УДК 517.9

ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И РЕСУРГЕНТНЫЙ АНАЛИЗ

М. В. Коровина,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
e-mail: betelgeuser@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена проблеме построения асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными и мероморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек в пространствах функций экспоненциального роста. В первой части статьи строятся асимптотики решений уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечно удаленной особой точки, которая вообще говоря является иррегулярной особенностью. Во второй части работы получен общий вид асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их иррегулярных особых точек.

Ключевые слова. Асимптотика, иррегулярные особые точки, регулярные особые точки, преобразование Лапласа-Бореля, ресургентный анализ, пространство функций экспоненциального роста.

POINCARE PROBLEM IN THE ANALYTIC THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RESURGENT ANALYSIS

M. V. Korovina

Abstract. The paper is devoted to the problem of constructing asymptotics to solutions of ordinary differential equations with holomorphic and meromorphic coefficients in the vicinity of irregular singular points in the spaces of exponential growth functions. In the first part of the article, the asymptotics to solutions of an equation with holomorphic coefficients in the vicinity of an infinitely distant singular point, which, generally speaking, is an irregular feature, are constructed. In the second part of the work, a general view of the asymptotics to solutions of differential equations with meromorphic coefficients in the vicinity of their irregular singular points is obtained.

Keywords. Asymptotics, irregular singular points, regular singular points, Laplace-Borel transformation, resurgent analysis, the space of exponential growth functions.

Введение

Проблема построения асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярных особых точек является фундаментальной проблемой аналитической теории дифференциальных уравнений. Она была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. Пуанкаре рассматривал случай, когда иррегулярной особой точкой является бесконечность. Ранее эту задачу рассматривал Томэ в 1872 году, Стернберг и многие другие авторы, также эта известная проблема формулируется в большинстве учебников по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых учебниках по теории уравнений в частных производных.

В данной работе формулируются теоремы о построении асимптотик решений дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности, а также в работе указан общий вид асимптотик для произвольных иррегулярных особых точек уравнений с мероморфными коэффициентами в пространстве функций экспоненциального роста. Для получения этих результатов использовались методы ресургентного анализа в том числе интегральное преобразование Лапласа–Бореля [4] и недавно созданный метод повторного квантования [5] с помощью которого и были полученны результаты приведенные в статье.

В первом параграфе работы рассматривается задача о построении асимптотик решений для уравнений вида

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \ldots + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \ldots + a_0(x)\, u(x) = 0 \quad (1)$$

Здесь $a_i(x)$ – функции голоморфные в окрестности бесконечности. Задача состоит в построении асимптотик решений уравнения (1) при $x \to \infty$ в пространстве функций экспоненциального роста. Заметим, что именно эту задачу рассматривал Пуанкаре в своих работах [1], [2]. Бесконечность, вообще говоря, является иррегулярной особой точкой. В частном случае, когда она является регулярной особой точкой, задача построения асимптотик решений является решенной. Как известно [3], асимптотики в окрестности регулярных особых точек являются конормальными, то есть имеют вид

$$u(x) \approx \sum_{i=1} \left(\sum_{k=0}^{n_i} a_i^k \ln^k x\right) x^i.$$

Во втором параграфе будет рассмотрена задача о построении асимптотик решений дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами в пространствах функций экспоненциального роста. Общий вид асимптотик будет выписан в окрестностях как регулярных, так и иррегулярных особых точек.

1. Построение асимптотик решений уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности

Задача построения асимптотики решения в окрестности бесконечности путем замены $x = \frac{1}{r}$ сводится к задаче о построении асимптотики решения в окрестности нуля для линейных дифференциальных уравнений с вырождением 2-го порядка. А именно уравнение (1) можно переписать в виде

$$H\left(r, -r^2 \frac{d}{dr}\right) u = 0, \tag{2}$$

где

$$\hat{H} = H\left(r, -r^2 \frac{d}{dr}\right) = \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i .$$

Символом дифференциального оператора $\hat{H}$ называется функция

$$H(r, p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) p^i .$$

Определение 1. *Основным символом оператора $\hat{H}$ называется функция $H_0(p) = H(0, p)$.*

