



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Алферова, А. Ю. Попов, Экстремальная задача о положительности интегралов от синус-рядов с монотонными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2024, том 116, выпуск 2, 316–320

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.215.137.67

10 августа 2024 г., 13:23:28





КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Экстремальная задача о положительности интегралов от синус-рядов с монотонными коэффициентами

Е. Д. Алферова, А. Ю. Попов

Ключевые слова: монотонные коэффициенты, ряды по синусам, сопряженное ядро Дирихле.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14309>

В заметке [1] была доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Каков бы ни был синус-ряд с монотонными коэффициентами*

$$g(b; x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad b_1 > 0, \quad b_{k+1} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0, \quad (1)$$

при любых $y, x \in (0, \pi)$ таких, что $y \leq x/2$, верно неравенство

$$\int_y^x g(b; t) dt > 0. \quad (2)$$

В случае $x = \pi$ неравенство (2) верно при любых $y \in (0, \pi/2)$. Интеграл $\int_{\pi/2}^{\pi} g(t) dt$ также положителен за одним исключением: $g(t) \equiv b_1(\sin t + \sin 2t)$ – тогда он равен нулю.

Эта теорема дает возможность поставить следующую задачу.

ЗАДАЧА. Для любого $x \in (0, \pi]$ найти величину $Y(x)$, равную по определению точной верхней грани значений $y \in (0, x)$, при которых неравенство (2) выполняется для любого синус-ряда (1).

Из теоремы следуют равенство $Y(\pi) = \pi/2$ и оценка $Y(x) \geq x/2$ при всех $x \in (0, \pi)$.

В этой работе мы решаем поставленную задачу для всех $x \in [2\pi/3; \pi)$ и уточняем оценку для остальных x .

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} Y(x) &= y_1(x), \quad x \in \left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right), \pi \right), \quad \text{где } y_1(x) = \arccos(-1 - \cos x), \\ Y(x) &= y_2(x), \quad x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

Работа выполнена в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00129).

где

$$y_2(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{9 - 24 \cos x - 48 \cos^2 x} - 4 \cos x - 3}{8}\right). \quad (4)$$

Также справедлива оценка

$$Y(x) \geq 0.6x, \quad x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$. Эти тригонометрические многочлены, называемые *сопряженными ядрами Дирихле*, входят в класс рядов (1). Верны тождества

$$\int_{y_1(x)}^x \tilde{D}_2(t) dt = 0, \quad x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right], \quad \int_{y_2(x)}^x \tilde{D}_3(t) dt = 0, \quad x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right].$$

Функция $y_1(x)$ убывает на отрезке $[2\pi/3, \pi]$,

$$y_1\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad y_1\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \quad y_1(\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y_2(x)$ возрастает на отрезке $[2\pi/3, \arccos(-3/4)]$,

$$y_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right), \quad y_2\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда и из определения величины $Y(x)$ следуют неравенства

$$Y(x) \leq y_1(x), \quad x \in \left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right), \pi\right], \quad Y(x) \leq y_2(x), \quad x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right].$$

Согласно доказанному в [1] при любом фиксированном $x \in [0; \pi]$ неравенство $Y(x) \geq y(x)$ ($y(x)$ – заданная величина) следует из неравенств

$$\int_y^x \tilde{D}_n(t) dt > 0 \quad \forall y < y(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2. \quad (6)$$

Поэтому для доказательства равенств (3) и (4) достаточно проверить выполнение неравенств (5) при любых $n \geq 2$ и следующих ограничениях на x и y :

$$y < y_1(x), \quad x \in \left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right), \pi\right), \quad y < y_2(x), \quad x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right].$$

При $n = 2$ неравенства (5) очевидны: если $x \in [2\pi/3, \pi]$, $y < y_1(x)$, то $\int_y^x \tilde{D}_2(t) dt = \int_y^{y_1(x)} \tilde{D}_2(t) dt > 0$, так как $\tilde{D}_2(t) > 0$ при $0 < t < 2\pi/3$, а $y_1(x) < 2\pi/3$ и, тем более, положителен интеграл (5) при $y < y_2(x)$, так как $y_2(x) < y_1(x)$.

Пусть $n = 3$. Поскольку $\tilde{D}_3(t) < 0$ при $t \in (\pi/2, 2\pi/3)$, $\tilde{D}_3(t) > 0$ при $t \in (0, \pi/2) \cup (2\pi/3, \pi)$, то при $x \in (\arccos(-3/4), \pi)$ имеем

$$\min_{y \in [0, 2\pi/3]} \int_y^x \tilde{D}_3(t) dt = \int_{\pi/2}^x \tilde{D}_3(t) dt > \int_{\pi/2}^{\arccos 3/4} \tilde{D}_3(t) dt = 0.$$

При $x \in [2\pi/3, \arccos(-3/4)]$, $y < y_2(x)$ имеем

$$\int_y^x \tilde{D}_3(t) dt = \int_y^{y_2(x)} \tilde{D}_3(t) dt > 0,$$

ввиду положительности $\tilde{D}_3(t)$ на интервале $(0, \pi/2)$ и неравенства $y_2(x) \leq \pi/2$.

