

О понятии математической грамотности

Боровских А.В.

IV Конференция математических центров России

Санкт-Петербург, 09 августа 2024 года

- Вопрос о математической грамотности в актуальном его исполнении возник, прежде всего, в связи с известными тестами PISA и TIMSS.
- Сами эти тесты были запущены, как и многие другие такого рода обследования, с целью отбора, поэтому носили и носят чисто диагностический характер.
- Основным критерием отбора было умение «применять полученные знания на практике».
- Поэтому за всем этим движением скрывается фактически проблема формализма в обучении, которым страдают все образовательные системы во всех странах.

Что такое «математическая грамотность»?

PISA-2018: «Математическая грамотность – это способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане.»

Что такое «математическая грамотность»?

PISA-2021: «Математическая грамотность – это способность человека *мыслить математически*, формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в разнообразных практических контекстах.

Она включает в себя понятия, процедуры и факты, а также инструменты для описания, объяснения и предсказания явлений.

Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане *в 21 веке.*»

Что такое «математическая грамотность»?

Что здесь главное и неизменное:

- решать практические задачи;
- используя математику.

Определение явно является *феноменологическим*, то есть представляет математическую грамотность как феномен: «что бывает», «что случается», «что мы можем наблюдать». Оно не отвечает на вопрос, в чем сущность математической грамотности и как ее формировать.

Что такое «математическая грамотность»?

Литература:

- РИНЦ – 600+ работ (за 3 года); выборка из 200 работ;
- более 100 из них (55%) – пересказы известных определений из PISA и связанных с ним источников, (квартет операций «Формулировать – Исследовать – Применить – Оценить» с мелкими вариациями);
- почти 40% посвящены разнообразным средствам и способам развития математической грамотности («Гаврилиада»: кто что умеет – тот то и делает + «проповедь» о том, что это не может не повлиять на развитие математической грамотности – след. слайд);
- чуть более десятка публикаций являются содержательными в том смысле, что в них обсуждаются измерение, или диагностика, или конкретные характеристики того, что авторы полагают «математической грамотностью».

Разнообразные средства и способы развития математической грамотности:

- всевозможные типы задач (текстовые, практические, контекстные, открытого типа, экономические, физические, нечеткие, междисциплинарные, повышенного уровня сложности, с этнорегиональным содержанием и др.);
- разделы школьного курса математики (функции и графики, производная, теория вероятностей и математическая статистика, история математики и др.);
- другие дисциплины (география, физика, иностранный язык, русский язык, робототехника и др.);
- средства обучения (мультимедийные, ИКТ, тренажеры, математические конструкторы, учебные пособия и пр.);

Разнообразные средства и способы развития математической грамотности:

- образовательные платформы (Учи.ру и Яндекс.Учебник);
- разнообразные виды и типы деятельности учащихся (проекты, игры, веб-квесты, устные упражнения, исследования, чтение, смысловое чтение, математическое моделирование и др.);
- методы и формы обучения (внеурочные занятия, проблемный метод, активные и интерактивные формы и методы обучения, входной контроль, геймификация, формирование умственных действий, опора на непосредственный опыт учащегося и др.).

«Содержательные» публикации показывают, что на самом деле расплывчатость понятия «математическая грамотность» имеет объективный характер, и вычленение оснований для четкого понимания *не является очевидным*.

Если задать вопрос «Что можно отнести к математической грамотности?», то любой человек, от студента до академика, перечислит *все или почти все* способности, связанные с математикой.

Как «математическую грамотность» отличить от других «математических» качеств:

- *математической подготовки,*
- *математических способностей,*
- *математической культуры,*
- *математического мышления,*
- *математической образованности,*
- *математического профессионализма и др.?*

Основания: проблема грамотности вообще

Следует подчеркнуть, что термин «математическая грамотность» – термин *метафорический*.

Термином прямого смысла является «грамотность» в смысле умения читать и писать. Но это также *феноменологическое* определение.

Чтобы выяснить существо дела, приходится обратиться к истории, к моменту возникновения грамотности. И тут обнаруживается, что *проблема грамотности возникла при переходе от пиктографического и идеографического письма к знаковому*.

Основания: проблема грамотности вообще

В пиктографическом и идеографическом письме мы «рисует» то, о чем говорим. Нарисован дом – все понимают, что это дом; нарисована лошадь – все понимают, что это лошадь.



И только когда вместо рисунков стали появляться *знаки*, умение соотносить эти знаки и обозначаемое стало нетривиальным и это и есть *грамотность*.

