of reservoir waterflooding with unstable displacement front // ANAS Transactions, Earth Sciences 2 (2023), 64-78 [10.33677/ggianas20230200103](#).
7. Yu. V. Shestopalov., A. Kh. Shakhverdiev. Three-Phase Dynamical Systems and Their Applications to Monitoring for the Development of Hydrocarbon Fields. // Lobachevskii J Math 44, 5045–5056 (2023).

[10.1134/S1995080223110306](#).

8. *А.Х. Шахвердиев, Ю.В. Шестопалов, И.Э. Мандрик, С.В. Арефьев*. Альтернативная концепция мониторинга и оптимизации заводнения нефтяных пластов в условиях неустойчивости фронта вытеснения // Нефтяное хозяйство. № 12, (2019), с. 118-123. [10.24887/0028-2448-2019-12-118-123](#).

9. *Шахвердиев А. Х., Арефьев С. В.* Прогноз прорыва воды при заводнении в условиях неустойчивости фронта вытеснения нефти водой // SOCAR Proceedings No. 3 (2023) 058-067. [10.5510/OGP20230300887](#)

10. *Шахвердиев А. Х.* Некоторые концептуальные аспекты системной оптимизации разработки нефтяных месторождений // Нефтяное Хозяйство № 2, (2017), с. 58-63. [10.24887/0028-2448-2017-2-58-63](#).

Секция 22

Математика в современной биологии

ПОТЕНЦИАЛ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА УСТАНОВКАХ CRYO-EM И XFEL

С.А. Бобков, А.Б. Теслюк, В.Е. Велихов, В.А. Ильин

s.bobkov@grid.kiae.ru, ilyin0048@gmail.com

УДК 57.081.23

В работе представлен новый подход к организации конвейерной обработки данных экспериментов криоэлектронной микроскопии (Cryo-EM) и на рентгеновских лазерах на свободных электронах (XFEL) с использованием технологий контейнеризации. В результате появляется возможность автоматического выполнения полного цикла обработки данных на гетерогенных вычислителях, включая суперкомпьютеры.

Ключевые слова: криоэлектронная микроскопия, XFEL, контейнеризация.

Прогресс в области информационных технологий, связанный с развитием технологий контейнеризации, позволил эффективно совмещать программные модули, созданные для работы на разных вычислительных платформах. Прикладное ПО, разработанное для обработки больших наборов данных в естественнонаучных экспериментах, часто ориентировано на специализированные компьютерные платформы, перенос ПО между вычислительными ресурсами часто является сложной задачей.

В данной работе [1] представлен новый подход к организации конвейерной обработки данных для экспериментов по исследованию пространственных структур биологических макромолекул (белков, вирусов, макромолекулярных комплексов) с использованием технологии контейнеризации. В результате появляется возможность выполнения полного цикла обработки данных на гетерогенных вычислителях, включая суперкомпьютеры с использованием графических ускорителей.

Работы проведены при поддержке совместного Российского научного фонда (грант № 18-41-06001) и Helmholtz Associations Initiative Networking Fund (HRSF-0002). Разработка и развертывание инфраструктуры для работы платформы и хранения данных проводились согласно тематическому плану НИОКР НИЦ «Курчатовский институт»

Бобков Сергей Алексеевич, к.ф.-м.н., начальник лаборатории, НИЦ «Курчатовский институт», (Москва, Россия)

Теслюк Антон Борисович, независимый исследователь, (Москва, Россия)

Велихов Василий Евгеньевич, помощник президента центра по информационным технологиям и искусственному интеллекту, НИЦ «Курчатовский институт», (Москва, Россия)

Ильин Вячеслав Анатольевич, главный научный сотрудник, НИЦ «Курчатовский институт», (Москва, Россия)

Рассмотрены методы криогенной просвечивающей электронной микроскопии (Cryo-EM), а также эксперименты с использованием лазеров на свободных электронах (XFEL). Они вызывают большой интерес в области структурной биологии, так как данные подходы позволяют восстанавливать пространственную структуру биологических макромолекул с разрешением вплоть до межатомных расстояний. Исходные данные в таких экспериментах представляют собой набор двумерных изображений исследуемых объектов — двумерных проекций трехмерных структур в прямом пространстве в случае Cryo-EM-экспериментов и 2D-дифракционных картин в обратном пространстве в случае XFEL-экспериментов.

Представленный подход позволяет разделить работу пользователя на прикладном уровне от разработок ИТ-специалистов на системном и промежуточном уровнях. Пользователю остается только поместить прикладные пакеты в контейнеры и записать прикладную логику конвейерной обработки данных. В работе обсуждаются примеры конвейеров для Cryo-EM- и XFEL-экспериментов. Представлены примеры контейнеризованного ПО, а также прикладные композитные задания, написанных на языке высокого уровня CWL.

Литература

1. Бобков С. А. и др. Потенциал современных информационных технологий для анализа данных экспериментов на установках Cryo-EM и XFEL // Кристаллография. — 2020. — Т. 65. — №. 6. — С. 995-1008. DOI: 10.31857/S0023476120060089.

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДНК И РНК КОМПЛЕКСОВ: КРУПНОЗЕРНИСТЫЕ МОДЕЛИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.И. Буглаков, А. Фатихова, А.В. Чертович, А.К. Шайтан, А.Р. Хохлов
buglakov@polly.phys.msu.ru, fatikhova.av20@physics.msu.ru, chertov@polly.phys.msu.ru,
shaytan_ak@mail.bio.msu.ru, khokhlov@polly.phys.msu.ru

УДК 57.012.6, 577.22

В докладе изложены современные методы численного предсказания структур ДНК и РНК комплексов из первичных последовательностей нуклеотидных остатков. Особое внимание уделено крупнозернистым моделям, позволяющим оценивать в том числе динамические и кинетические особенности формирования пространственной упаковки нуклеиновых кислот. Показаны примеры использования расчетных методов для оптимизации последовательностей под заданные морфологические характеристики и концентрационные распределения комплексов в растворах, а также приведено сравнение с экспериментальными данными для случая растворов выбранных олигонуклеотидов.

Ключевые слова: биомacroмолекулы, молекулярное моделирование, крупнозернистые модели.

Работа поддержана в рамках Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Молекулярные технологии живых систем и синтетическая биология” Соглашение №23-Ш04-13”.

Буглаков Александр Игоревич, к.ф.-м.н., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра физики полимеров и кристаллов (Москва, Россия)

Фатихова Амина Владимировна, студент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра физики полимеров и кристаллов (Москва, Россия)

Чертович Александр Викторович, д.ф.-м.н., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра физики полимеров и кристаллов (Москва, Россия), ФИЦ Химической физики РАН

Шайтан Алексей Константинович, член-корр., д.ф.-м.н., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Биологический факультет, кафедра биоинженерии (Москва, Россия)

Хохлов Алексей Ремович, академик, д.ф.-м.н., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра физики полимеров и кристаллов (Москва, Россия)

ДНК и РНК играют ключевую роль в функционировании всех живых существ. В этих высокомолекулярных соединениях, состоящих из четырех типов чередующихся друг с другом мономеров, хранится вся информация об организме, а небольшие мутации последовательностей могут приводить к колоссальным изменениям признаков и появлению новых видов. Порядок чередующихся звеньев ДНК и РНК определяет не только “код” организмов, но особенности упаковки нуклеиновых кислот, что напрямую влияет на функционирование клетки. Сложность процессов самоорганизации этих макромолекул, определяемая в том числе наличием насыщающихся взаимодействий между комплементарными парами мономеров, требует использования подходов компьютерного моделирования для понимания механизмов их структурирования. Более того, особый характер взаимодействий между основаниями нуклеиновых кислот, открывает возможности их использования для создания новых молекулярных конструкций с различной функциональностью [1]. Эффективный дизайн таких материалов также немислим без использования современных численных методов молекулярного моделирования.

В данной работе описаны основные методы крупнозернистого моделирования ДНК и РНК последовательностей, позволяющие исследовать процессы комплексообразования и структурирования в растворах нуклеиновых кислот и с хорошей точностью предсказывать равновесные характеристики таких систем. Основное внимание уделено двум подходам — модели статистической механики, реализованная в программном пакете NUPACK [2], и модели oxDNA [3], разрешаемой в рамках методов Монте-Карло и молекулярной динамики. Проведено сравнение двух методологий и описаны их возможности для направленного дизайна и предсказания свойств растворов нуклеиновых кислот.

На примере растворов олигонуклетидных последовательностей со структурной вырожденностью показано, как комбинируя методологию подходов NUPACK и oxDNA возможно оптимизировать термодинамические характеристики, такие как температуру распада комплексов, распределения комплексов по концентрациям и константы равновесия. Описана степень согласованности предсказаний крупнозернистого численного моделирования с экспериментальными данными.

Литература

1. Ramezani H., Dietz H. Building machines with DNA molecules //Nature Reviews Genetics. — 2020. — Т. 21. — №. 1. — С. 5-26.
2. Fornace M. E., Porubsky N. J., Pierce N. A. A unified dynamic programming framework for the analysis of interacting nucleic acid strands: enhanced models, scalability, and speed //ACS Synthetic Biology. — 2020. — Т. 9. — №. 10. — С. 2665-2678.
3. Ouldridge T. E., Louis A. A., Doye J. P. K. Structural, mechanical, and thermodynamic properties of a coarse-grained DNA model //The Journal of chemical physics. — 2011. — Т. 134. — №. 8.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУБУЛИНОВОГО ЦИТОСКЕЛЕТА

Н.Б. Гудимчук

gudimchuk.nb@physics.msu.ru

УДК 577.29

В докладе будут рассмотрены модели микротрубочек и их элементарных блоков – димеров белка тубулина на различных пространственно-временных масштабах: от атомарного до масштаба целой клетки. Будет показано, как компьютерное и математическое моделирование позволило прояснить механизмы динамического поведения микротрубочек и их функционирования в качестве молекулярных моторов, а также обсуждены перспективы применения компьютерных моделей для решения некоторых открытых проблем в области биофизики цитоскелета и клеточного деления.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, микротрубочки, тубулин.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 21-74-20035) с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Гудимчук Никита Борисович, д.ф.-м.н., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра биофизики (Москва, Россия)

Тубулиновый цитоскелет представляет собой внутриклеточную систему микротрубочек — цилиндрических полимеров белка тубулина, которые обладают способностью к сборке, разборке и спонтанным переключениям между этими динамическими состояниями. Благодаря своим свойствам практически во всех живых клетках микротрубочки выполняют множество жизненно важных функций: от внутриклеточного транспорта органелл и везикул до поддержания формы и внутренней организации клеток. Экспериментально показано, что во время клеточного деления разбирающиеся микротрубочки способны захватывать своими концами хромосомы и развивать существенные силы для перемещения хромосом с целью точного распределения удвоенного генетического материала материнской клетки между дочерними. Для понимания механизмов динамического поведения микротрубочек и их работы в качестве молекулярных моторов, использующих энергию гидролиза молекул гуанозинтрифосфата (ГТФ), в нашей лаборатории в соавторстве с коллективом ученых кафедры биофизики биологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, были разработаны компьютерные модели на различных пространственно-временных масштабах. С помощью метода полноатомной молекулярной динамики было показано, что молекула нуклеотида (ГТФ или ГДФ), связываясь с тубулином, мало влияет на кривизну линейной цепочки тубулинов, но определяет изгибную жесткость связи между соседними димерами тубулина [1]. Метод броуновской динамики позволил рассмотреть последствия выявленных различий в механических свойствах ГТФ- и ГДФ-тубулинов и показать, что их может быть достаточно для объяснения возможности существования микротрубочек в фазах сборки и разборки [2]. Механизмы редких переключений между сборкой и разборкой, называемые катастрофами, были исследованы с помощью стохастической модели, построенной с использованием алгоритма первой реакции Гиллеспи [3,4]. Результатом исследований стала внутренне согласованная совокупность моделей микротрубочки на пространственных масштабах от ангстрем до десятков микрометров и на временных масштабах от наносекунд до часов. Среди прочих выводов, данная многомасштабная модель указала на ранее неизвестную роль активационных барьеров взаимодействия между тубулинами. Активационные барьеры продольных и боковых связей между этими белками не только существенно влияют на кинетику сборки, разборки и переключений состояний микротрубочек, но и обеспечивают возможность эффективно преобразовывать энергию гидролиза ГТФ в механическую работу по перемещению внутриклеточных грузов, обеспечивая работу микротрубочек как молекулярных моторов. Детальное понимание работы микротрубочек позволит не только лучше понять механизмы разнообразных аспектов физиологии клетки, но откроет перспективы контроля за этими процессами для их коррекции с целью борьбы с патологиями функций цитоскелета, в том числе при онкологических заболеваниях.

Литература

1. Fedorov V. A., Orekhov P. S., Kholina E. G., Zhmurov A. A., Ataullakhanov F. I., Kovalenko I. B., & Gudimchuk N. B. Mechanical properties of tubulin intra- and inter-dimer interfaces and their implications for microtubule dynamic instability. // *PLoS computational biology*. — 2019. — V. 15. — № 8. — e1007327.
2. Gudimchuk N.B., Ulyanov E.V., O'Toole E., Page C.L., Vinogradov D.S., Morgan G., Li G., Moore J.K., Szczesna E., Roll-Mecak A., Ataullakhanov F.I., McIntosh J. R. Mechanisms of microtubule dynamics and force generation examined with computational modeling and electron cryotomography. // *Nat. Commun.* — 2020. — V. 11. — № 1. — P. 3765.
3. Gillespie D. T. A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions. // *J. Comput. Phys.* — 1976. — V. 22. — № 4. — P. 403–434.
4. Alexandrova V.V., Anisimov M.N., Zaitsev A.V., Mustyatsa V.V., Popov V.V., Ataullakhanov F.I., Gudimchuk N.B. A theory of tip structure-dependent microtubule catastrophes and damage-induced microtubule rescues. // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* — 2022. — V. 119. — № 46. — e2208294119. — P. 1-10.

ПРОСТРАНСТВЕННО-СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАФИИ ПАЦИЕНТОВ С ФАНТОМНЫМИ БОЛЯМИ

Д.Ф. Клеева, Г.А. Согоян, А.Р. Биктимиров, М.Ю. Синцов, М.А. Лебедев

dkleeva@gmail.com

УДК 612.82

В докладе будет представлен арсенал средств обработки сигнала ЭЭГ для выявления состояний, соотносящихся с интенсивностью фантомной боли у пациентов с ампутированными конечностями или с эффективностью режимов нейростимуляции, используемой для подавления боли. Среди выявленных параметров фигурируют спектральные и пространственные характеристики ЭЭГ, а также нелинейные показатели.

Одним из типичных последствий ампутации является хроническая нейропатическая боль, в частности, фантомная боль конечностей. С помощью электрической стимуляции периферических нервов нейропатическая боль может быть полностью или частично подавлена. Механизмы этих болеутоляющих эффектов, а также связь между активностью мозга и интенсивностью боли требуют дополнительной объективизации. Развитие средств нейровизуализации позволило выявить некоторые нейрофизиологические маркеры боли и ее интенсивности, однако выявляемые тенденции не всегда воспроизводятся из-за разнообразия экспериментальных дизайнов. Принимая во внимание эти противоречия, в рамках представленного исследования мы изучили эффекты стимуляции периферических нервов у трех пациентов с ампутацией верхних конечностей, отражающиеся на многоканальной электроэнцефалографии (ЭЭГ).

Условия регистрации ЭЭГ включали в себя наличие боли при выключенной стимуляции, купирование боли при включенной стимуляции, присутствие боли при включенной стимуляции, которая оказалась не эффективной, отсутствие боли при выключенной стимуляции за счет употребления обезболивающих лекарств, а также состояния с постепенным снижением или увеличением интенсивности боли. Анализ частотных и пространственных характеристик многоканальной ЭЭГ выявил увеличение мощности низкочастотной активности (в тета- или альфа-диапазонах) в постериорных отведениях у всех пациентов (Рис.1). Также наблюдалось увеличение выраженности бета-ритма у двух пациентов, причем у одного из них этот маркер соотносился с эффективностью стимуляции. Постепенное увеличение интенсивности боли сопровождалось постепенным увеличением альфа-ритма у одного из пациентов, тета-ритма — у второго пациента, а также снижением мощности бета-ритма.

Дополнительно была произведена оценка нелинейных характеристик ЭЭГ с помощью вычисления фрактальной размерности Петросьяна. У двух пациентов эффекты подавления фантомной боли были связаны с увеличением фрактальной размерности на участках, ипсилатеральных к стороне ампутации (Рис. 2, кластеры 1, 2 и 4). Кроме того, у третьего пациента наблюдалось снижение фрактальной размерности в контрлатеральных каналах в связи с подавлением фантомной боли. У второго пациента эффективная стимуляция вызвала увеличение фрактальной размерности в постериорных каналах при открытых глазах. Неэффективная стимуляция вызвала уменьшение фрактальной размерности в тех же регионах по сравнению с эффективной стимуляцией (кластер 9) и наличием фантомной боли (кластер 12).

Полученные результаты возможно интерпретировать в терминах таламокортикальной дисритмии, в результате которой боль может сопровождаться всплесками активности, отправляемыми таламусом в кору, и выражающимися в увеличении мощности тета- и альфа-ритмов. Сопровождение эффективного подавления боли увеличением выраженности бета-ритма возможно объяснить восстановлением баланса между торможением и возбуждением с учетом связи

Клеева Дария Федоровна, Сколковский институт науки и технологий (Москва, Россия)

Согоян Гурген Арамович, Центр Нейробиологии и нейрореабилитации имени Владимира Зельмана, Сколковский институт науки и технологий (Москва, Россия)

Биктимиров Артур Рамилевич, Дальневосточный федеральный университет (Владивосток, Россия)

Синцов Михаил Юрьевич, ООО «Моторика» (Москва, Россия)

Лебедев Михаил Альбертович, PhD, механико-математический факультет МГУ имени Ломоносова (Москва, Россия)

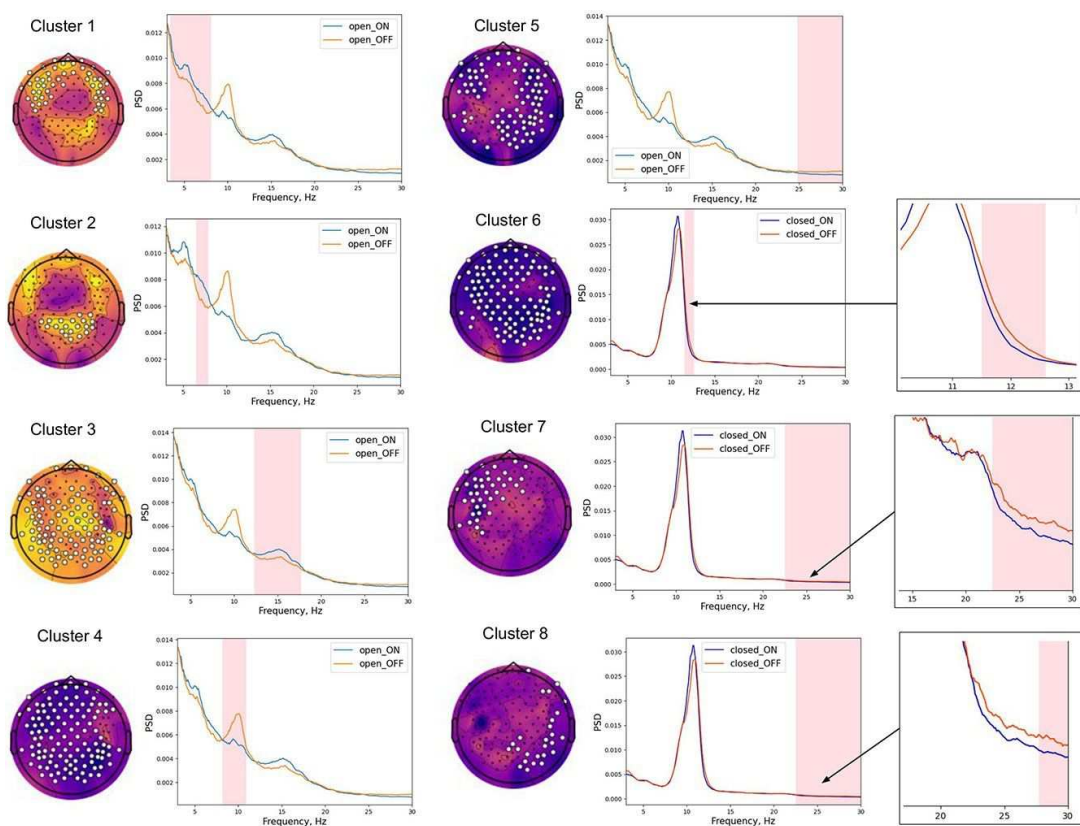


Рис. 1: Пример спектральных характеристик одного из пациентов для условий включенной и выключенной нейростимуляции для записей ЭЭГ с открытыми и закрытыми глазами. Интервалы, выделенные красным, обозначают частотные диапазоны, характеризующиеся значимыми различиями в отведениях, выделенных на схематичном изображении скальпа.

бета-ритма с активацией ГАМК-ергических нейронов. Дальнейшее расширение выборки и репродукция полученных результатов станет шагом к разработке двунаправленного интерфейса для купирования нейропатической боли, в котором на основе паттернов ЭЭГ будет реализована оптимизация сценариев стимуляции.

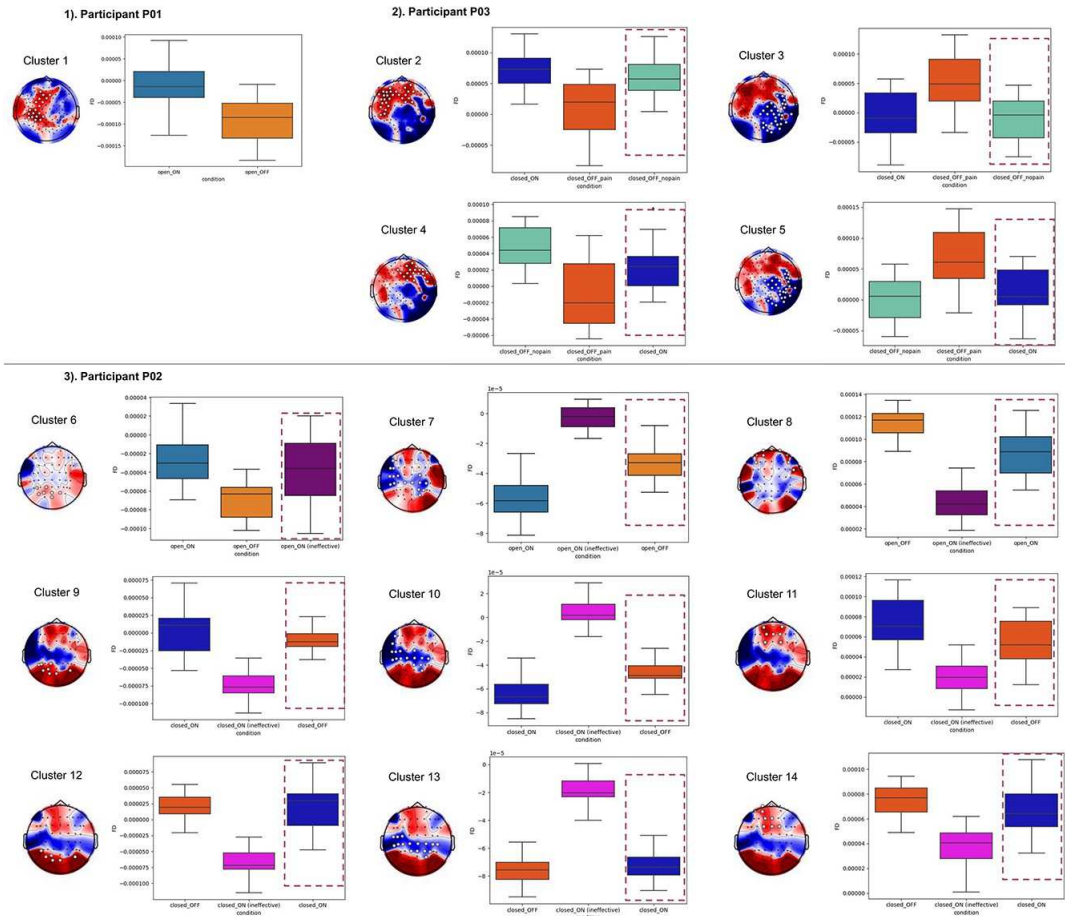


Рис. 2: Результаты фрактального анализа: кластеры со значимыми различиями между условиями. Каналы ЭЭГ, образующие кластеры со значимыми различиями, отмечены белыми точками. Топографии скальпа отображают t-значения статистического теста. Пунктирные прямоугольники представляют условия, которые не были введены в статистический анализ для заданного сопоставления.

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ В АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МЫШЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОТЕЗА

М.П. Кнышенко, Г.А. Согоян, Н.С. Пилогин, М.А. Лебедев

Mikhail.Knyshenko@skoltech.ru

УДК 57.087.1

Разработан алгоритм машинного обучения на основе логистической регрессии и метода опорных векторов. Точность алгоритма на основе предварительно записанного ЭМГ сигнала для 9 движений составляет 84,50% для участников с ампутацией, и 96,08% для нормотипичных участников. Данная работа выявила необходимость дополнительной настройки алгоритма для каждого пользователя.

Ключевые слова: электромиография, классификация движений, машинное обучение.

Электрическая активность вследствие сокращения мышц (ЭМГ) является одним из наиболее распространённых сигналов для управления бионическими протезами рук [1]. Анализ данной активности позволяет определять различные состояния руки [2]. Одним из современных подходов для контроля протеза основан на распознавании ЭМГ-паттернов сокращения нескольких мышц одновременно. Это увеличивает точность выполнения определенных движений [3], однако сужает их многообразие. Несмотря на это, такие алгоритмы не получили широкого распространения в коммерчески доступных протезах из-за вероятности ошибочной активации [4].

В исследовании принимали участие 1 человек с аплазией правой руки, 1 — с ампутацией обеих рук на уровне предплечья и 4 нормотипичных участника. Запись ЭМГ проводилась при помощи 11 электродов и усилителя NVX52 с частотой дискретизации 5 кГц. Расположение электродов представлено на рисунке 1. Электроды крепились равномерно вокруг предплечья правой руки по пять электродов выше и ниже локтя. Заземляющий электрод находился на тыльной стороне локтя. Участники выполняли 15 различных движений по 50 раз с перерывами.

Для анализа сигналов была применена предварительная обработка, включающая фильтрацию 20-250 Гц (с помощью вейвлет-преобразований) и разреживание сигнала до 30 Гц (с помощью огибающей). После этого сигнал был разделен на отдельные движения, и методом основных компонент (15 компонент) было создано признаковое пространство для машинного обучения. Затем был разработан алгоритм распознавания движений на основе методов опорных векторов и логистической регрессии. Данные каждого участника были разделены на обучающую (70%) и тестовую (30%) выборки, и алгоритмы были протестированы отдельно на каждом участнике.

