УДК 517.518.4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОЦЕНКИ СНИЗУ С.А. ТЕЛЯКОВСКОГО СУММЫ СИНУС-РЯДА С ВЫПУКЛОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА БОЛЕЕ ДЛИННЫЙ ОТРЕЗОК

А. Ю. Попов[1], **А. П. Солодов**[2]

Распространяется на значительно более длинный отрезок оценка снизу суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов, найденная С. А. Теляковским.

Ключевые слова: ряды по синусам с монотонными коэффициентами, ряды по синусам с выпуклыми коэффициентами.

The lower estimate of the sum of a sine series with a convex sequence of coefficients obtained by S. A. Telyakovskiĭ is extended to a much longer segment.

Key words: sine series with monotone coefficients, sine series with convex coefficients.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-4

Настоящая работа относится к области исследований, в которой выводятся оценки сумм синус-рядов:

$$g(b;x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_1>0, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{1}$$

Предполагается, что последовательность коэффициентов $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ряда (1) выпукла (разности $\Delta b_k = b_k - b_{k+1}$ не возрастают), это вместе со стремлением b к нулю влечет монотонность этой последовательности. Если последовательность b только монотонна, то ряд (1) сходится в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ [1, гл. 1, § 30] и его сумма непрерывна на $(0,2\pi)$. Если последовательность b выпукла, то сумма ряда (1) имеет на $(0,2\pi)$ непрерывную производную [1, гл. 10, § 7]. В то же время в точке $x=0$ у сумм рядов (1) могут быть различного рода особенности [2, гл. 5, § 1], поэтому актуальным является исследование асимптотического поведения таких функций при $x\to 0$ и получение их оценок при малых значениях x.

Начало данной тематике положил Р. Салем [3]. При дополнительном условии $kb_k \nearrow$ он вывел порядковое соотношение (последовательность $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ выпукла)

$$g(b;x) \asymp \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x\to 0+, \quad \text{где } m(x)=\left[\frac{\pi}{x}\right]. \tag{2}$$

С. Алянчич, Р. Боянич и М. Томич [4] доказали, что если выпуклая последовательность b медленно меняется, а именно $\lim_{k\to\infty}(b_{2k}/b_k)=1$, то порядковое соотношение (2) превращается в асимптотику

$$g(b;x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x} \sim \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \quad x\to 0+. \tag{3}$$

С.А. Теляковский [5] существенно дополнил как порядковое соотношение (2), так и асимптотику (3), выведя неравенство

$$g(b;x) > \frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{11}\right], \tag{4}$$

[1] *Попов Антон Юрьевич* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: elena.alferova@gmail.com.

Popov Anton Yur'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lead Research Scientist, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

[2] *Солодов Алексей Петрович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Моск. центр фунд. и прикл. матем., e-mail: apsolodov@mail.ru.

Solodov Aleksei Petrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

в котором b — произвольная стремящаяся к нулю и выпуклая последовательность. Затем он нашел порядок разности

$$g(b;x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \asymp x \sum_{k=1}^{m(x)} k^2 \Delta b_k, \quad x \to 0+. \tag{5}$$

В [6] неравенство (4) доказано при всех $x \in (0, \pi/2]$ и найдены точные константы в порядковом соотношении (5). Соотношение (5) показывает, что неравенство

$$g(b;x) \geqslant \frac{b_m}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \tag{6}$$

верно на отрезке $\pi/(m+1) \leqslant x \leqslant \pi/m$ с "некоторым запасом". Это наводит на мысль, что неравенство (6) можно распространить на значения x, меньшие $\pi/(m+1)$. Тогда оценка (6) станет лучше оценки (4), поскольку в правой части будет стоять больший коэффициент ряда (1). Поставим следующую задачу.

Для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, требуется найти такое наименьшее возможное число x_m, что неравенство (6) выполняется при любом $x \in [x_m, \pi/m]$, какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность b.

Замечание 1. Ниже доказано (теорема 5), что для значения $m = 1$ данная задача малосодержательна. Поскольку отрезок $[\pi/2, \pi]$ удален от нуля, то на нем оптимальные оценки рядов (1) разумно искать в другой форме. Одна из таких задач полностью решена в [7].