Что такое грамотность?

Поэтому *грамотность* в общем смысле есть *владение знаковыми средствами*.

Математическая грамотность – владение математическими знаковыми средствами. И это есть ее *сущность*. А в решении задач она лишь *проявляется*.

Что такое знаковое средство?

Знак – это элемент специального *отношения* «знак-обозначаемое» («денотат-коннотат»).

Функция знаковых средств – замещение объекта в действии: вместо того, чтобы выполнять действие с материальным объектом, мы выполняем его со знаками, и за счет этого *заранее знаем результат*.

Существенным признаком идеального, «чистого знака» является отсутствие связи между морфологией (структурой, устройством) знака и морфологией (структурой, устройством) того, что обозначается. Пример: цифры.

Какие знаковые средства используются в математике?

Простые: слова

- ❶ для счета: один, два, три...,
- ❷ для называния действий (умножить/разделить, и т.п.),
- ❸ для называния геометрических фигур и их элементов;
- ❹ для называния правил действий;

цифры,

- ❶ для счета (1,2,3....),
- ❷ для нумерации объектов (например, в индексах),
- ❸ для нумерации действий;

скобки,

знаки операций,

буквы

- ❶ для обозначения конкретных чисел в правилах,
- ❷ для обозначения неизвестных чисел в уравнениях,
- ❸ для обозначения геометрических фигур и их элементов,
- ❹ для обозначения переменных величин,
- ❺ для обозначения наборов тех или иных предметов;

Какие знаковые средства используются в математике?

Сложные: позиционные числа (значения цифр + место), числовые выражения, диаграммы, таблицы, блок-схемы, планы, графы, **формулы** – для представления:

- 1 отношений между числами ($c = a * b$),
- 2 инструкций по выполнению последовательности операций,
- 3 правил выполнения операций ($a(b + c) = ab + ac$),
- 4 отношений между величинами $S = v * t$,
- 5 функциональной связи ($y = ax^2 + bx + c$),
- 6 отношений между функциями ($y'' + 2y' + y = f(x)$),
- 7 и другие;

схемы:

- 1 как иллюстрация арифметической операции;
- 2 как средство формулировки задачи;
- 3 как средство выражения числовых отношений;
- 4 как средство представления отношений между данными.

Функции знаковых средств

На знаки переносятся *действия (операции) и системы операций* с объектами.

Когда мы оперируем с материальным объектом – мы свое *действие приспособляем к объекту*. Когда мы создаем знаковые средства – мы, наоборот, *знаки приспособляем к действию*, делаем их такими, чтобы действие совершалось легко.

При использовании знаковых средств происходит *абстрагирование действия от предмета* действия и выделение действия как самостоятельной сущности.

Мысленное оперирование в различных системах знаковых средств является базой *абстрактного мышления*.

Владение знаковыми средствами *проявляется* в решении задач потому, что, решая задачу, мы переходим от *натуральных* представлений о задаче к ее представлению в *знаковой математической форме*.

Как сформулировать определение?

Форма определения

- объемлющее понятие;
- сущность определяемого понятия;
- проявления этой сущности;
- функция, которая этим понятием схватывается;
- морфология (устройство) соответствующего объекта;
- основные характеристики этого объекта, внешние и внутренние.

Такая форма обеспечивает наиболее полное понимание (понятие – средство понимания!), то есть отнесения понятия:

- а) к общей системе понятий -- это обеспечивается первой и второй позицией;
- б) к деятельности — это обеспечивается третьей, четвертой и шестой позицией;
- в) к объекту, который схватывается этим понятием – это обеспечивается пятой и шестой позицией.

Определение математической грамотности

Математической грамотностью называется интеллектуальная способность, состоящая во владении математическими знаковыми средствами и проявляющаяся в решении задач с использованием этих средств.

Она обеспечивает выстраивание отношения между задачей, сформулированной *в натуральной форме* (то есть на общеупотребительном или профессиональном языке) и задачей математической.(...)

Определение математической грамотности

(...) В состав математической грамотности входят:

- анализ текста задачи и выделение необходимых данных;
- схематизация *отношений между* этими *данными* (!!!);
- отыскание аналогичных *математических отношений* (!!!);
- перенос на математические отношения данных задачи и формулировка математической постановки задачи;
- [решение математической задачи в рамках той или иной системы операций со знаковыми средствами];
- переход, при необходимости, от одной знаковой системы к другой (напр., от алгебраической к графической);
- формулировка ответа для математической задачи;
- интерпретация ответа и, при необходимости, промежуточных результатов, на схеме;
- формулировка ответа на исходную задачу в терминах этой задачи и оценка соответствия ответа смыслу задачи. (...)