Анализ показал существенные различия в паттернах ЭМГ-записей у людей с ампутацией (аплазией) и без нее в ряде движений. Эти движения были исключены из классификации. Точность алгоритма, полученная для оставшихся 9 движений, равна 84,50% для участников с ампутацией и 96,08% для участников без ампутации (рисунок 2). Объединение данных от разных участников одновременно приводило к ухудшению классификации. Это исследование подчеркнуло необходимость дополнительной настройки алгоритма с использованием методов машинного обучения для классификации движений для каждого пользователя индивидуально.

Литература

1. *N. T. Mahmood et al.* Upper prosthetic design based on EMG: A systematic review. — IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng., 978 (2020) 012025.
2. *F. Leone, C. Gentile, F. Cordella, E. Gruppioni, E. Guglielmelli, & L. Zollo* A parallel classification strategy to simultaneous control elbow, wrist, and hand movements. — J. Neuroeng. Rehabil., vol. 19, no. 1, 2022.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 21-75-30024).

Кнышенко Михаил Павлович, Центр Нейробиологии и нейрореабилитации имени Владимира Зельмана, Сколковский институт науки и технологий (Москва, Россия)

Согоян Гурген Арамович, Центр Нейробиологии и нейрореабилитации имени Владимира Зельмана, Сколковский институт науки и технологий (Москва, Россия)

Пилогин Никита Сергеевич, Центр Нейробиологии и нейрореабилитации имени Владимира Зельмана, Сколковский институт науки и технологий (Москва, Россия)

Лебедев Михаил Альбертович, д.б.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)



Рис. 1: Расположение электродов на руке участника с ампутацией обеих рук на уровне предплечья.

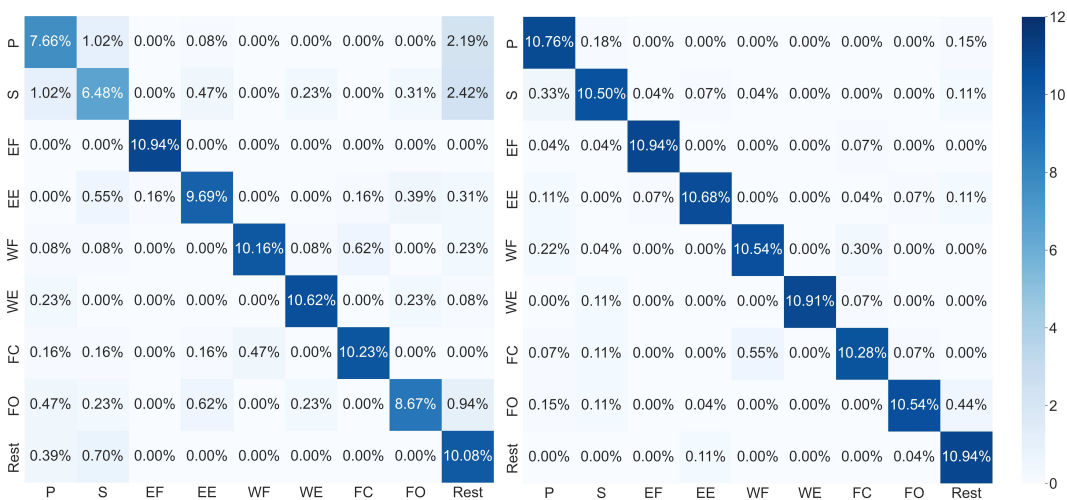


Рис. 2: Матрица ошибок для участников с ампутацией (слева) и без (справа). По вертикали указаны движения, которые участники должны были совершить, а по горизонтали — движения, предсказанные алгоритмом. P — пронация, S — супинация, EF/EE — сгибание/разгибание локтя, WF/WE — сгибание/разгибание кисти, FC/FO — сжатие/разжатие кулака, Rest — состояние покоя.

3. Todd A. Kuiken, Laura A. Miller, Kristi Turner, & Levi J. Hargrove A Comparison of Pattern Recognition Control and Direct Control of a Multiple Degree-of-Freedom Transradial Prosthesis. — IEEE J Transl Eng Health Med., vol. 4, p. 1-8, 2016.

4. M. R. Mohebbian et al. A comprehensive review of myoelectric prosthesis control. – arXiv:2112.13192 [eess.SP], 2021.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ МОРФОЛОГИИ ПОЧВЕННЫХ КОНКРЕЦИЙ

Н.О. Ковалева, И.В. Ковалев, Е.А. Звычайная

natalia_kovaleva@mail.ru, kovalevmsu@mail.ru

УДК 631.4.432.2–3

С помощью математических методов обработки трехмерных изображений рентгеновской томографии впервые получена уникальная количественная информация о структуре порового пространства железисто-марганцевых конкреций из агросерых почв Русской равнины.

Ключевые слова: железисто-марганцевые конкреции, рентгеновская томография, трехмерные изображения, характеристика Эйлера-Пуанкаре.

Введение. Для детального исследования агрофизических и гидрологических свойств почв в последние десятилетия все чаще привлекаются современные неразрушающие методы рентгеновской томографии. Одним из самых надежных диагностических критериев оценки степени гидроморфизма почв являются железисто-марганцевые конкреции (ортштейны). Несмотря на то, что их генезису посвящена обширная литература, на протяжении последних 100 лет, по-прежнему, обсуждаются два типа механизмов ортштейнообразования: 1) хемогенный и 2) прямой или опосредованный биогенный. Развитие методов тонкой биохимии, метагеномного анализа, электронной микроскопии позволило глубже понять процесс ортштейнообразования, но не объясняет феномен устойчивости ортштейнов во времени и зависимость от влажности почв. Исследование же внутренней структуры ортштейнов и получение количественной информации о кривизне поверхности, порозности, площади удельной поверхности возможно лишь с помощью математических методов обработки трехмерных изображений, например, алгоритма интегральных и топологических характеристик.

Объекты и методы исследования. Объектами исследования послужили автоморфные и гидроморфные серые лесные почвы Подольско-Коломенского ополья Ступинского района Московской области (55003'34"с.ш., 38010'51"в.д.). Для определения содержания и состава ортштейнов отбирали смешанные образцы из слоя 0-10 см. Выделенные из почвы конкреции отмывали дистиллированной водой, высушивали на воздухе и отделяли от скелетных включений. Компьютерная микротомография (мКТ) образцов ортштейнов проводилась на промышленной системе GE Phoenix v|tome|xL 240/180. Во время съемки образец пошагово поворачивается на платформе, в то время как нанофокусная рентгеновская трубка и детектор неподвижны. Запись рентгеновских проекций осуществляется детектором на основе фотодиодной матрицы размером 2024 × 2024 с размером элемента 0,2 × 0,2 мм со скинтллятором из CsI. Съемки проводилась при следующих условиях: ускоряющее напряжение: 100 кВ. Ток: 99 мкА. Геометрическое увеличение: 66.66x. Размер вокселя: 3мкм. Экспозиция: 500мс. Количество усредняемых снимков: 6. Количество снимков на 1 оборот: 2400. Программное обеспечение GE Phoenix datos|x reconstruction

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23–24–00155)

Ковалева Наталья Олеговна, д.б.н., доцент, лаборатория экологического почвоведения, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Ковалев Иван Васильевич, д.с.-х.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет почвоведения, кафедра физики и мелиорации почв (Москва, Россия)

Звычайная Елизавета Андреевна, аспирант, кафедра физики и мелиорации почв МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

использовалась для преобразования серии из 2400 двумерных рентгенографических изображений в трехмерную модель. Для этого проводилась предобработка изображений.

В силу неоднородной внутренней структуры ортштейна рентгеновская плотность конкреций изменяется в широком диапазоне, что отражает гистограмма распределения количества пикселей от величины яркости пикселя. При проведении серии экспериментов яркость и контрастность изображений не являются постоянными, даже на одной установке. Поэтому на первом этапе обработки проводился линейный сдвиг контраста для всех изображений. На втором этапе создавалась маска для удаления удерживающего пенала и окружающего ортштейн воздушного пространства. Затем смещением порога бинаризации выделялся ортштейн, и после чего методами морфологического открытия и закрытия удалялись остаточные шумы. Для того, чтобы перевести серию двумерных рентгенографических изображений в трехмерную модель необходимо провести процесс бинаризации – разделить объект на две фазы: представляющую исследовательский интерес и фоновый материал. Таким образом, нами были выбраны 4 порога бинаризации от самых плотных вкраплений до наименее плотных.

Для анализа томографических изображений трехмерных структур и описания геометрических и топологических свойств ортштейна предлагаются функционалы Минковского, а именно 1, 2, и 3 числа Бетти. В случае трехмерного пространства эти функционалы соответствуют объему вкраплений, площади поверхности, интегральной средней кривизне поверхности и Эйлеровой характеристике вкраплений ортштейна.

Числа Бетти:

b_0 — количество связных компонент (отдельных пор)

b_1 — количество связей в поровом пространстве (разветвленность)

b_2 — количество кластеров связности твердой фазы в объекте.

Характеристика Эйлера — это знакопеременная сумма чисел Бетти:

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 \quad (1)$$

$$V - E + F = 2 \quad (2)$$

Результаты исследований. В профилях всех исследуемых почв обнаружены железисто-марганцевые конкреционные новообразования (ортштейны) преимущественно округлой формы размером от 1 до 5 мм в диаметре ржаво-охристого, бурого, серого и черно-бурого оттенков. Ортштейны крупных размеров (4-6 мм в диаметре) часто приобретают вытянутую овальную и бобовидную форму. Причина округлости вскрывается с помощью метода компьютерной микро-томографии, позволяющего обнаружить отчетливый центр концентрирования и хорошо выраженные кольца нарастания колоний микроорганизмов в мелких фракциях (1-3 мм) ортштейнов, их концентрически-тонкослоеватое сложение и самые высокие показатели округлости — максимальную кривизну поверхности. Однако в более крупных ортштейнах овальной формы наблюдается не один центральный, а несколько перефирических (2-3) менее выраженных центров концентрирования и наименьшие показатели округлости или кривизны поверхности. Средняя кривизна поверхности твердой фазы внутри пор означает интегральную сумму величин, обратных радиусу кривизны поверхности, и усредненную по трем измерениям — x , y , z .

$$\int_S \frac{1}{R} ds = \int_S R^{-1} ds \quad (3)$$

На основе количественных подходов по использованию интегральных методов Минковского и чисел Бетти удалось установить, что порозность конкреций также неодинакова: в крупных ортштейнах процент пор меньше, чем в мелких разностях (1,65-2,42% и 3,90-4,21% соответственно). Площадь поверхности нарастает по мере увеличения размеров новообразований.

Наибольший интерес представляет и пористость, и объем ортштейнов, полученных методом томографии и подсчитанных методами интегральной геометрии.

Пористость ортштейнов считалась как отношение количества пикселей пор N_{px} (пустого пространства, не содержащего каких-либо веществ) к количеству пикселей N_{px} материала, взятого вместе с количеством пикселей пор N_{px} (в знаменателе оно незначительно и может рассматриваться как погрешность):

$$\varepsilon = Npx_{\text{пор}} / (Npx_{\text{пор}} + Npx_{\text{материала}}) \cdot 100\% \quad (4)$$

Пористость ортштейнов, определенная таким методом, неодинакова: в более крупных ортштейнах процент пор меньше, чем в мелких разностях (1,65–2,42% и 3,90–4,21% соответственно). Это подтверждается и томографическими изображениями ортштейнов

Объем ортштейна, мм³, рассчитывается программой как Npx материала, то есть равен количеству «непустых» пикселей, содержащих материал. Объем конкреций также неодинаков: с увеличением размера ортштейнов наблюдается четкое увеличение объема конкреций. Это закономерно благодаря связи размеров и объема ортштейнов: чем больше размер ортштейна – тем больше его объем, и также прослеживается по томографическим изображениям. Показано, что более крупным ортштейнам характерно нарастание площади поверхности ортштейнов.

Метод томографии позволил выявить влияние степени гидроморфизма почв на характеристики ортштейнов. Ранее нами было показано, общее содержание и формы железисто-марганцевых конкреций в гумусовых горизонтах отражают степень гидроморфизма почв: их количество минимально в «автоморфной» (глубокооглеенной) почве – 0,3 г на 100 г почвы и максимально в наиболее влажной глееватой почве – 2 г на 100 г почвы. Рентгеновская компьютерная микротомография показала, что объем и средняя кривизна снижаются с проявлением автоморфных свойств у глубокооглеенной почвы на микроповышении. Величина площади поверхности конкреций снижается по мере усиления гидроморфизма почв ввиду большей компактизации вещества ортштейна при усиленном процессе ортштейнообразования.

Рентгеновская компьютерная микротомография позволяет установить и изменение характеристик ортштейнов под влиянием дренажа. Дренаж оказывает влияние на водный режим почвы, повышая доступность почвенного воздуха для растений и создавая благоприятные условия для разрушения ортштейнов. Это приводит к изменению объема, площади поверхности, средней кривизны и пористости ортштейнов. Уменьшение количества воды в почве при дренаже приводит к сжатию почвенных частиц и разрушению ортштейнов. Средняя кривизна ортштейнов изменяется при осушении. Уменьшение количества воды в почве снижает напряжение на границах раздела фаз, что приводит к снижению кривизны ортштейнов. Пористость конкреций также изменяется при дренаже вследствие разрушения. Уменьшение количества воды в почве увеличивает количество воздуха в порах, что приводит к разрушению ортштейнов и увеличению пористости. Таким образом, дренаж оказывает комплексное влияние на почвенные свойства, изменяя объем, площадь поверхности, среднюю кривизну и пористость ортштейнов.

Итак, методы математической обработки снимков рентгеновской компьютерной микротомографии (алгоритм интегральных и топологических характеристик) позволили дать количественную морфологическую характеристику почвенных конкреций (ортштейнов) и возможность понять феномен устойчивости ортштейнов во времени и в зависимости от степени гидроморфизма почв.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ И БРОУНОВСКАЯ ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕЛКОВ В ФОТОСИНТЕЗЕ

И.Б. Коваленко, В.А. Федоров, С.С. Хрущев, Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин

ikovalenko78@gmail.com

УДК 577.38

Предложен оригинальный подход к моделированию образования комплексов фотосинтетических электрон-транспортных белков, позволяющий благодаря совместному использованию методов броуновской и молекулярной динамики, а также кластерного анализа, предсказать структуру образовавшегося комплекса и выявить молекулярные механизмы, приведшие к его образованию.

Ключевые слова: пластоцианин, белок-белковое взаимодействие, молекулярная динамика.

Взаимодействия между белками лежат в основе большинства биологических процессов. Образование белок-белкового комплекса — это сложный многостадийный процесс, требующий учета множества факторов, таких как дальнедействующие электростатические взаимодействия между поверхностями белков, геометрическая и химическая комплементарность областей связывания, молекулярная подвижность в белок-белковом интерфейсе, гидрофобные взаимодействия. Нами разработан оригинальный подход, позволяющий, благодаря совместному использованию методов броуновской и молекулярной динамики, а также кластерного анализа, предсказать структуру образовавшегося комплекса и молекулярные механизмы, приведшие к его образованию. В данном подходе метод броуновской динамики используется для моделирования образования двумя белками столкновительного комплекса с учетом процессов диффузии и электростатических взаимодействий, а молекулярная динамика используется для моделирования трансформации предварительного комплекса в финальный с учетом подвижности атомов, конформационных изменений и молекул растворителя.

В данной работе с использованием комбинированного подхода броуновской и молекулярной динамики и иерархического кластерного анализа были исследованы механизмы образования комплекса пластоцианина и цитохрома *f* высших растений, зеленых микроводорослей и цианобактерий. Оказалось, что в высших растениях и зеленых водорослях при сближении молекул белков сначала формируется электростатическая связь, удерживающая молекулу пластоцианина вблизи гема цитохрома *f*. При последующем вращении молекулы пластоцианина вокруг этой электростатической связи атом меди пластоцианина приближается к гему цитохрома *f*, образуя устойчивую конфигурацию, которая стабилизируется гидрофобными взаимодействиями. В случае цианобактерии *Nostoc*, молекула пластоцианина приближается к цитохрому *f* в случайной ориентации, но с направленными друг к другу активными центрами, а стабилизация комплекса пластоцианина с цитохромом *f* происходит благодаря гидрофобным взаимодействиям и сопровождается конформационными изменениями петли G188E189D190 цитохрома *f*. Для белков цианобактерии *P. laminosum* электростатическая предварительная ориентация молекул при сближении вообще не была обнаружена, что указывает на то, что при образовании комплексов этих белков превалирует случайное броуновское движение, а не дальнедействующие электростатические взаимодействия.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Коваленко Илья Борисович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Федоров Владимир Андреевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Хрущев Сергей Сергеевич, к.б.н., ведущий научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Ризниченко Галина Юрьевна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Рубин Андрей Борисович, д.б.н., академик РАН, профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Таким образом, мы показали, что, несмотря на структурное сходство исследуемых электрон-транспортных белков в разных фотосинтезирующих организмах, сложность молекулярных механизмов образования комплексов возрастает в следующей последовательности: вегетативные клетки и акинеты цианобактерий — гетероцисты цианобактерий — зеленые водоросли — цветковые растения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН НЕЙРОННОЙ АКТИВНОСТИ В МОТОРНОЙ КОРЕ ОБЪЯСНЯЕТ ВРАЩАТЕЛЬНУЮ ДИНАМИКУ

Е.А. Кузьмина, Д.О. Крюков, М.А. Лебедев

ekaterina.kuzmina@skoltech.ru, dmitrii.kriukov@skoltech.ru, mikhail.lebedev@math.msu.ru

УДК 57.087.1

В исследованиях моторного кортекса существует две противоборствующих модели нейронной активности при движении конечностей: репрезентативная и динамическая. Используя метода понижения размерности под названием joint PCA (вращательный метод главных компонент) для анализа нейронных осцилляций, мы обнаружили, что вращательная динамика может быть описана паттерном “бегущей волны”. Основываясь на этом мы разработали меру, позволяющую количественно оценивать вращения — Gyration number. Наше исследование показывает, что то, что считалось разными явлениями — динамика вращения и бегущие волны — на самом деле является одним и тем же. Этот вывод делает необходимым переоценку их концептуального разделения во всех предыдущих исследованиях.

Ключевые слова: моторная кора, вращательная динамика, jPCA, движения рук.

Introduction

Motor cortical areas, including M1, PMC, and SMA, are essential for limb movement, with advances in neurophysiology enabling the study of large-scale neural dynamics and their role in motor control. Research has produced models like the representational model, which links neuronal activity to specific movement parameters, aiding in brain-computer interface (BCI) development [1, 2]. However, the variability in motor cortical activity has prompted the exploration of dynamical systems such as the Optimal Feedback Control (OFC) model, focusing on population-level neural activity [3, 4]. The identification of rotational dynamics challenges traditional models, suggesting a more intricate system governs motor control [5,6]. Our study adopts a data-driven approach to further understand rotational dynamics in neural data, employing the gyration number to elucidate these mechanisms beyond traditional models.

Results

Our research distinguishes between *condition-dependent rotation*, which is unique to specific neural dynamics of a single condition, and *structural rotation*, where multiple conditions share co-directional rotational patterns, resembling a “sheaf” of trajectories. This distinction is vital for comprehending rotational dynamics in neural data. We examine both types of rotations, identifying the conditions required for their manifestation and discussing how dimensionality reduction techniques may limit the analysis of these dynamics (Рис. 1a).

Sufficient Requirements for One-Condition Rotation

This section outlines the conditions under which rotational dynamics emerge, focusing on the travelling wave model’s role in generating these dynamics, as highlighted in prior studies [7]. By analyzing neuronal activity over time through peri-event time histograms (PETH) and identifying a

Кузьмина Екатерина, аспирант, Центр нейробиологии и реабилитации мозга (Москва, Россия)

Крюков Дмитрий, аспирант, Центр молекулярной и клеточной биологии (Москва, Россия)

Лебедев Михаил Альбертович, д.б.н., профессор, механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова; Институт эволюционной физиологии и биохимии им. И.М. Сеченова РАН (Москва, Россия)

travelling wave pattern, we establish this pattern as sufficient for rotational dynamics. The model uses time-shifted Gaussian functions to simulate neural activation waves:

$$f(k, t, \sigma) = \exp, \quad (1)$$

where k represents wave peak times, σ the wave width, and

$$k = k(j, a, b) = bj + a$$

with j as the neuron index, b the wave speed, and a an initial offset. The absence of wave propagation ($b = 0$) leads to a singular covariance matrix, eliminating rotational dynamics, while high wave speeds ($b \rightarrow \infty$) disrupt rotational structures.

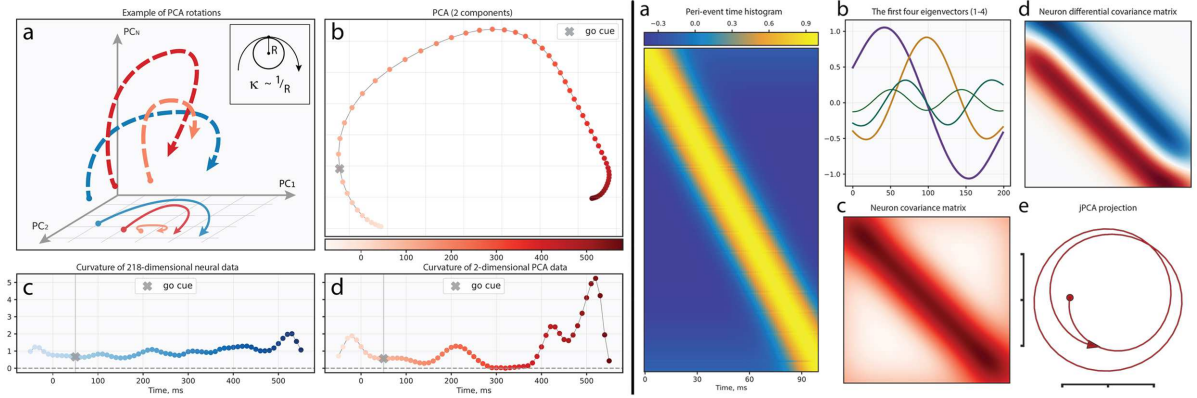


Рис. 1: 1st part: Criteria for single-condition rotation. (a) Potential trajectory distortions by dimensionality reduction, with an inset illustrating curvature. (b) PCA1-2 projection for one condition. (c) Curvature over time of the original 218-d trajectory. (d) Curvature of the 2-d projection. Data for panels b–d sourced from [5]. 2nd part: The sufficient requirements for one condition rotation. (a) PETH of the simulated Gaussian travelling wave. (b) Oscillating eigenvectors of the Toeplitz Neuron covariance matrix structure corresponding to the simulated travelling wave. (c) Toeplitz covariance matrix for the simulated travelling wave. (d) Toeplitz-like differential covariance matrix XX^{*T} for the simulated travelling wave. (e) jPCA projection of the PETH data demonstrates the proper rotational dynamics.

We present evidence of rotational dynamics through both weak and strong cases. Weak evidence comes from a scenario with only adjacent neuron correlations, resulting in a tridiagonal Toeplitz covariance matrix:

$$\lambda_j = 1 + 2\rho \cos \frac{j\pi}{N+2}, \quad \nu_{jl} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{j\pi}{N+1}, \quad (2)$$

indicating rotational dynamics through oscillatory eigenvectors, or “horseshoes”. Finite wave speeds maintain this eigenstructure.

Strong evidence is provided by analyzing the system matrix $X^* = MX$ under a skew-symmetric condition, $M = -M^T$, indicating rotation. A nearly skew-symmetric neuron differential covariance matrix XX^{*T} in our model confirms rotational dynamics in travelling wave data, proving travelling waves as a sufficient mechanism for one-condition rotation.

Model-Based Validation of the Approach

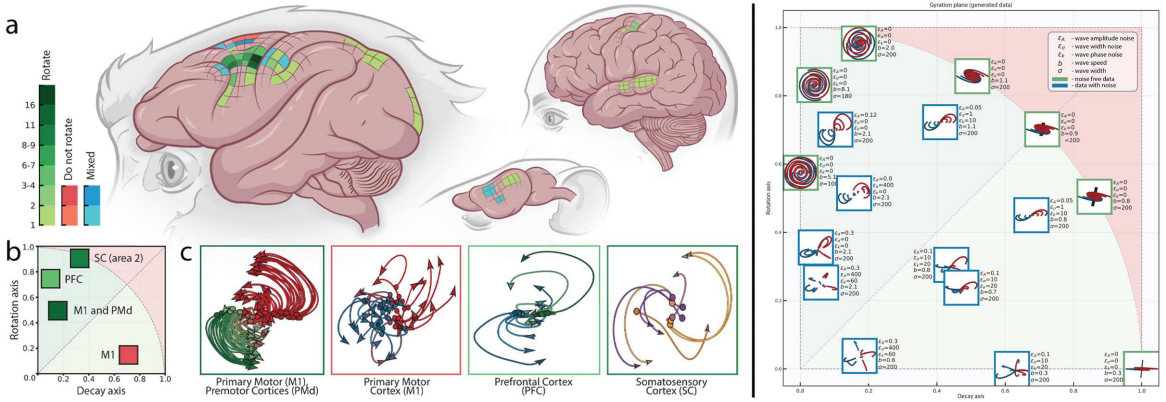
We validate our theoretical framework on structural rotations using an enhanced naive travelling wave model to simulate structural rotations under various conditions (see Methods). This model employs dataset $D \in R^{c \times t \times n}$, covering c conditions and incorporates parameters such as amplitude A_l , phase shift a , wave speed b , and width σ with perturbations ϵ_A , ϵ_k , and ϵ_σ , to simulate condition-specific travelling waves:

$$D = f(t, j, A_l, a, b, \sigma, \epsilon_A, \epsilon_k, \epsilon_\sigma) | j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, c. \quad (3)$$

Our findings indicate that reduced wave speeds result in spiral rotations, whereas increased speeds and reduced widths yield purely imaginary rotations. Noise complicates dynamics, necessitating higher dimensionality for clarity. Our analysis underscores the Gyration Plane’s utility in assessing structural rotations without dimensionality reduction, with adjustments in A_l and a affecting noise resistance and rotational decay.

Discussion

Our study explores rotational dynamics in neural datasets without relying on existing dynamical or representational models, focusing instead on traveling waves and introducing the gyration number for analyzing rotations. We emphasize curvature as crucial for detecting rotations, noting that dimensionality reduction can distort these dynamics. Our findings indicate that traveling waves play a key role in both single-condition and structural rotations, with the gyration number facilitating direct dataset comparisons. This approach underscores the significance of traveling waves in rotational dynamics while advising caution due to the phenomenological nature of our analysis. Our work aims to differentiate between data descriptions and neurophysiological mechanisms, highlighting that data models do not equate to models of underlying systems.



