

**ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА
С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Ш. Чэн, М. В. Коровина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Москва, Россия

e-mail: st02210136@gse.cs.msu.ru, betelgeuser@yandex.ru

Аннотация. Вычислены все коэффициенты в асимптотических разложениях решений для дифференциальных уравнений 2-го порядка с мероморфными коэффициентами.

Ключевые слова. Коэффициенты, дифференциальные уравнения, основной символ, простые корни, кратные корни.

**STUDY OF ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF 2ND ORDER WITH MEROMORPHOUS COEFFICIENTS**

S. Cheng, M. V. Korovina

Lomonosov Moscow State University

Moscow, Russia

Abstract. The article will calculate all the coefficients in the asymptotic expansions of solutions for 2nd order differential equations with meromorphic coefficients.

Keywords. Coefficients, differential equations, basic symbol, simple roots, multiple roots.

В работе рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка с иррегулярной особенностью:

$$u''(r) + b^1(r)u'(r) + b^0(r)u(r) = 0, \quad (1)$$

здесь $b^1(r), b^0(r)$ – мероморфные функции. Без ограничений общности будем считать, что они имеют особенность в нуле. В работе [1] были построены асимптотики решений уравнения (1) в окрестности произвольных особых точек (регулярных и иррегулярных). Однако коэффициенты, стоящие в этих асимптотиках, не были найдены. Целью данной работы является вычисление всех коэффициентов, входящих в эти асимптотики.

В работе [2] было доказано, что уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right)^2 u(r) + a_1(r) \left(-\frac{1}{k-1}r^k \frac{d}{dr}\right) u(r) + a_0(r)u(r) = 0, \quad (2)$$

где $a_1(r), a_0(r)$ – голоморфные функции, k – целое неотрицательное число. Кроме того, в этой работе найдено минимальное такое k . Если минимальное $k = 0$, то точка $r = 0$ является неособой точкой дифференциального уравнения (2), если $k = 1$,

то $r = 0$ является регулярной особой точкой, если $k > 1$, то тогда точка является иррегулярной. В этой работе мы рассмотрим случай иррегулярной особой точки, то есть будем считать, что $k > 1$. Асимптотики решений в окрестности регулярной особой точки хорошо изучены, эти асимптотики являются конормальными [3].

Символом дифференциального оператора

$$\hat{H} = \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right)^2 + a_1(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) + a_0(r), \quad (3)$$

называется функция $H(r, p) = p^2 + a_1(r)p + a_0(r)$

Определение 1. Основным символом оператора 2-го порядка (3) называется функция

$$H_0(p) = H(0, p). \quad (4)$$

В работах [1,4] было доказано, что если полином $H_0(p)$ имеет простые корни в точках p_1, p_2 , тогда асимптотика решения в пространстве функций $k-1$ экспоненциального роста уравнения второго порядка $H(r, -\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr})u = 0$ имеет вид:

$$u(r) = \sum_{j=1}^2 \exp \left(\frac{p_j}{r^{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\lambda_i^j}{r^{k-1-i}} \right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i, \quad (5)$$

здесь числа λ_i^j , σ_j и b_i^j – некоторые числовые коэффициенты.

Цель данной работы – найти коэффициенты в асимптотических разложениях решений для уравнения (2) как в случае простых корней, так и для случая кратного корня.

Без ограничения общности будем считать, что один из корней основного символа дифференциального оператора равен нулю. Запишем уравнение (2) с простыми корнями в нуле в виде:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right)^2 u + a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) u + a_0^1 r u + a_0^2 r^2 u + \dots \\ & + a_0^{k-1} r^{k-1} u + \left[r \bar{a}_1(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) + r^k \bar{a}_0(r) \right] u = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

в скобках стоят младшие слагаемые, которые не влияют на вид асимптотики и от них зависят только коэффициенты b_i^j . Основной символ имеет вид $H_0(p) = p^2 + a_1^0 p = p(p + a_1^0)$.

Сначала рассмотрим случай, когда основной символ дифференциального оператора имеет простые корни, а потом случай кратного корня.

1. В первом случае $a_1^0 \neq 0$, тогда асимптотический член, соответствующий нулевому корню основного символа будет иметь вид

$$\exp \left(\sum_{i=1}^{k-2} \frac{\lambda_i^1}{r^{k-1-i}} \right) r^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^1 r^i, \quad (7)$$

наша задача состоит в том, чтобы найти все коэффициенты, входящие в асимптотику (7). Начнем с вычисления коэффициентов λ_i^1 , σ_1 .