Ранее были построены асимптотики решений для частного случая, а именно, когда основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$ имеет простые корни. Было показанно, что в этом случае асимптотики решений уравнения (1) в окрестности бесконечности имеют вид

$$u(r) \approx \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i / r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k, \tag{3}$$

где α_i, $i = 1, \ldots, n$ – корни полинома $H_0(p)$, и σ_j, a_i^k – некоторые комплексные числа, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k$ – соответствующие формальные ряды, вообще говоря расходящиеся. Интегральное преобразование Лапласа–Бореля, в том числе является и методом суммирования подобных формальных рядов, входящих в асимптотические разложения решений в окрестностях иррегулярных особенностей.

В начале рассмотрим случай, когда основной символ дифференциального оператора имеет один корень. Без ограничения общности будем считать, что этот корень находится в нуле. В этом случае коэффициенты уравнения (2) представимы в виде $a_i(r) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_i^j r^j$. Пусть первые $l_i - 1$ коэффициенты степенного ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_i^j r^j, i = 0, \ldots, n$ равны нулю, то есть левая часть уравнения (2) представима в виде суммы слагаемых вида $\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n$и $\left(\sum\limits_{j=l_i}^{\infty} a_i^j r^j\right) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Выберем среди этих слагаемых те для которых число $h = l_i + i$ минимально и в соответствующих степенных рядах обозначим коэффициент при минимальной степени r через $\tilde{a}_i, i = 0, ..., h$.

$$\begin{gathered}\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^n u + \tilde{a}_0 r^m \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^k u + \tilde{a}_1 r^{m+1} \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^{k-1} u + \tilde{a}_2 r^{m+2} \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + \ldots \\ +\tilde{a}_k r^{m+k} u + \sum_{j=1}^{h} r^j \sum_{i=h_j}^{n-1} a_j^i(r) \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^i u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a^i(r) \left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^i u = 0\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\tilde{a}_0 \neq 0$, через $a_j^i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. Числа h_j и j выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $h_j + j > m + k$. Назовем соответствующие им члены уравнения младшими, а $h = m + k$ – индексом сингулярности уравнения (4). Разделим младшие члены на два типа. К первому типу отнесем члены, для которых $h \geq j$ и ко второму такие, что $h < j$.

Разделим уравнения с кратным корнем основного символа в нуле на два типа. К первому типу отнесем те уравнения, для которых для всех младших членов выполнено неравенство

$$h_i + j - h > (m - j)\,\frac{n-h}{m}. \tag{5}$$

А ко второму типу такие уравнения, для которых найдутся младшие члены, для которых это неравенство не выполнено.

Теорема 1. *Пусть $h_i + i - h > (m - i)\frac{n-k-m}{m}$, тогда любая асимптотика решения уравнения (2) в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности бесконечности имеет вид*

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{\sigma_j} \sum_{l}^{\infty} A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

где α_{n-k-m}^j, $j = 1, ..., n-k$ корни полинома $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$.

Пусть для одного из членов уравнения будет выполнено неравенство $h_i + i - h < (m - i)\frac{n-k-m}{m}$, тогда любая асимптотика решения имеет вид

$$\begin{gathered}u(x) \approx \sum_{j=1}^{\nu} \exp\left(\sum_{l=1}^{n-k-m-\beta_1} \beta_l^j x^{\frac{l}{n-k-m-\beta_1+i}}\right) x^{\sigma_j^1} \sum_{j=0}^{\infty} A_i^j x^{-\frac{j}{n-k-m-\beta_1+i}} + \\ + \sum_{j=1}^{\beta_1+m-i} \exp\left(\sum_{t=1}^{\beta_1} \alpha_t^j x^{\frac{t}{m-i+\beta_1}}\right) x^{\sigma_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_t^j x^{-\frac{l}{m-i+\beta_1}} + \\ + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},\end{gathered}$$