References

1. Fetz, E. E. Are movement parameters recognizably coded in the activity of single neurons? *Behav. brain sciences* 15, 679–690 (1992).
2. Kalaska, J. F. & Crammond, D. J. Cerebral cortical mechanisms of reaching movements. *Science* 255, 1517–1523 (1992).
3. Scott, S. H. The computational and neural basis of voluntary motor control and planning. *Trends cognitive sciences* 16, 541–549 (2012).
4. Cluff, T. & Scott, S. H. Apparent and actual trajectory control depend on the behavioral context in upper limb motor tasks. *J. Neurosci.* 35, 12465–12476 (2015).
5. Churchland, M. M. et al. Neural population dynamics during reaching. *Nature* 487, 51–56 (2012).
6. Hurwitz, C., Kudryashova, N., Onken, A. & Hennig, M. H. Building population models for large-scale neural recordings: Opportunities and pitfalls. *Curr. Opin. Neurobiol.* 70, 64–73 (2021).
7. Lebedev, M. A. et al. Analysis of neuronal ensemble activity reveals the pitfalls and shortcomings of rotation dynamics. *Sci. Reports* 9, 1–14 (2019).

НЕЙРОИНТЕРФЕЙСЫ ДЛЯ РЕАБИЛИТАЦИИ**М.А. Лебедев, Д.Ф. Клеева***mikhail.a.lebedev@gmail.com, dkleeva@gmail.com*

УДК 57.087.1

Нейроинтерфейсы — это устройства, считывающие информацию из мозга, декодирующую ее при помощи математических алгоритмов, и переводящую в сигналы к внешним устройствам, таким как протезы конечностей, экзоскелеты, или электрические стимуляторы мышц. Нейроинтерфейсы также могут передать информацию в нервную систему, как правило посредством электрической стимуляции нервной ткани. В последнее время растет число разработкой на основе нейроинтерфейсных технологий, предназначенных для реабилитации больных с неврологическими поражениями. Хотя клинические испытания показывают эффективность такого подхода, пока еще не сформировалось понимание оптимальных методов применения нейроинтерфейсов. В докладе освещены некоторые принципы медицинских нейроинтерфейсов: улучшение пластичности мозга по механизму Хебба, использование зрительно-моторной трансформации, и использование ольфакторной нейрообратной связи.

Ключевые слова: нейроинтерфейс, реабилитация, нейростимуляция, пластичность мозга.

Начиная с конца прошлого века, происходит бурное развитие нейроинтерфейсов: устройств, подключающихся к мозгу, считывающих из него информацию, а также посылающих информацию обратно в мозг с помощью нейростимуляции [1]. Одним из интересных и многообещающим применением нейроинтерфейсов является их применение для реабилитации больных, страдающих от таких тяжелых недугов, как спинномозговая травма, инсульт и нейродегенеративные заболевания [6]. Хотя множатся сведения о том, что нейроинтерфейсы действительно содействуют реабилитации [7], четкого понимания, как оптимизировать такие системы, нет. В этой связи необходимо подчеркнуть, что основной целью добавления нейроинтерфейсов в программу реабилитации является более грамотное управление мозговой пластичностью по Хеббиевому принципу: синхронная активность взаимодействующих нейронов приводит к укреплению связи между ними [3]. Действительно, нейроинтерфейс считывает активность мозга, что позволяет синхронизовать эту активность с терапевтическими воздействиями, такими как механотерапия и нейростимуляция, и вызвать пластичность.

Успешной реализацией такой пластичности является нейротренажер, сочетающий нейроинтерфейс P300 с робототехническим устройством для перемещения парализованной конечности [2]. Этот тренажер основан на принципе зрительно-моторной трансформации: первоначально цель движения кодируется зрительными зонами в ретинотопных координатах, но затем она трансформируется в другие системы координат, не привязанные к глазам, и наконец переводится в активацию мышц конечности [5]. Как показали клинические испытания, такой тренажер эффективен для реабилитации больных после инсульта, поскольку позволяет считывать нейрональные сигналы с интактных зрительных и париетальных зон коры и постепенно реабилитировать всю цепочку зрительно-моторной трансформации за счет Хеббиевой пластичности. Создан и «убыстренный» тренажер, действующий по подобному принципу, в котором нет робототехнического устройства, но реабилитационный эффект создается за счет воображения движений в ответ на зрительные стимулы [12].

В целом, двунаправленные нейроинтерфейсы, в которых есть поток информации от мозга к внешнему устройству, и обратная связь в том или ином виде от внешнего устройства к мозгу, наиболее эффективны как средство реабилитации. В этой связи представляет огромный интерес нейростимуляция, позволяющая создавать искусственные тактильные ощущения [11] и подавлять болевые синдромы [4]. В будущем нейростимуляция центров мотивации и положительных эмоций позволит существенным образом влиять на процессы нейрональной пластичности и ускорять нейрореабилитацию при тяжелых поражениях нервной системы.

Лебедев Михаил Альбертович, д.б.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет; Институт эволюционной физиологии и биохимии им. И.М. Сеченова РАН (Москва, Россия)

Клеева Дария Федоровна, MScI, МГУ имени М.В. Ломоносова, институт искусственного интеллекта (Москва, Россия)

Поиск новых подходов к нейроинтерфейсам также очень важен для создания эффективных методов нейрореабилитации. В этой связи представляет значительный интерес обонятельный вход, позволяющий активировать древние структуры мозга, существенно влияющие на механизмы памяти и эмоций [10]. Так показано, что задача сравнения обонятельных стимулов модулирует фронтальный тета ритм [9]. Более того, на основе ольфакторных стимулов может быть построена система нейрообратной связи [8]. В будущем, ольфакторные нейроинтерфейсы будут применены для реабилитации при деменции и тем самым внесут в вклад в программу активного долголетия. В настоящее время нейроинтерфейсные технологии стоят лишь в начале своего развития, и их дальнейший успех будет определяться тем, насколько эффективно мы будем применять базовые нейрофизиологические принципы, новые технологии и математические методы.

Литература

1. *Левицкая О. С., Лебедев М. А.* Интерфейс мозг-компьютер: будущее в настоящем // Вестник Российского государственного медицинского университета. — 2016. — №. 2. — С. 4-16.
2. *Bulanov V. et al.* Visuomotor transformation with a P300 brain-computer interface combined with robotics and virtual reality: A device for post-stroke rehabilitation // Available at SSRN 3811232. — 2021.
3. *Hebb D. O.* The organization of behavior; a neuropsychological theory. — 1949.
4. *Kleeva D. et al.* Modulations in high-density EEG during the suppression of phantom-limb pain with neurostimulation in upper limb amputees // Cerebral Cortex. — 2024. — Т. 34. — №. 2. — С. bhad504.
5. *Lacquaniti, Caminiti.* Visuo-motor transformations for arm reaching // European Journal of Neuroscience. — 1998. — Т. 10. — №. 1. — С. 195-203.
6. *Lebedev M. A., Nicolelis M. A. L.* Brain-machine interfaces: From basic science to neuroprostheses and neurorehabilitation // Physiological reviews. — 2017. — Т. 97. — №. 2. — С. 767-837.
7. *Mane R., Chouhan T., Guan C.* BCI for stroke rehabilitation: motor and beyond // Journal of neural engineering. — 2020. — Т. 17. — №. 4. — С. 041001.
8. *Medvedeva A. et al.* The olfactory-based neurofeedback of the EEG alpha rhythm // bioRxiv. — 2023. — С. 2023.08. 30.555545.
9. *Morozova M. et al.* An olfactory-based Brain-Computer Interface: electroencephalography changes during odor perception and discrimination // Frontiers in Behavioral Neuroscience. — 2023. — Т. 17. — С. 1122849.
10. *Ninenko I. et al.* An experimental paradigm for studying EEG correlates of olfactory discrimination // Frontiers in Human Neuroscience. — 2023. — Т. 17. — С. 1117801.
11. *Soghoyan G. et al.* Peripheral nerve stimulation enables somatosensory feedback while suppressing phantom limb pain in transradial amputees // Brain Stimulation. — 2023. — Т. 16. — №. 3. — С. 756-758.
12. *Syrov N. et al.* Motor cortex activation during visuomotor transformations: evoked potentials during overt and imagined movements // Cerebral Cortex. — 2024. — Т. 34. — №. 1. — С. bhad440.

ПРЕДСКАЗАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ЭКСПРЕССИИ ГЕНОВ В ЕДИНИЧНЫХ КЛЕТКАХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

Е.Е. Маркелова, Д.В. Антонец, А.Р. Минин, Ю.В. Вяткин, Д.Н. Штокало,
Ю.А. Медведева, В.Е. Раменский

markelova.ke@gmail.com, ramensky@gmail.com

УДК 577.21

Современные модели глубокого обучения (например, автокодировщик stVAE) позволяют предсказывать профили экспрессии генов в единичных клетках при изменении условий, например, в результате воздействия лекарственных препаратов.

Ключевые слова: секвенирование единичных клеток, пертурбации, глубокое обучение, stVAE.

Быстро развивающийся метод секвенирования РНК единичных клеток позволяет получить более полные транскриптомные профили клеточных типов, чем традиционный метод РНК-секвенирования ткани (bulk) [1]. Данные, полученные этим методом, используются для кластеризации клеток, идентификации новых типов клеток, анализа развития клеток и изучения их реакции на различные воздействия.

Профиль экспрессии клетки можно рассматривать как результат, определяемый совокупностью клеточных признаков — атрибутов, таких как тип клетки, время жизни клетки, тканевая локализация клетки и пертурбации, например лекарственные или механические воздействия. Изучение таких профилей экспрессии помогает понять ключевые биологические процессы. Однако проведение экспериментов с большим количеством образцов, тканей и клеток сопряжено со многими сложностями и затратами. Модели глубокого обучения предлагают альтернативу, позволяя генерировать предсказания профилей экспрессии генов в клетках с изменёнными атрибутами в компьютерных симуляциях, опираясь на уже имеющиеся данные.

В рамках данной работы был разработан пайплайн для анализа и визуализации данных секвенирования РНК единичных клеток, включающий методы обработки и фильтрации данных, кластерного анализа, анализа дифференциальной экспрессии генов и дифференциальной предсказуемости клеточных типов. Используя этот подход, были изучены данные секвенирования единичных клеток, обработанных лекарственным препаратом — блокатором $IL-1\beta$. На основе этого набора данных была обучена модель stVAE (style transfer variational autoencoder, вариационный автокодировщик с переносом стилей) [2], архитектура которой основана на расширенном вариационном автокодировщике [3] и Y-образном автокодировщике [4].

Полученная модель позволяет получить ряд практических результатов. Во-первых, получаемые профили и распределения клеток могут быть биологически информативными. Во-вторых, появляется возможность генерировать предсказания с альтернативными клеточными атрибутами для существующих данных, например, предсказывать воздействия лекарств. Симуляция при различных атрибутах также поможет лучше понять биологические механизмы, обусловленные воздействиями. В-третьих, такой подход позволит предсказывать экспрессию генов при изменении количественных клеточных атрибутов, находя зависимости, например, от времени воздействия лекарств или их дозы. В-четвёртых, модель позволит распознавать пертурбации, перенесённые клеткой, если они заранее неизвестны. И многое другое.

Маркелова Екатерина Евгеньевна, МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт перспективных исследований проблем искусственного интеллекта и интеллектуальных систем (Москва, Россия); Московский физико-технический институт (НИУ) (Москва, Россия)

Антонец Денис Викторович, к.б.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт перспективных исследований проблем искусственного интеллекта и интеллектуальных систем (Москва, Россия)

Минин Александр Романович, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт перспективных исследований проблем искусственного интеллекта и интеллектуальных систем (Москва, Россия)

Вяткин Юрий Викторович, МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт перспективных исследований проблем искусственного интеллекта и интеллектуальных систем (Москва, Россия)

Штокало Дмитрий Николаевич, МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт перспективных исследований проблем искусственного интеллекта и интеллектуальных систем (Москва, Россия)

Медведева Юлия Анатольевна, к.б.н., ФИЦ биотехнологии РАН (Москва, Россия)

Раменский Василий Евгеньевич, к.ф.-м.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт перспективных исследований проблем искусственного интеллекта и интеллектуальных систем (Москва, Россия)

Следующие этапы работы включают в себя валидацию результатов модели и сравнение эффективности модели с другими существующими подходами для предсказания профилей экспрессии генов в клетках с изменёнными атрибутами. Также мы планируем разработать рациональные подходы для анализа биологической интерпретируемости и осмысленности предсказанных данных.

Литература

1. *Yu X. et al.* Statistical and Bioinformatics Analysis of Data from Bulk and Single-Cell RNA Sequencing Experiments // *Methods Mol. Biol.* Clifton NJ. 2021. Vol. 2194. P. 143–175.
2. *Russkikh N. et al.* Style transfer with variational autoencoders is a promising approach to RNA-Seq data harmonization and analysis // *Bioinformatics.* 2020. Vol. 36, № 20. P. 5076–5085.
3. *Sohn K., Lee H., Yan X.* Learning Structured Output Representation using Deep Conditional Generative Models // *Advances in Neural Information Processing Systems.* Curran Associates, Inc., 2015. Vol. 28.
4. *Patacchiola M., Fox-Roberts P., Rosten E.* Y-Autoencoders: Disentangling latent representations via sequential encoding // *Pattern Recognit. Lett.* 2020. Vol. 140. P. 59–65.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОБЛЕМАХ ГЕМОСТАЗА И ТРОМБОЗА

М.А. Пантелеев

mapanteleev@yandex.ru

УДК 51-76

Система гемостаза человек представляет собой совокупность клеточных и гуморальных механизмов, направленных на остановку кровотечения при повреждении. Мы рассмотрим современные проблемы компьютерного моделирования этой системы в норме и патологии.

Ключевые слова: гемостаз, тромбоз, компьютерная системная биология, биореология, уравнение переноса.

Нарушения целостности сосудистой системы человека вследствие ранения ведет к активации защитного физиологического процесса — гемостаза. Его основные механизмы включают формирование тромбоцитарного агрегата и управляемую каскадом свертывания крови полимеризацию фибрина. Система гемостаза также играет важную роль в иммунитете, ангиогенезе, регенерации и лизисе фибриновых сгустков. Ее нарушения приводят к тромбозам и кровотечениям, и являются важным патофизиологическим фактором широкого круга заболеваний, от инфаркта миокарда до COVID-19.

Высокая сложность системы гемостаза, а также необходимость понимания физико-химических принципов ее организации и управления сделали математическое моделирование важным инструментом в исследованиях гемостаза и тромбоза. Основные направления разработки и применения математических и компьютерных моделей включают в себя: 1) моделирование механизмов отдельных сложных реакций, в особенности мембранно-зависимых [1,2], механочувствительных, а также процессов полимеризации; 2) исследование внеклеточных каскадов свертывания крови и фибринолиза, в том числе в условиях лабораторных тестов [3,4]; 3) системно-биологическое описание сигнализации и метаболизма тромбоцитов [5,6]; 4) моделирование артериальных тромбов и гемостатических агрегатов в условиях быстрых потоков [7,8], а также процессов агрегации *in vitro* [9]; 5) исследование венозного тромбообразования, процессов свертывания при фибрилляции предсердия и тромбообразования на искусственных клапанах, контракции [10]. Указанные категории моделей основаны на различных принципах, и дальнейшее развитие этих подходов требуют преодоления различных препятствий и решения различных

Пантелеев Михаил Александрович, д.ф.-м.н., проф., чл.-корр. РАН, Центр теоретических проблем физико-химической фармакологии РАН, Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, НМИЦ детской гематологии, онкологии и иммунологии имени Дмитрия Рогачева (Москва, Россия)

проблем — биологических, физико-химических, фундаментально-математических, чисто вычислительных. Успешное развитие в области важно как для фундаментального развития в области естественных наук [11], так и для медицинских приложений [12]. Здесь мы рассмотрим некоторые из недавних событий и актуальных проблем данной области.

Литература

1. A.N. Sveshnikova, A.M. Shibeko, T.A. Kovalenko, M.A. Panteleev, Kinetics and regulation of coagulation factor X activation by intrinsic tenase on phospholipid membranes, *J Theor Biol* (2024) 111757.
2. T.A. Kovalenko, M.A. Panteleev, A.N. Sveshnikova, Different modeling approaches in the simulation of extrinsic coagulation factor X activation: Limitations and areas of applicability, *Int J Numer Method Biomed Eng* 39 (2023) e3689.
3. A.M. Shibeko, B. Chopard, A.G. Hoekstra, M.A. Panteleev, Redistribution of TPA Fluxes in the Presence of PAI-1 Regulates Spatial Thrombolysis, *Biophys J* 119 (2020) 638-651.
4. A.N. Balandina, E.M. Koltsova, A.M. Shibeko, A.D. Kuprash, V.A. Budkova, I.A. Demina, A.A. Ignatova, O.A. Fadeeva, R. Vijay, S.C. Nair, A. Srivastava, Q. Shi, F.I. Ataullakhanov, M.A. Panteleev, Platelets provide robustness of spatial blood coagulation to the variation of initial conditions, *Thromb Res* 230 (2023) 133-143.
5. A.A. Martyanov, F.A. Balabin, J.L. Dunster, M.A. Panteleev, J.M. Gibbins, A.N. Sveshnikova, Control of Platelet CLEC-2-Mediated Activation by Receptor Clustering and Tyrosine Kinase Signaling, *Biophys J* 118 (2020) 2641-2655.
6. A.A. Martyanov, D.S. Morozova, M.A. Sorokina, A.A. Filkova, D.V. Fedorova, S.S. Uzueva, E.V. Suntsova, G.A. Novichkova, P.A. Zharkov, M.A. Panteleev, A.A.N. Sveshnikova, Heterogeneity of Integrin alphaIIb beta3 Function in Pediatric Immune Thrombocytopenia Revealed by Continuous Flow Cytometry Analysis, *Int J Mol Sci* 21 (2020).
7. E.S. Bershadsky, D.A. Ermokhin, V.A. Kurattsev, M.A. Panteleev, D.Y. Nechipurenko, Force balance ratio is a robust predictor of arterial thrombus stability, *Biophys J* 123 (2024) 464-477.
8. A.A. Yakusheva, K.R. Butov, G.A. Bykov, G. Zavodszky, A. Eckly, F.I. Ataullakhanov, C. Gachet, M.A. Panteleev, P.H. Mangin, Traumatic vessel injuries initiating hemostasis generate high shear conditions, *Blood Adv* 6 (2022) 4834-4846.
9. A.K. Garzon Dasgupta, A.A. Martyanov, A.A. Filkova, M.A. Panteleev, A.N. Sveshnikova, Development of a Simple Kinetic Mathematical Model of Aggregation of Particles or Clustering of Receptors, *Life (Basel)* 10 (2020).
10. T.A. Kovalenko, M.N. Giraud, A. Eckly, A.S. Ribba, F. Proamer, S. Fraboulet, N.A. Podoplelova, J. Valentin, M.A. Panteleev, C. Gonelle-Gispert, S. Cook, L. Lafanechere, A.N. Sveshnikova, K. Sadoul, Asymmetrical forces dictate the distribution and morphology of platelets in blood clots, *Cells* 10 (2021).
11. D.Y. Nechipurenko, A.M. Shibeko, A.N. Sveshnikova, M.A. Panteleev, In Silico Hemostasis Modeling and Prediction, *Hamostaseologie* 40 (2020) 524-535.
12. A.M. Shibeko, I.S. Ilin, N.A. Podoplelova, V.B. Sulimov, M.A. Panteleev, Chemical Adjustment of Fibrinolysis, *Pharmaceuticals (Basel)* 17 (2024).

УЛУЧШЕНИЕ ПРЕДСКАЗАНИЯ ДОСТУПНОСТИ НУКЛЕОТИДОВ РНК ПО ЕЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ARMNET

Д.Д. Пензар, В.В. Вяльцев, Е.О. Носкова, А.О. Зинкевич, А.Н. Бакулин
dmitrypenzar1996@gmail.com

Предсказание структуры РНК является одной из нерешенных задач современной биологии. На основе данных конкурса Stanford Ribonanza RNA Folding нами была разработана и далее улучшена модель ArmNet для предсказания доступности РНК по ее последовательности. Модель показала новое state-of-art качество решения данной задачи, обогнав в числе прочего и конкурентов по конкурсу, и модели, предложенные авторами конкурса.

Ключевые слова: структура РНК, трансформеры, машинное обучение для нуклеотидных последовательностей.

Точное предсказание структуры РНК может совершить прорыв в медицине и расширить наши знания в области биологии.

В ходе международного конкурса Stanford Ribonanza RNA Folding на платформе Kaggle [1], нашей командой было разработано решение, которое заняло первое место, значительно опередив остальные команды со всего мира и известные SOTA-решения.

Задачей конкурса стояло предсказание реактивностей нуклеотидов, полученных с помощью методов DMS-MaP и 2A3-MaP, для более чем 1.5 млн последовательностей РНК. В основе методов DMS-MaP и 2A3-MaP лежит один принцип: молекулы РНК обрабатывается реагентом, который модифицирует нуклеотиды, и затем при получении кДНК из-за модификации нуклеотиды транскрибируются с ошибками. Реактивность нуклеотида отражает долю мутаций в данной позиции и зависит от структурных особенностей молекулы. В конкурсе организаторы предоставили 800 тысяч последовательностей длины от 170 до 206 п.н. в качестве обучающий данных, на их основе предлагалось обучить модель, чье качество оценивалось с помощью метрики MAE (Mean Absolute Error).

В основе нашего подхода лежит трансформерная encoder-only архитектура (Рис.1), показавшая себя намного лучше сверточных нейросетей, которые мы также протестировали на данной задаче. Значительно качество сети улучшило добавление BPPM (Base Pair Probability Matrix), вычисленных для каждой последовательности с помощью инструмента EternaFold. В архитектуре сети BPPM прибавляются к значениям attention перед применением softmax, мы также добавили 2D-сверточные слои (Рис.2), работающие с BPPM, чтобы сеть могла выучить дополнительные полезные закономерности из них.

В ходе дальнейшего исследования нами была предложенная улучшенная модель, которую мы назвали ArmNet (Рис. 3), которая даже в одиночку достигает качества, близкого к качеству ансамбля моделей, который мы предложили в финале конкурса. С применением ансамблирования, данный метод позволяет значительно обогнать все модели, как и предложенные в конкурсе, так и предложенную авторами RibonanzaNet, которая была разработана ими на основе решений участников.

Далее мы провели эксперименты с обучением разработанной архитектуры без использования BPPM, так их вычисление может занимать достаточно большое количество времени, требует от пользователя дополнительных умений, и, что самое важное, привносит в модель bias, наследуемый от метода предсказания BPPM. В результате архитектура без BPPM в одиночку показывает

Пензар Дмитрий Дмитриевич, Институт искусственного интеллекта AIRI, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет биоинженерии и биоинформатики (Москва, Россия)

Вяльцев Валерий Владимирович, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет биоинженерии и биоинформатики (Москва, Россия)

Носкова Елизавета Олеговна, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет биоинженерии и биоинформатики (Москва, Россия)

Зинкевич Арсений Олегович, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет биоинженерии и биоинформатики (Москва, Россия)

Бакулин Артемий Николаевич, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет биоинженерии и биоинформатики (Москва, Россия)

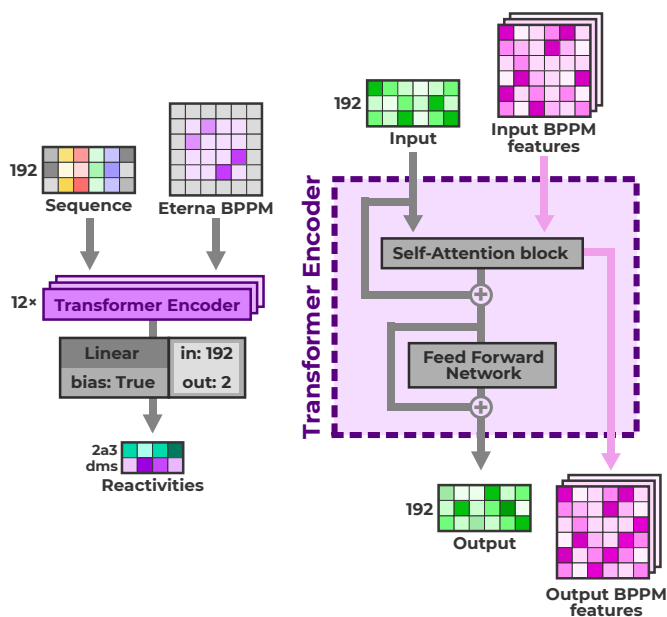


Рис. 1: Архитектура использованной в конкурсе одиночной модели

хорошее качество на данных, а при дообучении при помощи метода псевдометок, достигает качества ансамбля из моделей ArmNet, использующих BPPM, что позволяет использовать ее в одиночку, экономя вычислительные ресурсы.

