

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

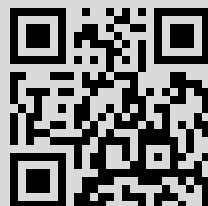
М. О. Корпусов, А. А. Панин, О разрушении решения абстрактной задачи Коши для формально гиперболического уравнения с двойной нелинейностью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 91–142

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 11:02:57



УДК 517.957

М. О. Корпусов, А. А. Панин

О разрушении решения абстрактной задачи Коши для формально гиперболического уравнения с двойной нелинейностью

Рассмотрена абстрактная задача Коши для формально гиперболического уравнения с двойной нелинейностью. При определенных условиях для операторов в этом уравнении доказана локальная во времени разрешимость. Получены достаточные условия разрушения решения соответствующей абстрактной задачи Коши за конечное время. Для доказательства разрушения использован модифицированный метод Х. А. Левина. Приведены примеры задач Коши и начально-краевых задач для конкретных нелинейных уравнений математической физики.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, обобщенные уравнения Клейна–Гордона, нелинейные гиперболические уравнения, нелинейные смешанные краевые задачи, теория поля.

DOI: 10.4213/im8118

§ 1. Введение

В настоящей работе мы рассматриваем абстрактную задачу Коши для формально гиперболического уравнения с двойной нелинейностью следующего вида:

$$\mathbb{A} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{H}'_f(u) = \mathbb{F}'_f(u). \quad (1.1)$$

Основной интерес для нас представляет получение условий, при которых происходит разрушение решения этой задачи.

Прежде всего отметим, что существуют три основных метода исследования явления разрушения: энергетический метод Х. А. Левина [1]–[7], получивший дальнейшее развитие в [8], метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [9]–[12] и метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [13], [14].

Относительно исследований, связанных с задачами Коши для уравнений вида (1.1), отметим в первую очередь классические работы [1] и [5], в которых рассматривалось абстрактное гиперболическое уравнение вида

$$Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи-м-2011).

причем для соответствующей задачи Коши были получены достаточные условия разрушения за конечное время. В качестве примеров были рассмотрены некоторые начально-краевые задачи. Отметим, что для методики из работы [1] определенную сложность представляет рассмотрение задач Коши. Однако уже в работе [12] эта трудность была успешно преодолена. Отметим также классическую работу [6], в которой были рассмотрены задачи для абстрактного уравнения формально гиперболического типа

$$Pu_{tt} = -Au + Bu - aPu_t + F(t, u) \quad (1.2)$$

с диссипацией. Заметим, что в (1.2) оператор при первой производной по времени линеен и совпадает с точностью до постоянного множителя с оператором при второй производной. В нашей работе, как видно из уравнения (1.1), ситуация иная.

Отметим, что мы продолжаем развивать модифицированный метод, который изначально рассматривался только для соболевских уравнений (см. [8]).

§ 2. Дифференциальное неравенство

Рассмотрим основное дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad (2.1)$$

где

$$\Phi(t) \in C^{(2)}([0, T]), \quad \Phi(t) \geq 0, \quad \Phi(0) > 0.$$

Разделим обе части неравенства (2.1) на $\Phi^{1+\alpha}$ и после некоторых преобразований получим неравенство

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right)' + \gamma\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \beta\Phi^{-\alpha} \geq 0,$$

из которого, в свою очередь, получим

$$\frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \frac{\gamma}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})' + \beta\Phi^{-\alpha} \geq 0. \quad (2.2)$$

Введем обозначение

$$Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t). \quad (2.3)$$

С учетом этого обозначения из (2.2) получим

$$Z'' + \gamma Z' - \beta(\alpha - 1)Z^{\alpha_1} \leq 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (2.4)$$

Введем новое обозначение

$$Y(t) = e^{\gamma t}Z(t), \quad (2.5)$$

с учетом которого из (2.4) получим

$$Y'' - \gamma Y' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}. \quad (2.6)$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$Y' = (\Phi^{1-\alpha} e^{\gamma t})' = \Phi^{-\alpha} (\alpha - 1) e^{\gamma t} \left[-\Phi'(t) + \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t) \right]. \quad (2.7)$$

Пусть выполнено следующее начальное условие:

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0); \quad (2.8)$$

тогда найдется такое $t_0 > 0$, что будет иметь место неравенство

$$\Phi'(t) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t), \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.9)$$

Следовательно, из неравенства (2.9) и выражения (2.7) получим $Y'(t) < 0$ при $t \in [0, t_0]$. Поскольку $-\gamma Y'(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_0]$, из неравенства (2.6) вытекает следующее неравенство:

$$Y'' - \beta(\alpha - 1) e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}, \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.10)$$

Теперь мы умножим обе части неравенства (2.10) на Y' и получим

$$Y' Y'' - \beta(\alpha - 1) e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y' \geq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}, \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.11)$$

Легко видеть, что верно равенство

$$e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y' = \frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt} [e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}] + \frac{1}{1 + \alpha_1} \delta e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}. \quad (2.12)$$

Подставим выражение (2.12) в (2.11) и получим неравенство

$$Y' Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt} [e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}] - \frac{\beta(\alpha - 1)\delta}{1 + \alpha_1} e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1} \geq 0, \quad t \in [0, t_0],$$

из которого следует

$$Y' Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt} [e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}] \geq 0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.13)$$

Интегрируя неравенство (2.13), мы получим

$$(Y')^2 \geq A^2 + \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1} \geq A^2, \quad (2.14)$$

где

$$A^2 \equiv (Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} Y^{1+\alpha_1}(0). \quad (2.15)$$

Предположим теперь, что выполнено условие $A^2 > 0$. После ряда преобразований последнее условие принимает следующий вид:

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right] > 0. \quad (2.16)$$

Следовательно, условие $A^2 > 0$ эквивалентно условию

$$\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0). \quad (2.17)$$

Стало быть, из неравенств (2.14) и (2.16) мы приходим к выводу о том, что

$$Y'(t) \leq -A < 0 \implies \Phi'(t_0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t_0).$$

Тогда $Y'(t_0) < 0$. Следовательно, используя алгоритм продолжения во времени, получим

$$Y'(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Значит, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |Y'| \geq A > 0 &\implies Y'(t) \leq -A \implies Y(t) \leq Y(0) - At \\ \implies \Phi^{1-\alpha}(t) &\leq e^{-\gamma t} [\Phi^{1-\alpha}(0) - At] \implies \Phi(t) \geq \frac{e^{\gamma t/(\alpha-1)}}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{1/(\alpha-1)}}. \end{aligned}$$

Из приведенных рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$ и выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad (2.18)$$

$$\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0), \quad (2.19)$$

причем $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(0) > 0$. Тогда время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство

$$\begin{aligned} T &\leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1}, \\ A^2 &\equiv (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right], \end{aligned}$$

причем

$$\Phi(t) \geq \frac{e^{\gamma t/(\alpha-1)}}{(\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{1/(\alpha-1)}}.$$

§ 3. Постановка задачи

Рассматриваемая задача в классической постановке имеет следующий вид:

$$\mathbb{A} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{H}'_f(u) = \mathbb{F}'_f(u), \quad (3.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (3.2)$$

где через $\mathbb{H}'_f$ и $\mathbb{F}'_f$ обозначены производные Фреше соответствующих функционалов. Чтобы сформулировать условия для операторных коэффициентов, введем некоторые обозначения.

Рассмотрим банаховы пространства $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{V}_j$, $\mathbb{W}_i$ при $j = \overline{1, n}$ и $i = 1, 2$ с нормами $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_j$, $|\cdot|_i$ соответственно. Пусть $\mathbb{V}^*$, $\mathbb{V}_0^*$, $\mathbb{V}_j^*$, $\mathbb{W}_i^*$ – пространства, сопряженные $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{V}_j$, $\mathbb{W}_i$ относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$, $(\cdot, \cdot)_i$ с нормами $\|\cdot\|^*$, $\|\cdot\|_0^*$, $\|\cdot\|_j^*$, $|\cdot|_i^*$ соответственно.

Предположим, что банаховы пространства $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_j$, $\mathbb{W}_i$ при $j = \overline{1, n}$ и $i = 1, 2$ являются рефлексивными и сепарабельными. Предположим также, что

$$\mathbb{A}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*, \quad \mathbb{A}_0: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*, \quad \mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*.$$

Кроме того, предположим, что

$$\mathbb{H}(u): \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{F}(u): \mathbb{W}_2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Пусть банаховы пространства $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{V}$ являются равномерно выпуклыми (это понадобится в § 6).

Теперь сформулируем условия для операторных коэффициентов рассматриваемого уравнения (3.1).

Условия $\mathbb{A}$. Выполнено следующее:

- (i) оператор $\mathbb{A}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем имеет место неравенство $\|\mathbb{A}u\|^* \leq M\|u\|$ для всех $u \in \mathbb{V}$;
- (ii) оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным, причем имеет место неравенство $\langle \mathbb{A}u, u \rangle \geq m\|u\|^2$ для всех $u \in \mathbb{V}$;
- (iii) величина $\langle \mathbb{A}u, u \rangle^{1/2}$ является нормой на $\mathbb{V}$, порождающей рассматриваемую топологию банахова пространства $\mathbb{V}$.

Условия $\mathbb{A}_0$. Выполнено следующее:

- (i) оператор $\mathbb{A}_0: \mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0^*$ является линейным, непрерывным, симметричным и неотрицательно определенным, причем для всех $u \in \mathbb{V}_0$ имеет место неравенство $\|\mathbb{A}_0u\|_0^* \leq M_0\|u\|_0$;
- (ii)* оператор $\mathbb{A}_0$ является коэрцитивным, причем для всех $u \in \mathbb{V}_0$ имеет место неравенство $\langle \mathbb{A}_0u, u \rangle_0 \geq m_0\|u\|_0^2$;
- (iii)* величина $\langle \mathbb{A}_0u, u \rangle_0^{1/2}$ является нормой на $\mathbb{V}_0$, порождающей рассматриваемую топологию банахова пространства $\mathbb{V}_0$.