Основным результатом нашего исследования является следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливо равенство $x_2 = \pi/6$, а при любом $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 3$, верно двойное неравенство*

$$\frac{3\pi}{10m} < x_m \leqslant \arcsin \frac{1}{m}. \tag{7}$$

Теорема 1 выводится из двух более детальных утверждений — теорем 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Тогда для разности $g_m(b;x) = g(b;x) - (b_m/2)\operatorname{ctg}(x/2)$ верна оценка снизу*

$$g_m(b;x) \geqslant \frac{m \sin x - 1}{2(1-\cos x)} \Delta b_{m-1} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{2\pi}{m}\right). \tag{8}$$

Следствие. *Если $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, то при любом $x \in [\arcsin(1/m), 2\pi/m)$ выполняется неравенство (6). При $x \neq \arcsin(1/m)$ оно является строгим.*

Замечание 2. Рассмотрим синус-ряд $g(x) = \sin x + 0.5 \sin 2x$. Последовательность его коэффициентов $(1, 0.5, 0, 0, 0, \dots)$ является выпуклой. Следующее утверждение показывает неулучшаемость следствия 1 при $m = 2$. Неравенство (6) в точке $x = \arcsin(1/2) = \pi/6$ обращается в равенство, а при $x \in (0, \pi/6)$ не выполняется. Доказательство этого утверждения — простое упражнение по тригонометрии.

Рассмотрим последовательности $b^{(n)} = \{b_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$b_{k,n} = 1 - \frac{k-1}{n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad b_{k,n} = 0, \quad k \geqslant n+1. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться в том, что тригонометрические полиномы

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} \sin kx = g(b^{(n)};x) \tag{10}$$

являются рядами (1), последовательности коэффициентов $b^{(n)}$ которых выпуклы и стремятся к нулю.

Теорема 3. *При любом $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 3$, коэффициент при $\sin mx$ в разложении (10) функции G_{2m-2} равен 0.5 и в точке $y_m = 3\pi/(10m)$ верно неравенство*

$$G_{2m-2}(y_m) < \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{y_m}{2}. \tag{11}$$

При небольших значениях m (ограничимся здесь набором $m \in \{3, 4, 5\}$) неравенства вида (11) сохраняются при замене y_m в (11) большей величиной, весьма близкой к $\arcsin(1/m)$. В соответствии с этим улучшаются левые неравенства (7).

Теорема 4. *Положим* $z_3 = \arcsin 0.331$, $z_4 = \arcsin 0.246$, $z_5 = \arcsin 0.196$. *Тогда при* $m \in \{3, 4, 5\}$ *верны неравенства* $G_{2m-2}(z_m) < (1/4)\operatorname{ctg}(z_m/2)$, *из которых следуют оценки* $x_m > z_m$, $3 \leqslant m \leqslant 5$.

Перейдем к доказательствам сформулированных утверждений. Ключевую роль сыграет следующее представление суммы ряда (1):

$$g(b; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_k \, \widetilde{D}_k(x), \tag{12}$$

где

$$\widetilde{D}_k(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \sin \nu x = \frac{\cos(x/2) - \cos(k + 1/2)x}{2\sin(x/2)} = \frac{\sin(kx/2)\sin((k+1)x/2)}{\sin(x/2)}. \tag{13}$$

В дальнейшем понадобится также тождество

$$\sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{D}_k(x) = \frac{n \sin x - \sin nx}{2(1 - \cos x)}. \tag{14}$$

Доказательство теоремы 2. При любом $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, согласно (12) имеем

$$g(b; x) = S_m(b; x) + R_m(b; x), \quad \text{где } S_m(b; x) = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta b_k \, \widetilde{D}_k(x), \;\; R_m(b; x) = \sum_{k=m}^{\infty} \Delta b_k \, \widetilde{D}_k(x). \tag{15}$$

Ввиду (13) ядро $\widetilde{D}_k$ положительно на интервале $(0, 2\pi/(k+1))$. Следовательно,

$$\widetilde{D}_k(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi/m) \quad \forall k \in [1, m-1]. \tag{16}$$

Из (16) и неравенств $\Delta b_1 \geqslant \Delta b_2 \geqslant \ldots \geqslant \Delta b_{m-1} \geqslant 0$, учитывая (14), находим

$$S_m(b; x) \geqslant \Delta b_{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \widetilde{D}_k(x) = \Delta b_{m-1} \frac{m \sin x - \sin mx}{2(1 - \cos x)}. \tag{17}$$