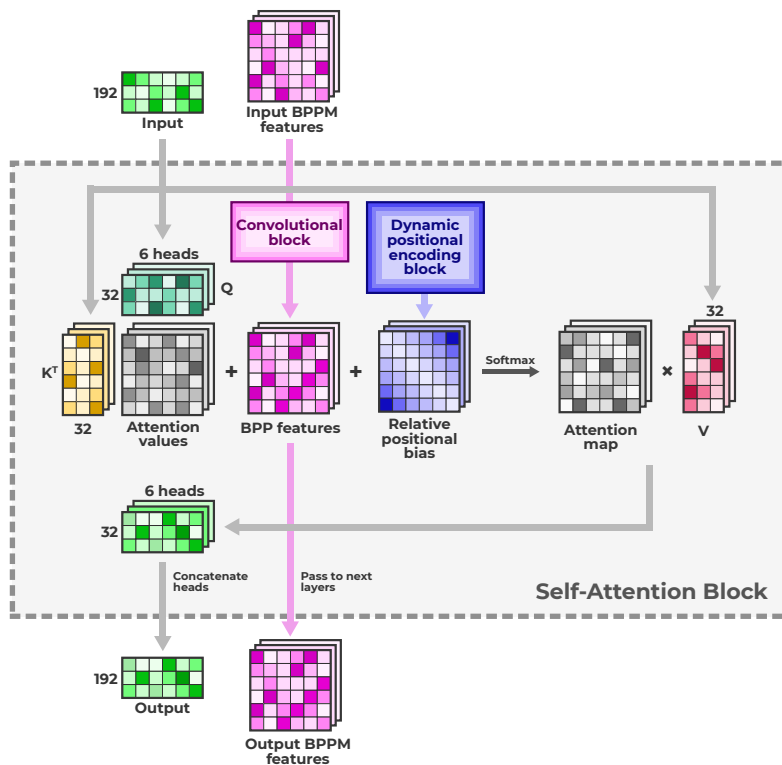


Рис. 2: Архитектура использованной в конкурсе одиночной модели

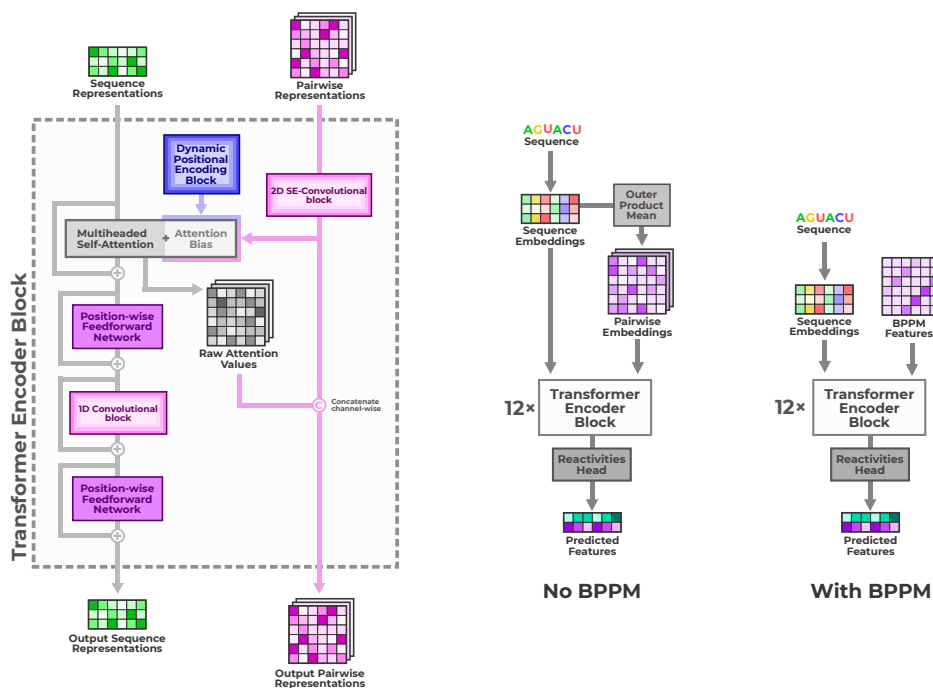


Рис. 3: Архитектура ArmNet

Литература

1. Rhiju Das, Shujun He, Rui Huang, Jill Townley, Rachael Kretsch, Thomas Karagianes, John Nicol, Grace Nye, Christian Choe, Jonathan Romano, Maggie Demkin, Walter Reade, and Eterna players. (2023). Stanford Ribonanza RNA Folding. Kaggle. <https://kaggle.com/competitions/stanford-ribonanza-rna-folding>

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ ФОТОСИНТЕЗА. ИЕРАРХИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Т.Ю. Плюснина, С.С. Хрущев, Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин

plusn@yandex.ru, styx@biophys.msu.ru, riznich46@mail.ru, rubin@biophys.msu.ru

УДК 51-76

Фотосистема II (ФС II) — один из ключевых пигмент-белковых комплексов фотосинтеза. Детальная математическая модель, описывающая переходы между состояниями ФС II, включает от десятков до сотен дифференциальных уравнений. Сравнительный анализ характерных времен реакций в комплексе ФСII позволяет провести строгую математическую редукцию детальной модели и получить простое аналитическое решение, применимое для анализа экспериментальных кривых.

Ключевые слова: математическая модель, фотосистема II, иерархия времен.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-11-00009)

Плюснина Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет, каф. биофизики (Москва, Россия)

Хрущев Сергей Сергеевич, к.б.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет, каф. биофизики (Москва, Россия)

Ризниченко Галина Юрьевна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет, каф. биофизики (Москва, Россия)

Рубин Андрей Борисович, академик РАН, д.б.н., МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет, каф. биофизики (Москва, Россия)

Математическое моделирование является одним из распространенных инструментов анализа биологических систем. Многие биологические объекты подробно изучены на самых разных уровнях организации, что позволяет строить детальные модели, включающие большое число элементов и связей между ними. Развитие компьютерных технологий дает возможность получать численные решения для таких моделей. Однако решение обратной задачи — оценка параметров взаимодействия между элементами системы по экспериментальным данным — далеко не всегда оказывается однозначным. Кроме того, исследователь не всегда уверен и в том, что все существенные для функционирования системы компоненты и взаимодействия учтены в модели. Как следствие, в детальных математических моделях, описывающих сложные системы, часто присутствует неоднозначность, как в учете всех элементов системы, так и в оценке параметров, характеризующих взаимодействия между элементами. Поскольку биологические системы являются, как правило, нелинейными системами, то неоднозначность, выражающаяся даже в небольшом отклонении значений параметров, может привести к значительному изменению решения модели.

Существуют различные подходы для преодоления трудностей, связанных с моделированием сложных систем. Большинство подходов связано с упрощением системы. Учитывается иерархия времен в организации биологических процессов, квази-равновесие и квази-стационарность одних процессов по отношению к другим. Все это позволяет выделить так называемые параметры порядка — те структуры и процессы, которые определяют видимый эффект, или медленные переменные. Выделение медленных переменных позволяет редуцировать модель, значительно уменьшив общее число переменных модели, что облегчает поиск решения. При этом быстрые переменные, как правило, отбрасываются, и многие детали описываемого явления теряются. Оптимальным подходом к моделированию биологических систем было бы сохранение связей между детальной и редуцированной моделями. Это позволит использовать редуцированную простую модель в качестве инструмента исследования экспериментальных кривых, а связь с детальной моделью позволит корректно интерпретировать полученные результаты.

Одним из примеров хорошо изученной сложной системы с выраженной иерархией времен являются первичные процессы фотосинтеза, протекающие в хлоропластах зеленых растений на мембране тилакоидов. Попадание квантов света в антенну реакционного центра фотосистемы II (ФС II) вызывает возбуждение пигмента реакционного центра (P680), разделение зарядов и последующий перенос электрона, в результате которого происходит образование окислительно-восстановительного эквивалента NADPH, который далее используется в темновых реакциях фотосинтеза при синтезе сахаров.

При попадании квантов света в антенну реакционных центров часть энергии высвечивается в виде флуоресценции. Флуоресценция является процессом, конкурирующим с фотохимическим переносом электронов, поэтому экспериментально измеренные кривые индукции флуоресценции дают важную информацию о состоянии ФС II. Форма кривой является чувствительным маркером к изменению внешних условий и действию различных факторов стресса. Этот факт обуславливает важность анализа формы кривой, интерпретации ее изменений, при этом технически довольно просто получить большое количество таких кривых, что в совокупности дает перспективу использования этих кривых в экологическом мониторинге.

Существующие многочисленные математические модели ФС II [4, 3, 1, 2] хорошо описывают форму индивидуальной кривой индукции флуоресценции, однако не всегда удобны для анализа большого числа таких кривых, получаемых при мониторинге, поскольку содержат десятки и сотни уравнений и параметров. Существование выраженной иерархии времен в такой системе предполагает, что среди большого числа компонент есть ключевые, так называемые параметры порядка, которые определяют динамику переходов в такой системе, и как следствие, форму индукционной кривой.

Нами была разработана детальная модель пигмент-белкового комплекса ФС II при действии на него ингибитора DCMU, блокирующего определенный участок электрон-транспортного пути [5]. Диапазон характерных времен переходов между состояниями в ФС II составляет 9 порядков — от пикосекунд до сотен миллисекунд. Наличие такой иерархии времен позволило провести редукцию модели, используя теорему Тихонова: если в системе дифференциальных уравнений можно выделить малый параметр ϵ при производных (так называемая система с сингулярным возмущением), тогда уравнения, содержащие этот малый параметр, можно заменить на алгебра-

ические, при этом решение редуцированной системы будет совпадать с решением исходной везде, за исключением начального интервала порядка ϵ . Все переменные системы были разделены на так называемые «быстрые» переменные — уравнения, для которых содержат малый параметр при производной, и «медленные» — оставшиеся переменные, после чего заменить уравнения для «быстрых» переменных на алгебраические. Исходная модель, состоящая из 24 обыкновенных дифференциальных линейных уравнений, была, таким образом, редуцирована в систему из 2-х обыкновенных дифференциальных линейных уравнений, для которых было найдено аналитическое решение.

Важно отметить, что решения исходной и редуцированной моделей различались только на интервале времени до сотен наносекунд, а далее совпадали на всем оставшемся промежутке времени. Диапазон экспериментальных измерений начинается от десятков микросекунд, таким образом, полученная простая редуцированная модель описывает экспериментальные кривые с той же точностью, что и исходная детальная модель. Параметры редуцированной модели представляют собой сочетания констант скоростей элементарных стадий исходной детальной модели, что позволяет интерпретировать анализ решения редуцированной модели в терминах детальной модели. В результате был получен удобный инструмент для анализа изменения формы кривых индукции флуоресценции при действии внешних факторов. Простое аналитическое решение модели позволяет использовать ее в качестве инструмента для анализа большого количества экспериментальных кривых, а связь ее параметров с константами детальной модели позволяет давать интерпретацию изменений формы этих кривых. Модель была использована для анализа действия тяжелых металлов на фотосинтетический аппарат водорослей, а также для оценки действия минерального голодания.

Иерархический подход к построению модели позволил выявить неочевидные связи между формой кривой индукции флуоресценции хлорофилла *a* и параметрами электронного транспорта в реакционном центре ФС II и может использоваться как для понимания механизмов функционирования фотосинтетического аппарата, так и для решения прикладных задач.

Литература

1. Ризниченко Г.Ю., Беляева Н.Е., Коваленко И.Б., Антал Т.К., Горячев С.Н., Маслаков А.С., Плюснина Т.Ю., Федоров В.А., Хрущев С.С., Яковлева О.В., Рубин А.Б. Математическое моделирование электронного транспорта в первичных процессах фотосинтеза // Биохимия. 2022. Т. 87. № 10. С. 1350-1371.
2. Belyaeva N.E., Bulychev A.A., Klementiev K.E., Paschenko V.Z., Riznichenko G.Yu., Rubin A.B. Comparative modeling of fluorescence and P700 induction kinetics for alga *Scenedesmus* sp. obliquus and cyanobacterium *Synechocystis* sp. PCC 6803. Role of state 2–state 1 transitions and redox state of plastoquinone pool // Cell Biochemistry and Biophysics. [10.1007/s12013-024-01224-w](https://doi.org/10.1007/s12013-024-01224-w).
3. Lazar D. Chlorophyll *a* fluorescence rise induced by high light illumination of dark-adapted plant tissue studied by means of a model of photosystem II and considering photosystem II heterogeneity // J. Theor. Biol. 2003. V. 220. P. 469–503.
4. Strasser R.J., Stirbet A.D. Estimation of the energetic connectivity of PS II centres in plants using the fluorescence rise O–J–I–P Fitting of experimental data to three different PS II models // Mathematics and Computers in Simulation. 2001. V. 56. P. 451–461.
5. Plyusnina T.Yu., Khruschev S.S., Degtereva N.S., Voronova E.N., Volgusheva A.A., Riznichenko G.Yu., Rubin A.B. Three-state mathematical model for the assessment of DCMU-treated photosystem II heterogeneity // Photosynthesis Research. [10.1007/s11120-024-01077-7](https://doi.org/10.1007/s11120-024-01077-7)

МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ В ФОТОСИНТЕТИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЕ ВЫСШИХ РАСТЕНИЙ И МИКРОВОДОРОСЛЕЙ

Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин
riznich46@mail.ru, rubin@biophys.msu.ru

УДК 577.3

Представлен обзор математических моделей электронного транспорта и сопряженных процессов в фотосинтетической мембране с использованием методов кинетического, броуновского и молекулярного моделирования, разработанных на кафедре биофизики биологического факультета МГУ имени М.Ломоносова.

Ключевые слова: фотосинтез, электронный транспорт, кинетические модели, броуновские модели, молекулярное моделирование.

Введение

Общей целью динамического моделирования сложных систем является раскрытие закономерностей их поведения во времени и изменения во времени количественных характеристик взаимодействующих компонентов. Ключевым условием адекватности модели реальному объекту является соответствие структуры модели и реальной системы, а также соответствие формы уравнений механизмам и параметрам взаимодействия составляющих систему элементов. В докладе представлены результаты последних работ по математическому и компьютерному моделированию процессов фотосинтеза в широком интервале характерных времен от наносекунд до минут, выполненных на кафедре биофизики биологического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Фотосинтез является единственным процессом на Земле, который обеспечивает преобразование энергии солнечного света и его запасание в виде энергии химических связей. В фотосинтетической мембране происходит поглощение энергии света, инициирующее сложную совокупность взаимодействующих процессов, в основе которых лежит электронный транспорт по фотосинтетической цепи. В серии кинетических моделей (системы дифференциальных уравнений), разной степени детализации моделируются процессы в фотосинтетической мембране, включая перенос электрона в реакционных центрах фотосистем I и II, линейный и циклический транспорт электронов, учтены роль электрохимического потенциала, буферных групп, регуляция процессов сопряжения с циклом фиксации углерода [1, 3].

Детальные кинетические модели

При описании процессов в фотосинтетических мультифенментных комплексах в качестве переменных рассматриваются их концентрации. Состояния комплекса отличаются редокс состояниями отдельных его компонентов, наличием пустых или заполненных сайтов, в которых могут закориваться подвижные переносчики электрона, наличием протонированных групп. Константы скоростей переходов между состояниями комплекса могут быть различны для комплексов в различных конформационных состояниях, локализованных в гранальной или стромальной частях тилакоида, они также могут зависеть от других переменных и параметров системы (температуры, трансмембранного электрического потенциала, внешнего электрического поля и т.д.). Переходы между состояниями системы характеризует ориентированный граф переходов между состояниями, для вероятностей которых записываются линейные относительно этих вероятностей уравнения. При этом константы скоростей переходов между состояниями комплексов могут зависеть от условий освещения, от электрических зарядов на отдельных переносчиках, входящих в состав фотосинтетического реакционного центра, а также от концентраций протонов в люмене и стромае и от концентраций подвижных переносчиков (концентрации молекул пула пластохинона на акцепторной стороне Фотосистемы 2, пластоцианина на люминальной стороне фотосистемы

Ризниченко Галина Юрьевна, д.б.н., профессор, академик РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Рубин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

1) и ферредоксина на стромальной стороне фотосистемы 1). Поэтому в общем случае уравнения, описывающие переходы между состояниями фотосинтетических мультиферментных комплексов нелинейные. В настоящее время имеются программные продукты, позволяющие автоматически строить графы состояний, записывать и решать соответствующие системы уравнений, что позволяет строить детальные модели, используя последние экспериментальные данные, полученные методами криогенной микроскопии. Сравнение с экспериментом проводится, в основном, по индукционным кривым флуоресценции, регистрируемым при разных режимах освещения. Фитирование модельных кривых по данным спектральных измерений позволило в ряде случаев оценить значения параметров, недоступных прямому экспериментальному измерению, и воспроизвести экспериментальные кривые на большом диапазоне времен от миллисекунд до минут [5, 6].

Воспроизводить вероятностные процессы в ансамблях фотосинтетических цепей, размеры которых соизмеримы с их количеством в клетках микроводорослей (миллионы отдельных цепей), позволяют модели, основанные на методе Монте Карло [7, 8]. Подробное описание процесса построения моделей, а также обзор моделей фотосинтетического электронного транспорта и сопряженных процессов подробно представлены в книге Ризниченко, Рубин «Динамические модели электронного транспорта в фотосинтезе», 2020; и обзорах [4, 3].

Обработка больших массивов данных

Для массовой обработки экспериментальных данных используются упрощенные модели. Разработанные на кафедре биофизики автоматические методы регистрации индукционных кривых флуоресценции позволяют изучать происходящие в фотосинтетическом аппарате изменения путем измерения кинетических кривых индукции флуоресценции хлорофилла непосредственно в биофотореакторе без нарушения физиологического состояния клеток. Возможность анализировать большой массив индукционных кривых открывает хорошую перспективу для дальнейшего изучения динамики переходных процессов при минеральном голодании и действии других факторов стресса [9, 11]. Для анализа больших массивов экспериментальных индукционных кривых флуоресценции микроводорослей, нами используются методы машинного обучения. Автоматическое наблюдение за ростом культуры становится особенно актуальным при решении биотехнологических задач направленного синтеза, когда подбираются условия роста культур, обогащенных липидами, каротиноидами, или выделяющих молекулярный водород. Разработан метод мультиэкспоненциальной аппроксимации, который позволяет определять участки фотосинтетической цепи, претерпевающие изменение в ходе роста культуры в различных условиях минерального дефицита в биофотореакторах и в условиях загрязнения окружающей среды [9, 11].

Кинетический подход доказал свою эффективность в определении значений констант скоростей реакций и соотношения энергетических потоков в цепи электронного транспорта при большом количестве одновременно протекающих светоиндуцированных процессов в популяции клеток. Однако системы дифференциальных уравнений плохо пригодны для детального описания этих процессов в условиях пространственной гетерогенности и сложной геометрии взаимодействующих макромолекул в ограниченном интерьере фотосинтетической мембраны, где применение кинетического подхода, основанного на базовых представлениях статистической физики и кинетики химических реакций в растворах, не вполне правомерно.

Броуновские и молекулярные модели

Для моделирования взаимодействия ограниченных по численности ансамблей макромолекул сложной формы в гетерогенном интерьере мы развиваем подход «прямого» многочастичного моделирования. Моделируемые молекулы перемещаются в соответствии с законами броуновской динамики, ориентируются друг относительно друга в электростатическом поле и образуют комплексы на трехмерной компьютерной сцене, сконструированной в соответствии с современными знаниями о пространственной организации фотосинтетической мембраны [10]. Адекватность модели проверяется соответствием кинетических характеристик наблюдаемых процессов экспериментальным данным.

При сближении молекулы донора и акцептора образуют белок-белковый комплекс. Модели броуновской динамики, в которых молекулы белков рассматриваются как твердые тела, способны описать образование именно такого диффузионно-столкновительного предварительного

(encounter) комплекса, который с течением времени может преобразоваться в финальный комплекс, или развалиться под действием броуновской силы. К образованию финального реакционного комплекса, в котором становится возможным туннельный перенос электрона между реакционными центрами белков донора и акцептора, приводит сложная последовательность процессов, обеспечивающих конформационное соответствие молекул белков донора и акцептора. Для описания конформационных движений в таком реакционном комплексе мы применяем методы молекулярной динамики [12, 13].

Заключение

Для изучения регуляции первичных процессов фотосинтеза эффективными проявили себя модели, построенные на основе дифференциальных уравнений, детальные и упрощенные, допускающие качественное исследование и массовую обработку данных. Для понимания механизмов процессов на субклеточном и молекулярном уровне полезны методы многочастичного моделирования, воспроизводящие перемещения и взаимодействия отдельных подвижных макромолекул в клетке, а также молекулярные модели. Совокупность этих методов дает инструменты для изучения мультимасштабных механизмов функционирования фотосинтетической мембраны.

Авторы выражают благодарность сотрудникам и аспирантам кафедры биофизики, результаты многолетней совместной работы которых представлены в докладе. Работы выполнялись на кафедре биофизики биологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в рамках научных проектов государственных заданий МГУ №№ 16-116021660040-7, 121032500060-0. Финансирование работ по разработке моделей фотосинтетического электронного транспорта, используемых для диагностики состояния фотосинтетического аппарата, осуществлялось Российским национальным фондом, грант 22-11-00009.

Литература

1. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Динамические модели электронного транспорта в фотосинтезе Ижевск — М., Изд. ИКИ, 2020, 332 с.
2. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Горизонты биофизики т. 1. Изд. ИКИ, 2022, с. 193-220
3. Ryznichenko, et al., Biophysical Rev. 2022 [10.1007/s12551-022-00988-w](https://doi.org/10.1007/s12551-022-00988-w)
4. Ризниченко и др., 2022. Биохимия, [10.31857/S0320972522100037](https://doi.org/10.31857/S0320972522100037)
5. Belyaeva et al., 2020. Photosyn. Rev. [10.1007/s11120-020-00774-3](https://doi.org/10.1007/s11120-020-00774-3)
6. Belyaeva et al., 2024. Cell Biochem Biophys. [10.1007/s12013-024-01224-w](https://doi.org/10.1007/s12013-024-01224-w)
7. Antal et al., 2018. Photosyn.Res. [10.1007/s11120-018-0564-2](https://doi.org/10.1007/s11120-018-0564-2)
8. Маслаков. 2020. Компьютерные исследования и моделирование [10.20537/2076-7633-2020-12-5-1207-1221](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-5-1207-1221)
9. Plusnina et al., 2020. Photosynthetica., [10.32615/ps.2020.002](https://doi.org/10.32615/ps.2020.002)
10. Kovalenko et al., 2017. Physiol. Plant., [10.1111/ppl.12570](https://doi.org/10.1111/ppl.12570)
11. Плюснина и др., 2023. Теоретическая и прикладная экология, [10.25750/1995-4301-2023-2-126-134](https://doi.org/10.25750/1995-4301-2023-2-126-134)
12. Fedorov et al., 2019. Physiologia Plantarum: [10.1111/ppl.12940](https://doi.org/10.1111/ppl.12940)
13. Федоров и др., 2023 Компьютерные исследования и моделирование. 2023 [10.20537/2076-7633-2023-15-3-723-738](https://doi.org/10.20537/2076-7633-2023-15-3-723-738)

МЕТОДЫ СОВМЕЩЕНИЯ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ КЛЕТОЧНЫХ СТРУКТУР И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ КЛЕТОЧНОЙ БИОЛОГИИ

Д.В. Сорокин, Н.А. Аношина, Е.А. Ариффулин, Е.В. Шеваль

dsorokin@cs.msu.ru, n.anoshina@cs.msu.ru, lewanit@gmail.com, sheval_e@belozersky.msu.ru

УДК 004.932, 576.31

В работе проведен обзор методов совмещения микроскопических изображений, разработанных авторами, а также приведены примеры использования разработанных методов совмещения в практических исследованиях в области клеточной биологии.

Ключевые слова: анализ микроскопических изображений, совмещение изображений, анализ структуры клеточного ядра.

Методы совмещения микроскопических изображений

Совмещение изображений (image registration) является одной из базовых задач в области обработки и анализа биомедицинских изображений. Смысл совмещения пары изображений заключается в нахождении такого геометрического преобразования для одного из изображений, применение которого приводит к максимально возможному совпадению положения и формы объектов интереса на обоих изображениях. При этом, для микроскопических изображений, в большинстве случаев преобразование ищется в виде поля деформации, поскольку клетки являются нежесткими объектами и изменяют свою форму с течением времени.

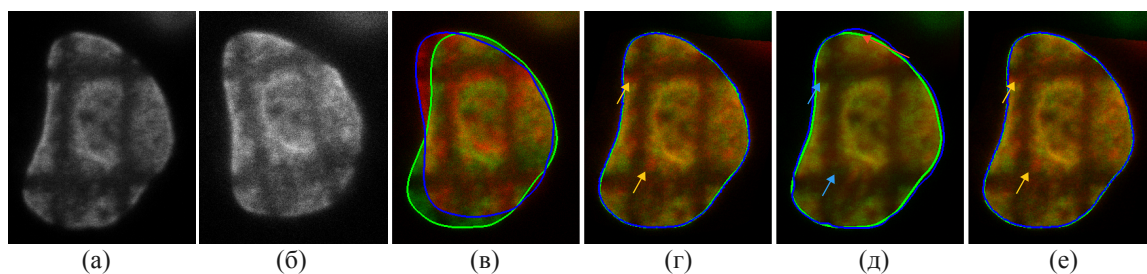


Рис. 1: Результаты совмещения последовательности изображений. Первый (а) и 37-й (б) кадр до совмещения. Визуализация наложения 1-го (зеленый канал) и 37-го (красный канал) кадра до совмещения (в), после совмещения контурным методом [1] (г), после совмещения методом на основе двухэтапной сверточной нейронной сети [2] (д), после совмещения комбинации контурного и нейросетевого методов (е). Синие и зеленые линии обозначают контур клетки на 37-ом кадре и первом кадре соответственно. Стрелки указывают на области качественного (синие) и некачественного (оранжевые) совмещения, а также ошибку в предсказании формы клетки (красные).

Большая часть методов совмещения основана на использовании интенсивностей изображений. Необходимо найти преобразование, минимизирующее функцию сходства между исходным и

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 24-24-00190.

Сорокин Дмитрий Васильевич, к.ф.-м.н., с.н.с., факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Аношина Надежда Алексеевна, к.ф.-м.н., математик, факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Ариффулин Евгений Альбертович, к.б.н., н.с., НИИ физико-химической биологии имени А.Н. Белозерского, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Шеваль Евгений Валерьевич, д.б.н., профессор биологического факультета, зав. лаб. ультраструктуры клеточного ядра НИИ физико-химической биологии имени А.Н. Белозерского, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

совмещаемым изображениями. Функция сходства выбирается исходя из особенностей совмещаемых изображений (уровень шума, особенности формы объектов, используемые модальности). В последнее время, широкое распространение получили методы, основанные на глубоком обучении, где функционал сходства моделируется с помощью нейронной сети и строится в процессе ее обучения на основе закономерностей во входных данных [2].

Однако в ряде случаев использование интенсивностей противоречит решаемой прикладной задаче. Так, при компенсации глобального движения клеток, содержащих двигающиеся субклеточные структуры, использование интенсивностей изображения в областях движущихся структур может исказить характер их движения, т.к. алгоритм будет стремиться сделать эти области неподвижными. В таких случаях применяются методы, в которых поле деформации строится исходя из дополнительных знаний о природе объекта. В работе [1] был предложен метод совмещения, основанный на моделировании клеточного ядра с помощью теории упругости, и построении поля деформации за счет знаний о движении границы клеточного ядра с помощью решения уравнения Навье.

Наиболее перспективными подходами на данный момент являются гибридные методы, основанные на совместном использовании классических математических моделей и нейросетевых моделей [2]. На Рис.1 приведены примеры совмещения изображений клеточного ядра с помощью различных методов.

Применение методов совмещения в задачах клеточной биологии

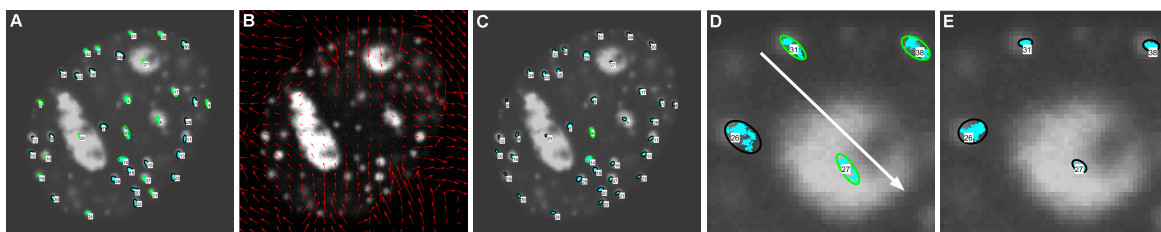


Рис. 2: Пример компенсации глобального движения ядра с помощью совмещения изображений. На рисунках изображен первый кадр последовательности изображений с наложенными треками движения интерфазных проядрышек (iPNBs). Треки отмечены описывающими эллипсами разных цветов, соответствующих типам движения (черный — ограниченная диффузия, зеленый — нормальная диффузия). (а) треки iPNBs построенные по последовательности изображений без компенсации движения ядра; (б) поле деформаций, компенсирующее движение ядра (длина векторов и расстояние между ними увеличены для лучшей видимости); (с) треки iPNBs после компенсации движения ядра; (d и e) увеличенные фрагменты (а) (нескомпенсированное движение) и (с) (скомпенсированное движение) соответственно. Доминирующее направление движения iPNBs, являющееся результатом глобального движения ядра, указано стрелкой в (d).