(...) Математическая грамотность характеризуется:

- набором освоенных знаковых средств и способов их использования;
- классом решаемых задач.

Задача. У Пети на 10 конфет больше, чем у Васи. Если Вася отдаст Пете еще 20 конфет, то у Пети окажется конфет уже в два раза больше, чем у Васи. Сколько конфет было у Пети и у Васи?

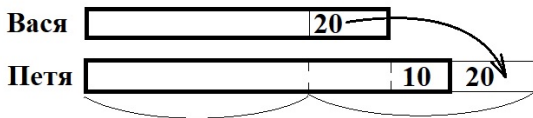


Рис. 1: Схематизация отношений между данными

Глядя на схему, задачу можно решить устно!

А что у нас в школе?

«Прямые задачи» («На ветке сидело 3 птички, потом прилетели еще 2. Сколько стало?») – схема есть.

«Косвенные задачи» («У Кати есть зеленые и красные карандаши. Зеленых карандашей 4, и их в 2 раза меньше, чем красных. Сколько красных карандашей у Кати?») – схемы нет!

Методика обучения схематизации в школе была разработана еще в 70-х годах XX века Н.Г. Алексеевым (кандидатская диссертация, III глава). Однако в современной школе она не используется.

От математической операции к математическому отношению

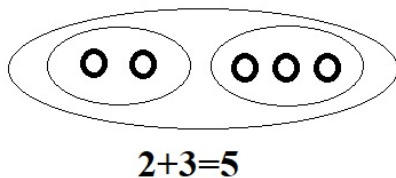


Рис. 2: Схема представляет операцию

От математической операции к математическому отношению

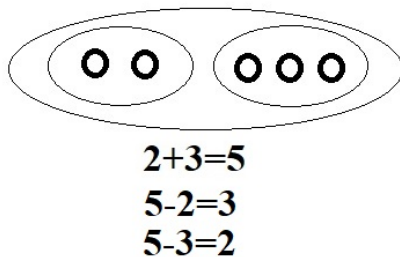


Рис. 3: Схема представляет числовое отношение

От математической операции к математическому отношению

Не математические операции, а математические отношения представлены:

- в таблице сложения
- в таблице умножения
- в формуле $a(b + c) = ab + ac$
- в формуле $S = vt$
- в формуле $f(x) = F'(x)$

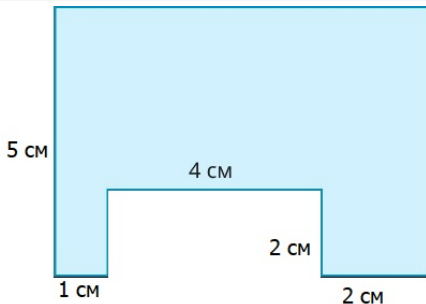


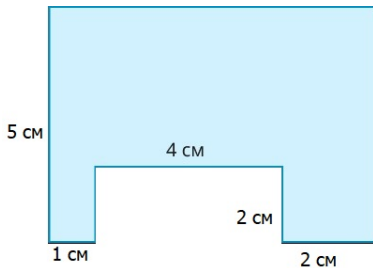
Рис. 4: Задача: найти площадь фигуры

- Не ответили 13%;
- ответили правильно (ответ 27) 24%;
- ответили неправильно – систематические ответы 30%;
- ответили неправильно – случайные ответы – 33%.

Систематические неверные ответы:

80 (14%), 14 (7.5%), 35 (4%), 28 (3.9%).

Что происходит, когда не освоена схематизация и не произошел переход от операций к отношению?



Систематические неверные ответы:

- 80 (14%) – произведение всех чисел, которые даны,
- 14 (7.5%) – сумма всех чисел, которые даны,
- 35 (4%) – площадь объемлющего прямоугольника,
- 28 (3.9%) – периметр фигуры.

Спасибо за внимание!

Литература:

- 1 Алексеев Н.Г. Познавательная деятельность при формировании осознанного решения задач. Дисс. ... канд. психол. наук. М., 1975. 154 с.
- 2 Боровских А.В. О понятии математической грамотности // Педагогика. 2022. Т. 86, № 3. С. 33-45.
- 3 Москаленко О.Б. Проблема систематических ошибок в освоении темы «Площадь» по результатам мониторинга на платформе «Учи.ру» // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2022. №2. С. 31-41.