Теорема 1. Пусть k – четное число. Тогда числа λ_i^1 , $i = 1, 2, \dots, k-2$ однозначно определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0^1 + a_1^0 \lambda_1^1 \frac{k-2}{k-1} &= 0, \\ a_0^2 + \lambda_1^{1^2} \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_2^1 \frac{k-3}{k-1} &= 0, \\ &\dots \\ a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1}^1 \frac{k-2n}{k-1} &= 0, \\ a_0^{2n} + \lambda_n^{1^2} \left(\frac{k-n-1}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n}^1 \frac{k-2n-1}{k-1} &= 0, \\ &\dots \\ a_0^{k-2} + \lambda_{\frac{k-2}{2}}^{1^2} \left(\frac{\frac{k}{2}}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_{k-2}^1 \frac{1}{k-1} &= 0, \end{aligned}$$

а число σ_1 определяется из равенства

$$\sigma_1 = \frac{(k-1)a_0^{k-1}}{a_1^0}.$$

Пусть k – нечетное число. Коэффициенты λ_i^1 , $i = 1, 2, \dots, k-2$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_0^1 + a_1^0 \lambda_1^1 \frac{k-2}{k-1} &= 0, \\ a_0^2 + \lambda_1^{1^2} \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_2^1 \frac{k-3}{k-1} &= 0, \\ &\dots \\ a_0^{2n-1} + a_1^0 \lambda_{2n-1}^1 \frac{k-2n}{k-1} &= 0, \end{aligned}$$

$$a_0^{2n} + \lambda_n^{1^2} \left(\frac{k-n-1}{k-1} \right)^2 + a_1^0 \lambda_{2n}^1 \frac{k-2n-1}{k-1} = 0,$$

...

$$a_0^{k-2} + a_1^0 \lambda_{k-2}^1 \frac{1}{k-1} = 0,$$

а число σ_1 определяется из равенства

$$\sigma_1 = (k-1) \frac{\frac{1}{4} \lambda_{\frac{k-1}{2}}^1{}^2 + a_0^{k-1}}{a_1^0}.$$

Эта система уравнений может быть решена, поскольку соответствующая ей матрица представляет собой треугольную матрицу с ненулевыми элементами на диагонали, в частности a_1^0 .

Осталось вычислить коэффициенты рядов в асимптотике (5) в случае, когда основной символ имеет простые корни, мы получим следующую теорему о коэффициентах b_i^1 .

Теорема 2. Числа b_i^1 , $i = 0, 1, 2, \dots$ однозначно определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k-1} a_1^0 b_1 + a_0^k b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = (k-1) \frac{a_0^k}{a_1^0} b_0, \\ & -\frac{1}{k-1} 2a_1^0 b_2 - \frac{1}{k-1} a_1^1 b_1 + a_0^k b_1 + a_0^{k+1} b_0 = 0, \\ & \dots \\ & -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} i a_1^{k-j-i} b_i + \sum_{i=0}^{k-j-1} a_0^{k+i} b_{k-j-1-i} = 0, j = 1, 2, \dots, k-1 \\ & \dots \\ & -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} i a_1^{k-1-i} b_i + \sum_{i=0}^{k-2} a_0^{k+i} b_{k-2-i} = 0, \\ & -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k i a_1^{k-i} b_i + \sum_{i=0}^{k-1} a_0^{k+i} b_{k-1-i} + \frac{k}{(k-1)^2} b_1 = 0, \\ & -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k+1} i a_1^{k+1-i} b_i + \sum_{i=0}^k a_0^{k+i} b_{k-i} + \frac{2(k+1)}{(k-1)^2} b_2 = 0, \\ & \dots \\ & -\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k+j} i a_1^{k+j-i} b_i + \sum_{i=0}^{k+j-1} a_0^{k+i} b_{k+j-1-i} + \frac{(j+1)(k+j)}{(k-1)^2} b_{j+1} = 0, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Данная система разрешима, так как матрица этой системы имеет треугольный вид и на диагонали стоят ненулевые элементы a_1^0 .

Чтобы построить асимптотику, соответствующую корню основного символа $p = -a_1^0 \neq 0$, сделаем замену: $u(r) = e^{\frac{\lambda_0}{r^{k-1}}} v(r)$, $\lambda_0 = -a_1^0$, мы получим:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right)^2 v - a_1^0 \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) v + a_0^1 r v + a_0^2 r^2 v + \dots \\ & + a_0^{k-1} r^{k-1} v + \left[r a_1^{(0)}(r) \left(-\frac{1}{k-1} r^k \frac{d}{dr} \right) + r^k a_0^{(0)}(r) \right] v = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

новый основной символ $H_0(p) = p^2 - a_1^0 p = p(p - a_1^0)$. То есть корень основного символа с помощью экспоненциальной замены сдвинут в ноль. Остальные расчеты аналогичны предыдущему случаю, где $p = 0$.