Одним из примеров применения методов совмещения изображений в прикладных исследованиях является компенсация движения клеточного ядра. В работе [3] метод совмещения клеточных ядер был использован в задаче анализа подвижности интерфазных проядрышек (iPNBs) в составе карциномных клеток человека. За счет применения метода совмещения, основанного на теории упругости [1], было скомпенсировано глобальное движение клеточного ядра, что позволило оценить тип локального движения проядрышек (Рис.2).

Еще одним важным применением методов совмещения изображений является совмещение изображений одного и того же объекта, снятого в различных модальностях. В работе [4] исследуется сопряженная с репликацией глобальная реорганизация гетерохроматина у растений с хромонемным типом ядер. Одним из ключевых экспериментов работы является корреляционная световая и электронная микроскопия (CLEM), где для совмещения изображений электронной и флуоресцентной микроскопии клеточных ядер используется комбинация методов, первым этапом проводится совмещение, основанное на теории упругости [1], а затем уточненное совмещение

за счет использования функции взаимной информации рассчитанной для интенсивностей изображений.

В работе [5] предложен нейросетевой метод сегментации клеток на изображениях с использованием слабой разметки на основе совмещения изображений. Здесь исходная разметка, которая часто очень неполная, дополнена недостающими масками, сгенерированными с помощью методов совмещения изображений. Таким образом, обучая нейронную сеть сегментации на наборе данных с дополненной с помощью совмещения изображений разметкой, были улучшены результаты сегментации.

Литература

1. *D.V. Sorokin, I. Peterlik, M. Tektonidis, K. Rohr, and P. Matula.* Non-rigid contour-based registration of cell nuclei in 2-D live cell microscopy images using a dynamic elasticity model // *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **37**:1 (2017), 173-184.
2. *N.A. Anoshina and D.V. Sorokin.* CNN-Based Unsupervised Registration of Time-Lapse Microscopy Image Sequences // *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, **48** (2022), 9-14.
3. *E.A. Arifulin, D.V. Sorokin, A.V. Tvorogova et al.* Heterochromatin restricts the mobility of nuclear bodies // *Chromosoma*, **127**:4 (2018), 529-537.
4. *E.A. Arifulin, D.V. Sorokin, N.A. Anoshina et al.* Global nuclear reorganization during heterochromatin replication in the giant-genome plant *Nigella damascena* // *bioRxiv* (2023), <https://www.biorxiv.org/content/early/2023/08/15/2023.08.15.552960>.
5. *N.A. Anoshina and D.V. Sorokin.* Weak supervision using cell tracking annotation and image registration improves cell segmentation // *IEEE International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications (IPTA)*, (2022), 1-5.

КВАЗИДОКИНГ: ПУТЬ ОТ КЛАССИЧЕСКОГО К КВАНТОВОМУ ДОКИНГУ

А.В. Сулимов

sulimovv@mail.ru

УДК 577.3

Разработана процедура квазидокинга, позволяющая найти глобальный минимум энергии белок-лиганд методами квантовой химии. На первом этапе с помощью классического силового поля осуществляется поиск достаточно широкого спектра низкоэнергетических минимумов системы белок-лиганд. На втором этапе энергии найденных минимумов пересчитываются с помощью методов квантовой химии.

Ключевые слова: молекулярное моделирование, докинг, квантовая химия, квазидокинг, энталия связывания.

На пути к созданию программ докинга, в которых реализован поиск глобального минимума энергии системы белок-лиганд, вычисляемой методами квантовой химии, мы предложили процедуру квантового квазидокинга и проверили ее на наборе тестовых комплексов белок-лиганд [1,2]. При квантовом квазидокинге сначала проводится обобщенный докинг с вычислением энергии с помощью классического силового поля, при котором находится достаточно широкий спектр всех низкоэнергетических минимумов системы белок-лиганд. Затем энергии этих минимумов пересчитываются с помощью квантово-химического метода с учетом растворителя, и среди них определяется глобальный минимум по энергии. Положение лиганда в активном центре белка, соответствующее этому глобальному минимуму, согласно парадигме докинга и должно быть лучшим положением лиганда, определенным с помощью процедуры квантового квазидокинга.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-20031). Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова [7].

Сулимов Алексей Владимирович, к.ф.-м.н., н.с., Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М. В. Ломоносова, ООО «Димонта» (Москва, Россия)

Квантовый квазидокинг считается успешным, если положение лиганда, соответствующее глобальному минимуму энергии, вычисленной с помощью квантово-химического метода, находится вблизи закристаллизованного положения этого лиганда (RMSD между ними менее 2 Å).

При валидации квантового квазидокинга мы выбрали из Protein Data Bank набор комплексов белок-лиганд с высоким разрешением для которых экспериментально измерена энтальпия связывания лиганда с белком. При квазидокинге мы использовали квантово-химический полумпирический метод PM7 [3] с учетом растворителя в континуальной модели растворителя COSMO [4]. Дополнительно проведено исследование расчета энтальпии при учете подвижности ближайших к лиганду атомов белка. Вычислена корреляция между экспериментально измеренными и вычисленными значениями энтальпии связывания комплексов белок-лиганд.

На первом этапе квазидокинга, с помощью разработанной нами программы FLM [5], поведен поиск спектра низкоэнергетических уникальных минимумов (8192 минимума). На втором этапе квазидокинга для всех найденных минимумов проведены расчеты энтальпии связывания методами квантовой химии с использованием программы MOPAC (21.329L) [6]. Расчет энтальпии связывания осуществлялся только для 10 комплексов с хорошей точностью позиционирования. Если RMSD между позой лиганда, соответствующей глобальному минимуму энергии системы белок-лиганд, и закристаллизованной позой лиганда в белке меньше 2 Å то точность позиционирования считается хорошей.

Энтальпия связывания рассчитывалась для двух различных вариантов: неподвижный белок и белок с подвижными атомами. Для неподвижного белка расчеты энтальпии связывания проводились при локальной оптимизации энергии PM7 комплекса при варьировании декартовых координат только атомов лиганда. Для подвижного белка дополнительно учитывалось варьирование декартовых координат достаточно большого количества ближайших к лиганду атомов белка. В найденном минимуме энергия пересчитывается с учетом растворителя. Значение энергии несвязанного белка для второго варианта получалось при локальной оптимизации энергии PM7 при варьировании декартовых координат тех же подвижных атомов белка, которые были подвижными при вычислении энергии для комплекса, и в найденном минимуме энергия опять пересчитывается с учетом растворителя. В Таблице 1 приведены результаты расчетов.

| PDB ID | ΔH_{exp} , ккал/моль | ΔH_{bind} PM7 COSMO, ккал/моль | |
|--------|------------------------------|--|----------------------|
| | | Атомы белка фиксированы | Атомы белка подвижны |
| 1C5P | -4.52 | -54.1 | -62.5 |
| 1HW5 | -0.97 | -53.7 | -68.5 |
| 1K1J | -9.46 | -81.6 | -83.8 |
| 1MRX | -2.1 | -53.7 | -66.3 |
| 2IKO | -9.5 | -80.3 | -83.9 |
| 2XII | -9.8 | -90.6 | -94.6 |
| 2ZDM | -7.24 | -82.8 | -93.9 |
| 2ZDN | -5.09 | -84.6 | -94.9 |
| 3NU3 | -7.3 | -53.6 | -57.7 |
| 4MR6 | -4.04 | -47.0 | -50.2 |
| CORREL | | | |

Таблица 1: Рассчитанные ΔH_{bind} и экспериментально измеренные ΔH_{exp} значения энтальпии связывания лиганда с белком. CORREL — коэффициент корреляции между ΔH_{bind} и ΔH_{exp} .

Как видим, корреляция между экспериментальными значениями энтальпии связывания и значениями энтальпии связывания, вычисленными методом PM7 с использованием модели растворителя при фиксированных атомах белка, достаточно высокая (0.73). Учет подвижности приводит к заметному снижению коэффициента корреляции (0.54). Значения энтальпии связывания, вычисленные при учете подвижности атомов белка, более отрицательны (от 3 до 16 ккал/моль для различных комплексов), чем при расчетах с фиксированными атомами белка. Абсолютные величины рассчитанной энтальпии связывания существенно больше, чем экспериментально измеренные.

Отметим, что заметный вклад в энтальпию связывания вносят водородные связи между ато-

мами белка и лиганда. Число и суммарная энергия этих водородных связей может быть получена в выходном файле расчетов MOPAC (можно и без растворителя – это не влияет на результаты), если среди ключевых слов во входном файле добавить DISP. Число водородных связей для разных комплексов белок-лиганд варьируется от 3 до 8, а суммарная энергия водородных связей составляет величины от -7.61 ккал/моль до -20.95 ккал/моль. Водородные связи дают значительный вклад (для разных комплексов от 14 до 24%) в энтальпию связывания комплекса белок-лиганд.

При учете подвижности атомов белка водородные связи несколько упрочняются: суммарная энергия водородных связей возрастает на 0.1-4.1 ккал/моль почти для всех 10 комплексов кроме одного, и их количество для отдельных комплексов возрастает от 1 до 3. Это связано с тем, что подвижность атомов белка вблизи атомов лиганда обеспечивает более энергетически выгодную конфигурацию атомов, образующих водородные связи.

Таким образом, мы увидели, что энтальпия связывания при учете подвижности атомов белка становится более отрицательной, частично за счет упрочнения водородных связей, а корреляция между экспериментальными и вычисленными значениями энтальпии связывания несколько ухудшается. Причина этого ухудшения пока неясна. Также не ясна причина столь сильного различия экспериментальных и рассчитанных значений величин энтальпии связывания, и здесь требуются дополнительные исследования.

Литература

1. *Sulimov A., Kutov D., Gribkova A., Ilin I., Tashchilova A., Sulimov V.* Search for Approaches to Supercomputer Quantum-Chemical Docking // Communications in Computer and Information Science, 5th Russian Supercomputing Days, RuSCDays 2019 / ed. Voevodin V., Sobolev S., Cham: Springer International Publishing, 2019, Vol. 1129, P. 363–378. [10.1007/978-3-030-36592-9_30](https://doi.org/10.1007/978-3-030-36592-9_30)
2. *Kutov D., Sulimov A., Ilin I., Sulimov V.* Validation of quantum-chemical methods with the new COSMO2 solvent model // Communications in Computer and Information Science, Russian Supercomputing Days, RuSCDays 2022 / ed. Voevodin V. et al., Cham: Springer International Publishing, 2022, LNCS 13708, P. 368–381.
3. *Stewart J.J.P.* Optimization of parameters for semiempirical methods VI: more modifications to the NDDO approximations and re-optimization of parameters // J. Mol. Model. 11/29, 2013, Vol. 19, No. 1, P. 1–32. [10.1007/s00894-012-1667-x](https://doi.org/10.1007/s00894-012-1667-x)
4. *Klamt A., Schüürmann G.* COSMO: a new approach to dielectric screening in solvents with explicit expressions for the screening energy and its gradient // J. Chem. Soc., Perkin Trans. 2, 1993, No. 5, P. 799–805. [10.1039/P29930000799](https://doi.org/10.1039/P29930000799)
5. *Oferkin I.V., Katkova E.V., Sulimov A.V., Kutov D.C., Sobolev S.I., Voevodin V.V., Sulimov V.B.* Evaluation of docking target functions by the comprehensive investigation of protein-ligand energy minima // Adv. Bioinformatics, 2015, Vol. 2015, P. 126858. [10.1155/2015/126858](https://doi.org/10.1155/2015/126858)
6. *Stewart J.J.P.* Stewart Computational Chemistry. MOPAC2016 [Electronic resource], Colorado Springs, CO, USA, 2016. <http://openmopac.net/MOPAC2016.html> (accessed: 08.04.2022)
7. *Voevodin V. V., Antonov A.S., Nikitenko D.A., Shvets P.A., Sobolev S.I., Sidorov I.Y., Stefanov K.S., Voevodin V. V., Zhumatiy S.A.* Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community // Supercomput. Front. Innov., 2019, Vol. 6, No. 2, P. 4–11. [10.14529/jsfi190201](https://doi.org/10.14529/jsfi190201)

PATHSCRIBE: ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РАБОТЫ С ПОЛНОСЛАЙДОВЫМИ ГИСТОЛОГИЧЕСКИМИ ИЗОБРАЖЕНИЯМИ ДЛЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА И НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

А.В. Хвостиков, В.Б. Ипполитов, А.С. Крылов, И.А. Михайлов, П.Г. Мальков

khvostikov@cs.msu.ru, vb.ippolitov@gmail.com, kryl@cs.msu.ru, imihailov@mc.msu.ru, pmalkov@mc.msu.ru

УДК 004.932, 004.89

Современные исследования в области цифровой патологии используют все более сложные инструменты обработки и визуализации изображений для диагностики и решения различных научных задач. Также цифровая патология активно используется в медицинском образовании для обучения студентов и ординаторов. Несмотря на активное развитие программных инструментов в этой области, существующие решения по-прежнему требуют высокого порога вхождения, не являются по-настоящему универсальными и имеют сложные и устаревшие графические интерфейсы.

В данной работе мы представляем PathScribe — новое кросс-платформенное облачное программное обеспечение для работы с полнослайдовыми гистологическими изображениями, которое предназначено для использования в образовательных и научных целях. Данное ПО уже используется в образовательных целях в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Ключевые слова: полнослайдовые гистологические изображения, методы автоматического анализа изображений.

Введение

Современные гистологические сканеры позволяют получать полнослайдовые изображения в очень высоком разрешении, но для их использования в задачах цифровой патологии [1] необходимо специализированное ПО, со следующими функциями:

- возможность работы с большинством форматов гистологических изображений;
- возможность использования моделей глубокого обучения [2, 3];
- осуществлять разметку изображений для моделей глубокого обучения;
- быть многопользовательским и совместным, чтобы осуществлять проверку и контроль процесса разметки;
- быть простым и дружелюбным для медицинских специалистов и студентов, а не специалистов по обработке данных и программистов;
- для использования студентами желательно наличие удобного современного интерфейса и поддержки мобильных платформ.

Существующие программные решения не удовлетворяют одновременно всем данным критериям, поэтому было принято решение о разработке собственного ПО PathScribe, ориентированного на использование в учебных и научных целях.

PathScribe — кроссплатформенное приложение для операционных систем Windows, MacOS, Linux и Android, работающее на устройствах различных типов - от смартфонов до планшетов и ПК (Рис. 1, Рис. 2). Коллекции полнослайдовых изображений, занимающие много места, хранятся централизованно на облачном сервере, пользователи могут получать к ним мгновенный доступ на своих устройствах через интернет без необходимости скачивания. PathScribe реализует собственный эффективный формат изображений и имеет конвертер, который поддерживает различные форматы изображений, в том числе общего назначения и популярные гистологические форматы (.svs, .mrxs, .scn).

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития науки и образования «Интеллект».

Хвостиков Александр Владимирович, к.ф.-м.н., н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК (Москва, Россия)

Ипполитов Владимир Борисович, студент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК (Москва, Россия)

Крылов Андрей Серджевич, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК (Москва, Россия)

Михайлов Илья Александрович, к.м.н., ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет фундаментальной медицины (Москва, Россия)

Мальков Павел Георгиевич, д.м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, медицинский научно-образовательный центр (Москва, Россия)

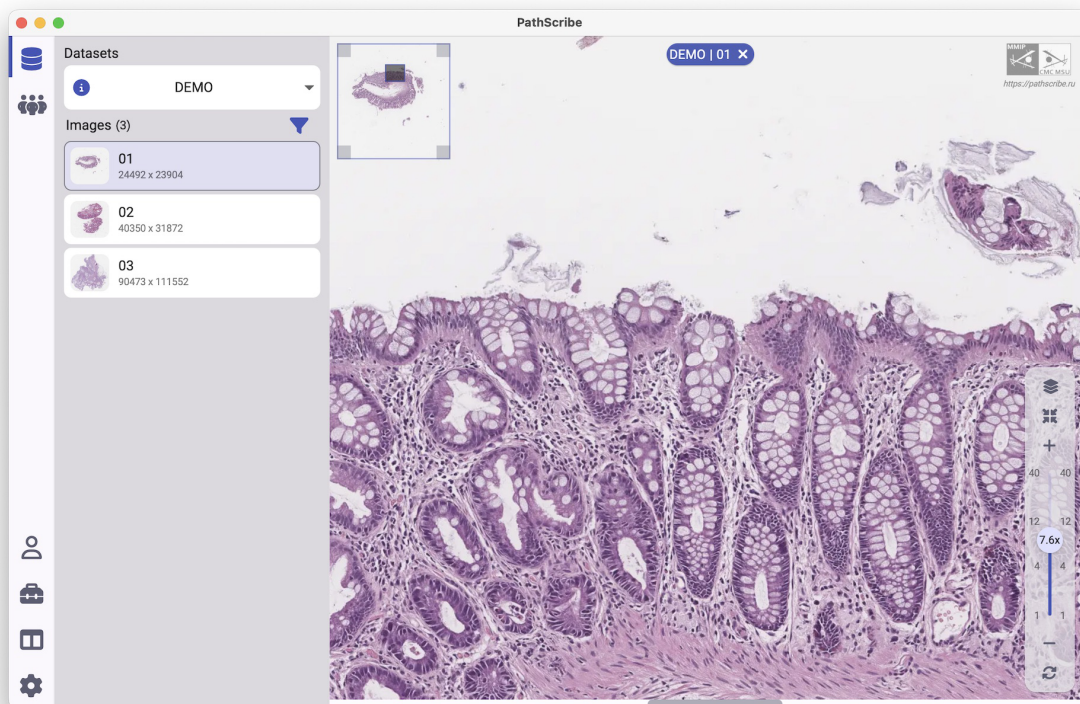


Рис. 1: Скриншот PathScribe (ОС Windows) с полнослайдовым изображением.

Образовательный функционал

PathScribe активно используется в реальном учебном процессе в рамках курса патологии в ФФМ МГУ, в рамках которого коллекция из 336 оцифрованных учебных микропрепаратов была аннотирована и загружена в PathScribe. Курс включает 34 лекции, 28 практических занятий, 6 этапных коллоквиумов, самостоятельную работу и экзамен. Более 100 студентов ежегодно используют данное ПО для изучения патологии. Большим преимуществом использования PathScribe в образовании является наличие мобильной версии, позволяющей студентам работать с изображениями микропрепаратов с помощью своих смартфонов, где бы они ни находились.

Научный функционал

PathScribe был задуман как многофункциональный инструмент для профессиональных гистологов и исследователей и разрабатывался с учетом интеграции различных автоматических алгоритмов анализа гистологических изображений, в том числе и полнослайдовых, таких как [3]. Большое внимание было уделено инструментам разметки изображений, крайне необходимых для обучения нейросетевых моделей анализа. В PathScribe реализованы 3 базовых инструмента разметки, позже будут добавлены быстрые методы разметки, разработанные коллективом ранее [4].

Заключение

Более подробно ознакомиться с функционалом PathScribe, сравнением с существующими решениями, а также с сопутствующими разрабатываемыми методами автоматической обработки и анализа полнослайдовых гистологических изображений, и посмотреть фото и видео материалы с демонстрацией можно на сайте проекта <https://pathscribe.ru>. PathScribe находится в стадии бета-тестирования, скачать дистрибутив можно с официального сайта, но

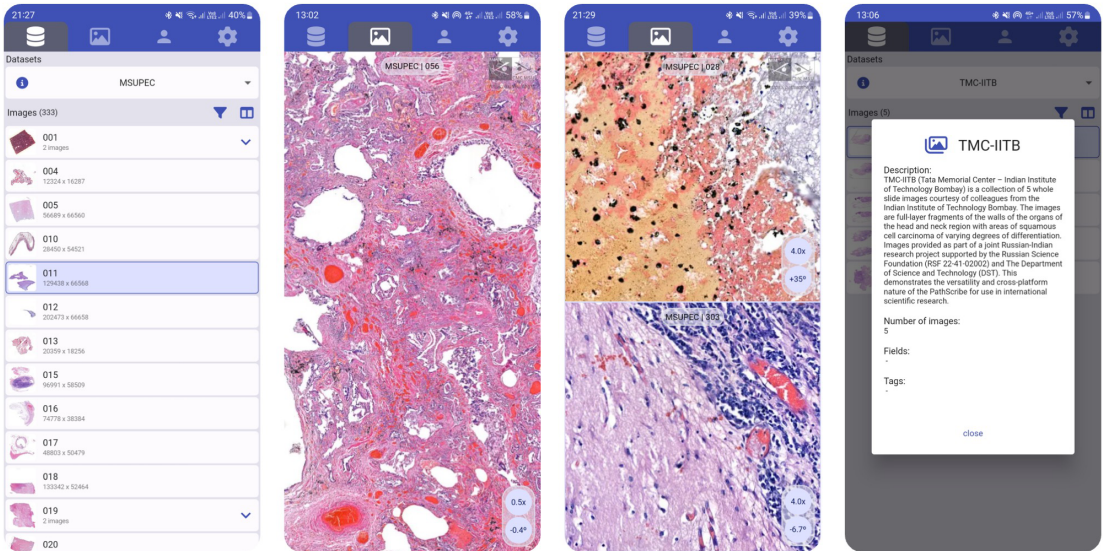


Рис. 2: Скриншоты мобильной версии PathScribe (ОС Android): выбор изображений, просмотр одного или двух полнослайдовых изображений, описание данных.

для создания учетной записи необходимо получить приглашение через телеграм-бот <https://t.me/PathScribeInvitesBot>.

Литература

1. X. Li and et. al. A comprehensive review of computer-aided whole-slide image analysis: from datasets to feature extraction, segmentation, classification and detection approaches // Artificial Intelligence Review, vol. 55, no. 6, 4809–4878, 2022.
2. R. J. Chen and R. G. Krishnan Self-supervised vision transformers learn visual concepts in histopathology // arXiv preprint arXiv:2203.00585, 2022.
3. A. Khvostikov, A. Krylov, I. Mikhailov, and P. Malkov Visualization and analysis of whole slide histological images // International Conference on Pattern Recognition. Springer, 2022, 403–413.
4. A. Khvostikov, A. S. Krylov, I. Mikhailov, and P. Malkov CNN assisted hybrid algorithm for medical images segmentation // Proceedings of the 5th International Conference on Biomedical Signal and Image Processing, 2020, 14–19.

**МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ЗАДАЧАХ
МОЛЕКУЛЯРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В
БИОМАКРОМОЛЕКУЛАХ**

М.Г. Хренова, А.М. Кулакова, Т.И. Мулашкина, Р.А. Степанюк, И.В. Поляков
khrenovamg@my.msu.ru, kulakovaam@gmail.com, mulashkinati@my.msu.ru,
romanstepanyuk@outlook.com, polyakoviv@gmail.com

УДК 577.332

В докладе будут обсуждаться возможности совместного использования методов искусственного интеллекта и методов молекулярного моделирования для решения практически значимых задач, связанных с функционированием молекулярных систем. Будут рассмотрены примеры, включающие ферментативные реакции в активных центрах гидролаз, а также фотофизические свойства флуоресцентных белков.

Ключевые слова: молекулярное моделирование, КМ/ММ, молекулярная динамика, методы искусственного интеллекта.

В последние несколько лет произошел серьезный прорыв в развитии методов молекулярного моделирования, связанный с разработкой программных кодов для графических ускорителей. Это дает возможность быстро и эффективно проводить расчёты методами квантовой химии, в том числе гибридными методами квантовой механики / молекулярной механики (КМ/ММ), применение которых позволяет описывать химические реакции в активных центрах ферментов и фотохимические процессы в фоторецепторных белках. Современное развитие методов компьютерного моделирования позволяет рассчитывать молекулярно-динамические траектории с КМ/ММ-потенциалами, что приводит к получению большого массива данных об электронной структуре, свойствах систем и их эволюции во времени. В докладе будут представлены примеры успешного применения методов искусственного интеллекта для работы с молекулярными данными, а также с графическими образами карт дескрипторов электронной плотности для прогнозирования структуры молекул и моделирования их свойств. Разработка таких алгоритмов позволяет решать задачи рационального управления ферментативной активностью таких биомедицински важных систем как основная протеаза вируса SARS-CoV2 или бактериальные ферменты, ответственные за антибиотикорезистентность. Также предлагаемые комбинированные подходы позволяют описывать фотофизические и фотохимические свойства флуоресцентных белков, являющихся основными используемыми биомаркерами в живых системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке НОШ МГУ (проект № 23-Ш03-04).

Хренова Мария Григорьевна, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет (Москва, Россия)

Кулакова Анна Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет (Москва, Россия)

Мулашкина Татьяна Игоревна, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет (Москва, Россия)

Степанюк Роман Алексеевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет (Москва, Россия)

Поляков Игорь Вадимович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, МГУ имени М.В. Ломоносова, химический факультет (Москва, Россия)

МАТЕМАТИКА В БИОЛОГИИ — ГДЕ ТОЧКА РОСТА?**К.В. Шайтан, А.К. Шайтан, Г.М. Кобельков, А.Т. Фоменко, М.П. Кирпичников**
shaytan49@yandex.ru

УДК 577.3

Современная постгеномная биология переживает интересный момент в своем развитии. Происходит очень быстрое увеличение числа экспериментальных данных о физических и химических свойствах и характеристиках элементарных "кирпичиков" (макромолекулы, клеточные органеллы и пр.), из которых состоят живые системы. Быстро растут возможности изучения механизмов функционирования биоструктур с атомной точностью. Однако имеется значительный дефицит в идеях, как это все вместе работает и как это могло возникнуть с точки зрения фундаментальных законов Природы [1]. В докладе обсуждается роль ряда современных разделов математики для формулировки новых идей и подходов к решению трудных задач, связанных с формированием пространственной структуры биополимеров и их комплексов, в том числе, и в результате физико-химической эволюции. Ключевые слова: математические методы в структурной биологии, молекулярное моделирование биополимеров, динамика линейных биополимеров в вязкой среде, топография энергетических поверхностей линейных полимеров, теория фолдинга.

Ключевые слова: физико-химическая эволюция, математические методы в биологии, пространственная структура белков, биополимеры.

Рассматриваются нескольких фундаментальных проблем, которые важны с точки зрения понимания физико-химических закономерностей функционирования живых систем. Это сложные многокомпонентные системы, прогресс в понимании принципов устройства и функционирования которых немислим без самого широкого применения современных физико-химических методов и математических инструментов. К рассматриваемым в докладе проблемам относятся вопросы формирования пространственной структуры как отдельных биополимеров (например, белков), так и больших ДНК-белковых макромолекулярных комплексов, имеющих первостепенное значение для работы генетического аппарата. Несомненным прорыв в этой области в последние десятилетия был связана с развитием методов суперкомпьютерного молекулярного моделирования. В качестве примера можно привести рекордные расчеты в полноатомном приближении субмиллисекундных траекторий структурных элементов хроматина, содержащих более миллиона атомов и выполненных на суперкомпьютерах МГУ [2]. Детализация структурной и динамической картины взаимодействия ДНК, белков и окружающего их электролита является базой для дальнейшей детализации молекулярных механизмов функционирования одной из сложнейших систем, созданных Природой.