Здесь введены обозначения: $\nu = n - k + i - m - \beta_1$, $\beta^j_{n-k-m-\beta_1}, j = 1, \ldots, \nu$ *являются корнями полинома* $p^\nu + c$, *где* $c = b_1 \left(\frac{\nu}{\nu - i}\right)^\nu$, $\alpha^j_{\beta_1}, j = 1, \ldots, m - i + \beta_1$ – *корни полинома* $a_0 + b_1 \left(\frac{1}{d-1}\right)^{i-m-\beta_1} p^{-i+m+\beta_1}$. *Через* $A^j_i, B^j_i, \sigma^1_j, \sigma^2_j, b^j_i, k_0$ *обозначены некоторые числа,* $\sum\limits_{t=0}^{\infty} A^j_t x^t$, $\sum\limits_{t=0}^{\infty} B^j_t x^t$ – *асимптотические ряды.*

Замечание 2. *Если основной символ дифференциального оператора имеет более одного корня, то асимптотики решений, соответствующие каждому из корней, можно построить последовательно с помощью замены, сдвигая корни в ноль и применяя к преобразованному уравнению теорему 1. Более подробно см. в [6].*

2. Построение асимптотик решений в окрестности произвольных иррегулярных особых точек в пространстве функций экспоненциального роста

Рассмотрим общий случай построения асимптотик решений уравнений с голоморфными коэффициентами в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности произвольной особой точки (регулярной или иррегулярной). То есть решим вопрос о виде асимптотики решений уравнения

$$\begin{gathered} a_n(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \ldots \\ + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \ldots + a_0(x)\, u(x) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $a_i(x), i = 0, \ldots, n$ – голоморфные функции. Эта задача эквивалентна задаче построения асимптотик решения (1) с мероморфными коэффициентами.

Теорема 2. *Асимптотики любого из решений уравнения (6) в пространстве функций экспоненциального роста представимы в виде суммы асимптотичемких членов, каждый из которых соответствует* i*-му корню основного символа кратности* ν_i

$$u_i \approx \exp\left(P_i\left(r^{\frac{1}{l_i}}\right)\right) \sum_{j=1}^{m_i} r^{\sigma^i_j} \ln^j r \sum_{l=0}^{\infty} a^i_l r^l$$

Здесь $l_i \le \nu_i$, $P_i(x) = M_i x^{k_i} + \ldots + M_1 x$ – *полином* $\frac{k_i}{l_i} \le 1$, *через* m_i, σ^i_j, a^j_i *обозначены соответствующие константы,* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a^i_l r^l$ – *асимптотические степенные ряды.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[1] Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires. // Acta math. 1886. Vol. 8. – P. 295-344.

[2] Пуанкаре А. Избранные труды в 3-х томах. Т.3. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре : пер. с фр. / А. Пуанкаре; гл. ред. Н. Н. Боголюбов; Акад. наук СССР . – М.: «Наука», 1974 . – 771.

[3] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях. Докл. АН СССР. 1963, Т. 153, № 1. – С. 27–29.

[4] J. Ecalle. Cinq applications des fonctions resurgentes. // Prepub. Math. 1984, 84 T62.

[5] Korovina M. V. Repeated quantization method and its applications to the construction of asymptotics of solutions of equations with degeneration // Differential Equations. – 2016. – Vol. 52, no. 1. – P. 58–75.

[6] Korovina M. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, no. 12. – P. 2249.

УДК 517.95

МАТРИЦА РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Ю. О. Яковлева
Самарский государственный технический университет
Самара, Россия
e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n. Для системы дифференциальных уравнений порядка n от n независимых переменных построена матрица Римана в явном виде. Матрица Римана получена через гипергеометрическую функцию матричного аргумента.

Ключевые слова. Система дифференциальных уравнений порядка n, метод Римана, матрица Римана, гипергеометрическая функция.

The matrix of Riemann for the system of the differential hyperbolic equations of the high order.

J. O. Yakovleva
Samara State Technical University
Samara, Russia

Abstract. The article will indicate the system of the differential hyperbolic equations of the n-th order. The matrix of Riemann expressed through hypergeometrical functions of matrix argument is constructed is received.