Условия $\mathbb{A}_j$. Выполнено следующее:

- (i) оператор $\mathbb{A}_j: \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*$ является непрерывным;
- (ii) оператор $\mathbb{A}_j$ дифференцируем по Фреше, причем его производная Фреше $\mathbb{A}'_{jf}(u) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{V}_j; \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*))$ является непрерывным, ограниченным, симметричным, монотонным и неотрицательно определенным оператором при фиксированном $u \in \mathbb{V}_j$ и $\mathbb{A}'_{jf}(0) = \theta$, $\langle \mathbb{A}_j(v), v \rangle_j \geq 0$ при $v \in \mathbb{V}_j$;
- (iii) оператор $\mathbb{A}_j$ является положительно однородным:

$$\mathbb{A}_j(ru) = r^{p_j-1}\mathbb{A}_j(u) \quad \text{при } p_j > 2, \quad r \geq 0, \quad u \in \mathbb{V}_j;$$

(iv) справедливы оценки сверху

$$\|\mathbb{A}_j(u)\|_j^* \leq M_j \|u\|_j^{p_j-1}, \quad \|\mathbb{A}'_{jf}(u)\|_{\mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*} \leq \overline{M}_j \|u\|_j^{p_j-2}, \quad M_j > 0;$$

(v)* справедливы оценки снизу

$$\langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \geq m_j \|u\|_j^{p_j}, \quad m_j > 0;$$

(vi)* величина $\langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j^{1/p_j}$ является нормой на банаховом пространстве $\mathbb{V}_j$, порождающей рассматриваемую топологию в $\mathbb{V}_j$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Первая оценка из условий $\mathbb{A}_j$, (iv) следует из второй. Для доказательства введем в рассмотрение функционал $\mathbb{G}(u) = \langle \mathbb{A}_j(u), y \rangle_j$, где $y \in \mathbb{V}_j$ – произвольный фиксированный элемент с нормой $\|y\|_j = 1$. Тогда функционал $\mathbb{G}(u) = \langle \mathbb{A}_j(u), y \rangle_j$ дифференцируем по Фреше и его производная имеет вид

$$\mathbb{G}'_f(u)h = \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)h, y \rangle_j.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \mathbb{A}_j(u+h), y \rangle_j - \langle \mathbb{A}_j(u), y \rangle_j - \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)h, y \rangle_j|}{\|h\|_j} &= \frac{|\langle \mathbb{A}_j(u+h) - \mathbb{A}_j(u) - \mathbb{A}'_{jf}(u)h, y \rangle_j|}{\|h\|_j} \\ &\leq \frac{\|\mathbb{A}_j(u+h) - \mathbb{A}_j(u) - \mathbb{A}'_{jf}(u)h\|_j^*}{\|h\|_j} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу дифференцируемости по Фреше оператора $\mathbb{A}_j(u)$. Далее, в силу условия $\mathbb{A}_j$, (iii) имеем $\mathbb{A}_j(\theta_{\mathbb{V}_j}) = \theta_{\mathbb{V}_j^*}$, а тогда в силу формулы Лагранжа для дифференцируемых по Фреше функционалов получаем

$$|\langle \mathbb{A}_j(u), y \rangle_j| = |\langle \mathbb{A}'_{jf}(\lambda u)u, y \rangle_j| \leq \overline{M}_j \|\lambda u\|_j^{p_j-2} \|u\|_j \|y\|_j, \quad \lambda \in (0, 1),$$

откуда, взяв точную верхнюю грань по всем $y \in \mathbb{V}_j$, $\|y\|_j = 1$, имеем первую оценку из условий $\mathbb{A}_j$, (iv).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Мы понимаем под симметричностью линейного оператора $\mathbb{D}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^*$ то, что для всех $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место равенство $\langle \mathbb{D}u, v \rangle = \langle \mathbb{D}v, u \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$.

Условия II. Выполнено следующее:

(i) функционал $\mathbb{H}: \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ является неотрицательным дифференцируемым по Фреше, причем соответствующая производная Фреше $\mathbb{H}'_f$ является ограничено липшиц-непрерывной, т. е. имеет место неравенство

$$|\mathbb{H}'_f(u_1) - \mathbb{H}'_f(u_2)|_1^* \leq \mu_1(R) |u_1 - u_2|_1 \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}_1,$$

где $\mu_1 = \mu_1(R)$ – ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента, а $R = \max\{|u_1|_1, |u_2|_1\}$;

(ii) производная Фреше оператора $\mathbb{H}$ удовлетворяет оценке сверху

$$|\mathbb{H}'_f(u)|_1^* \leq M_H |u|_1^{p-1} \quad \forall u \in \mathbb{W}_1, \quad p \geq 2;$$

(iii) найдется такая постоянная $\mu > 0$, что для всех $u \in \mathbb{W}_1$ имеет место неравенство $(\mathbb{H}'_f(u), u)_1 \leq \mu \mathbb{H}(u)$;

(iv)* для всех $u \in \mathbb{W}_1$ имеет место неравенство $c_1 |u|_1^p \leq (\mathbb{H}'_f(u), u)_1$.

Условие $\mathbb{F}$. Выполнено следующее:

(i) функционал $\mathbb{F}: \mathbb{W}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемым по Фреше, причем соответствующая производная Фреше $\mathbb{F}'_f$ является ограничено липшиц-непрерывной, т. е. имеет место неравенство

$$|\mathbb{F}'_f(u_1) - \mathbb{F}'_f(u_2)|_2^* \leq \mu_2(R) |u_1 - u_2|_2 \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}_2,$$

где $\mu_2 = \mu_2(R)$ – ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента, а $R = \max\{|u_1|_2, |u_2|_2\}$;

(ii) производная Фреше оператора $\mathbb{F}$ удовлетворяет оценке сверху

$$|\mathbb{F}'_f(u)|_2^* \leq M_F |u|_2^{q+1} \quad \forall u \in \mathbb{W}_2, \quad q > 0;$$

(iii) найдется такая постоянная $\theta > 2$, что для всех $u \in \mathbb{W}_2$ имеет место неравенство $\theta \mathbb{F}(u) \leq (\mathbb{F}'_f(u), u)_2$.

В условиях $\mathbb{A}$ – $\mathbb{F}$ звездочкой (например, (iii)*) отмечены те свойства операторов, выполнимость которых требуется только в теоремах о слабой обобщенной разрешимости. Не отмеченные звездочкой свойства требуются для сильной обобщенной разрешимости.

Теперь мы должны сформулировать некоторые условия, налагаемые на банаховы пространства $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{V}_j$, $\mathbb{W}_i$ при $j = \overline{1, n}$ и $i = 1, 2$.

Условие $\mathbb{L}$. Существует такое гильбертово пространство $\mathbb{L}$, отождествленное со своим сопряженным, что имеют место непрерывные вложения

$$\mathbb{V} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{V}^*, \quad \mathbb{V}_j \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{V}_j^*, \quad \mathbb{W}_i \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{W}_i^*, \quad j = \overline{0, n}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть

$$\mathbb{W} = \mathbb{V} \cap \left(\bigcap \mathbb{V}_j \right) \cap \left(\bigcap \mathbb{W}_i \right)$$

– рефлексивное и сепарабельное банахово пространство, обладающее свойством плотности вложений

$$\mathbb{W} \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{V} \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{V}^* \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}^*, \quad \mathbb{W} \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{V}_j \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{V}_j^* \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}^*, \quad \mathbb{W} \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}_i \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}_i^* \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}^*$$

для всех $i = 1, 2$ и $j = \overline{0, n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Сильным обобщенным решением задачи (3.1), (3.2) назовем функцию

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{W}), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{W}, \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{W}, \quad (3.3)$$

при всех $t \in (0, T)$ удовлетворяющую равенству

$$\langle \langle D(u), w \rangle \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathbb{W}, \quad (3.4)$$

где

$$D(u) = \mathbb{A} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{H}'_f(u) - \mathbb{F}'_f(u)$$

и через $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Слабым обобщенным решением задачи (3.1), (3.2) назовем функцию

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1), \quad u' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}) \cap \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0), \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u) \in \mathbb{L}^{p'_j}(0, T; \mathbb{V}_j^*), \quad j = \overline{1, n}, \quad \frac{d}{dt} \mathbb{A}_0(u) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0^*), \quad (3.6)$$

удовлетворяющую следующему равенству:

$$\left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A} u', w \rangle + \sum_{j=0}^n \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u), w \right\rangle_j + (\mathbb{H}'_f(u), w)_1 - (\mathbb{F}'_f(u), w)_2, \psi(t) \right\rangle \right\rangle_{\mathcal{D}} = 0 \quad (3.7)$$

для всех $w \in \mathbb{W}_1$ и всех $\psi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, где через $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathcal{D}}$ обозначены скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(0, T)$ и соответствующим пространством распределений $\mathcal{D}'(0, T)$, причем имеют место начальные условия $u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_1$, $u'(0) = u_1 \in \mathbb{V}$.

§ 4. Вспомогательные результаты

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые необходимые в основном тексте результаты, которые мы доказали в нужном для нас общем виде.