В последние годы интенсивно развиваются экспериментальные методы установления пространственной структуры белков, макромолекулярных и надмолекулярных комплексов, которые выполняют важнейшие функции в живых системах. Широко известны достижения в этой области, которые получены методами рентгеноструктурного анализа с использованием синхротронного излучения и рентгеновских лазеров на свободных электронах, ЯМР, а в последние годы и крио-электронной микроскопии [3]. Колоссальное увеличение яркости рентгеновского излучения в современных источниках открывает новые принципиальные возможности для изучения пространственной структуры единичных, некристаллизующихся объектов, а также для получения данных о функциональной атомной динамике биомолекул. Первые работы по изучению

Шайтан Константин Вольдемарович, д.ф.-м.н., профессор, профессор, МГУ имени М.В.Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Шайтан Алексей Константинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия)

Кобельков Георгий Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Фоменко Анатолий Тимофеевич, д.ф.-м.н., академик РАН, заведующий кафедрой дифференциальной геометрии и приложений, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Кирпичников Михаил Петрович, д.б.н., академик РАН, декан биологического факультета, заведующий кафедрой бионженерии, МГУ имени М.В.Ломоносова, биологический факультет (Москва, Россия), kirpichnikov@inbox.ru

структуры единичных объектов были выполнены в содружестве с Курчатовским институтом на примере вирусов клещевого энцефалита [4]. С другой стороны, развитие методов искусственного интеллекта, нейросетевых технологий дает принципиальные возможности для дальнейшего продвижения в этой области. В докладе обсуждаются новые подходы с использованием ИИ для расшифровки картин дифракции от единичных биомолекулярных структур и принципы создания экспериментальных платформ для реализации этих методов на современных источниках рентгеновского излучения [5].

Получение разнообразных и технологически продвинутых новых данных о пространственной структуре и динамике сложных молекулярных конструкций требует осмысления и понимания взаимосвязи между достаточно разнородными факторами, с которыми мы имеем дело в биосистемах. Несомненно, здесь мы сталкиваемся с общими проблемами сложности, измерением меры сложности [6], проблемой адекватности математических моделей сложности для изучаемой системы. С этой точки зрения весьма показательной является проблема фолдинга биополимеров, в частности, белков [7]. Развитие биоинженерии, создание новых функциональных конструкций [8] переводит проблему фолдинга также и в практическую плоскость. С неизбежностью, понимание этого фундаментального для всего живого процесса требует разработки математических приемов работы с ультрамногомерными поверхностями потенциальной энергии (ППЭ) полимерных цепей, понимания принципов устройства топографии, влияния различных типов симметрии и правил движения репрезентативной точки по многомерным ППЭ. Учитывая сложность данной проблемы и отсутствие реального успеха [9] в ее решении в течение десятилетий (мы здесь не рассматриваем некоторые популярные методы предсказания пространственной структуры белков, которые не используют реальные физические взаимодействия [10]) ниже рассматриваются подходы, основанные на базовых принципах формирования топографии ППЭ, к которым относятся: топология конфигурационного пространства линейных полимеров, симметрия ППЭ относительно перестановки в цепи одинаковых звеньев, принципы теории Морса [11, 12] для топографии поверхности в окрестности критических точек, а также уравнения механики для движения в сильно вязких средах и экстремальные принципы для движения репрезентативной точки на ультрамногомерных ППЭ [13]. Последние являются следствием асимптотических соотношений для многомерных поверхностей [14]. Применение вышеперечисленных математических принципов и подходов дает новую и четкую физическую картину фолдинга линейных полимеров и выявляет внутренние связи между весьма разнородными экспериментальными наблюдениями [15].

Точки приложения математики к биологическим проблемам, конечно, не исчерпываются обсужденным выше. Полагаем важным выразить ту мысль, что математика является тем языком, на котором с нами разговаривает Природа. И чем сложнее объект, тем шире эти возможности и тем большее число математических идей и методов требуется для понимания сути проблем, которые стоят перед современной биологией.

Литература

1. Nurse P. Biology must generate ideas as well as data. *Nature*. 2021. 597. 305. [10.1038/d41586-021-02480-z](https://doi.org/10.1038/d41586-021-02480-z)
2. Armeev G.A., Kniazeva A.S., Komarova G.A., Kirpichnikov M.P., Shaytan A.K. Histone Dynamics Mediate DNA Unwrapping and Sliding in Nucleosomes. *Nat. Commun.* 2021. 12. 1-15. [10.1038/s41467-021-22636-9](https://doi.org/10.1038/s41467-021-22636-9)
3. Соколова О.С., Кирпичников М.П., Шайтан К.В. и др. Современные методы изучения структуры и функций ионных каналов. Изд. Товарищество научных изданий КМК. М: 2020.- 310с.
4. Vorovitch M.F., Samygina V.R., Pichkur E., Konarev P.V., Peters G., Khvatov E.V., Ivanova A.L., Tichynskaya K.K., Konyushko O.I., Fedotov A.Y., Armeev G., Shaytan K.V., Kovalchuk M.V., Osolodkin D.I., Egorov A.M., Ishmukhametov A.A. Preparation and characterization of inactivated tick-borne encephalitis virus samples for single particle imaging at the European XFEL *Acta Cryst.* 2024. D80. 44-59. [10.1107/S2059798323010562](https://doi.org/10.1107/S2059798323010562)
5. Армеев Г.А., Кирпичников М.П., Кобельков Г.М., Кудрявцев А.В., Ложников М.А., Новоселецкий В.Н., Шайтан А.К., Шайтан К.В. Применение нейронных сетей для распознавания конформационных изменений в структуре белка по рентгеновским дифрактограммам его одиночных молекул на примере фотосинкла бактериородопсина. *Интеллектуальные системы. Теория и приложения.* 2022. 26(1). 24-34.
6. Колмогоров А.Н Три подхода к определению понятия "количество информации". *Пробл. передачи информ.* 1965. 1(1). 3-11.
7. Финкельштейн А.В. 50+ лет самоорганизации белков. *Усп.биол.химии.* 2018. т.58. с.7-40.

8. Fedorov A., Dolgikh D., Chemeris V., Chernov B., Finkelstain A., Schulga A., Alakhov Y., Kirpichnikov M., Ptitsyn O. De novo design, synthesis and study of albebetin, a polypeptide with a predetermined three-dimensional structure. Probing the structure at the nanogram level. *J. Mol. Biol.*, 1992, V. 225, P. 927-931. [10.1016/0022-2836\(92\)90092-x](https://doi.org/10.1016/0022-2836(92)90092-x)
9. Dill K.A., MacCallum J.L. The Protein-Folding Problem, 50 Years On. *Science*. 2012. 338. 1042-1046. [10.1126/science.1219021](https://doi.org/10.1126/science.1219021)
10. Callaway E. What's next for AlphaFold and the AI protein-folding revolution. *Nature*. 2022. 604. 234-238. [10.1038/d41586-022-00997-5](https://doi.org/10.1038/d41586-022-00997-5)
11. Милнор Дж. Теория Морса. URSS, М.: 2011.
12. Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи. Изд. 2-е. Москва, Изд-во ЛЕНАНД, URSS, М.: 2019
13. Шайтан К.В. Вариационные принципы в механике конформационных движений макромолекул в вязкой среде. *Биофизика*. 2018. т.63. №1. с.5-15. [10.1134/S0006350918010165](https://doi.org/10.1134/S0006350918010165)
14. Зорич В.А. Геометрия и вероятность. Теория вероятн. и ее примен. 2017. 62. № 2. 292–310. [10.4213/tvp5109](https://doi.org/10.4213/tvp5109)
15. Шайтан К.В. Почему белок сворачивается в уникальную 3D-структуру. И не только это... (К 100-летию академика В.И. Гольданского). *Хим.физика*. 2023. 42. 40-62. [10.31857/S0207401X23060109](https://doi.org/10.31857/S0207401X23060109), EDN: UIUTU

ТРАНСФОРМЕРЫ С РЕКУРРЕНТНОЙ ПАМЯТЬЮ ДЛЯ АНАЛИЗА ДЛИННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДНК

А.В. Шмелев, Ю.М. Куратов, В.С. Фишман, О.Л. Кардымон, М.С. Бурцев
shmelev@airi.net, kuratov@airi.net, minja-f@yandex.com, kardymon@airi.net, mb@lims.ac.uk

УДК 512.56

Анализ последовательностей ДНК с использованием языковых моделей на основе архитектуры трансформер позволил совершить значительный скачок в вычислительной геномике. Однако подобные модели до сих пор сталкиваются с проблемой обработки последовательностей большой длины, сопоставимой с размерами генов позвоночных (от 104 до 105 нуклеотидов) или целых геномов (около 109 нуклеотидов). В нашей работе, на примере двух биологических задач — классификации видов и предсказания эпигенетических характеристик на основе последовательностей ДНК — мы показываем, что использование технологий рекуррентной памяти (RMT) значительно повышает производительность трансформерных моделей семейства GENALM. Наши результаты показывают потенциал использования рекуррентной памяти в решении проблем обработки длинных последовательностей в вычислительной геномике.

Ключевые слова: языковые модели для последовательностей ДНК, обработка длинных последовательностей, рекуррентные модели, вычислительная геномика.

Введение

Вычислительная геномика часто сталкивается с проблемами в обработке нелинейных взаимосвязей между геномными характеристиками. Сейчас такие сложные зависимости можно обрабатывать с помощью методов машинного обучения, развившихся от решающих деревьев [1] к сложным архитектурам, таким как сверточные нейронные сети [2, 3], рекуррентные нейронные сети [4] и трансформеры [5, 6]. Использование трансформеров позволило значительно улучшить качество решения многих задач в области геномики, что говорит о перспективности этих технологий в будущем [5, 6].

Шмелев Алексей Валерьевич, м.н.с. AIRI, группа биоинформатики (Москва, Россия)
 Куратов Юрий Михайлович, к.ф.-м.н., н.с. AIRI, группа биоинформатики (Москва, Россия)
 Фишман Вениамин Семенович, к.б.н., с.н.с. AIRI, группа биоинформатики (Москва, Россия)
 Кардымон Ольга Леонидовна, н.с. AIRI, группа биоинформатики (Москва, Россия)
 Бурцев Михаил Сергеевич, Лондонский институт математических наук (Лондон, Великобритания)

Не смотря на растущий интерес к использованию трансформеров и других архитектур машинного обучения, для их обучения с нуля часто необходимо использовать значительные вычислительные мощности, не доступные широкому кругу исследователей. Для решения этой проблемы широко используется подход предварительного обучения, в котором модель сначала обучается для решения одной задачи с использованием большого количества ресурсов, а потом может быть дообучена для решения других задач с использованием меньшего количества ресурсов/ При этом дообучение требует меньшего количества вычислительных ресурсов, но сохраняет при этом высокое качество результатов. Такой подход делает передовые подходы доступными для большего количества исследователей [7-12].

Современные модели трансформеров обладают высокой точностью, но сталкиваются с ограничением длины входной последовательности из-за квадратичного увеличения объёма вычислений. DNABERT [10], обрабатывающий не более 512 нуклеотидов, не справляется анализом зависимостей между расположенными на большом расстоянии в последовательности ДНК, хотя такие взаимодействия часто имеют решающее значение для функционирования генома [13]. В более новой трансформерной модели BigBird [7] для решения этой проблемы был предложен механизм spars attention, что позволило обрабатывать последовательности ДНК длиной до 32 КБ. Это привело к улучшению качества решений в задачах геномики, требующих анализа длинных контекстов.

В нашем исследовании мы представляем усиление языковых моделей ДНК семейства GENA-LM за счет включения механизмов внимания sparse attention и BPE токенизации, что позволяет обрабатывать входные данные размером до 32 КБ и превосходить BigBird и DNABERT в различных биологических задачах [9]. Также мы применяем трансформеры с рекуррентной памятью (RMT), идейно основанные на рекуррентных нейронных сетях, которые обрабатывают ещё более длинные входные данные сегментами и используют дополнительные токены памяти для хранения информации, что значительно улучшает обработку входной информации [14-16], теоретически позволяя обрабатывать последовательности неограниченного размера. При интеграции с моделями семейства GENA-LM, технология RMT повышает эффективность определения промотеров, сайтов сплайсинга, предсказания эпигенетических характеристик, экспрессии генов, а также классификации видов живых организмов, подчеркивая потенциал RMT для улучшения методов вычислительной геномики [9].

В нашей работе использовалось несколько моделей семейства GENA-LM (<https://huggingface.co/collections/AIRI-Institute/dna-language-models-65b229c1cd9b73cf8462ac96>). Все они используют энкодер архитектуру трансформера и предобучались на задаче восстановления замаскированного слова по контексту с использованием сборки генома человека версии T2T и токенайзера на основе технологии BPE со средним размером токена 8-9 букв. Базовая (bert-base-t2t, 110M параметров) и большая (bert-large-t2t, 350M параметров) модели работают с длиной входной последовательности в 512 токенов, модель на основе архитектуры BigBird [7] (bigbird-base-t2t, 110M параметров), использующая sparse attention, может обрабатывать до 4096 токенов.

Результаты

Увеличение длины входных данных языковых моделей ДНК с помощью RMT может быть выполнено либо путем использования RMT на этапе предварительного обучения, либо путем добавления RMT на этапе дообучения с использованием предобученной модели без RMT. Второй вариант является более эффективным подходом с точки зрения использования вычислительных ресурсов. Мы показали, модели предварительно обученные с использованием технологии RMT превосходят по качеству модели, в которых рекуррентная память использовалась только при дообучении, на задачах предсказания промотеров и сайтов сплайсинга (результаты показаны в Таблице 1). Задача классификации видов млекопитающих по геномным последовательностям также демонстрирует эффективность моделей *gena - lm - bert - base - t2t* с RMT, которые превосходят существующие модели, достигая точности $99,67 \pm 0,059$ для входных последовательностей длины 50 КБ. Этот результат показывает, что полученная нами модель превосходит ранее опубликованную НуенаDNA [11], для которой даже при использовании более длинных входных последовательностей (1000 КБ) точность классификации более низкая (99.5, Таблица

2). В задаче предсказания эпигенетических характеристик и экспрессии генов по последовательностям ДНК, использование RMT также даёт значительный выигрыш. Однако следует отметить, что согласно нашим данным процесс тренировки моделей с RMT играет важную роль. Наибольшая эффективность достигается с использованием curriculum learning подхода, когда обучение начинается на небольшом количестве сегментов с постепенным увеличением их количества, позволяя модели адаптироваться к более длинным последовательностям. Использование *gena-lm-bert-large-t2t* с RMT и применение curriculum learning позволило улучшить обработку длинных последовательностей ДНК, продемонстрировав заметное улучшение коэффициента корреляции Пирсона при сравнении с базовыми моделями без RMT. Качество увеличилась с $R = 0,5899$ для модели, обрабатывающей 512 токенов (без RMT), до $R = 0,6151$ с RMT для более длинных последовательностей и далее до $R = 0,6331$ за счет ещё большего увеличения длины последовательности и дополнительных аугментаций, что показывает превосходные возможности RMT в обработке и анализе длинных последовательностей. Таким образом, наши результаты показывают преимущества использования рекуррентной памяти для решения задач вычислительной геномики.

Таблица 1: Предварительное обучение RMT GENA-LM улучшает предсказание промоторов и сайтов сплайсинга по сравнению с дообучением. Модели, обозначенные как (+P), обозначают модели с предобучением RMT.

| Модель | Промоутеры (16 kbp), F1 | Сайты сплайсинга (15 kbp), PR-AUC |
|------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| RMT+GENA-LM base | 93.70 ± 0.46 | 0.9353 ± 0.001 |
| RMT+GENA-LM base (+P) | 94.61 ± 0.54 | 0.9429 ± 0.001 |
| RMT+GENA-LM large | 95.58 ± 0.43 | 0.9471 ± 0.001 |
| RMT+GENA-LM large (+P) | 95.36 ± 0.44 | 0.9518 ± 0.001 |

Таблица 2: RMT с GENA-LM превосходит HyenaDNA в задаче классификации видов. RMT+GENA-LM достигает точности более 99%, начиная с 32 КБ, превосходя HyenaDNA, которой требуется 1000 КБ для достижения точности 99,5%.

| Модель | Длина последовательности | | | |
|---------------------------|--------------------------|---------------------|----------------------|--------|
| | 1kb | 32kb | 50kb | 1000kb |
| HyenaDNA [1] | 61.1 | 93.4 | - | 99.5 |
| RMT+gena-lm-bert-base-t2t | 61.45 ± 0.91 | 99.24 ± 0.06 | 99.67 ± 0.059 | - |

Литература

1. P. S. Belokopytova, M. A. Nuriddinov, E. A. Mozheiko, D. Fishman & V. Fishman, “Quantitative prediction of enhancer-promoter interactions”, *Genome Res.*, т. 30, № 1, с. 72–84, янв. 2020, issn: 1549-5469. [10.1101/gr.249367.119](https://doi.org/10.1101/gr.249367.119). eprint: 31804952.
2. D. R. Kelley, Y. A. Reshef, M. Bileschi, D. Belanger, C. Y. McLean & J. Snoek, “Sequential regulatory activity prediction across chromosomes with convolutional neural networks”, *Genome Res.*, т. 28, № 5, с. 739, май 2018. [10.1101/gr.227819.117](https://doi.org/10.1101/gr.227819.117).
3. J. Zhou u O. G. Troyanskaya, “Predicting effects of noncoding variants with deep learning-based sequence model”, *Nat. Methods*, т. 12, № 10, с. 931, окт. 2015. [10.1038/nmeth.3547](https://doi.org/10.1038/nmeth.3547).
4. D. Quang u X. Xie, “DanQ: a hybrid convolutional and recurrent deep neural network for quantifying the function of DNA sequences”, *Nucleic Acids Res.*, т. 44, № 11, e107, июнь 2016, issn: 0305-1048. [10.1093/nar/gkw226](https://doi.org/10.1093/nar/gkw226).
5. J. Linder, D. Srivastava, H. Yuan, V. Agarwal u D. R. Kelley, “Predicting RNAseq coverage from DNA sequence as a unifying model of gene regulation”, *bioRxiv*, с. 2023.08.30.555582, сент. 2023. eprint: 2023.08.30.555582. [10.1101/2023.08.30.555582](https://doi.org/10.1101/2023.08.30.555582).
6. Ž. Avsec & et al., “Effective gene expression prediction from sequence by integrating long-range interactions”, *Nat. Methods*, т. 18, с. 1196–1203, окт. 2021, issn: 1548-7105. [10.1038/s41592-021-01252-x](https://doi.org/10.1038/s41592-021-01252-x).

7. *M. Zaheer & et al.*, “Big Bird: Transformers for Longer Sequences”, в *Advances in Neural Information Processing Systems*, H. Larochelle, M. Ranzato, R. Hadsell, M. Balcan и H. Lin, ред., т. 33, Curran Associates, Inc., 2020, с. 17 283—17 297. https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2020/file/c8512d142a2d849725f31a9a7a361ab9-Paper.pdf.

8. *H. Dalla-Torre & et al.*, “The Nucleotide Transformer: Building and Evaluating Robust Foundation Models for Human Genomics”, *bioRxiv*, с. 2023.01.11.523679v3, янв. 2023. [10.1101/2023.01.11.523679](https://doi.org/10.1101/2023.01.11.523679). eprint: 2023.01.11.523679v3.

9. *V. Fishman & et al.*, “GENA-LM: A Family of Open-Source Foundational DNA Language Models for Long Sequences”, *bioRxiv*, с. 2023.06.12.544594, нояб. 2023. eprint: 2023. 06.12.544594. [10.1101/2023.06.12.544594](https://doi.org/10.1101/2023.06.12.544594).

10. *Y. Ji, Z. Zhou, H. Liu & R. V. Davuluri*, “DNABERT: pre-trained Bidirectional Encoder Representations from Transformers model for DNA-language in genome”, *Bioinformatics*, т. 37, № 15, с. 2112—2120, февр. 2021, issn: 1367-4803. [10.1093/bioinformatics/btab083](https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btab083). eprint: <https://academic.oup.com/bioinformatics/article-pdf/37/15/2112/39622303/btab083.pdf>.

11. *E. Nguyen & et al.*, “HyenaDNA: Long-Range Genomic Sequence Modeling at Single Nucleotide Resolution”, *arXiv*, июнь 2023. [10.48550/arXiv.2306.15794](https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.15794). eprint: 2306.15794.

12. *Z. Zhou, Y. Ji, W. Li, P. Dutta, R. Davuluri & H. Liu*, “DNABERT-2: Efficient Foundation Model and Benchmark For Multi-Species Genome”, *arXiv*, июнь 2023. [10.48550/arXiv.2306.15006](https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.15006). eprint: 2306.15006.

13. *G. Fudenberg, D. R. Kelley & K. S. Pollard*, “Predicting 3D genome folding from DNA sequence with Akita”, *Nat. Methods*, т. 17, с. 1111—1117, нояб. 2020, issn: 1548-7105. [10.1038/s41592-020-0958-x](https://doi.org/10.1038/s41592-020-0958-x).

14. *A. Bulatov, Y. Kuratov & M. Burtsev*, “Recurrent Memory Transformer”, в *Advances in Neural Information Processing Systems*, S. Koyejo, S. Mohamed, A. Agarwal, D. Belgrave, K. Cho и A. Oh, ред., т. 35, Curran Associates, Inc., 2022, с. 11 079— 11 091. https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2022/file/47e288629a6996a17ce50b90a056a0e1-Paper-Conference.pdf.

15. *J. Devlin, M.-W. Chang, K. Lee & K. Toutanova*, “BERT: Pre-Training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding”, в *Proceedings of the 2019 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies, Volume 1 (Long and Short Papers)*, 2019, с. 4171—4186. <https://aclweb.org/anthology/papers/N/N19/N19-1423/>.

16. *A. Bulatov, Y. Kuratov & M. S. Burtsev*, “Scaling Transformer to 1M tokens and beyond with RMT”, *arXiv*, апр. 2023. [10.48550/arXiv.2304.11062](https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.11062). eprint: 2304.11062.

Секция 23

Актуальные проблемы прикладной математики

О МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА СТРЕЛЬБЫ ДЛЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Б.А. Будак

budak@smbu.edu.cn, boris.budak@yandex.ru

УДК 519.626

Равновесное программирование – обширная область математики, изучающая математические модели многих явлений экономики, естествознания, связанных с поиском компромисса и согласования противоположных интересов сторон конфликта. Кроме того, к задаче равновесного программирования сводятся различные классы задач, такие как: седловые задачи, вариационные неравенства, задачи поиска равновесия по Нэшу и некоторые другие. В докладе предлагаются основанные на разработанном автором в 2013 году методе стрельбы некоторые его модификации, позволяющие обеспечить более устойчивую и быструю сходимость к решению задачи.

Ключевые слова: равновесные задачи, оптимизация, метод стрельбы, устойчивость, регуляризация.

Основную задачу равновесного программирования можно сформулировать следующим образом. Пусть есть функционал $\Phi(v, w) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$, где W – заданное множество из гильбертова пространства \mathbb{H} . Требуется найти точку $v_* \in W$, удовлетворяющую неравенству

$$\Phi(v_*, v_*) \leq \Phi(v_*, w) \quad \forall w \in W.$$

Такую точку v_* называют равновесной точкой или точкой равновесия задачи равновесного программирования. Проблема существования точек равновесия изучена достаточно хорошо и равносильна проблеме существования неподвижных точек экстремального отображения $W(v)$, определяемого условием:

$$w \in W(v) \Leftrightarrow \Phi(v, w) = \min_{u \in W} \Phi(v, u).$$

Будак Борис Александрович, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай), МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

На основании изложенного в [1] и устойчиво модифицированного в [2] метода, имеющего вид

$$\begin{cases} v_0 \in W \text{ известно,} \\ w_k = Pr_W(v_k - \alpha_k \nabla_w \Phi(v_k, v_k)), \\ C_k = \{z \in W : \|w_k - z\|_{\mathbb{H}} \leq \|v_k - z\|_{\mathbb{H}}\}, \\ Q_k = \{z \in W : \langle z - v_k, v_k - v_0 \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0\}, \\ v_{k+1} = Pr_{C_k \cap Q_k} v_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

предлагается ряд новых его модификаций, обеспечивающих более быструю и устойчивую сходимость к множеству решений задачи.

Литература

1. *B. A. Budak* Shooting method for solving equilibrium programming problems // *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 53:12 (2013), 2008–2013; *Comput. Math. Math. Phys.*, 53:12 (2013), 1819–1824

2. *Han Dongyu and B. A. Budak* Modifying the Shooting Model for Solving Equilibrium Problems // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2022, Vol. 46, No. 3, pp. 163–170. Allerton Press, Inc., 2022.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЙРОФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ О РАССТОЯНИЯХ МЕЖДУ КАНАЛАМИ

А.И. Майсурадзе

maysuradze@cs.msu.ru

УДК 519.246.8, 004.032.26

Анализ многомерных временных рядов требуется во многих прикладных областях. Задача работы — показать ценность использования дополнительной пространственной информации об устройстве ввода, т. е. информации о взаимном расположении в пространстве датчиков, которые формируют каналы. Дополнительно предлагается использовать архитектуру, включающую временной и пространственный анализ. Показано, что такой подход значительно улучшает обобщающую способность исследуемой модели.

Ключевые слова: многомерные временные ряды, пространственная информация, связи между каналами, предметно-ориентированная архитектура модели.

Общераспространенные сегодня архитектуры моделей машинного обучения для анализа многомерных временных рядов заключаются в использовании сверточной нейронной сети (CNN) только по времени для каждого канала отдельно. Лишь на последних этапах обработки информация от разных каналов комплексировается. При этом традиционные архитектуры не предполагают возможности добавления какой-либо специфической информации из предметной области о взаимосвязях между каналами.

Во многих предметных областях представляется полезной информация о взаимном расположении в пространстве датчиков, которые формируют каналы многомерного временного ряда. В случае нейрофизиологии такая пространственная информация называется «монтаж», т. е. взаимное расположение электродов на голове пациента. Соответственно, предлагается использовать архитектуру, включающую временной и пространственный анализ. Пространственные сверточные слои можно использовать для извлечения особенностей из данных ЭЭГ, которые отражают активность различных электродов, а временной сверточный слой может использоваться для извлечения признаков, отражающих изменения в активности мозга с течением времени. Полносвязный уровень затем может объединить эти функции для принятия окончательного решения о классификации.

Исследование поддержано Научно-образовательной школой МГУ «Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект» и НИР МГУ 5.1.21.