Оценим снизу остаток ряда R_m. Согласно (13) имеем

$$R_m(b; x) = \sum_{k=m}^{\infty} \Delta b_k \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\cos(k + 1/2)x}{2\sin(x/2)} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sum_{k=m}^{\infty} \Delta b_k + \sum_{k=m}^{\infty} \Delta b_k \frac{\sin kx - \sin(k+1)x}{2(1 - \cos x)}.$$

А так как верны равенства $\sum_{k=m}^{\infty} \Delta b_k = b_m$,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \Delta b_k \big(\sin kx - \sin(k+1)x \big) = \Delta b_m \sin mx - \sum_{k=m}^{\infty} (\Delta b_k - \Delta b_{k+1}) \sin(k+1)x,$$

то, учитывая неотрицательность разностей $\Delta b_k - \Delta b_{k+1}$, получим для $R_m(b; x)$ следующую оценку снизу:

$$R_m(b; x) \geqslant \frac{b_m}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2(1 - \cos x)} \left(\Delta b_m \sin mx - \sum_{k=m}^{\infty} (\Delta b_k - \Delta b_{k+1}) \right) =$$

$$= \frac{b_m}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \Delta b_m \frac{\sin mx - 1}{2(1 - \cos x)} \geqslant \frac{b_m}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \Delta b_{m-1} \frac{\sin mx - 1}{2(1 - \cos x)}. \tag{18}$$

(В последнем переходе мы использовали то, что $\sin mx - 1 \leqslant 0$, $\Delta b_m \leqslant \Delta b_{m-1}$.) Сложив неравенства (17) и (18), придем ввиду (15) к оценке снизу (8). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу (9) имеем $\Delta b_{k,n} = 1/n$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, $\Delta b_{k,n} = 0$ при $k \geqslant n+1$. Из (10), (12), (14) с учетом вышесказанного находим

$$G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{D}_k(x) = \frac{(n+1)\sin x - \sin(n+1)x}{2n(1-\cos x)}.$$

Отсюда, используя тождество $\operatorname{ctg}(x/2) = \sin x/(1-\cos x)$, для $x \in (0,\pi)$ имеем равносильность неравенств

$$G_{2m-2}(x) < \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \iff \frac{(2m-1)\sin x - \sin(2m-1)x}{2(2m-2)(1-\cos x)} <$$

$$< \frac{\sin x}{4(1-\cos x)} \iff m\sin x < \sin(2m-1)x. \tag{19}$$

Ясно, что для доказательства теоремы осталось проверить справедливость неравенства

$$m\sin\frac{3\pi}{10m} < \sin\frac{3\pi(2m-1)}{10m} = \sin\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{3\pi}{10m}\right) \quad \forall m \geqslant 3. \tag{20}$$

Поскольку $\sin t < t$ $(\forall t > 0)$, то левая часть (20) меньше $3\pi/10 < 0.95$. В то же время $\pi/2 \leqslant 3\pi/5 - 3\pi/(10m) < 3\pi/5$ $(\forall m \geqslant 3)$, и, следовательно, правая часть (20) превосходит $\sin(3\pi/5) = \sqrt{(5+\sqrt{5})/8} > 0.95$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Из (19) следует, что требуется доказать справедливость неравенств $m\sin z_m < \sin(2m-1)z_m$, $m \in \{3,4,5\}$, а вид чисел z_m показывает, что достаточно проверить следующие численные неравенства:

$$\begin{aligned}
0.993 &< \sin 5z_3 = 5\sin z_3 - 20\sin^3 z_3 + 16\sin^5 z_3 = 5\cdot 0.331 - 20\cdot 0.331^3 + 16\cdot 0.331^5 = 0.9932\ldots,\\
0.984 &< \sin 7z_4 = 7\sin z_4 - 56\sin^3 z_4 + 112\sin^5 z_4 - 64\sin^7 z_4 =\\
&= 7\cdot 0.245 - 56\cdot 0.245^3 + 112\cdot 0.245^5 - 64\cdot 0.245^7 = 0.9869\ldots,\\
0.98 &< \sin 9z_5 = 9\sin z_5 - 120\sin^3 z_5 + 432\sin^5 z_5 - 476\sin^7 z_5 + 256\sin^9 z_5 =\\
&= 9\cdot 0.194 - 120\cdot 0.194^3 + 432\cdot 0.194^5 - 476\cdot 0.194^7 + 256\cdot 0.194^9 = 0.9837\ldots.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