ЛЕММА 4.1. Если оператор $\mathbb{A}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$ дифференцируем по Фреше и имеет симметричную производную Фреше

$$\mathbb{A}'_u(u): \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X}^*)$$

и $\mathbb{A}(su) = s^{p-1} \mathbb{A}(u)$ для всех $s \geq 0$ и некоторого $p \geq 2$, где $\mathbb{X}$ – пространство Банаха с сопряженным $\mathbb{X}^*$ относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то функционал

$$\psi(u) \equiv \langle \mathbb{A}(u), u \rangle: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

является непрерывно дифференцируемым по Фреше и его производная Фреше есть

$$\psi'_f(u) = p \mathbb{A}(u) \quad \forall u \in \mathbb{X}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем операторное равенство

$$\mathbb{A}'_u(u)u = (p-1)\mathbb{A}(u).$$

Имеем, с одной стороны (в силу условия $\mathbb{A}_j$, (iii)),

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}(su) = \frac{d}{ds}(s^{p-1}\mathbb{A}(u)) = (p-1)s^{p-2}\mathbb{A}(u) = \frac{p-1}{s}s^{p-1}\mathbb{A}(u) = \frac{p-1}{s}\mathbb{A}(su), \quad (4.1)$$

а с другой, в силу цепного правила для производных Фреше, имеем

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}(su) = \mathbb{A}'_u(su)u. \quad (4.2)$$

Объединяя равенства (4.1) и (4.2), имеем соотношение

$$\frac{p-1}{s}\mathbb{A}(su) = \mathbb{A}'_u(su)u,$$

положив в котором $s = 1$, получаем

$$(p-1)\mathbb{A}(u) = \mathbb{A}'_u(u)u \quad \forall u \in \mathbb{X}.$$

Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \psi(u+h) - \psi(u) &= \langle \mathbb{A}(u+h), u+h \rangle - \langle \mathbb{A}(u), u \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}(u) + \mathbb{A}'_u(u)h + \omega(u, h), u+h \rangle - \langle \mathbb{A}(u), u \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}(u), h \rangle + \langle \mathbb{A}'_u(u)h + \omega(u, h), u+h \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}(u), h \rangle + \langle \mathbb{A}'_u(u)h, u \rangle + \langle \mathbb{A}'_u(u)h, h \rangle + \langle \omega(u, h), u+h \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}(u) + \mathbb{A}'_u(u)u, h \rangle + \bar{\omega}(u, h), \end{aligned}$$

где $\bar{\omega}(u, h) = \langle \mathbb{A}'_u(u)h, h \rangle + \langle \omega(u, h), u+h \rangle$. Кроме того,

$$\begin{aligned} |\bar{\omega}(u, h)| &\leq \|\mathbb{A}'_u(u)h\|_* \|h\| + \|\omega(u, h)\|_* (\|u\| + \|h\|) \\ &\leq c_1 \|h\|^2 + \|\omega(u, h)\|_* (\|u\| + \|h\|). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\bar{\omega}(u, h)|}{\|h\|} = 0.$$

Следовательно, производная Фреше функционала $\psi(u)$ есть

$$\psi'_f(u) = \mathbb{A}(u) + \mathbb{A}'_u(u)u = \mathbb{A}(u) + (p-1)\mathbb{A}(u) = p\mathbb{A}(u).$$

Отсюда вытекает, что функционал $\psi(u)$ является непрерывно дифференцируемым по Фреше.

ЛЕММА 4.2. Пусть выполнены все условия леммы 4.1, и предположим, что $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{X})$ для некоторого $T > 0$. Тогда

$$\psi(u)(t) \equiv \langle \mathbb{A}(u), u \rangle \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из результата леммы 4.1 и цепного правила для производных Фреше следует, что выполнены равенства

$$\frac{d\psi}{dt} = \langle \psi'_f(u), u' \rangle = p \langle \mathbb{A}(u), u' \rangle.$$

Рассмотрим функцию $f(t) \equiv \langle \mathbb{A}(u), u' \rangle$ и докажем, что $f(t) \in \mathbb{C}([0, T])$. Действительно, пусть $t \in [0, T]$ фиксировано и $t + s \in [0, T]$. Тогда верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} f(t+s) - f(s) &= \langle \mathbb{A}(u(t+s)), u'(t+s) \rangle - \langle \mathbb{A}(u(t)), u'(t) \rangle \\ &= \langle \mathbb{A}(u(t)) + \mathbb{A}'_u(u(t))[u(t+s) - u(t)] + \omega(t, s), u'(t+s) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbb{A}(u(t)), u'(t) \rangle = \langle \mathbb{A}(u(t)), u'(t+s) - u'(t) \rangle \\ &\quad + \langle \mathbb{A}'_u(u(t))[u(t+s) - u(t)], u'(t+s) \rangle + \langle \omega(t, s), u'(t+s) \rangle. \end{aligned}$$

Из этой цепочки равенств приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |f(t+s) - f(t)| &\leq \| \mathbb{A}(u(t)) \|_* \| u'(t+s) - u'(t) \| \\ &\quad + \| \mathbb{A}'_u(u(t)) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{X}; \mathbb{X}^*)} \| u(t+s) - u(t) \| \| u'(t+s) \| + \| \omega(t, s) \|_* \| u'(t+s) \|. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\| u'(t+s) \| \leq \| u'(t) \| + \| u'(t+s) - u'(t) \| \leq c_1,$$

где $c_1 > 0$ не зависит от $t, s \in [0, T]$. Таким образом, получаем оценку

$$|f(t+s) - f(t)| \leq c_2 \| u'(t+s) - u'(t) \| + c_3 \| u(t+s) - u(t) \| + c_4 \| \omega(t, s) \|_*,$$

где $c_2, c_3, c_4 \in (0, +\infty)$ зависят только от $t \in [0, T]$. Кроме того,

$$\lim_{\| u(t+s) - u(t) \| \rightarrow 0} \| \omega(t, s) \|_* = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(t+s) = f(t).$$

Таким образом, $f(t) \in \mathbb{C}([0, T])$.

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнены все условия леммы 4.1, и предположим, что $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{X})$ для некоторого $T > 0$. Тогда

$$\langle (\mathbb{A}(u))', u \rangle = \frac{p-1}{p} \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}(u), u \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу леммы 4.1 имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}(u), u \rangle = p \langle \mathbb{A}(u), u' \rangle. \quad (4.3)$$

Кроме того, имеем

$$p \langle \mathbb{A}(u), u' \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}(u), u \rangle = \langle (\mathbb{A}(u))', u \rangle + \langle \mathbb{A}(u), u' \rangle,$$

откуда

$$(p-1) \langle \mathbb{A}(u), u' \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}(u), u \rangle = \langle (\mathbb{A}(u))', u \rangle. \quad (4.4)$$

Сравнивая формулы (4.3) и (4.4), получаем требуемый результат.

§ 5. Разрушение решений

Предположим, что найдется такое $T > 0$, для которого сильное обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) существует на $[0, T]$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u, u \rangle + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \right) ds \\ + \frac{1}{2p_0} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \frac{1}{p_0} \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} J(t) = \langle \mathbb{A}u', u' \rangle + \int_0^t \left(\langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (\mathbb{A}_j(u))', u' \rangle_j \right) ds \\ + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $p_0 = \max_{j=\overline{1, n}} p_j$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 5.1. *Имеем*

$$(\Phi')^2 \leq p_0 \Phi J \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо следующее равенство:

$$\Phi' = \langle \mathbb{A}u, u' \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j, \quad (5.4)$$

а в силу обобщенного неравенства Шварца имеет место неравенство

$$|\langle \mathbb{A}u, u' \rangle| \leq \langle \mathbb{A}u, u \rangle^{1/2} \langle \mathbb{A}u', u' \rangle^{1/2}. \quad (5.5)$$

Наконец, имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j &= \frac{p_j - 1}{p_j} \int_0^t \frac{d}{ds} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j ds + \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \\ &= \int_0^t \langle (\mathbb{A}_j(u))', u \rangle_j ds + \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \\ &= \int_0^t \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u \rangle_j ds + \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где мы воспользовались результатом леммы 4.3. Теперь снова воспользуемся неравенством Шварца и получим следующее неравенство:

$$|\langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u \rangle_j| \leq \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u' \rangle_j^{1/2} \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u, u \rangle_j^{1/2}. \quad (5.7)$$

Заметим, что $\mathbb{A}'_{jf}(u)u = (p_j - 1)\mathbb{A}_j(u)$, поэтому из (5.7) выводим неравенство

$$|\langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u \rangle_j| \leq \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u' \rangle_j^{1/2} (p_j - 1)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j^{1/2}. \quad (5.8)$$

Таким образом, из (5.6) и (5.8) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
 \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j &\leq \int_0^t \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u' \rangle_j^{1/2} (p_j - 1)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j^{1/2} ds \\
 &\quad + \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \\
 &\leq \left(\int_0^t \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u' \rangle_j ds \right)^{1/2} (p_j - 1)^{1/2} \left(\int_0^t \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j ds \right)^{1/2} \\
 &\quad + \left(\frac{p_j - 1}{p_j} \right)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j^{1/2} \left(\frac{p_j - 1}{p_j} \right)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j^{1/2}. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Итак, из соотношений (5.4), (5.5) и (5.9) получаем

$$\begin{aligned}
 (\Phi')^2 &\leq \left(\langle \mathbb{A}u, u \rangle^{1/2} \langle \mathbb{A}u', u' \rangle^{1/2} \right. \\
 &\quad + \left(\int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 ds \right)^{1/2} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \langle \mathbb{A}'_{jf}(u)u', u' \rangle_j ds \right)^{1/2} (p_j - 1)^{1/2} \left(\int_0^t \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j ds \right)^{1/2} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0^{1/2} \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_j - 1}{p_j} \right)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j^{1/2} \left(\frac{p_j - 1}{p_j} \right)^{1/2} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j^{1/2} \right)^2. \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Теперь заметим, что имеет место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k^2 \right)$$

для всех $a_k, b_k \geq 0$ при $k = \overline{1, m}$. Поэтому при надлежащем выборе a_k и b_k мы получим, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
 (\Phi')^2 &\leq \left(\langle \mathbb{A}u, u \rangle + \int_0^t \left[\langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^n (p_j - 1) \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \right] ds \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \Big) \\
 &\quad \times \left(\langle \mathbb{A}u', u' \rangle + \int_0^t \left[\langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (\mathbb{A}_j(u))', u' \rangle_j \right] ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \right) \leq p_0 \Phi(t) J(t), \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

где мы воспользовались введенными обозначениями (5.1) и (5.2). Лемма доказана.