Майсурадзе Арчил Ивериевич, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

Предлагается дополнительную пространственную информацию о расположении каналов представить в виде графа. В работе рассмотрены различные способы построения графа связей между каналами по пространственной информации. Дополнительно предлагается слой свертки графа применять перед взвешенной суммой каналов. Модели с такими блоками обработки называются графовыми нейронными сетями (GCN). Их блок пространственной обработки работает с данными графа, извлеченными из входного набора данных. Применение GCN к данным ЭЭГ по-прежнему является активной областью исследований. Модель GCN может быть обучена на наборе данных, который включает в себя как данные ЭЭГ, так и различные показатели «связности» мозга, такие как функциональные связи (показатели корреляции между активностью мозга в разных регионах) или структурные связи (показатели физических связей между областями мозга). Затем GCN можно использовать для анализа этой информации о связях и включения ее в решения по прогнозированию или классификации. Наш подход основан на структурной связи, которую можно извлечь из пространственных координат электродов. Эта информация часто сопровождает наборы данных ЭЭГ.

Показано, что предлагаемые способы построения графа превосходят простое увеличение числа параметров модели. Исследование продемонстрировало эффективность предложенной архитектуры модели при независимом обнаружении нейрофизиологических явлений по данным ЭЭГ. Включение дополнительных данных о предметной области и использование специализированных методов оптимизации значительно улучшили возможности обобщения модели, о чем свидетельствуют веса пространственного фильтра и улучшенные показатели производительности. Наши эксперименты подтвердили, что используемые графовые структуры играют решающую роль в успехе графовых сверточных сетей, заметно влияя на результаты модели. Использование градиентного трюка в сочетании с предложенным подходом привело к заметному повышению производительности модели. Это улучшение позволило нашим моделям конкурировать с существующими современными моделями.

Литература

1. Сидоров Л. С., Майсурадзе А. И. Применение графовых нейронных сетей к многомерным временным рядам для обнаружения новых функциональных паттернов в нейрофизиологии // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2023): сборник трудов по материалам IX Международной конференции и молодежной школы. Том 6. – Самара: Издательство Самарского университета, 2023.

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ РАСТИТЕЛЬНЫХ СООБЩЕСТВ

А.А. Никитин, М.В. Николаев

nikitin@cs.msu.ru, nikolaev.mihail@inbox.ru

УДК 517.968.43

Исследование системы интегральных уравнений, возникшей в модели растительных сообществ У. Дикмана и Р. Лоу. Демонстрируются аналитический и численный подход к изучению данной задачи. Выводятся достаточные условия существования решения этой системы, и ускорение метода рядов Неймана для нахождения этого решения численно

Ключевые слова: интегральные уравнения, функциональный анализ, численные методы.

Никитин Алексей Антонович, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

Николаев Михаил Викторович, аспирант Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, (Москва, Россия)

В работе исследуется нелинейное интегральное уравнение, получающееся в результате трёх-параметрического замыкания третьего пространственного момента в системе динамики модели У. Дикмана и Р. Лоу.

$$0 = bm(x)N(C) + b \int_{\mathbb{R}^2} m(y)C(x-y) dy - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}b + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}d + sw(x) \right) C(x) - \\ - \frac{\beta}{\alpha+\gamma} \cdot \frac{s}{N(C)} C(x) \int_{\mathbb{R}^2} w(y)C(y-x) dy - \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \cdot \frac{s}{N(C)} \int_{\mathbb{R}^2} w(y)C(y)C(y-x) dy + \\ + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} \cdot sN^3(C), \text{ где } N(C) = \frac{s}{b-d} \int_{\mathbb{R}^2} C(y)w(y) dy.$$

Это уравнение дополняется следующим условием на бесконечности: $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} C(x) = N^2(C)$.

В докладе будет рассказано о функциональном пространстве, в котором удаётся выписать условия, накладываемые на биологические параметры достаточные для существования решения вышеуказанного уравнения, а также о подходе к ускорению численных вычислений нелинейной свёртки.

Литература

1. *R. Law and U. Dieckmann* Moment approximations of individual-based models, *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Ed. by U. Dieckmann, R. Law, and J. A. J. Metz (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000), pp. 252–270.
2. *U. Dieckmann and R. Law* Relaxation projections and the method of moments, *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Ed. by U. Dieckmann, R. Law, and J. A. J. Metz (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000), pp. 412–455.
3. *D. J. Murrell, U. Dieckmann, and R. Law* On moment closures for population dynamics in continuous space // *J. Theor. Biol.* 229, 421–432 (2004).
4. *M. A. Krasnosel'skii* Two remarks on the method of successive approximations // *Usp. Mat. Nauk* 10 (1), 123–127 (1955).
5. *M. V. Nikolaev and A. A. Nikitin* The Leray Schauder principle applied to the study of a nonlinear integral equation // *Differ. Equations* 55 (9), 1164–1173 (2019).

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ПРИ СПУСКЕ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Н.А. Орел, О.Ю. Черкасов

nikita.orel@math.msu.ru, oyuche@yandex.ru

УДК 531.55

Исследуется задача о мягкой посадке в сопротивляющейся среде. Количество топлива задано. Установлено количество и последовательность переключений оптимального управления.

Ключевые слова: управление тягой, мягкая посадка, оптимальная структура.

Рассматривается оптимальное по расходу топлива торможение центра масс твердого тела в сопротивляющейся среде. Движение происходит в вертикальной плоскости. Поле сил тяжести и сопротивляющаяся среда однородны. Для сопротивления среды принята модель линейного вязкого трения. В качестве управлений приняты угол наклона траектории и сила тяги. Количество топлива задано. Предполагается, что масса топлива пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. Целью управления является приведение системы из начального положения в вертикальной

Орел Никита Андреевич, аспирант, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

Черкасов Олег Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

плоскости в заданное конечное с минимизацией квадрата скорости в заданный момент окончания процесса.

Задача решается с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. В результате исходная задача оптимального управления сведена к краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений. Доказано, что возможное особое управление не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности и, следовательно, не включается в состав оптимального управления. Таким образом, оптимальное управление может принимать только граничные значения. Аналитический анализ полученной краевой задачи позволяет установить, что может быть не более двух переключений тяги. Установлено, что оптимальная тяга может состоять либо из двух дуг: дуги нулевой тяги, затем дуги максимального торможения, либо из трех дуг: дуги максимального торможения в начале, затем дуги нулевой тяги, и, наконец, снова дуги максимального торможения. Таким образом, исходная задача оптимального управления сведена к задаче минимизации функции двух переменных, а именно, двух моментов переключения тяги.

Полученные результаты качественно совпадают с известными решениями модельных одномерных задач о мягкой посадке с минимальным расходом топлива [1], а также с численными решениями двумерных и трехмерных задач, полученных в рамках подготовки миссий исследования планет с атмосферой [2].

Литература

1. *Meditch J. S.* On the problem of optimal thrust programming for a lunar soft landing // IEEE Transactions on Automatic Control. 1964. pp. 477–484.
2. *Ridderhof J., Tsiotras P.* Minimum-fuel closed-loop powered descent guidance with stochastically derived throttle margins // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2021. V. 44. № 3, pp. 537–547.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

В.В. Терновский, В.П. Ильютко, Д.В. Камзолкин

ternovski@smbu.edu.cn, ilyutko@smbu.edu.cn, kamzolkin@smbu.edu.cn

УДК 517.977

Рассмотрена многопараметрическая задача оптимального управления коэффициентом линейного дифференциального уравнения за кратчайшее возможное время при заданных начальном и конечном состояниях. Нестабильность данной обратной задачи управления приводит к трудностям в получении надежного решения с использованием численного метода. Таким образом, решение строится аналитически и проверяется с помощью прямого моделирования с использованием рекуррентных формул для каждого сегмента траектории.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, множество достижимости.

Рассмотрено линейное дифференциальное уравнение вида [1]

$$\ddot{x}(t) + \mu \dot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = 0,$$

где фазовая переменная $x(t)$ представляет координату материальной точки, μ — заданный неотрицательный коэффициент и $\omega(t)$ — неизвестная функция. Задача заключалась в нахождении ограниченной функции $\omega(t)$, обеспечивающей переход фазовой переменной из заданного начального состояния $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$ в конечное $x(T) = B$, $\dot{x}(T) = 0$ за наименьшее время T .

В данной работе был рассмотрен частный случай $\mu = 0$, это позволило провести полное аналитическое исследование поставленной задачи.

Были получены следующие результаты:

Терновский Владимир Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

Ильютко Виктор Петрович, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

Камзолкин Дмитрий Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

1. Установлены ограничения на параметры, при которых возникают нетривиальные решения.
2. Найден общий вид оптимального управления, доказано утверждение о числе точек переключения [2] и для произвольных входных параметров определены точки переключения оптимального управления.
3. Построено множество достижимости для случаев $0 \leq \omega(t) \leq 1$ и $0 < \omega_0 \leq \omega(t) \leq 1$.
4. Доказано, что значения $x(t)$ в точках экстремума оптимальной траектории образуют геометрическую прогрессию.

Литература

1. *Yakubu G., Olejnik P., Awrejcewicz J.* On the modeling and simulation of variable-length pendulum // Arch. Comput. Methods Eng. 2022, 29, 2397-2415.
2. *Pontryagin L.S.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. 1st ed., Routledge: London, UK, 1987.

О ПОСТРОЕНИИ КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

П.А. Точилин

tochilin@cs.msu.ru

УДК 517.977

Рассмотрена задача терминального управления нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном отрезке времени. Предложен метод её приближённого решения, использующий кусочную линеаризацию (гибридизацию) нелинейных уравнений, а также специальный класс кусочно-заданных функций цены. На основе принципа сравнения для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана выведены соотношения для коэффициентов таких функций.

Ключевые слова: нелинейная динамика, динамическое программирование, принцип сравнения.

Работа посвящена приближённому решению задачи целевого управления для нелинейной по фазовым переменным системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = \mathbf{f}(t, x) + \mathbf{g}(t, x)u, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор фазовых переменных, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управляющих параметров. Функции $\mathbf{f}(t, x)$ и $\mathbf{g}(t, x)$ предполагаются достаточно гладкими: каждая компонента вектор-функции $\mathbf{f}(t, x)$ два раза непрерывно дифференцируема по x , а каждая компонента матриц-функции $\mathbf{g}(t, x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x при $x \in \Omega$. Здесь Ω – некоторая фиксированная выпуклая многогранная область в пространстве \mathbb{R}^{n_x} . Кроме того, функции \mathbf{f} и \mathbf{g} непрерывны по $t \in [t_0, t_1]$.

Траекторию рассматриваемой системы необходимо перевести в заданное целевое множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$ на конечном, фиксированном отрезке времени $[t_0, t_1]$ за счёт выбора подходящей позиционной стратегии управления $u(t, x)$. При этом на управляющие параметры наложены жёсткие, поточечные ограничения $u(t, x) \in \mathcal{P}(t)$, где $\mathcal{P}(t)$ – непрерывное в смысле метрики Хаусдорфа многозначное отображение, принимающее выпуклые, компактные значения при каждом $t \in [t_0, t_1]$.

Данную задачу предполагается решать за счёт построения вспомогательных множеств разрешимости или их внутренних оценок. Такие множества могут быть получены как множества уровней специальной функции цены $V(t, x)$, являющейся обобщённым решением соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ). Непосредственное решение этого уравнения

является сложной задачей. Однако, можно построить верхние оценки решения за счёт использования идей принципа сравнения [1], а также кусочной линеаризации правой части системы дифференциальных уравнений. Функцию, аппроксимирующую неизвестное решение уравнения ГЯБ, следует искать в определённом (по возможности достаточно простом для анализа) классе функций. В данной работе используются непрерывные кусочно-кубические функции следующего вида:

$$V(t, x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \langle \bar{x}, \bar{P}_k^{(i)}(t)\bar{x} \rangle, \quad \bar{x} = (x^T, 1)^T, \quad \text{если } x \in \Omega^{(i)}.$$

Здесь $\alpha_k^{(i)}(x)$, $k = 1, \dots, n_x + 1$, – барицентрические координаты точки $x \in \Omega^{(i)}$, $\Omega^{(i)}$ – один из симплексов, на который разбита область Ω . Матрицы $\bar{P}_k^{(i)}(t)$ должны быть подобраны таким образом, чтобы были выполнены условия непрерывности функции $V(t, x)$ по переменной $x \in \Omega$, а также так, чтобы было приближённо выполнено уравнение ГЯБ. Достаточно исследовать поведение функции только на границах соседних симплексов. Выбор указанного класса функций позволяет получить более точные оценки множеств разрешимости по сравнению с ранее рассмотренными кусочно-аффинными [2] и кусочно-квадратичными [3,4] функциями.

В работе исследованы некоторые свойства непрерывных кусочно-кубических функций цены, заданных на разбиении Ω на симплексы. Выведены формулы, позволяющие построить кусочно-кубическую функцию, задающую внутренние оценки множеств разрешимости нелинейной системы, а также позволяющую определить субоптимальное позиционное управление, переводящее траекторию системы в наименьшую возможную окрестность целевого множества.

Литература

1. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. (SCFA, vol. 85).
2. Точилин П. А. О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Труды института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С.223–238.
3. Чистяков И. А., Точилин П. А. Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближённого решения нелинейной задачи целевого управления // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С.1545–1554.
4. Чистяков И. А., Точилин П. А. Построение разрывных кусочно-квадратичных функций цены в задаче целевого управления // Труды института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 3. С.259–273.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ С ВОЗРАСТНЫМ СТРУКТУРИРОВАНИЕМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УЧЁТОМ ПЕРЕНАСЕЛЕНИЯ

А.Ю. Щеглов, Ли Суй

shcheg@cs.msu.ru, lisui1008@163.com

УДК 517.977

Исследуется единственность обратной задачи для нелинейной модели динамического развития популяции одноклеточных организмов с нелокальными коэффициентами интегрального вида.

Ключевые слова: обратная задача, нелинейная модель популяции, уравнение с нелокальными коэффициентами.

Частичную поддержку работе оказывают National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Щеглов Алексей Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

Ли Суй, магистрант, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, факультет вычислительной математики и кибернетики (Шэньчжэнь, Китай)

Прямая задача представлена в [1, с. 153], [2, с. 160] и имеет вид:

$$u_x(x, t) + u_t(x, t) = -\mu_0(x)u(x, t) - \mu_1(x)\Psi(S(t))u(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_T}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \Phi(S(t)) \int_0^l \beta(\xi)u(\xi, t)d\xi, \quad S(t) = \int_0^l \gamma(\xi)u(\xi, t)d\xi, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

где $Q_T = \{(x, t) : 0 < x \leq l, 0 < t \leq T\}$, и $\overline{Q_T}$ – замыкание Q_T . Функция $u(x, t)$ определяет число особей возраста x в популяции в момент времени t ; $\mu_0(x)$ и $\mu_1(x)$ – интенсивность смертности от естественных причин и от перенаселения; $\beta(x)$ – интенсивность рождаемости от родителя возраста x ; $S(t)$ – общее количество особей в момент t с распределением $\gamma(x)$; $\Psi(s)$ – индикатор влияния количества особей на смертность от перенаселения; $\Phi(s)$ – индикатор влияния количества особей на рождаемость; $\varphi(x)$ – начальное распределение особей.

В прямой задаче определяется функция $u(x, t)$. В обратной задаче (ОЗ) при заданных значениях $l > 0, T \geq l$ и известных функциях $\mu_0(x), \Psi(s), \Phi(s), \beta(x), \gamma(x), \varphi(x)$ требуется восстановить функции $\mu_1(x) \geq 0, u(x, t)$ по известным числу $a \in (0, l]$ и функции

$$g(t) = u(a, t), \quad t \in [0, l]. \quad (4)$$

Начало математическим исследованиям популяций положено Л. Эйлером [3] и Д. Бернул-ли [4] и продолжено А. Лоткой [5], [6] с развитием, представленным в [1], [2]. Восстановление параметров в таких моделях исследуется уже в XXI веке (см., напр., [7], [8]).

Разрешимость прямых задач и единственность решения обратных исследуется при неотрицательности используемых функций, что соответствует представлениям о моделируемых процессах. Однако, сформулированные ниже и доказанные теоремы верны и при знакопеременных коэффициентах, но в этом случае задачи теряют модельную интерпретацию.

Теорема. Если $l \leq T, \mu_1(x), \varphi(x) \in C^1[0, l]; \mu_0(x), \beta(x), \gamma(x) \in C[0, l]; \mu_0(x), \mu_1(x), \beta(x), \gamma(x) \geq 0, \varphi(x) > 0 \forall x \in [0, l] \forall t \in [0, T], u$

$$\varphi(0) = \Phi(S(0)) \int_0^l \beta(\xi) \varphi(\xi) d\xi; \quad (5)$$

$$\Phi(s), \Psi(s) \in C^1(\mathbb{R}), \quad \exists \Phi_0, \Phi_1, L_\Phi: \quad 0 \leq \Phi(s), \Psi(s) \leq \Phi_0; \quad (6)$$

$$|\Phi'(s)|, |\Psi'(s)| \leq \Phi_1; \quad |\Phi'(s) - \Phi'(\xi)|, |\Psi'(s) - \Psi'(\xi)| \leq L_\Phi |s - \xi| \quad \forall s, \xi \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

то существует единственное решение $u(x, t) \in C^1(\overline{Q_T})$ для (1)–(3).

Теорема. Если $a, l, T, \mu_0(x), \Psi(s), \Phi(s), \beta(x), \gamma(x), \varphi(x), g(t)$ удовлетворяют (5)–(7), $a = l > 0, T \geq l, g(t) \in C^1[0, l]; \beta(x), \gamma(x) \in C[0, l]; \mu_0(x), \varphi(x) \in C^1[0, l]; \beta(x), \gamma(x), \mu_0(x) \geq 0, \varphi(x), g(t) > 0 \forall x, t \in [0, l]; g(0) = \varphi(a)$, то ОЗ (1)–(4) не может иметь более одного решения.

Литература

1. Iannelli M., Milner F. The basic approach to age-structured population dynamics. Cham: Springer, 2017.
2. Inaba H. Age-structured population dynamics in demography and epidemiology. N.-Y.: Springer, 2017.
3. Euler L. Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humaine // Hist. l'Academ. Royale Sci. Belles Let. 1760. T. 16. P. 144–164.
4. Bernoulli D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole et les avantages de l'inoculation pour la prevenir // Histoire de l'Academie Royale des Sciences de Paris. 1760. P. 1–45.
5. Lotka A. Elements of Mathematical Biology. N.-Y.: Dover, 1924.
6. Lotka A. Population analysis: a theorem regarding the stable age distribution // Proc. Royale Soc., 1927. V. 115A, № 1. P. 700–721.
7. Denisov A., Makeev A. Iterative methods for solving an inverse problem for a population model // Comp. Math. Math. Phys. 2004. V. 44, № 8. P. 1404–1413.
8. Shcheglov A. Uniqueness of the solution of the inverse problem for a model of the dynamics of an age-structured population // Math. Notes. 2022. V. 111, № 1. P. 139–146.

LONG TIME BEHAVIOR OF THE FOCUSING NLS ON $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$ VIA THE SEMIVIRIAL-VANISHING GEOMETRY

Y. Luo

luo.yongming@smbu.edu.cn

UDC 517.977

In this talk, we present some recent results concerning the long time behavior of the focusing nonlinear Schrödinger equation (NLS) on the semiperiodic spaces $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$. The main new tool is a general framework based on the so-called semivirial-vanishing geometry, with whose help we are able to establish results such as existence of ground states, large data scattering and blow-up for the underlying model.

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, waveguide manifold, large data scattering.

We study the focusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation (NLS)

$$i\partial_t u + \Delta_{x,y} u = -|u|^{\frac{4}{d-1}} u \quad (1)$$

on the waveguide manifold $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{T}_y$ with $d \geq 2$ and $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. The equation (1) serves as a toy model in various physical applications such as nonlinear optics and Bose–Einstein condensation. For a more comprehensive introduction on the physical background of (1), we refer to [3, 4, 1] and the references therein. From a mathematical point of view, the mixed type nature of the underlying domain also makes the analysis of (1) rather challenging and interesting. In a previous paper [2] the so-called *semivirial-vanishing geometry* has been introduced by the author to study the intercritical analogue of (1). The purpose of this paper is to reveal the interesting phenomenon that despite its *energy-subcritical* characteristic, the framework of semivirial-vanishing geometry indeed continues to work for the energy-critical model (1).

References

1. *Kengne, E., Vaillancourt, R., and Malomed, B. A.*, Bose–Einstein condensates in optical lattices: the cubic–quintic nonlinear Schrödinger equation with a periodic potential // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 41, 20 (2008), 205202.
2. *Luo, Y.*, Normalized ground states and threshold scattering for focusing NLS on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$ via semivirial-free geometry, 2022.
3. *Schneider, T.*, *Nonlinear Optics in Telecommunications.*— Springer Science & Business Media, Berlin Heidelberg, 2013.
4. *Snyder, A., Love, J.*, *Optical Waveguide Theory.*— Springer Science & Business Media, Berlin Heidelberg, 2012.

ON AN APPROACH TO THE STUDY OF DISTANCES BETWEEN DNA SEQUENCES

B.F. Melnikov

bormel@smbu.edu.cn, bormel@mail.ru

UDC 004.421

We are considering an approach to the study of the proximity of genomes. The approach is based on the definition and consideration of a triangular norm (triangular badness) for the distances between genomes and, based on it, the norm for the corresponding distance matrices. We used mtDNA in our research, and of the algorithms for comparing genomes, first of all, the Needleman – Wunsch algorithm algorithm (metric). However, the approach can be applied to any relevant genome regions and any described algorithms for calculating the proximity of strings. As results, we obtained, among other things, a comparison of variants of different metrics between genomes, the results of reconstruction of partially filled distance matrices, the description of the application of the pair correlation method for the sequences of badness of the triangles of distance matrices, as well as descriptions of possible generalizations for various similar problems.

Keywords: DNA sequences, DNA matrix, badness, distance.

To determine the distance between genomes, we need *heuristic algorithms*. There are various similar algorithms, but they give *different results* with the same input data. For example, in the scientific literature, the distance between the genomes of humans and chimpanzees ranges from 98 % to 99.5 %.

Which value is more accurate? *Which estimate is more correct?* All these values can be easily verified using the algorithms of this papers.

Even for a very short sequence of human *mitochondrial DNA* (mt DNA, it is used for calculations), the length exceeds 16 000 characters, and the total length of human DNA exceeds 3 000 000 000 characters.

We use the following analogy. If the length of mt DNA is imagined to be equal to 1 cm (the width of a finger), then in these units of measurement, the total length of the human genome will be comparable to the length of the path around the territory of a usual university. (The real length of the entire human DNA chain is about 500 – 1 000 times less. But therefore the length of mt DNA is the same number of times less.)

Based on the results obtained in solving this problem, one can draw conclusions about their applicability. As a variant of “evaluating multiple estimates” (in other words, “heuristics for comparing heuristics”), we started working on the following method a long time ago. As an illustration, we consider human, chimpanzee, and bonobo. According to biologists,

- the ancestors of chimpanzees and bonobos diverged about 2 500 000 years ago,
- and the ancestors of humans with both of them diverged about 7 000 000 years ago

(*the exact values are not particularly important*).

The main question arises *why a man (his genome) should be closer to a chimpanzee than to a bonobo (or, conversely, to a bonobo)?* Obviously, *there can be no answer* to this question. The same can be considered true *for any three species!*

For some different algorithms

- Needleman – Wunsch,
- Melnikov – Panin,
- Jaro – Winkler (2 versions),
- Damerau – Levenstein,
- Smith – Waterman

we consider the matrices of distances between the genomes; in our computational experiments (see below some of its descriptions), we used five different algorithms and made corresponding distance matrices, in which the number of genomes reached 100.

The total value of the badness is usually considered equal to the sum of all the badness of the triangles; there are, to say, 5984 triangles for dimension $n = 34$.

In the table, there are some results of applying a variants of the triangular norm [1] to different animal species (“near”, monkeys).

| Algorithm | Time (h.) | Vio. | Bad. (0) | Bad. (1) | Bad. (2) | Bad. (3) | Bad. (4) |
|-----------|-----------|------|--------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| D-L | 27 | 0 | 0.155 | 0.0522 | 0.121 | 0.0527 | 0.351 |
| N-W | 2.1 | 0 | 0.101 | 0.0314 | 0.0692 | 0.0290 | 0.205 |
| J-W | 2.3 | 0 | 1.331 | 0.501 | 0.600 | 0.154 | 0.580 |
| M-P | 28 | 12 | 0.155 | 0.0527 | 0.122 | 0.0482 | 0.323 |
| S-W | 28 | 14 | 0.200 | 0.0732 | 0.150 | 0.0608 | 0.320 |

References

1. *Melnikov B., Pivneva S., Trifonov M.* Various algorithms, calculating distances of DNA sequences, and some computational recommendations for use such algorithms // CEUR Workshop Proceedings, 2017, vol. 1902, 43–50.

GENERALIZED ASYMPTOTIC REGULARIZATION METHODS FOR INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS

Ye Zhang

ye.zhang@smbu.edu.cn

UDC 517.977

In this talk, I will introduce the framework of generalized asymptotic regularization for efficiently solving ill-posed operator equations $Ax = y$. Specifically, I will introduce the stochastic asymptotic regularization method. In addition to the classical regularization theory, I will demonstrate the advantages of this method through numerical examples: uncertainty quantification, capturing multiple solutions of the inverse problem, and escaping local minima.

Keywords: ill-posed inverse problems, asymptotic regularization, stochastic algorithm, uncertainty quantification.

Consider the following linear-operator equation:

$$Ax = y, \quad (1)$$

where A is a compact linear operator acting between two infinite-dimensional Hilbert spaces \mathcal{X} and \mathcal{Y} such that the range $\mathcal{R}(A)$ of A is an infinite-dimensional subspace of \mathcal{Y} . Since A is compact and $\dim(\mathcal{R}(A)) = \infty$, it follows that $\mathcal{R}(A) \neq \overline{\mathcal{R}(A)}$, and hence the operator equation (1) is ill-posed and of type II in the sense of Nashed. As a consequence of this ill-posedness, a regularization method must be designed in order to obtain a meaningful approximate solution to (1) if the measurement data y^δ contains noise. In this talk, we consider only the deterministic noise model $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ with *a priori* known noise level $\delta > 0$. For the linear problem (1), the Landweber iteration is defined by

$$x_{k+1}^\delta = x_k^\delta + \Delta t A^*(y^\delta - Ax_k^\delta), \quad \Delta t \in (0, 2/\|A\|^2) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2)$$

with some starting element $x_0 \in \mathcal{X}$, where A^* denotes the adjoint operator of A . The continuous analog to (2) as Δt tends to zero is known as *asymptotic regularization* or *Showalter's method*. It is written as a first-order evolution equation of the form

$$\dot{x}^\delta(t) + A^*Ax^\delta(t) = A^*y^\delta, \quad x^\delta(0) = x_0, \tag{3}$$

where an artificial scalar time t is introduced. An appropriate finite *stopping time* $t^* = t^*(\delta)$ (a priori choice) or $t^* = t^*(\delta, y^\delta)$ (a posteriori choice) must be chosen to ensure the regularizing property $x^\delta(t^*) \rightarrow x^\dagger$ as $\delta \rightarrow 0$.