В заключительной части статьи рассмотрим вопрос о справедливости неравенства (6) в случае $m = 1$. Выяснилось, что на всем классе выпуклых и стремящихся к нулю последовательностей b такое неравенство имеет место лишь на специальном счетном множестве точек. Обозначим

$$E = \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{\pi}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2n+1}\right)\right\}.$$

Теорема 5. *Неравенство*

$$g(b;x) \geqslant \frac{b_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \tag{21}$$

выполняется для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности b в точках множества E. Если же $x \in (0,\pi)\setminus E$, то найдется такая выпуклая последовательность $\widehat{b}$ (вообще говоря, своя для каждой точки x), что

$$g(\widehat{b};x) < \frac{\widehat{b}_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}. \tag{22}$$

Доказательство. Согласно формулам (12), (13) неравенство (21) равносильно следующему:

$$\frac{b_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_k \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{\cos(k+1/2)x}{2\sin(x/2)}\right). \tag{23}$$

А так как $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_k = b_1$, то неравенство (23) переписывается в равносильной форме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_k \cos(k+1/2)x \leqslant 0 \quad \iff \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_k \bigl(\sin(k+1)x - \sin kx\bigr) \leqslant 0. \tag{24}$$

Обозначим $\Delta b_k = \beta_k$. Когда последовательности $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ пробегают класс всех выпуклых и стремящихся к нулю последовательностей, последовательности $\{\beta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — класс всех монотонно стремящихся к нулю последовательностей, $\beta_1 > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = b_1$. В результате после преобразования по Абелю последней суммы в (24) получим, что неравенство (22) на интервале $(0, \pi)$ равносильно такому:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta \beta_k \sin(k+1)x \leqslant \beta_1 \sin x. \tag{25}$$

Поскольку $\Delta\beta_k \geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\beta_k = \beta_1$, то согласно (25) если

$$\sin Nx \leqslant \sin x \quad \forall N \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

то такое неравенство верно. Если же, напротив,

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon\ \sin Nx > \sin x, \tag{27}$$

то, положив $\beta_k = 1$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $\beta_k = 0$ $(\forall k > N)$, получим, что неравенство (25) не выполняется. Тем самым если взять последовательность $\widehat{b} = \{\widehat{b}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\widehat{b}_k = N+1-k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и $\widehat{b}_k = 0$, $k > N$, то получим неравенство (22), противоположное (21).

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что в точках множества E справедливо неравенство (26), а для точек дополнения $(0,\pi)\setminus E$ — соотношение (27). Для точки $x = \pi/2$ неравенство (26) очевидно. Если $x = \pi/2\,(1 \pm (2n+1)^{-1})$, то

$$\text{либо} \quad Nx = \frac{\pi n N}{2n+1}, \quad \text{либо} \quad Nx = \frac{\pi(n+1)N}{2n+1}. \tag{28}$$

Для доказательства соотношения (26) достаточно проверить, что расстояние от точек (28) до $\pi/2$ не меньше чем $|\pi/2 - x|$, а именно:

$$\frac{\pi}{2(2n+1)} \leqslant \left|\frac{\pi N n_1}{2n+1} - \frac{\pi}{2}\right|, \quad \text{где либо } n_1 = n, \text{ либо } n_1 = n+1. \tag{29}$$

Неравенство (29), которое требуется доказать, после умножения обеих его частей на $2(2n+1)/\pi$ приобретает вид $|2Nn_1 - (2n+1)| \geqslant 1$. Последнее неравенство выполняется, так как модуль разности между двумя различными целыми числами (одно из них четно, а другое нечетно) не меньше 1.

Докажем, что при любом $x \in (0,\pi)\setminus E$ справедливо соотношение (27). Сперва рассмотрим точки $(0,\pi)\setminus E$, лежащие слева от $\pi/2$. Если $x \in (0, \pi/3)$, то $\sin 2x > \sin x$. Далее имеем

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\pi n}{2n+1}, \frac{\pi(n+1)}{2n+3}\right).$$