Приступим к выводу первого и второго энергетических равенств. С этой целью положим сначала $w = u$ в равенстве (3.4) и после интегрирования его по частям получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbb{A}u, u \rangle - \langle \mathbb{A}u', u' \rangle \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \right) + (\mathbb{H}'_f(u), u)_1 = (\mathbb{F}'_f(u), u)_2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Отсюда в силу определения функционала $\Phi(t)$ мы получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + (\mathbb{H}'_f(u), u)_1 = \langle \mathbb{A}u', u' \rangle + (\mathbb{F}'_f(u), u)_2. \quad (5.13)$$

Теперь положим $w = u'$ в равенстве (3.4) и после интегрирования его по частям получим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u', u' \rangle + \int_0^t \left(\langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (\mathbb{A}_j(u))', u' \rangle_j \right) ds + \mathbb{H}(u) \right] = \frac{d}{dt} \mathbb{F}(u). \quad (5.14)$$

Интегрируя равенство (5.14) по времени, получим, что имеет место равенство

$$\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u', u' \rangle + \int_0^t \left(\langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (\mathbb{A}_j(u))', u' \rangle_j \right) ds - \overline{E}(0) + \mathbb{H}(u) = \mathbb{F}(u), \quad (5.15)$$

где

$$\overline{E}(0) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u_1, u_1 \rangle + \mathbb{H}(u_0) - \mathbb{F}(u_0).$$

В силу условия $\mathbb{F}$, (iii) имеет место неравенство $\theta \mathbb{F}(u) \leq (\mathbb{F}'_f(u), u)_2$. Поэтому из (5.13) и (5.15) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + (\mathbb{H}'_f(u), u)_1 \geq \langle \mathbb{A}u', u' \rangle + \frac{\theta}{2} \langle \mathbb{A}u', u' \rangle \\ & + \theta \int_0^t \left(\langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (\mathbb{A}_j(u))', u' \rangle_j \right) ds - \theta \overline{E}(0) + \theta \mathbb{H}(u), \end{aligned} \quad (5.16)$$

откуда с учетом введенного обозначения (5.2) получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \theta \overline{E}(0) \geq \theta \mathbb{H}(u) - (\mathbb{H}'_f(u), u)_1 + \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) J \\ & - \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Теперь заметим, что в силу условий $\mathbb{H}$, (i), (iii) имеют место неравенства

$$(\mathbb{H}'_f(u), u)_1 \leq \mu \mathbb{H}(u), \quad \mathbb{H}(u) \geq 0.$$

Поэтому из неравенства (5.17) при условии $\theta \geq \mu$ получим

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + E(0) \geq \left(1 + \frac{\theta}{2}\right)J, \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned} E(0) = & \frac{\theta}{2} \langle \mathbb{A}u_1, u_1 \rangle + \theta \mathbb{H}(u_0) \\ & + \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \right) - \theta \mathbb{F}(u_0). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Итак, из неравенств (5.3) и (5.18) мы получим следующее неравенство:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi \geq 0, \quad (5.20)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{p_0} \left(1 + \frac{\theta}{2}\right), \quad \beta = E(0).$$

Таким образом, в силу теоремы 2.1 мы приходим к следующему результату относительно разрушения решения.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &> (\delta\Phi(0))^{1/2}, \quad \Phi(0) > 0, \quad \theta > 2(p_0 - 1), \quad \theta \geq \mu, \quad (5.21) \\ \delta = \begin{cases} \frac{2E(0)}{2\alpha - 1} & \text{при } E(0) > 0, \\ 0 & \text{при } E(0) \leq 0, \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{p_0} \left(1 + \frac{\theta}{2}\right), \quad p_0 = \max_{j=1, n} p_j. \end{aligned}$$

Тогда время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство

$$\begin{aligned} T &\leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1}, \\ A^2 &\equiv (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) [(\Phi'(0))^2 - \delta\Phi(0)], \end{aligned}$$

причем

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{(\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{1/(\alpha-1)}},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u, u \rangle + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \right) ds \\ & + \frac{1}{2p_0} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \frac{1}{p_0} \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \\ \Phi(0) = & \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u_0, u_0 \rangle + \frac{1}{2p_0} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \frac{1}{p_0} \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &= \langle \mathbb{A}u_0, u_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \\ E(0) &= \frac{\theta}{2} \langle \mathbb{A}u_1, u_1 \rangle + \theta \mathbb{H}(u_0) \\ &\quad + \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \right) - \theta \mathbb{F}(u_0).\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. В условиях теоремы 5.2 нет ограничений, налагаемых на величину $E(0) > 0$, что является существенным, поскольку, как правило, вместе с условием положительности начальной энергии требуется выполнимость еще двух условий. Поэтому наша задача – доказать совместность полученных условий теоремы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *Условия теоремы 5.2 совместны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что в проверке совместности нуждается только случай $E(0) > 0$. В силу условий, налагаемых на операторы $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_j$, $j = \overline{1, n}$, имеем $\Phi'(0) > 0$ при любых (u_0, u_1) , если только $u_0 \neq 0$. Следовательно, условие (5.21) будет выполнено, если $u_0 \neq 0$ и

$$0 < \frac{\delta\Phi(0)}{(\Phi'(0))^2} < 1. \quad (5.22)$$

Очевидно, для доказательства совместности достаточно рассмотреть случай $n = 1$. В этом случае $p_0 = p_1$. Дальнейшие рассуждения приведем в виде следующей схемы.

- 1) Зафиксируем операторы $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_1$.
- 2) Положим $H(u) = |u|_1^p$, $p = \mu \geq 2$.
- 3) Выберем любое $\theta \geq \mu = p$, $\theta > 2(p_1 - 1)$. Заметим, что тогда $\theta > p_1 + p_1 - 2 > p_1$, поскольку $p_1 > 2$.
- 4) Положим $F(u) = |u|_2^r$, где $r > \theta$. Тогда в силу пп. 1)–3), во-первых, выполнено условие $\mathbb{F}$, (iii), во-вторых, $r > p = \mu$, и поэтому порядок роста функционала $\mathbb{F}(u)$ выше порядка роста функционала $\mathbb{H}(u)$, а в-третьих, $r > p_1$ (это будет использовано в дальнейшем).
- 5) Зафиксируем произвольные u_0 , u_1 , отличные от нуля. Введем обозначения

$$\Psi(R) = \Phi[Ru_0, Ru_1](0), \quad \Psi_1(R) = \Phi'[Ru_0, Ru_1](0), \quad \delta(R) = \delta[Ru_0, Ru_1].$$

Рассмотрим следующую функцию от R :

$$\Gamma(R) = \frac{\delta(R)\Psi(R)}{\Psi_1^2(R)}.$$

Если записать ее в явном виде, затем вынести из каждого множителя соответствующую степень числа R , пользуясь линейностью линейных операторов,

условием $\mathbb{A}_1$, (iii) и явным видом операторов $\mathbb{F}(u)$ и $\mathbb{H}(u)$, и сократить на R^2 , получим для $\Gamma(R)$ следующее явное выражение:

$$\Gamma(R) = \frac{\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}u_0, u_0 \rangle + \frac{1}{2p_1}\langle \mathbb{A}_0u_0, u_0 \rangle + R^{p_1-2}\frac{p_1-1}{p_1^2}\langle \mathbb{A}_1(u_0), u_0 \rangle_1}{\frac{1}{p_1}(2+\theta) - 1} \times \frac{2E(0)}{\left[\langle \mathbb{A}u_0, u_1 \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0u_0, u_0 \rangle_0 + R^{p_1-2}\frac{p_1-1}{p_1}\langle \mathbb{A}_1(u_0), u_0 \rangle_1\right]^2}, \quad (5.23)$$

где

$$2E(0) = \theta\langle \mathbb{A}u_1, u_1 \rangle + (2+\theta)\left(\frac{1}{2}\langle \mathbb{A}_0u_0, u_0 \rangle_0 + R^{p_1-2}\frac{p_1-1}{p_1}\langle \mathbb{A}_1u_0, u_0 \rangle_1\right) + 2\theta(R^{p-2}\mathbb{H}(u_0) - R^{r-2}\mathbb{F}(u_0)). \quad (5.24)$$

Числитель $2E(0)$ второй дроби в равенстве (5.23) положителен в силу того, что $E(0) > 0$. Отметим, что первый числитель и знаменатели в (5.23) положительны в силу условий на операторы. Нам требуется, чтобы выполнялось условие

$$0 < \Gamma(R) < 1. \quad (5.25)$$

Легко видеть, что при $R \rightarrow +0$ функция $\Gamma(R)$ стремится к положительному числу Γ_0 , определяемому лишь линейными операторами (напоминаем, что u_0, u_1 зафиксированы). Также ясно, что при $R \rightarrow +\infty$ ее предел равен $-\infty$, поскольку самый высокий порядок роста имеет отрицательное слагаемое $-2\theta R^{r-2}\mathbb{F}(u_0)$ в (5.24). Поскольку на промежутке $R \in (0, +\infty)$ знаменатель нигде не обращается в нуль, функция $\Gamma(R)$ непрерывна, следовательно, она принимает все значения из промежутка $(-\infty, \Gamma_0)$, в частности сколь угодно малые положительные значения, что и обеспечивает выполнение (5.25). Условие $E(0) > 0$ при этом также выполнено, иначе мы имели бы $\Gamma(R) < 0$. Утверждение доказано.