Далее $n \geq 4$. Воспользуемся тождеством [2; т. 2, № 21, с. 89, с. 290]

$$2\tilde{D}_n(t) = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)(1 - \cos(n+1)t) - \sin(n+1)t, \quad n \in \mathbb{N},$$

и оценкой $|\int_y^x \sin(n+1)t dt| \leq 2/(n+1)$ для всех $x, y, n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. Отсюда видно, что неравенство

$$\int_y^x \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)(1 - \cos(n+1)t) dt > \frac{2}{n+1} \quad (7)$$

влечет положительность $\int_y^x \tilde{D}_n(t) dt$. А так как

$$\int_y^x \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)(1 - \cos(n+1)t) dt > \operatorname{ctg}\left(\frac{x_1}{2}\right) \int_y^{x_1} (1 - \cos(n+1)t) dt, \quad 0 < y < x_1 < x < \pi,$$

то достаточно доказать неравенство

$$\int_y^{x_1} (1 - \cos(n+1)t) dt \geq \frac{2 \operatorname{tg}(x_1/2)}{n+1},$$

выбрав должным образом точку $x_1 \in (y; x)$. Если x_1 удастся выбрать так, чтобы выполнялись оба неравенства

$$x_1 - y \geq \frac{2\pi}{n+1} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x_1}{2}\right) \leq \pi, \quad (8)$$

то тогда мы получим требуемое:

$$\int_y^{x_1} (1 - \cos(n+1)t) dt \geq \int_y^{y+2\pi/(n+1)} (1 - \cos(n+1)t) dt = \frac{2\pi}{n+1} \geq \frac{2 \operatorname{tg}(x_1/2)}{(n+1)}.$$

Это соображение в случае $x \in (\arccos(-3/4), \pi)$ (берем $x_1 = \arccos(-3/4)$, тогда $x_1 - y \geq \arccos(-3/4) - \arccos(-1/4) > 0.59 > 2\pi/11$) сразу же доказывает неравенства (5) при $n \geq 10$. В случае $x \in [2\pi/3, \arccos(-3/4)]$ берем $x_1 = 2\pi/3$. Тогда $x_1 - y \geq \pi/6$, и при $n \geq 11$ оба неравенства (8) выполняются.

Докажем неравенства (7) при небольших значениях n . Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, то достаточно оценить снизу интеграл по какому-либо отрезку, лежащему внутри $[y, x]$. При $x \in (\arccos(-3/4), \pi)$ таким отрезком является $[\arccos(-1/4), \arccos(-3/4)]$. Обозначим

$$I_n = \int_{\arccos(-1/4)}^{\arccos(-3/4)} \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)(1 - \cos(n+1)t) dt.$$

Вычисления показывают, что

$$I_9 > 0.31 > 0.2, \quad I_8 > 0.27 > \frac{2}{9}, \quad I_7 > 0.41 > \frac{1}{4}, \quad I_6 > 0.38 > \frac{2}{7}, \quad I_4 > 0.46 > \frac{2}{5}.$$

Таким образом, для проверки справедливости равенства (3) осталось доказать положительность $\int_y^x \tilde{D}_5(t) dt$ при $y < y_1(x)$, $x \in (\arccos(-3/4), \pi)$. Множество отрицательности $\tilde{D}_5(t)$ на $(0, \pi)$ есть $(\pi/3, 2\pi/5) \cup (2\pi/3, 4\pi/5)$. Поэтому

$$\int_y^x \tilde{D}_5(t) dt \geq \int_y^{4\pi/5} \tilde{D}_5(t) dt \geq \min\left\{\int_{\arccos(-1/4)}^{4\pi/5} \tilde{D}_5(t) dt, \int_{\pi/3}^{4\pi/5} \tilde{D}_5(t) dt\right\}.$$

Вычисления показывают, что оба эти интеграла положительны.