Если

$$x \in \left(\frac{\pi n}{2n+1}, \frac{\pi(n+1)}{2n+3}\right) \tag{30}$$

и четно, то подходит значение $N = 2n+2$. Действительно, в силу четности n для доказательства неравенства $\sin Nx > \sin x$ достаточно проверить, что расстояние от точки $Nx = (2n+2)x$ до точки $\pi n + \pi/2$ меньше расстояния от $\pi/2$ до x, равного $\pi/2 - x$. Иначе говоря, требуется доказать двойное неравенство $x - \pi/2 < (2n+2)x - (\pi n + \pi/2) < \pi/2 - x$, но оно, как нетрудно убедиться, равносильно включению (30). Если верно включение (30) и n нечетно, то воспользуемся равенством

$$\left(\frac{\pi n}{2n+1}, \frac{\pi(n+1)}{2n+3}\right) = \bigcup_{q=2}^{\infty} I_{q,n}, \quad \text{где } I_{q,n} = \left(\frac{\pi(n+1-2/q)}{2n+3-4/q}, \frac{\pi(n+1-1/q)}{2n+3-2/q}\right). \tag{31}$$

(Это равенство легко доказывается: левый конец интервала $I_{2,n}$ есть $\pi n/(2n+1)$, правые концы интервалов $I_{q,n}$ стремятся к $\pi(n+1)/(2n+3)$ при $q \to +\infty$ и интервалы в (31) "зацепляются" один за другой, т.е. правый конец $I_{q,n}$ больше левого конца $I_{q+1,n}$.) Покажем, что для точек $x \in I_{q,n}$ подходит значение $N = 2qn + 3q - 3$. Действительно, для доказательства неравенства $\sin Nx > \sin x$ достаточно проверить, что расстояние от точки $Nx = (2qn+3q-3)x$ до точки $\pi q(n+1) - 3\pi/2$ (именно здесь используется нечетность n) меньше $\pi/2 - x$. Это равносильно двойному неравенству:

$$x - \frac{\pi}{2} < (2qn+3q-3)x - \left(\pi q(n+1) - \frac{3\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2} - x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \pi q(n+1) - 2\pi < (2qn+3q-4)x, \\ (2qn+3q-2)x < \pi q(n+1) - \pi. \end{cases}$$

Последняя система, как видно из (31), равносильна включению $x \in I_{q,n}$.

Рассмотрим точки $(\pi/2, \pi) \setminus E$. Если $x \in (3\pi/4, \pi)$, то $\sin 3x > \sin x$. Для точки $3\pi/4$ подходит значение $N = 6$. Если $x \in (2\pi/3, 3\pi/4)$, то $x = (2+\delta)\pi/3$, где $0 < \delta < 1/4$. В этом случае интервал $(1/(3\delta), 2/(3\delta))$ имеет длину, большую 1, и, следовательно, содержит некоторое натуральное число p. Проверим, что $\sin 3px > \sin x$. Действительно, $3px = (2+\delta)\pi p$, $\sin 3px = \sin \pi p\delta$. Согласно выбору числа p имеем $p\delta \in (1/3, 2/3)$. Следовательно, $\sin \pi p\delta > \sqrt{3}/2 > \sin x$. Осталось доказать соотношение (27) для точек множества

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \setminus E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\pi(n+2)}{2n+3}, \frac{\pi(n+1)}{2n+1}\right).$$

Если

$$x \in \left(\frac{\pi(n+2)}{2n+3}, \frac{\pi(n+1)}{2n+1}\right) \tag{32}$$

и n нечетно, то берем $N = 2n+2$ и в силу нечетности n для доказательства неравенства $\sin Nx > \sin x$ достаточно проверить, что расстояние от точки $Nx = (2n+2)x$ до точки $\pi(n+1) + \pi/2$ меньше $x - \pi/2$. Иначе говоря, требуется доказать двойное неравенство $\pi/2 - x < (2n+2)x - (\pi(n+1) + \pi/2) < x - \pi/2$, которое равносильно включению (32). Если (32) выполнено и n четно, то воспользуемся равенством

$$\left(\frac{\pi(n+2)}{2n+3}, \frac{\pi(n+1)}{2n+1}\right) = \bigcup_{q=2}^{\infty} \widetilde{I}_{q,n}, \quad \text{где } \widetilde{I}_{q,n} = \left(\frac{\pi(n+2-1/q)}{2n+3-2/q}, \frac{\pi(n+2-2/q)}{2n+3-4/q}\right),$$

которое доказывается так же, как и (31). Проверим, что для точек интервала $\widetilde{I}_{q,n}$ подходит значение $N = 2qn + 3q - 3$, т.е. $\sin(2qn+3q-3)x > \sin x$ $(\forall x \in \widetilde{I}_{q,n})$. Для этого достаточно установить, что расстояние от точки $(2qn+3q-3)x$ до точки $\pi q(n+2) - 3\pi/2$ (именно здесь используется четность n) меньше $x - \pi/2$. Другими словами, требуется доказать двойное неравенство:

$$\frac{\pi}{2} - x < (2qn+3q-3)x - \left(\pi q(n+2) - \frac{3\pi}{2}\right) < x - \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \pi q(n+2) - \pi < (2qn+3q-2)x, \\ (2qn+3q-4)x < \pi q(n+2) - 2\pi. \end{cases}$$

Легко видеть, что последняя система неравенств равносильна включению $x \in \widetilde{I}_{q,n}$. Теорема доказана.