§ 6. Локальная разрешимость в смысле слабого обобщенного решения

Доказательство локальной разрешимости задачи Коши (3.1), (3.2) мы проведем в несколько шагов при помощи метода Галёркина в сочетании с методами компактности и монотонности.

Шаг 1. Постановка задач для галёркинских приближений. Пусть $\{w_k\}$ – базис Галёркина в сепарабельном гильбертовом пространстве $\overline{\mathbb{W}} \overset{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}$. Введем следующее обозначение:

$$u_m = \sum_{l=1}^m c_{ml}(t)w_l, \quad c_{ml} \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_m]), \quad T_m > 0.$$

Функцию u_m назовем *галёркинским приближением* к точному решению u задачи (3.3), (3.4), если она является классическим решением следующей системы

обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n_1} \langle \langle f_l, w_k \rangle \rangle_{l\overline{W}} &= 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad n_1 = 4 + n, \\ f_1 &= \frac{d}{dt} \mathbb{A} \frac{du_m}{dt}, \quad f_2 = \frac{d}{dt} \mathbb{A}_0 u_m, \\ f_j &= \frac{d}{dt} \mathbb{A}_{j-2}(u_m), \quad j = \overline{3, 2+n}, \quad f_{3+n} = \mathbb{H}'_f(u_m), \quad f_{4+n} = -\mathbb{F}'_f(u_m), \end{aligned} \quad (6.1)$$

а выбор различных скобок двойственности $\langle \langle f_l, w_k \rangle \rangle_{l\overline{W}}$ между гильбертовыми пространствами $\overline{W}$ и $\overline{W}^*$ обусловлен равенствами (в силу соответствующих плотных вложений $\overline{W}$ в пространства $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_0$, $\mathbb{V}_j$, $\mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_2$)

$$\begin{aligned} \langle \langle f_1, w_k \rangle \rangle_{1\overline{W}} &= \langle f_1, w_k \rangle, & \langle \langle f_2, w_k \rangle \rangle_{2\overline{W}} &= \langle f_2, w_k \rangle_0, \\ \langle \langle f_{3+j}, w_k \rangle \rangle_{(3+j)\overline{W}} &= \langle f_{3+j}, w_k \rangle_j, & \langle \langle f_{4+n}, w_k \rangle \rangle_{(4+n)\overline{W}} &= (f_{4+n}, w_k)_1, \\ \langle \langle f_{5+n}, w_k \rangle \rangle_{(5+n)\overline{W}} &= (f_{5+n}, w_k)_2. \end{aligned}$$

Добавим также начальные условия

$$u_{m0} = u_m(0) = \sum_{l=1}^m c_{ml}(0)w_l \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_1, \quad (6.2)$$

$$u_{m1} = u'_m(0) = \sum_{l=1}^m c'_{ml}(0)w_l \rightarrow u_1 \quad \text{сильно в } \mathbb{V}. \quad (6.3)$$

Шаг 2. Локальная разрешимость для галёркинских приближений. Перепишем систему галёркинских приближений (6.1)–(6.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \langle \mathbb{A}w_l, w_k \rangle \frac{d^2 c_{ml}}{dt^2} + \frac{dc_{ml}}{dt} \left(\sum_{l=1}^m \langle \mathbb{A}_0 w_l, w_k \rangle_0 + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m)w_l, w_k \rangle_j \right) \\ + (\mathbb{H}'_f(u_m), w_k)_1 - (\mathbb{F}'_f(u_m), w_k)_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

при $k = \overline{1, m}$. Рассмотрим квадратичную форму, порожденную матрицей с элементами

$$a_{kl} = \langle \mathbb{A}w_l, w_k \rangle.$$

В силу условий $\mathbb{A}$, (ii) имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\sum_{k,j=1}^m a_{kj} \xi^k \xi^j = \langle \mathbb{A}\xi, \xi \rangle \geq m \|\xi\|^2, \quad \xi = \sum_{k=1}^m \xi^k w_k.$$

Отсюда с учетом вложения $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ приходим к выводу о том, что в силу критерия Сильвестра матрица (a_{kj}) квадратичной формы является невырожденной. Поэтому матрица при второй производной по времени в равенстве (6.4) является обратимой. В силу введенных ранее условий имеем

$$\mathbb{A}'_{jf}(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{V}_j; \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*)), \quad \mathbb{H}'_f(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{W}_1; \mathbb{W}_1^*), \quad \mathbb{F}'_f(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{W}_2; \mathbb{W}_2^*).$$

Поэтому согласно теореме Пеано система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.4), дополненная начальными условиями (6.2) и (6.3), имеет по крайней мере одно классическое решение $c_{ml}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_m])$ при некотором $T_m > 0$. Конечно, величина T_m , вообще говоря, зависит от $m \in \mathbb{N}$. Однако далее, при рассмотрении априорных оценок, мы докажем, что $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$ при некотором $T > 0$, где T не зависит от m .

Шаг 3. Априорные оценки. Для вывода априорных оценок умножим обе части равенства (6.1) на $c'_{mk}(t)$, просуммируем по $k = \overline{1, m}$ и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u'_m, u'_m \rangle + \mathbb{H}(u_m) \right] \\ & + \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j = (\mathbb{F}'_f(u_m), u'_m)_2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Заметим, что в силу условий $\mathbb{A}_j$ имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j \geq 0, \quad j = \overline{0, n}.$$

Интегрируя по времени равенство (6.5), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u'_m, u'_m \rangle + \mathbb{H}(u_m) + \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds \\ & + \sum_{j=1}^n \int_0^t \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j ds = E_m(0) + \int_0^t (\mathbb{F}'_f(u_m), u'_m)_2 ds, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$E_m(0) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u_{1m}, u_{1m} \rangle + \mathbb{H}(u_{m0}).$$

Предположим, что имеет место неравенство

$$|(\mathbb{F}'_f(v), w)_2| \leq c_2 \|w\| |v|_1^{q+1}, \quad (6.7)$$

при этом мы требуем выполнения следующих непрерывных вложений:

$$v, w \in \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{V}. \quad (6.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Приведем пример пространств $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$, $\mathbb{V}$ и оператора $\mathbb{F}$, для которых выполнено неравенство (6.7). Пусть

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), \quad \mathbb{V} = \mathbb{L}^2(\Omega),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ограниченной областью с достаточно гладкой границей, а функционал $\mathbb{F}(u)$ имеет следующий вид:

$$\mathbb{F}(u) = \frac{1}{q+2} \int_{\Omega} |u|^{q+2} dx.$$

Ясно, что

$$(\mathbb{F}'_f(v), w)_2 = \int_{\Omega} |v|^q v w dx.$$

При условии $2q + 2 \leq p^*$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|(\mathbb{F}'_f(v), w)_2| \leq \left(\int_{\Omega} |v|^{2q+2} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |w|^2 dx \right)^{1/2} \leq c_2 \| |\nabla v| \|_{\mathbb{L}^p}^{q+1} \|w\|_{\mathbb{L}^2}.$$

Таким образом, в данном случае имеет место неравенство (6.7).

Следовательно, из (6.6) и (6.7) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u'_m, u'_m \rangle + \mathbb{H}(u_m) + \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j ds \\ \leq E_m(0) + c_2 \int_0^t \|u'_m\| |u_m|_1^{q+1} ds, \end{aligned} \quad (6.9)$$

а в силу условий $\mathbb{A}$ и $\mathbb{H}$ имеют место следующие неравенства:

$$\langle \mathbb{A}u'_m, u'_m \rangle \geq m \|u'_m\|^2, \quad \mathbb{H}(u_m) \geq \frac{c_1}{\mu} |u_m|_1^p.$$

Переобозначив $c_1 := c_1/\mu$, отсюда и из (6.9) мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \|u'_m\|^2 + c_1 |u_m|_1^p + \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j ds \\ \leq E_m(0) + \frac{c_2}{2} \int_0^t [\|u'_m\|^2 + |u_m|_1^{2q+2}] ds. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отсюда стандартным образом при помощи арифметического неравенства Юнга

$$ab \leq \frac{a^{q_1}}{q_1} + \frac{b^{q_2}}{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1,$$

и неравенства Гронуолла–Беллмана–Бихари для двух случаев $p \geq 2q + 2$ и $p < 2q + 2$ приходим к выводу о том, что имеют место следующие априорные оценки:

$$\|u'_m\| \leq c_3(T), \quad |u_m|_1 \leq c_4(T), \quad \int_0^T \|u'_m\|_0^2 dt \leq c_5(T), \quad (6.11)$$

$$\int_0^T \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j dt \leq c_6(T) \quad (6.12)$$

для всех $t \in [0, T]$, где постоянные $c_3, \dots, c_6$ не зависят от $m \in \mathbb{N}$, причем $T = +\infty$ в случае $p \geq 2q + 2$ и $T < +\infty$ в случае $p < 2q + 2$. Отметим, что в силу условий $\mathbb{H}$ имеет место неравенство

$$|\mathbb{H}'_f(v)|_1^* \leq M_H |v|_1^{p-1} \quad \forall v \in \mathbb{W}_1, \quad p \geq 2,$$

из которого в силу априорных оценок (6.11) вытекает еще одна априорная оценка

$$|\mathbb{H}'_f(u_m)|_1^* \leq c_7(T) \quad \forall t \in [0, T], \quad (6.13)$$

причем, как и ранее, в зависимости от различных случаев либо $T = +\infty$, либо $T < +\infty$.

