Поиск 2π–периодических траекторий динамической системы на цилиндре при помощи модификации метода Пикара

Климина Л.А. (Россия, Москва)

НИИ механики МГУ

klimina@imec.msu.ru

Рассмотрим динамическую систему с цилиндрической фазовой поверхностью при наличии слагаемого, описывающего вязкое трение:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = \omega f(\varphi, \omega) - b\omega. \tag{1}$$

Здесь b – положительный безразмерный параметр, характеризующий коэффициент вязкого трения. Функция $f(\varphi, \omega)$ 2π–периодическая и непрерывная по φ, а также непрерывная и липшицева по ω в некоторой ограниченной области $\omega \in G$. Предположим, что при некотором ω_0 существует такое $b = b(\omega_0)$, при котором траектория, проходящую через точку $\{0, \omega_0\}$, является 2π-периодической и расположена в области G. Обозначим ее $\tilde{\omega}(\varphi; \omega_0)$, тогда $b(\omega_0)$ удовлетворяет условию: $b(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \tilde{\omega}(\varphi; \omega_0)) d\varphi$. Требуется найти 2π–периодические траектории системы (1), расположенные в области $\omega \in G$.

Для поиска $\tilde{\omega}(\varphi; \omega_0)$ и $b(\omega_0)$ при заданном ω_0 используем итерационную процедуру, подобную методу Пикара:

$$\tilde{\omega}_0(\varphi; \omega_0) \equiv \omega_0, \qquad b_0(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \tilde{\omega}_0(\varphi; \omega_0)) d\varphi, \tag{2}$$

$$\tilde{\omega}_k(\varphi; \omega_0) = \omega_0 - b_{k-1}(\omega_0)\varphi + \int\limits_0^{\varphi} f(\varphi, \tilde{\omega}_{k-1}(\varphi; \omega_0)) d\varphi, \quad b_k(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \tilde{\omega}_k(\varphi; \omega_0)) d\varphi.$$

Утверждение 1. *При $k \to \infty$ получаем $\tilde{\omega}_k(\varphi; \omega_0) \to \tilde{\omega}(\varphi; \omega_0)$, $b_k(\omega_0) \to b(\omega_0)$.*

Доказательство сходимости аналогично классическому методу Пикара.

В то время как классический метод Пикара позволяет, варьируя начальное значение ω_0, построить фазовый портрет системы (1) при заданном b, предложенная процедура (2) позволяет описать эволюцию периодических траекторий системы (1) по параметру b. В частности, варьируя ω_0 и используя (2), получаем для периодических траекторий бифуркационную диаграмму вида$\{b(\omega_0), \tilde{\omega}(\varphi_0; \omega_0)\}$, где φ_0 произвольно.

Предложенный метод (2) был применен для поиска периодических траекторий в задаче о движении аэродинамического маятника при наличии вязкого трения в шарнире. Для соответствующей системы (1):

$$f(\varphi, \omega) = 0.5\omega^{-1}\sqrt{(\omega+\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi}(C_l(\beta)\cos\varphi - C_d(\beta)(\omega+\sin\varphi)),$$
$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\varphi}{\omega+\sin\varphi}\right), \quad C_l(\beta) = \sin 2\beta, \quad C_d(\beta) = 0.1+\sin^2\beta.$$

На рис. 1 показаны несколько итераций построения бифуркационной диаграммы $\{b(\omega_0), \tilde\omega(0;\omega_0)\}$. Отметим, что нулевая итерация метода (2) формально совпадает с результатом применения метода Пуанкаре–Понтрягина поиска периодических траекторий, который был использован в [1] для исследования подобной задачи в предположении наличия малого множителя перед правой частью уравнения для $\dot\omega$.

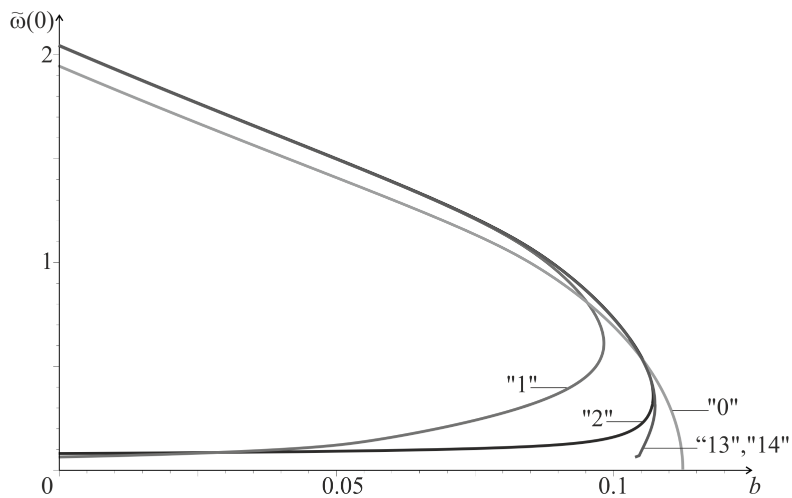

Рис. 1: Иллюстрация итерационного процесса численного построения бифуркационной диаграммы периодических траекторий аэродинамического маятника (цифрами обозначены номера итераций). Точка «обрыва» диаграммы отвечает тому, что 2π периодическая траектория разрушается, «садясь» на сепаратрису.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 15-01-06970, 16-31-00374, 17-08-01366).

Литература

[1] Климина Л.А. Локшин Б.Я. Об одном конструктивном методе поиска ротационных и автоколебательных режимов в автономных динамических системах // Нелинейная динамика, 2017, том 13, № 1, с. 25-40. DOI:10.20537/nd1701003