In this talk, we will study the generalized asymptotic regularization methods in the form of

$$\mathcal{D}x^\delta + A^*Ax^\delta = A^*y^\delta, \tag{4}$$

where \mathcal{D} represents some differential operators. In this talk, we will investigate the following asymptotic regularization methods:

1. Heavy ball asymptotical regularization [1]:

$$\ddot{x}^\delta(t) + \eta\dot{x}^\delta(t) + A^*Ax^\delta(t) = A^*y^\delta, \quad x^\delta(0) = x_0, \quad \dot{x}^\delta(0) = 0, \tag{5}$$

where $\eta > 0$ is a constant damping parameter.

2. Fractional asymptotical regularization [2]:

$$({}^C D_{0+}^\theta x^\delta)(t) + A^*Ax^\delta(t) = A^*y^\delta, \quad D^k x^\delta(0) = b_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{6}$$

where ${}^C D_{0+}^\theta$ denotes the left-side Caputo fractional derivative. I will show that the optimal convergence rates can be obtained with approximately the θ root of the iterations needed for the Landweber iteration.

3. Second-order asymptotical regularization with a linear vanishing damping term [3]:

$$\ddot{x}^\delta(t) + \frac{1+2s}{t}\dot{x}^\delta(t) + A^*Ax^\delta(t) = A^*y^\delta, \quad x^\delta(0) = x_0, \quad \dot{x}^\delta(0) = 0, \tag{7}$$

where $s > -1/2$ is a fixed number. The optimal convergence rates can be obtained with the same acceleration speed as that from other fast methods such as the ν -method or the Nesterov acceleration scheme.

4. Acceleration regularization of order n (AR n) [4]:

$$\begin{cases} t\ddot{x}^\delta(t) + (t^{-n} - n)\dot{x}^\delta(t) + t^{n+1}A^*A\dot{x}^\delta(t) + A^*Ax^\delta(t) = A^*y^\delta, \\ x^\delta(0) = x_0, \quad \dot{x}^\delta(0) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

with $n > -1$. I will show that for arbitrary number n , AR n can attach the optimal convergence rates with approximately the $n + 1$ root of iterations than those needed for the benchmark method.

5. Stochastic asymptotical regularization [5,6]:

$$dx^\delta = A^*(y^\delta - Ax^\delta)dt + f(t)dB_t, \quad x^\delta(0) = x_0, \tag{9}$$

where $x_0 \in \mathcal{X}$ is non-random, B_t is an \mathcal{X} -valued cylindrical Wiener process $B_t = \sum_{j=1}^\infty u_j\beta_j(t)$.

$\{u_j\}$ denote the orthogomal basis of \mathcal{X} , and $\{\beta_j\}$ are independent \mathbb{R} -valued Brownian motions. I will show that this method can provide the uncertainty quantification of the quantity of interest, which can in turn be used to reveal and explicate the hidden information about real-world problems, usually obscured by the incomplete mathematical modeling and the ascendance of complex-structured noise.

Литература

1. *Zhang Y., Hofmann B.* On the second-order asymptotical regularization of linear ill-posed inverse problems // *Applicable Analysis*, 2020, 99, 1000–1025.
2. *Zhang Y., Hofmann B.* On fractional asymptotical regularization of linear ill-posed problems in Hilbert spaces // *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2019, 22, 699-721.
3. *Gong R., Hofmann B., Zhang Y.* A new class of accelerated regularization methods, with application to bioluminescence tomography // *Inverse Problems*, 2020, 36, 055013.
4. *Zhang Y.* On the acceleration of optimal regularization algorithms for linear ill-posed inverse problems // *Calcolo*, 2023, 60, 1, 6.
5. *Zhang Y., Chen C.* Stochastic asymptotical regularization for linear inverse problems // *Inverse Problems*, 2023, 39, 015007.
6. *Zhang Y., Chen C.* Stochastic linear regularization methods: random discrepancy principle and applications // *Inverse Problems*, 2024, 40, 025007.

Указатель авторов

- Абакумова И.В., 671
Аббас Х.Х., 183
Абдивохилов А., 197
Абраменкова Ю.В., 470
Агуреева Е.С., 68
Айдагулов Р.Р., 431, 604
Айтбаев К.А., 548
Акаев А.А., 36
Аксенов А.В., 101
Александров В.В., 39
Александров П.Н., 574
Алексеев И.И., 460
Алешковский И.А., 719
Алзамили Х.Ф., 106
Аливердиев А.А., 433
Алимов С.Р., 207
Алимов Ш.А., 104
Аллилугева А.И., 108
Алмазова О.В., 666
Аль-Ассад Х., 47
Андреева Т.В., 304
Аношина Н.А., 781
Антипова Л.А., 71, 73
Антонец Д.В., 770
Антонов А.М., 383
Антонов А.П., 541
Аптекарев А.И., 41
Арефьев С.В., 748
Арифалин Е.А., 781
Армеев Г.А., 630
Артемяева Л.А., 614
Асланова Н.М., 209
Асташова И.В., 109
Асхабов С.Н., 111
Афанасьев В.В., 473
Афонин С.А., 541
Ахметгалеев А.Ф., 425
Ашуров Р.Р., 104
- Ашуров Р.Р., 104
Ашуров Р.Р., 104
- Бабин Д.Н., 306
Бадерко Е.А., 113
Байзаков А.Б., 548
Бакулин А.Н., 773
Балакин Д.А., 570
- Барабанщикова В.В., 667
Барковская С.В., 470
Баскаков А.Г., 210
Батхин А.Б., 118, 380
Бегишев Р.Р., 616
Бейбалаев В.Д., 433
Бекешова Д.А., 142
Беленькая Е.С., 460
Белов П.А., 415
Белозеров Г.В., 37
Белокуров В.В., 213, 215
Белюсова М.Д., 358
Беляков Н.В., 461
Бершадский Е.С., 633
Бесова М.И., 114
Биктимиров А.Р., 756
Билюга С.Э., 722
Битюцкая Е.В., 682
Блинникова И.В., 667
Бобков В.Г., 632
Бобков С.А., 752
Бобрик Г.И., 577
Бобрик П.П., 577
Бобылев А.А., 384, 400
Богданов А.Н., 433
Боголюбов А.Н., 549
Богомоллов С.В., 551
Бодряков В.Ю., 359, 477
Болотин Ю.В., 362
Бондаренко Н. С., 386
Боос Э.Э., 553
Борисенко В.В., 604
Боровских А.В., 116
Бородин Н.С., 653
Бочарников В.Н., 725
Брагин А.В., 362
Брызгалина Е.В., 687
Брюно А.Д., 118
Буглаков А.И., 753
Будак Б.А., 796
Буданов В.М., 42, 365
Булатов Ю.Н., 119
Булинская Е.В., 259
Булинская Е.Вл., 261

- Булинский А.В., 264, 480
 Буничев В.Е., 553
 Буров А.А., 463
 Бурцев М.С., 792
 Бурыкин И.Г., 604
 Бутерин С.А., 216

 Вабищевич П.Н., 556
 Валеев Н.Ф., 241
 Васильев А.В., 213
 Васильев В.Б., 122
 Васильев Ю.М., 617
 Велихов В.Е., 752
 Веретенников А.Ю., 266
 Вернер А.Л., 73
 Вершинин А.В., 412
 Ветров Д.П., 607
 Взорин Г.Д., 670
 Вигдорович И.И., 437
 Виноградов О.П., 268
 Винокуров В.В., 689
 Власов А.В., 307
 Волканов Д.Ю., 641
 Волков Н.Ю., 310
 Вотякова М.М., 124
 Вяльцев В.В., 773
 Вяткин Ю.В., 770

 Гаджиев И.М., 466
 Газарян В.А., 572
 Галатенко А.В., 313
 Галатенко В.В., 42
 Галочкин А.И., 47
 Гаркавенко Г.В., 210
 Гасанов Э.Э., 316
 Гашков С.Б., 307
 Геворкян П.С., 77
 Георгиевский Д.В., 388
 Герасимова А.А., 649
 Герман О.Н., 48
 Гималтдинова А.А., 125
 Гиргидов Р.А., 619
 Гиричева Е.Е., 725
 Гияси А.Х., 48
 Главацкий С.Т., 604
 Глазунова Е.В., 617
 Глухов А.И., 602
 Голдаева А.А., 287
 Голуб А.П., 481
 Голуб Н.Н., 727
 Голубцов П.В., 572
 Голубятников А.Н., 438
 Горбачев В.И., 389
 Горбунов Н.С., 651
 Горинчук А.В., 71

 Горобец А.В., 632
 Горячева И.Г., 392
 Гращенков П.В., 649
 Гребенева А.А., 450
 Гребенюк А.А., 719
 Григорьев О.М., 691
 Гринин А.Л., 730
 Гринин Л.Е., 730
 Громов В.А., 653
 Гудимчук Н.Б., 754
 Гузев М.А., 440
 Гузеев О.А., 482

 Давыдов А.А., 368
 Демидова А.А., 319
 Денисов А.М., 126
 Дергач П.С., 320
 Джабраилов А.Л., 126
 Джумаев Э.Х., 128
 Джээнбаева Г.А., 548
 Дзундза А.И., 485
 Добров Б.В., 637
 Доброхотов С.Ю., 124
 Доленко С.А., 466
 Долматов А.А., 609
 Донина О.В., 651
 Дряженков А.А., 614
 Дрякина В.С., 394
 Дубень А.П., 632
 Дубинин М.Н., 553
 Дубровский В.Е., 683
 Дударева Н.В., 486
 Дудко Л.В., 553

 Евсеева Е.Г., 488
 Еднерал В.Ф., 553
 Ежак С.С., 130
 Елистратов С.Ю., 607
 Емельянов Д.П., 133
 Емельянов М.К., 566
 Еремин Ю.А., 134
 Ермаков В.М., 491
 Ермаков П.Н., 671
 Ероховец Н.Ю., 79
 Ефремова Л.С., 137

 Желнов А.С., 397
 Желтков Д.А., 633
 Жмыхова Т.В., 270

 Завойчинская Э.Б., 400
 Загорская Г.Р., 86
 Зайцев Д.В., 693
 Зайцев Е.А., 694
 Зайцев М.В., 51

- Зайцева М.В., 621
Зайцева Н.В., 138, 697
Зайцева Н.С., 587
Замарашкин Н.Л., 633
Заришов С.Б., 139
Захаров С.А., 438
Захаров В.К., 51
Звонарева Т.А., 578
Звычайная Е.А., 761
Звягин А.В., 141
Зизов В.С., 336
Зинкевич А.О., 773
Зиядуллаева Ш.С., 442
Зорин А.В., 272
Зотов Л.В., 731
Зотова Н.И., 492
Зятьков Н.Ю., 585
- Иванкова Г.В., 587
Иванов А.С., 213
Изупов Н.С., 274
Илиадис С., 82
Илхомов М.М., 322
Ильин А.В., 623
Ильин В.А., 752
Ильютко В.П., 800
Ипполитов В.Б., 786
Исмаилов М.И., 218
- Кабанихин С.И., 581, 585, 603
Кабанова Е.А., 493
Каблин А.Р., 400
Каденова З.А., 142
Кадымов В.А., 407
Казарян В.П., 698
Калегаев В.В., 460
Калитвин В.А., 224
Калоеров С.А., 409
Камзолкин Д.В., 800
Карабанова О.А., 672
Кардымон О.Л., 792
Карпушин М.Ю., 541
Карулина Е.С., 130
Касимов Ш.Г., 145
Касимова Р.И., 279
Каюмов У.Б., 442
Каюмов Ш., 442
Кибкало В.А., 68
Кириллов И.В., 306
Кирпичников М.П., 790
Кирсанова А.С., 147
Кисатов М.А., 149
Киселев А.Б., 445
Клеева Д.Ф., 756, 768
Кнышенко М.П., 759
- Князева А.С., 630
Кобельков Г.М., 790
Ковалев И.В., 761
Ковалев М.Д., 369
Ковалева Н.О., 761
Коваленко И.Б., 764
Кожевников И.Ф., 372
Кожухарь О.Ю., 150
Кожухов И.Б., 53, 604
Козицин И.В., 581
Козко А.И., 583
Козлов В.В., 36
Козлова М.Г., 447
Козубская Т.К., 632
Козырев А.П., 700
Колпаков Р.М., 324
Колыбасова В.В., 177
Комаровский А.Ю., 465
Комбаров Ю.А., 325
Кондратенко А.Е., 281
Коняева Ю.Ю., 495
Корнеев С.А., 327
Королев В.Ю., 282, 297
Королев М.А., 54
Королёва М.В., 498
Косилова Е.В., 701
Костикова А.А., 703
Костин А.В., 84, 498
Костина Л.Н., 210
Костина Н.Н., 498
Кочергин В.В., 329, 331
Кошанов А.П., 145
Кравченко М.Н., 449
Криворотько О.И., 578, 585
Кричевец А.Н., 704
Крутицкий П.А., 177
Кручинина А.П., 373
Крылов А.С., 786
Крюков А.П., 553
Крюков Д.О., 765
Кудоси А.М., 223
Кудрявцев А.А., 284
Кудрявцева О.С., 219
Кужаев А.Ф., 221
Кузнецова Т.В., 706
Кузьмина Е.А., 765
Кулакова А.М., 789
Куликов А.Н., 152
Куликов Д.А., 152
Куликовская Н.В., 373
Куличков С.Н., 572
Куратов Ю.М., 792
Курбонов И.К., 153
Курина Г.А., 155
Кускова С.М., 707

- Кутов Д.К., 634
 Куць А.С., 586
 Кушнер А.Г., 157
- Лактионова Н.В., 530, 727, 736
 Лалин А.В., 557
 Лапонин В.С., 559
 Лапшина М.Г., 224
 Ларченко В.П., 449
 Лебедев А.В., 287
 Лебедев М.А., 756, 759, 765, 768
 Лебо И.Г., 499
 Левин В.А., 383, 412
 Лемак С.С., 39
 Леонов А.С., 560
 Леонов С.В., 675
 Леонова О.Г., 734
 Лестев А.Е., 709
 Ли С., 802
 Лиманский Д.В., 158
 Литвинов В.Л., 414
 Литвинова К.В., 414
 Литовский В.А., 333
 Лобанова Н.И., 501
 Логинов Д.П., 445
 Ложкин С.А., 336
 Ломов И.С., 160
 Лопушенко В.В., 134
 Лосев А.С., 339
 Лужина Л.М., 583
 Лукашевич Н.В., 637, 656
 Лукинова О.Ю., 223
 Лукьяненко В.А., 447, 450
 Лукьяница А.А., 627
 Лурье С.А., 415
 Луценко М.М., 503
 Луцкий А.Е., 42
 Лю Ю., 304
 Ляхов Л.Н., 224
- Магомедов М.Х., 39
 Майсурадзе А.И., 797
 Макаренко В.А., 297
 Маковецкий В.И., 161
 Максимова А.С., 719
 Малков С.Ю., 739, 740
 Мальков П.Г., 786
 Мануйлов В.М., 84
 Маркелова Е.Е., 770
 Маркова О.В., 55
 Мартынкин А.В., 736
 Масальцева А.А., 633
 Маслов Д.А., 114
 Маслов С.А., 452
 Маслова Ю.В., 73, 86
- Матасов А.И., 375
 Матвеев С.А., 561
 Матвеева В.А., 511
 Махов Д.Д., 425
 Махрова Е.Н., 163
 Медведева Ю.А., 770
 Менькин М.И., 340
 Миллионщиков Д.В., 87
 Миндыла Д.С., 513
 Миненков Д.С., 124
 Минин А.Р., 770
 Мирзоев К.А., 227
 Митина О.В., 514, 676
 Михайлов Е.А., 195
 Михайлов И.А., 786
 Михайлов И.П., 48
 Михайлович А.В., 331
 Михалев А.А., 57
 Мищенко Е.В., 229
 Могилевский И.Е., 549
 Моисеенко И.А., 485
 Моисеенко И.И., 485
 Моница Д.И., 342
 Морозов Ю.Н., 109
 Мочалина Е.П., 587
 Мошков С.Н., 517
 Мулашкина Т.И., 789
 Муравник А.Б., 165
 Мусиева Д.М., 741
 Мухамедов А.М., 376
 Мягкова И.Н., 466
- Назаров В.В., 416, 418
 Назарова Д.И., 587
 Наследов А.Д., 676
 Натяганов В.Л., 452, 744
 Неверов А.В., 585
 Нежинский В.М., 88
 Нестеренко Ю.В., 58
 Нефедов Н.Н., 166, 560
 Нечипуренко Д.Ю., 633
 Никабадзе М.У., 419
 Никитин А.А., 798
 Николаев М.В., 798
 Никонов В.И., 463
 Никонов И.М., 89
 Никонов М.В., 609
 Новиков Н.С., 603
 Новикова Н.М., 590
 Нормуродов Х.Н., 199
 Носкова Е.О., 773
 Носов В.А., 313
 Нугмонов М., 520
- Обросова Н.К., 592

- Овчинников М.А., 498
Ожигов Ю.И., 562
Оленев Н.Н., 595
Олефиренко О.М., 727
Оморов Р.О., 167
Орел Н.А., 799
Осиленкер Б.П., 230
Осипова М.А., 295
- Павлов А.Л., 170
Панкратьев А.Е., 313
Пантелеев М.А., 633, 771
Панфёров В.С., 524
Пархоменко Д.В., 306
Паршиков М.В., 626
Паско Л.И., 649
Пененко А.В., 566
Пененко В.В., 566
Пензар Д.Д., 773
Первичко Е.И., 676
Петренко В.Ф., 676
Петренко И.А., 378
Петров А.Г., 380
Печенцов А.С., 232
Пилипенко И.С., 233
Пилюгин Н.С., 759
Писковский В.О., 639
Платонов С.С., 234
Плахов А.Ю., 368
Плюснина Т.Ю., 775
Поддьяков А.Н., 679
Подольский В.Е., 42
Позняк А.С., 376
Поликанова И.В., 237
Поликанова И.С., 675
Поляков И.В., 789
Полякова Д.А., 239
Попов А.Ю., 583
Попов О.В., 48
Поспелова И.И., 590
Постнов С.С., 172
Праведников Д.В., 428
Прач В.С., 525
Пшеничный Т.В., 465
Пытьев Ю.П., 570
- Райков А.В., 514
Райхельгауз Л.Б., 528
Раменский В.Е., 770
Раутиан Н.А., 174
Рахилина Е.В., 657
Рахимов Р.М., 175
Резниченко И.О., 177
Ризниченко Г.Ю., 764, 775, 778
Родина Л.И., 598
- Родионов П.В., 632
Родионов Т.В., 51
Рожков И.С., 658
Розанова С.А., 499
Романов А.В., 422
Романов В.Г., 178
Россовский Г.Л., 165
Рошупкин С.А., 119
Рубин А.Б., 764, 775, 778
Руновский К.В., 240, 530
Русин Е.В., 566
Рыжова Д.А., 657
Рязанов А.М., 641
- Сабитов И.Х., 91
Сабитов К.Б., 180
Савин А.Ю., 183
Саврин В.И., 553
Савчин В.М., 184
Садовничий В.А., 19, 36, 241, 243
Садовничий Ю.В., 542
Сайдалиев Х.П., 153
Сайдамагов Э.М., 186
Сакбаев В.Ж., 188
Сальников Д.В., 213
Самохин В.Н., 149
Самсикова Н.А., 531
Самыловский И.А., 465
Сауткин Р.С., 541
Сафонова Т.А., 227
Сахаров С.И., 113
Селезнева С.Н., 344
Семенов А.Л., 533
Семина Н.С., 587
Сергеев И.Н., 189
Сергеев Я.Д., 625
Сероштанов А.В., 409
Сидоров И.И., 403, 783
Сидоров С.Н., 192
Сидорчук А.И., 345
Синцов М.Ю., 756
Ситник С.М., 161, 245
Скафа Е.И., 536
Скичко А.С., 150
Складчиков С.А., 559
Смелянский Р.Л., 643
Смирнов А.С., 539
Смирнов В.В., 473
Смирнов Н.Н., 454
Смирнова А.В., 617
Собиров А.Ш., 520
Согоян Г.А., 756, 759
Соколов М.Э., 42
Сокулер З.А., 710
Солдаева М.В., 540

- Соловьев В.А., 40
 Солодов А.П., 219
 Солодова Р.Ф., 42
 Сорина Г.В., 711
 Сорокин Д.В., 781
 Сосенушкин Е.Н., 407
 Староверов В.М., 42
 Степанов В.Д., 247
 Степанов Е.П., 645
 Степанова Е.М., 540
 Степанюк Р.А., 789
 Стронгин Р.Г., 625
 Студеникина К.А., 649
 Ступакова А.В., 541
 Субботин В.И., 93
 Сулимов А.В., 634, 736
 Сулимов В.Б., 634
 Султанаев Я.Т., 241
 Сулова А.А., 541
 Сыманюк Э.Э., 681
- Тайманов И.А., 40
 Тан Т., 346
 Татевосов С.Г., 660
 Теймуров Ф., 457
 Тельнова М.Ю., 130
 Тензина В.В., 61, 604
 Терентьева Ю.Ю., 647
 Терновский В.В., 800
 Теслюк А.Б., 752
 Тихомиров М.М., 637, 663
 Тихомиров С.А., 473
 Тихонов Ю.А., 195
 Тихонова К.В., 39
 Ткаченко И.С., 747
 Ткаченко С.Н., 747
 Токаева Х.Б., 567
 Точилин П.А., 621, 626, 801
 Трапезников М.Ю., 608
 Третьяков П.М., 425
 Трибис Д.Ю., 42
 Троицкий Е.В., 94
 Трофимец Е.Н., 289
 Трусов Н.В., 600
 Тукмаков Д.А., 455
 Туркменов Р.М., 542
 Тыртышников Е.Е., 41, 633
- Ульянов В.В., 291
 Умаров Х.Г., 193
 Ускова Н.Б., 210
 Усмонов Н., 249
 Усольцев А.П., 681
 Утебаев Б.Д., 567
 Утебаев Д., 567
- Утюмова Е.А., 486
 Ушаков Д.В., 682
 Ушакова В.В., 349
 Ушакова Е.П., 247
- Фадеев А.А., 731
 Фазуллин З.Ю., 243
 Фаломкина О.В., 570
 Фатихова А.В., 753
 Федоров В.А., 764
 Филиновский А.В., 109
 Филиппов А.А., 465
 Фишман В.С., 792
 Фоменко А.Т., 37, 790
 Фоменко Т.Н., 96
 Фомин Л.В., 425
 Фридман Г.М., 617
 Фролов И.Э., 712
 Фролова М.В., 195
 Фролова Н.Л., 731
 Фурсов А.С., 623
- Хабеев Н.С., 457
 Хазан В.Д., 525
 Хайруллин М.А., 351
 Харченко Ю.Н., 295
 Хасанов А.Б., 197, 199
 Хвостиков А.В., 786
 Холикова М.Б., 249
 Хохлов А.Р., 753
 Хохлов Ю.С., 292
 Хренова М.Г., 789
 Христич Д.В., 428
 Хрущев С.С., 764, 775
 Хусанов Э.А., 442
- Цапов В.А., 485
 Царегородцев К.Д., 293, 313
 Царьков И.Г., 207
 Цициашвили Г.Ш., 295
- Чаирез Ориа Х.И., 376
 Чаплыгина С.С., 353
 Чеповский А.А., 355
 Черевко А.А., 378
 Черкасов О.Ю., 799
 Черникова А.В., 598
 Черноризов А.М., 683
 Чернышев Д.И., 637, 664
 Чернышова Д.А., 281
 Чертович А.В., 753
 Чертополохов В.А., 376
 Четверушкин Б.Н., 42
 Чечкин Г.А., 109, 149
 Чечкина А.Г., 252

- Чижонков Е.В., 568
Чирский В.Г., 63, 583
Чистяков В.В., 213
Чубариков В.Н., 48
Чубаров И.А., 64
Чуличков А.И., 570, 572
Чурбанова С.М., 672
- Шабатина Т.И., 109
Шавгулидзе Е.Т., 213, 215
Шайтан А.К., 630, 753, 790
Шайтан К.В., 790
Шамаров Н.Н., 253
Шамолин М.В., 201
Шананин А.А., 592
Шапкина Н.Е., 572
Шапошников В.А., 715
Шарипов Б., 128
Шарифуллина Т.С., 378
Шаров А.Н., 560
Шаршенбеков М.М., 548
Шатилович Д.В., 296
Шафаревич А.И., 46
Шахвердиев А.Х., 748
Шаховская-Ро О.Ю., 574
Шеваль Е.В., 781
Шевцова И.Г., 297
Шейпак И.А., 255
Шералиев Ш.Н., 186
Шестаков О.В., 284
Шестакова Е.В., 375
Шестопалов Ю.В., 748
Шильников Е.В., 42
Широкий В.Р., 466
Шишкин А.Г., 609
Шишкина Э.Л., 106
Шишленин М.А., 602, 603
Шкаликов А.А., 36
Шмагин Б.А., 543
Шмелев А.В., 792
Шмитов М.О., 609
Шокуров А.В., 604
Шпырко О.А., 530, 727, 736
Штерн А.И., 98
Штокало Д.Л., 770
Шубина М.В., 203
Шуленина Н.Э., 39
Шутов А.В., 65
Шутова К.Ю., 627
Шушарин М.М., 549
- Щеглов А. Ю., 802
- Южаков Т.А., 607
Юлдашева А.В., 458
- Юнусов Ш.Э., 142
Юшкин В.Д., 731
- Ягола А.Г., 560
Яковлев В.А., 717
Яковлев М.Я., 412
Якунчиков А.Н., 468
Яновская Е.А., 407
Яремко Н.Н., 501
Яровая Е.Б., 299
Яценко И.В., 545
- Abdishukurova G.M., 99
Aliev A.R., 257
- Dekhkono F.N., 205
Dussaule M., 98
- Goncharov S.S., 613
- Kolokoltsov V.N., 301
- Luo Y., 804
- Melnikov B.F., 805
Mingyao A., 303
- Narmanov A.Y., 99
Nechesov A.V., 613
- Sviridenko D.I., 613
- Wang L., 98
- Y. Liu, 99
Yang W., 98
- Zhang Ye, 806

Научное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «МАТЕМАТИКА В СОЗВЕЗДИИ НАУК»
К юбилею ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовниченко
Тезисы докладов
Москва, 1–2 апреля 2024 г.

Электронное издание сетевого распространения

*Представленные в сборнике результаты исследований
публикуются в авторской редакции*

Вёрстка: *Т. В. Родионов, А. Ш. Аскарлова, А. И. Смирнов, Э. В. Тищенко*

Макет утвержден 08.05.2024. Изд. № 12794.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
<https://msupress.com>. Отдел реализации:
тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

ISBN 978-5-19-012029-5



9 785190 120295