Теперь наша задача – получить априорную оценку второго порядка для последовательности $\{u''_m\}$. С этой целью заметим, что мы пока не уточнили конкретный выбор галёркинского базиса $\{w_j\} \subset \mathbb{W}$. Пусть задача о собственных функциях и собственных значениях

$$\mathbb{A}w_k = \lambda_k w_k$$

имеет счетное множество линейно независимых решений $\{w_k\} \subset \mathbb{V}$. Теперь предположим, что $\{w_k\}$ – ортонормированный базис в $\overline{\mathbb{W}}$. Введем оператор проектирования на линейную оболочку элементов $\{w_k\}_{k=1}^m$ (которую мы обозначим через $\overline{\mathbb{W}}_m$):

$$\mathbb{P}_m z = \sum_{k=1}^m (z, w_k)_{\overline{\mathbb{W}}} w_k.$$

Ясно, что $\mathbb{P}_m w_k = w_k$ при $k = \overline{1, m}$. Легко доказать, что

$$\mathbb{P}_m \mathbb{A}z = \mathbb{A} \mathbb{P}_m z = \mathbb{A}z, \quad z \in \overline{\mathbb{W}}_m.$$

Теперь при помощи проективного оператора $\mathbb{P}_m$ перепишем (6.1) в виде

$$\sum_{l=1}^{n_1} \langle \langle f_l, \mathbb{P}_m z \rangle \rangle_{l\overline{\mathbb{W}}} = 0, \quad z \in \overline{\mathbb{W}},$$

из которого, в свою очередь, получим

$$\sum_{l=1}^{n_1} \langle \langle \mathbb{P}_m^t f_l, z \rangle \rangle_{l\overline{\mathbb{W}}} = 0, \quad z \in \overline{\mathbb{W}},$$

где транспонированный оператор $\mathbb{P}_m^t$ и сопряженный оператор $\mathbb{P}_m^*$ связаны стандартным соотношением

$$\mathbb{P}_m^* = \mathbb{J} \mathbb{P}_m^t \mathbb{J}^{-1},$$

а $\mathbb{J}: \overline{\mathbb{W}}^* \rightarrow \overline{\mathbb{W}}$ – оператор (линейный, непрерывный и обратимый) вложения Рисса–Фреше. Значит, имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{P}_m^t D(u_m) = \vartheta \in \overline{\mathbb{W}}^*.$$

Как и ранее, нетрудно доказать, что

$$\mathbb{P}_m^* \mathbb{A}z = \mathbb{P}_m \mathbb{A}z, \quad z \in \overline{\mathbb{W}}_m.$$

Теперь получим достаточные условия, при которых имеет место равенство

$$\mathbb{P}_m^t \mathbb{A}z = \mathbb{P}_m \mathbb{A}z, \quad z \in \overline{\mathbb{W}}_m.$$

Предположим, что имеет место коммутативность операторов $\mathbb{P}_m$ и $\mathbb{J}$ на пространстве $\overline{\mathbb{W}}_m$:

$$\mathbb{P}_m \mathbb{J} w_k = \mathbb{J} \mathbb{P}_m w_k, \quad k = \overline{1, m}. \quad (6.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Приведем примеры пространств и операторов, для которых выполнено (6.14).

1) Пусть $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k, \quad w_k \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Тогда

$$\mathbb{J} = (-\Delta)^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Ясно, что $\mathbb{J}w_k = \frac{w_k}{\lambda_k}$, $\mathbb{P}_m w_k = w_k$. Поэтому имеет место коммутативность (6.14).

2) Пусть $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, $\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

$$\Delta^2 w_k = \lambda_k w_k, \quad w_k \in \mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Тогда

$$\mathbb{J} = (\Delta)^{-2} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Ясно, что $\mathbb{J}w_k = \frac{w_k}{\lambda_k}$, $\mathbb{P}_m w_k = w_k$. В этом случае также имеет место коммутативность (6.14).

В результате приходим к следующему операторному равенству:

$$\left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A} \frac{du_m}{dt}, z \right\rangle \right\rangle_{1\overline{\mathbb{W}}} = - \sum_{l=2}^{n_1} \langle \mathbb{P}_m^t f_l, z \rangle_{l\overline{\mathbb{W}}}. \quad (6.15)$$

Далее для получения нужной априорной оценки второго порядка достаточно взять супремум по $z \in \overline{\mathbb{W}}$, $\|z\|_{\overline{\mathbb{W}}} = 1$, от обеих частей равенства (6.15). Отметим, что в силу равномерной по $m \in \mathbb{N}$ ограниченности линейного оператора $\mathbb{P}_m$ вытекает равномерная по $m \in \mathbb{N}$ ограниченность транспонированного оператора

$$\mathbb{P}_m^t : \overline{\mathbb{W}}^* \rightarrow \overline{\mathbb{W}}^*.$$

В силу сформулированных условий для операторов и в силу априорных оценок (6.11) имеют место следующие неравенства:

$$\int_0^T (\|\mathbb{A}_0 u'_m\|_0^*)^2 dt \leq M_0^2 \int_0^T \|u'_m\|_0^2 dt \leq c_7(T). \quad (6.16)$$

Теперь заметим, что при условиях $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_j$, $j = \overline{1, n}$, имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}'_{jf}(u_m)u'_m\|_j^* &= \sup_{\|v\|_j=1} |\langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m)u'_m, v \rangle_j| \\ &\leq \sup_{\|v\|_j=1} \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m)u'_m, u'_m \rangle_j^{1/2} \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m)v, v \rangle_j^{1/2} \\ &\leq \overline{M}_j \|u_m\|_j^{p_j/2-1} \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m)u'_m, u'_m \rangle_j^{1/2} \sup_{\|v\|_j=1} \|v\|_j \\ &\leq \overline{M}_j c_j |u_m|_1^{p_j/2-1} \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m)u'_m, u'_m \rangle_j^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

В силу априорных оценок (6.11) и (6.12) из формул (6.17) мы получим априорную оценку

$$\int_0^T (\|\mathbb{A}'_{jf}(u_m)u'_m\|_j^*)^2 dt \leq c_8(T). \quad (6.18)$$

Наконец, имеют место следующие априорные оценки:

$$\|\mathbb{H}'_f(u_m)\|_1^* \leq M_H |u_m|_1^{p-1} \leq c_9(T), \quad (6.19)$$

$$\|\mathbb{F}'_f(u_m)\|_2^* \leq M_F |u_m|_2^{q+1} \leq c_{10} |u_m|_1^{q+1} \leq c_{11}(T), \quad (6.20)$$

поскольку $\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_2$. Таким образом, из уравнения (6.15) с учетом априорных оценок (6.16)–(6.20) вытекает априорная оценка второго порядка

$$\int_0^T \left(\left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}u'_m \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \right)^2 dt \leq c_{12}(T), \quad (6.21)$$

где в зависимости от условий либо $T = +\infty$, либо $T < +\infty$. Теперь предположим, что имеет место неравенство

$$\|\mathbb{A}v\|_{\mathbb{B}} \leq a \langle \mathbb{A}_0 v, v \rangle_0^{1/2}, \quad v \in \mathbb{V}_0. \quad (6.22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Модельным случаем реализации гильбертова пространства $\mathbb{B}$ является гильбертово пространство $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. При этом, например,

$$\mathbb{A} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{A}_0 = -\Delta, \quad \mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

и неравенство (6.22) примет следующий вид:

$$\|v\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq a \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

В силу априорной оценки (6.11) приходим к следующей априорной оценке:

$$\int_0^T \|\mathbb{A}u'_m\|_{\mathbb{B}}^2 dt \leq c_{13}(T). \quad (6.23)$$

Введем банахово пространство

$$\mathbb{Q} \equiv \{v(t) \mid v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{B}), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \overline{\mathbb{W}}^*)\}.$$

В предположении того, что имеет место вполне непрерывное вложение $\mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{V}^* \subset \overline{\mathbb{W}}^*$, из известной теоремы Лионса–Обэна о компактности следует вполне непрерывное вложение $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}^*)$.