При $x \in [2\pi/3, \arccos(-3/4)]$ отрезком, содержащим $[y, x]$, является $[\pi/2, 2\pi/3]$. Обозначим

$$J_n = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) (1 - \cos(n+1)t) dt.$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} I_{10} = \frac{9917}{27720} &> \frac{2}{11}, & I_9 = \frac{913}{2520} &> \frac{1}{5}, & I_8 = \frac{1319}{2520} &> \frac{2}{9}, \\ I_7 = \frac{751}{1680} &> \frac{1}{4}, & I_5 = 0.45 &> \frac{1}{3}, & I_4 = \frac{41}{60} &> \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Таким образом, для проверки справедливости равенства (4) осталось доказать положительность $\int_y^x \tilde{D}_6(t) dt$ при $y < y_2(x)$, $x \in [2\pi/3, \arccos(-3/4)]$. Множество отрицательности $\tilde{D}_6(t)$ на $(0, \pi)$ есть $(2\pi/7, \pi/3) \cup (4\pi/7, 2\pi/3) \cup (6\pi/7, \pi)$. Поэтому

$$\int_y^x \tilde{D}_6(t) dt \geq \int_y^{2\pi/3} \tilde{D}_6(t) dt \geq \min \left\{ \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \tilde{D}_6(t) dt, \int_{2\pi/7}^{2\pi/3} \tilde{D}_6(t) dt \right\}.$$

Вычисления показывают, что оба эти интеграла положительны.

Согласно изложенным выше соображениям для доказательства оценки $Y(x) \geq 0.6x$ при $0 < x < 2\pi/3$ требуется установить справедливость неравенств

$$\int_y^x \tilde{D}_n(t) dt > 0, \quad 0 < y < 0.6x, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{3}, \quad n \geq 3. \quad (9)$$

В случае $n = 2$ неравенство (9) очевидно, поскольку $\tilde{D}_2(t) > 0$ при любом $t \in (0, 2\pi/3)$. В случае $n = 3$ имеем $\tilde{D}_3(t) > 0$ для любых $t \in (0, \pi/2)$, а так как $y < 0.6x \leq 0.6 \cdot 2\pi/3 \leq 0.4\pi < \pi/2$, то

$$\int_y^x \tilde{D}_3(t) dt > \int_{0.6x}^x \tilde{D}_3(t) dt.$$

Если $x \in (0, \pi/2]$, то положительность интеграла $\int_{0.6x}^x \tilde{D}_3(t) dt$ очевидна. На отрезке $\pi/2 \leq x \leq 2\pi/3$ этот интеграл убывает. Поэтому минимум его достигается в точке $x = 2\pi/3$ и равен

$$\int_{2\pi/5}^{2\pi/3} \tilde{D}_3(t) dt = \frac{\sqrt{5} - 1}{24}.$$

Далее $n \geq 4$. Согласно лемме 2 из [1] для положительности интеграла $\int_y^x \tilde{D}_3(t) dt$, $0 < y < x < \pi$, достаточно выполнения неравенства

$$x - y > \frac{2}{(n+1) \cos(x/2)},$$

причем можно считать, что $x > 2\pi/(n+1)$, поскольку $\tilde{D}_n(t) > 0$ на интервале $0 < t < 2\pi/(n+1)$, и положительность интеграла $\int_y^x \tilde{D}_n(t) dt$ при $0 < x < 2\pi/(n+1)$ очевидна. В нашем случае $x - y > 0.4x$. Следовательно, для доказательства неравенства (9) осталось проверить справедливость соотношения

$$0.2x \cos\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \geq 4, \quad \forall x \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Обозначив $\alpha = x/2$, приходим к задаче доказательства неравенства

$$0.4(n+1)\alpha \cos(\alpha) > 1 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{n+1} < \alpha < \frac{\pi}{3}, \quad n \geq 4. \quad (10)$$

Ввиду вогнутости функции $\varphi(\alpha) = \alpha \cos(\alpha)$ на отрезке $[0, \pi/2]$ неравенство (10) достаточно доказать лишь при $\alpha = \pi/(n+1)$ и $\alpha = \pi/3$. При $\alpha = \pi/3$ оно принимает вид $0.2(n+1)(\pi/3) > 1$ и очевидно при $n \geq 4$. При $\alpha = \pi/(n+1)$ требуется доказать, что $2\pi/5 \cdot \cos(\pi/(n+1)) > 1$. Поскольку при $n \geq 4$ имеем $\cos(\pi/(n+1)) \geq \cos(\pi/5) = (\sqrt{5}+1)/4$, то остается проверить численное неравенство $\pi(\sqrt{5}+1) > 10$. Оно верно, и доказательство теоремы завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Е. Д. Алферова, А. Ю. Попов, *Матем. заметки*, **110**:4 (2021), 630–634. [2] Г. Поля, Г. Сёге, *Задачи и теоремы из анализа*, Ч. 1–2, Наука, М., 1978.

Е. Д. Алферова

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: elena.alferova@gmail.com

Поступило

13.03.2024

Принято к публикации

20.03.2024

А. Ю. Попов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова;
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: aypopov.msu@yandex.ru