2. Пусть теперь $a_1^0 = 0$. В этом случае корень уравнения кратный и уравнение (2) приводится к виду

$$\left(-r^k \frac{d}{dr} \right)^2 u(r) + r^{k_1} \bar{a}_1(r) \left(-r^k \frac{d}{dr} \right) u(r) + r^{k_0} \bar{a}_0(r) u(r) = 0, \quad (9)$$

здесь $\bar{a}_1(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^1 r^i$, $\bar{a}_0(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^0 r^i$, $a_1^0 \neq 0$, $a_0^0 \neq 0$. Основной символ $H_0(p) = p^2$. Корни $p = 0$ имеют кратность 2. Разделим уравнение (9) на r^{2x} , перепишем уравнение (9) в виде

$$\begin{aligned} & \left(-r^{k-x} \frac{d}{dr} \right)^2 u(r) - (2k-x) r^{k-x-1} \left(-r^{k-x} \frac{d}{dr} \right) u(r) + \\ & + r^{k_1-x} \bar{a}_1(r) \left(-r^{k-x} \frac{d}{dr} \right) u(r) + r^{k_0-2x} \bar{a}_0(r) u(r) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $k_1 \neq \frac{k_0}{2}$, тогда существует число $x > 0$ такое, что уравнение с кратным корнем в нуле при делении на r^{2x} сводится либо к уравнению Фуксова типа, либо к уравнению с простыми корнями основного символа.

Пусть $k_1 = \frac{k_0}{2} \geq k-1$, положим $x = k-1$, тогда получим уравнение Фуксова типа, так как порядок вырождения будет равен 1.

Пусть теперь $k_1 = \frac{k_0}{2} < k-1$, тогда положим $x = k_1 = \frac{k_0}{2}$, тогда получим

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{k-x-1} r^{k-x} \frac{d}{dr} \right)^2 u(r) - \frac{1}{k-x-1} (2k-x) r^{k-x-1} \left(-\frac{1}{k-x-1} r^{k-x} \frac{d}{dr} \right) u(r) + \\ & + \frac{1}{k-x-1} \bar{a}_1(r) \left(-\frac{1}{k-x-1} r^{k-x} \frac{d}{dr} \right) u(r) + \left(\frac{1}{k-x-1} \right)^2 \bar{a}_0(r) u(r) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Основной символ равен $H_0(p) = p^2 + \frac{1}{k-k_1-1}a_0^1p + \left(\frac{1}{k-\frac{k_0}{2}-1}\right)^2 a_0^0$. Если этот многочлен имеет кратный корень, то, сдвинув его в ноль, сведем последнее уравнение к уравнению вида (10) с вырождением порядка $k - x$, где $x = k_1 = \frac{k_0}{2}$.

Теорема 3. Любое уравнение с кратным корнем можно привести либо к виду уравнения Фуксова типа, либо к виду уравнения с простыми корнями основного символа.

В случае, когда уравнение (10) приводится к виду

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{\frac{m}{2}-1}r^{\frac{m}{2}}\frac{d}{dr}\right)^2 u(r) + b\left(-\frac{1}{\frac{m}{2}-1}r^{\frac{m}{2}}\frac{d}{dr}\right)u(r) + \\ &+ b_1(r)\left(-\frac{1}{\frac{m}{2}-1}r^{\frac{m}{2}}\frac{d}{dr}\right)u(r) + b_0(r)u(r) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

где m – нечетное число, то асимптотика решения будет иметь

$$u(r) = e^{\sum_{i=1}^{m-3} \frac{\lambda_i^1}{r^{\frac{m}{2}-\frac{i}{2}-1}} r^{\frac{\sigma_1}{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} c_i^1 r^{\frac{i}{2}} + e^{\frac{b}{r^{\frac{m-2}{2}}} + \sum_{i=1}^{m-3} \frac{\lambda_i^2}{r^{\frac{m}{2}-\frac{i}{2}-1}} r^{\frac{\sigma_2}{2}}} \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 r^{\frac{i}{2}}.$$

Рассматриваемая система коэффициентов решений уравнений является разрешимой вследствие того, что ассоциированная с ней матрица обладает треугольной структурой с наличием ненулевых элементов на диагонали, а именно b .

Все коэффициенты, входящие в асимптотические разложения, вычисляются с помощью формул в Теореме 1 и Теореме 2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Korovina M. V, Matevossian H. A. Uniform Asymptotics of Solutions of Second-Order Differential Equations with Meromorphic Coefficients in a Neighborhood of Singular Points and Their Applications // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. № 14. – p. 2465.
- [2] Кац Д. С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. № 12. – С. 1612-1617.
- [3] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях // Докл. АН СССР, 153:1 (1963), 27–29.
- [4] Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений со старшими вырождениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. № 5. – с. 710.