Заметим, что в силу априорных оценок (6.21) и (6.23) вытекает, что последовательность $\{\mathbb{A}u'_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{Q}$. Отметим, что в силу ограниченности оператора $\mathbb{A}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$ и априорной оценки (6.11) имеет место следующая априорная оценка:

$$\|\mathbb{A}u'_m\|_* \leq c_{14}(T). \quad (6.24)$$

Шаг 4. Предельный переход. Итак, в силу полученных априорных оценок (6.11)–(6.13), (6.21) и (6.23) мы приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$, что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1), \quad (6.25)$$

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}), \quad (6.26)$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0), \quad (6.27)$$

$$\mathbb{H}'_f(u_m) \xrightarrow{*} \chi(t) \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1^*), \quad (6.28)$$

$$\mathbb{A}u'_m \rightarrow \mathbb{A}u' \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}^*). \quad (6.29)$$

Заметим, что в силу коэрцитивности линейного оператора $\mathbb{A}$ из предельного свойства (6.29) вытекает, что

$$u'_m \rightarrow u' \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}). \quad (6.30)$$

Рассмотрим теперь все подчиненные слагаемому $\mathbb{H}'_f(u_m)$ слагаемые. Сначала рассмотрим $\mathbb{F}'_f(u_m)$. Потребуем выполнения вполне непрерывных и непрерывных вложений $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{V}$. Введем следующее банахово пространство:

$$\mathbb{Q}_1 \equiv \{v(t) \mid v \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_1), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V})\}, \quad r > 1.$$

В силу теоремы Лионса–Обэна имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{Q}_1 \hookrightarrow \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_2).$$

Из априорных оценок (6.11) вытекает, что последовательность $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{Q}_1$. Следовательно, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеет место следующее предельное свойство:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_2) \text{ для любого фиксированного } r > 1. \quad (6.31)$$

В силу ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{F}'_f(v)$ приходим к следующему предельному равенству:

$$\mathbb{F}'_f(u_m) \rightarrow \mathbb{F}'_f(u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_2^*), \quad r > 1. \quad (6.32)$$

Рассмотрим теперь слагаемые $\mathbb{A}_0 u'_m$, $\mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m$. С этой целью потребуем, чтобы имели место следующие вполне непрерывные и непрерывные вложения:

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}_j \subset \mathbb{V}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Как и ранее, в силу теоремы о компактности Лионса–Обэна имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{Q}_1 \hookrightarrow \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{V}_j), \quad j = \overline{0, n}, \quad r > 1. \quad (6.33)$$

Стало быть, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеет место следующее предельное свойство:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{V}_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (6.34)$$

В силу свойств операторов $\mathbb{A}_j$ при $j = \overline{1, n}$ имеют место свойства

$$\mathbb{A}'_{jf}(u_m) \rightarrow \mathbb{A}'_{jf}(u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^r(0, T; \mathcal{L}(\mathbb{V}_j, \mathbb{V}_j^*)). \quad (6.35)$$

Теперь заметим, что из свойств операторов $\mathbb{A}_j$ вытекает, что

$$\mathbb{A}_j(u_m) \rightarrow \mathbb{A}_j(u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{V}_j^*), \quad r > 1.$$

Отсюда, с одной стороны, следует, что

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u) \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{V}_j^*), \quad (6.36)$$

с другой – в силу априорной оценки (6.18) вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \rightharpoonup \varphi(t) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_j^*), \quad j = \overline{0, n}. \quad (6.37)$$

Сравнивая (6.36) и (6.37), в силу отделимости *-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(0, T; \mathbb{V}_j^*)$ приходим к выводу о том, что

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \rightharpoonup \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_j^*), \quad j = \overline{0, n}. \quad (6.38)$$

Рассматривая обе части равенства (6.1) как элементы $\mathcal{D}'(0, T)$, подействуем этими элементами на произвольную функцию $\psi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}u'_m, w_k \rangle + \sum_{j=0}^n \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m), w_k \right\rangle_j \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\mathbb{H}'_f(u_m), w_k)_1 - (\mathbb{F}'_f(u_m), w_k)_2, \psi(t) \right\rangle \right\rangle_{\mathcal{D}} = 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\mathcal{D}}$ – скобки двойственности между $\mathcal{D}(0, T)$ и $\mathcal{D}'(0, T)$. Теперь с помощью полученных предельных свойств перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в равенстве (6.39) и получим равенство

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}u', w \rangle + \sum_{j=0}^n \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u), w \right\rangle_j \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\chi(t), w)_1 - (\mathbb{F}'_f(u), w)_2, \psi(t) \right\rangle \right\rangle_{\mathcal{D}} = 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

для всех $w \in \mathbb{W}_1$ и всех $\psi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, и наша задача состоит в том, чтобы доказать, что на самом деле $\chi(t) = \mathbb{H}'_f(u)$.

Шаг 5. Метод монотонности. Воспользуемся методом монотонности. Потребуем выполнимости условия

$$(\mathbb{H}'_f(v_1) - \mathbb{H}'_f(v_2), v_1 - v_2)_1 \geq 0 \quad (6.41)$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{W}_1$. Следовательно, для всех $v \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_1)$ имеет место неравенство

$$0 \leq X_m = \int_0^T (\mathbb{H}'_f(u_m) - \mathbb{H}'_f(v), u_m - v)_1 dt. \quad (6.42)$$

Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\mathbb{H}'_f(u_m), u_m)_1 dt &= \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u_m), u_m)_2 dt \\ &- \int_0^T \langle \mathbb{A}u''_m, u_m \rangle dt + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j \\ &- \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{mT}, u_{mT} \rangle_0 - \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{mT}), u_{mT} \rangle_j, \end{aligned} \quad (6.43)$$

где $u_{mT} = u_m(T)$. Заметим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle \mathbb{A}u''_m, u_m \rangle dt &= - \int_0^T \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}u'_m, u_m \rangle dt + \int_0^T \langle \mathbb{A}u'_m, u'_m \rangle dt \\ &= \langle \mathbb{A}u_{m0}, u_{m1} \rangle - \langle \mathbb{A}u_{mT}, u'_{mT} \rangle + \int_0^T \langle \mathbb{A}u'_m, u'_m \rangle dt. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Теперь заметим, что по доказанному последовательность $\{u_m(T)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в $\mathbb{W}_1$, а последовательность $\{u'_m(T)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в $\mathbb{V}$. Так как имеет место вполне непрерывное вложение $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}$, существует такая подпоследовательность $\{u_m\}$, что

$$u_m(T) \rightarrow \xi_1 \quad \text{сильно в } \mathbb{V}, \quad (6.45)$$

$$u'_m(T) \rightharpoonup \xi_2 \quad \text{слабо в } \mathbb{V}. \quad (6.46)$$

Поскольку по доказанному

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1), \quad u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0), \quad \frac{d}{dt} \mathbb{A}u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \overline{\mathbb{W}}^*),$$

после возможного изменения функции $u(t)$ на подмножестве нулевой меры Лебега из множества $[0, T]$ имеем

$$u(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{V}_0), \quad \mathbb{A}u'(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \overline{\mathbb{W}}^*).$$

Поэтому $u(0)$, $u(T)$, $\mathbb{A}u'(0)$ и $\mathbb{A}u'(T)$ имеют смысл. Отметим, что по доказанному выше

$$u'_m \rightarrow u' \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}),$$

а стало быть, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеем

$$u'_m(t) \rightarrow u'(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{V} \text{ для почти всех } t \in [0, T],$$

поэтому $\xi_2 = u'(T)$, если немного уменьшить $T > 0$. Кроме того, в силу свойства (6.34) имеет место следующее предельное свойство:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0),$$

поэтому для некоторой подпоследовательности имеем

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V} \text{ для почти всех } t \in [0, T].$$

Значит, $\xi_1 = u(T)$, если немного уменьшить $T > 0$. Следовательно, используя ранее полученные предельные соотношения, в силу непрерывности линейного оператора $\mathbb{A}$ мы приходим к следующему предельному свойству для некоторой итоговой на данный момент подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$:

$$-\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}u''_m, u_m \rangle dt = \langle \mathbb{A}u_0, u_1 \rangle - \langle \mathbb{A}u(T), u'(T) \rangle + \int_0^T \langle \mathbb{A}u', u' \rangle dt. \quad (6.47)$$

Теперь заметим, что поскольку по исходным условиям величина $\langle \mathbb{A}_j(v), v \rangle_j^{1/p_j}$ при $j = \overline{0, n}$ является нормой банахова пространства $\mathbb{V}_j$, порождающей исходную топологию банахова пространства $\mathbb{V}_j$, то в силу априорной оценки $|u_m|_1 \leq c_4(T)$ и вполне непрерывного вложения $\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}_j$, как и ранее, имеем

$$u_m(T) \rightarrow u(T) \quad \text{сильно в } \mathbb{V}_j. \quad (6.48)$$

При этом для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \mathbb{A}_j(u_m(T)), u_m(T) \rangle_j^{1/p_j} = \langle \mathbb{A}_j(u(T)), u(T) \rangle_j^{1/p_j}, \quad j = \overline{0, n}.$$

С другой стороны, в силу начальных условий (6.2) и (6.3) имеет место следующее предельное свойство:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j^{1/p_j} = \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j^{1/p_j}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Итак, используя все эти предельные свойства, в итоге мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T (\mathbb{H}'_f(u_m), u_m)_1 dt &= \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u), u)_2 dt \\ &+ \langle \mathbb{A}u_0, u_1 \rangle - \langle \mathbb{A}u(T), u'(T) \rangle + \int_0^T \langle \mathbb{A}u', u' \rangle dt + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j - \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u(T), u(T) \rangle_0 - \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u(T)), u(T) \rangle_j. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Теперь мы перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (6.42) и получим

$$\begin{aligned}
 0 \leq & - \int_0^T (\mathbb{H}'_f(v), u - v)_1 dt - \int_0^T (\chi, v)_1 dt + \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u), u)_2 dt \\
 & + \langle \mathbb{A}u_0, u_1 \rangle - \langle \mathbb{A}u(T), u'(T) \rangle + \int_0^T \langle \mathbb{A}u', u' \rangle dt + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 \\
 & + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j - \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u(T), u(T) \rangle_0 - \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u(T)), u(T) \rangle_j.
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

Умножим обе части равенства (6.1) на функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T])$ и проинтегрируем его по $t \in [0, T]$. Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \langle \mathbb{A}u''_m, \varphi(t)w \rangle dt \\
 & = - \int_0^T \langle \mathbb{A}u'_m, \varphi'w \rangle dt - \langle \mathbb{A}u_{1m}, \varphi(0)w \rangle + \langle \mathbb{A}u'_{Tm}, \varphi(T)w \rangle
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