Замечание 3. В [8] доказано, что оценка сверху $g(b;x) \leqslant (b_1/2)\operatorname{ctg}(x/4)$ выполняется при всех $x \in (0, \pi)$, какова бы ни была монотонно стремящаяся к нулю последовательность $b = \{b_k\}$.

Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23–71–30001) в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
3. *Salem R.* Détermination de l'ordre de grandeur á l'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. **186**. 1804–1806.
4. *Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. **10**, N 1. 101–120.

5. *Telyakovskiĭ S.A.* On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1995. **58(72)**. 43–50.
6. *Солодов А.П.* Точные константы в двусторонней оценке С.А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов // Матем. заметки. 2020. **107**, № 6. 906–921.
7. *Попов А.Ю., Солодов А.П.* Оптимальные на отрезке $[\pi/2, \pi]$ двусторонние оценки суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов // Матем. заметки. 2022. **112**, № 2. 317–320.
8. *Попов А.Ю.* Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами // Матем. заметки. 2021. **109**, № 5. 768–780.

Поступила в редакцию
30.08.2023

УДК 519.633.6

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ В ХОЛОДНОЙ, НО ВЯЗКОЙ ПЛАЗМЕ

Е. В. Чижонков[1]

Численно анализируется влияние вязкости на нерелятивистские колебания холодной плазмы. С этой целью построена неявная разностная схема типа Мак-Кормака, имеющая более слабое ограничение на устойчивость, чем явная схема, и реализуемая без итераций, что увеличивает ее вычислительную эффективность в десятки раз. Показано, что учет вязкости плазмы может быть причиной не только затухания амплитуды плазменных колебаний, но и изменения формы решения. При увеличении коэффициента вязкости у решения наблюдается седловая точка, которая сохраняется во времени.

Ключевые слова: численное моделирование, нерелятивистские колебания, холодная вязкая плазма, неявная схема Мак-Кормака, седловая точка.

The effect of viscosity on non-relativistic oscillations of cold plasma is numerically analyzed. For this purpose, an implicit difference scheme of the MacCormack type is constructed, which has a weaker restriction on stability in comparison with the explicit scheme. The scheme is implemented without iterations, which increases its computational efficiency tenfold. It is shown that taking into account the plasma viscosity can cause not only attenuation of the amplitude of plasma oscillations, but also a change in the shape of the solution. With an increase in the viscosity coefficient, a saddle point is observed in the solution, which is preserved in time.

Key words: numerical simulation, non-relativistic oscillations, cold viscous plasma, implicit MacCormack scheme, saddle point.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-4-5

Введение. Гидродинамическая модель холодной плазмы хорошо известна и достаточно подробно описана в учебниках и монографиях по физике плазмы [1–4]. В настоящее время внимание к этой модели обусловлено в первую очередь задачами, относящимися к распространению сверхмощных лазерных импульсов в плазме [5, 6]. Подобные постановки напрямую связаны с приложением результатов, удостоенных Нобелевской премии по физике 2018 г. Приведем следующие примеры практически важных задач этой тематики: лазерное ускорение электронов и ионов, быстрое зажигание термоядерного синтеза, ядерные реакции в луче лазера, синхротронное и субмиллиметровое излучение и пр. [7]. Численному моделированию колебаний в холодной плазме, а также кильватерных волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом, посвящена монография [8].

Напомним, что гидродинамическая модель “холодной” плазмы, в которой температура электронов формально полагается равной нулю, является точным математическим следствием кинетической модели, основанной на системе уравнений Власова–Максвелла (см., например, [1, 3]). Однако такое гидродинамическое приближение является безусловной идеализацией физических процессов,

[1] *Чижонков Евгений Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. вычислительной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su.

Chizhonkov Evgenyi Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Computational Mathematics.