для всех $w \in \overline{\mathbb{W}}_m$ (напомним, что $\overline{\mathbb{W}}_m$ – линейная оболочка функций $w_1, \dots, w_m$). Затем с помощью интегрирования (6.51) по частям и предельного перехода получим равенство

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T \langle \mathbb{A}u', \varphi'w \rangle dt - \langle \mathbb{A}u_1, \varphi(0)w \rangle + \langle \mathbb{A}u'(T), \varphi(T)w \rangle \\
 & + \int_0^T \sum_{j=0}^n \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u), \varphi(t)w \right\rangle_j dt + \int_0^T (\chi(t), \varphi(t)w)_1 dt \\
 & - \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u), \varphi(t)w)_2 dt = 0.
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Введем пространство

$$D \equiv \{v(t) \mid v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_1), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V})\}, \tag{6.53}$$

которое является рефлексивным банаховым относительно нормы

$$\|v\|_D = \left(\int_0^T (\|v\|_1^2 + \|v'\|^2) dt \right)^{1/2}.$$

Заметим, что множество вида

$$\left\{ \sum_{k=1}^m \varphi_k(t)w_k, \varphi_k(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]), w_k \in \mathbb{W}_1 \right\} \tag{6.54}$$

плотно в D . Действительно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть L_1, L_2 – банаховы пространства, вложение $L_1 \overset{\text{ds}}{\subset} L_2$ плотно и непрерывно и банахово пространство D задано как множество

$$\{v \mid v \in \mathbb{L}^2(0, T; L_1), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; L_2)\}$$

с нормой

$$\|v\|_D^2 = \|v\|_{\mathbb{L}^2(0, T; L_1)}^2 + \|v'\|_{\mathbb{L}^2(0, T; L_2)}^2.$$

Тогда множество $\mathcal{C}^1$ элементов вида $\sum_{k=1}^m \varphi_k(t) w_k$, где $w_k \in L_1$, $\varphi_k \in \mathcal{C}^1([0, T])$, плотно в пространстве D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать, что для любого элемента пространства D найдется сколь угодно близкий к нему по норме пространства D элемент множества $\mathcal{C}^1$. Мы это сделаем в несколько этапов.

1. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6.5. В пространстве $\mathbb{L}^2(0, T; L_2)$ множество $\mathcal{C}([0, T]; L_2)$ всюду плотно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [15], что в $\mathbb{L}^2(0, T; L_2)$ всюду плотны ступенчатые функции. Далее, всякую ступенчатую функцию линейной интерполяцией в достаточно малой окрестности границы точек разрыва можно со сколь угодно хорошей точностью по норме пространства $\mathbb{L}^2(0, T; L_2)$ приблизить непрерывной функцией. Действительно, пусть значение рассматриваемой ступенчатой функции $w(t)$ в некоторой левой полукрестности точки t_0 равно w_1 , а в правой – w_2 . Соответствующая линейная интерполанта $w_0(t)$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ имеет вид

$$w_0(t) = w_1 + \frac{t - (t_0 - \delta)}{2\delta} (w_2 - w_1) \equiv w_2 - \frac{(t_0 + \delta) - t}{2\delta} (w_1 - w_2).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \|w_0(t) - w(t)\|_{L_2}^2 dt \\ &= \int_{t_0 - \delta}^{t_0} \left\| w_1 + \frac{t - (t_0 - \delta)}{2\delta} (w_2 - w_1) - w_1 \right\|_{L_2}^2 dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \left\| w_2 - \frac{t_0 + \delta - t}{2\delta} (w_1 - w_2) - w_2 \right\|_{L_2}^2 dt \leq \frac{\delta^2}{3} \|w_2 - w_1\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Складывая слагаемые указанного типа для всех точек разрыва (а их конечное число) и выбирая достаточно малые δ , получаем требуемый результат.

2. Пусть v – произвольный элемент пространства D . Положим $w = v'$. Тогда $w \in \mathbb{L}^2(0, T; L_2)$. Обозначим для краткости

$$L_3 = \mathbb{L}^2(0, T; L_1), \quad L_4 = \mathbb{L}^2(0, T; L_2).$$

Можно записать

$$v(t) = v(0) + \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

3. С учетом леммы 6.5 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $w_1(t) \in \mathbb{C}([0, T]; L_2)$, что

$$\|w(t) - w_1(t)\|_{L_4} < \varepsilon.$$

Далее, известно [15], что элемент w_1 может быть сколь угодно точно по норме пространства $\mathbb{C}([0, T]; L_2)$ (а следовательно, и по норме пространства $L_4 \equiv \mathbb{L}^2(0, T; L_2)$) приближен многочленом с коэффициентами из L_2 , т. е. элементом вида

$$P_1(t) = \sum_{j=0}^k a_j t^j, \quad a_j \in L_2.$$

4. В силу плотного вложения $L_1 \overset{\text{дс}}{\subset} L_2$ коэффициенты многочлена $P_1(t)$, которые, напомним, принадлежат L_2 , могут быть сколь угодно точно приближены элементами пространства L_1 . При этом мы получим многочлен $P_2(t)$, который будет сколько нужно мало отличаться от $P_1(t)$ по норме пространства $\mathbb{C}([0, T]; L_2)$, а следовательно, и по норме пространства L_4 . В силу этого же плотного вложения найдется сколь необходимо близкий к $v(0)$ элемент $v_{01} \in L_1$. Положим

$$v_1(t) = v(t) + (v_{01} - v_1).$$

Очевидно,

$$v'_1(t) = v'(t) = w(t).$$

5. Построим элемент

$$v_2(t) = v_{01} + \int_0^t P_2(\tau) d\tau.$$

В силу предыдущих рассуждений функцию $w'_2(t) = P_2(t)$ можно сделать сколь необходимо мало отличающейся от $v'(t) = w(t)$ по норме пространства L_4 . Далее, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L_3}^2 &= \int_0^T \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L_1}^2 dt = \int_0^T \left\| \int_0^t (w(\tau) - P_2(\tau)) d\tau \right\|_{L_1}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_0^t \|w(\tau) - P_2(\tau)\|_{L_2} d\tau \right)^2 dt = \int_0^T \left(\int_0^t 1 \cdot \|w(\tau) - P_2(\tau)\|_{L_2} d\tau \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^T T \int_0^t \|w(\tau) - P_2(\tau)\|_{L_2}^2 d\tau dt \leq T^2 \|w(t) - P_2(t)\|_{L_4}^2, \end{aligned}$$

которая показывает, что $\|v_1(t) - v_2(t)\|_{L_3}$ может быть сделана сколь угодно малой, если только достаточно мала $\|w(t) - P_2(t)\|_{L_4}$. Далее,

$$\|v(t) - v_1(t)\|_{L_3} \equiv \|v(0) - v_{01}\|_{L_1}$$

в силу вышеизложенного также можно сделать сколь угодно малым. Поскольку из пп. 1–4 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $P_2(t)$ так, что $\|w(t) - P_2(t)\|_{L_4} < \varepsilon$, мы получаем, что для любого элемента $v(t) \in D$ и любой наперед заданной точности найдется элемент

$$v_{01} + \int_0^t P_2(\tau) d\tau = v_{01} + \sum_{j=0}^k \frac{a_j}{j+1} t^{j+1}, \quad v_{01}, a_j \in L_1,$$

откуда следует доказательство теоремы.

По доказанному на шаге 4 (см. (6.25), (6.30)) имеем

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1) \subset \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_1), \quad u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}).$$

Тогда $u \in \mathbb{D}$. При этом найдется такая последовательность

$$\{u_l\}, \quad u_l = \sum_{k=1}^l \varphi_{kl}(t) w_k, \quad \varphi_{kl} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T],$$

что имеет место предельное свойство

$$\int_0^T (|u - u_l|_1^2 + \|u' - u'_l\|^2) dt \rightarrow +0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty. \quad (6.55)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы доказать одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 6.6. *Для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_l\}$ имеет место следующее предельное равенство:*

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \|u_l(t) - u(t)\| = 0 \quad \text{равномерно по } t \in [0, T]. \quad (6.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся техникой из работы [16]. Итак, по доказанному на шаге 4 (см. (6.25), (6.30)) имеем $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_1)$, $u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V})$. Поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|u'\| dt \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u'\|^2 dt \right)^{1/2} \sqrt{|t_1 - t_2|} \leq c(T) \sqrt{|t_1 - t_2|}. \quad (6.57)$$

Значит, функция $u(t)$ равномерно непрерывна на $[0, T]$ со значениями в $\mathbb{V}$.

Заметим, что в силу (6.55) последовательность $\{u_l\}$ равномерно ограничена в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_1)$, а последовательность $\{u'_l\}$ равномерно ограничена в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V})$. Поэтому в силу того, что $\mathbb{W}_1$ компактно вложено в $\mathbb{V}$, и теоремы Лионса–Обэна найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_l\}$, что

$$\begin{aligned} u_l(t) &\rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}), \\ u_l(t) &\rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{V} \end{aligned}$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Значит, существует такое счетное всюду плотное множество $E = \{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, T]$, что $u_l(t) \rightarrow u(t)$ сильно в $\mathbb{V}$ на множестве E . Докажем, что на самом деле

$$u_l(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{V}$$

равномерно на отрезке $[0, T]$. Для этого прежде всего заметим, что в силу отмеченной ранее ограниченности последовательности $\{u'_l\}$ в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V})$ и оценки

$$\|u_l(t) - u_l(t^*)\| \leq \int_{t^*}^t \|u'_l\| ds \leq \left(\int_{t^*}^t \|u'_l\|^2 ds \right)^{1/2} \sqrt{|t - t^*|} \leq c(T) \sqrt{|t - t^*|} \quad (6.58)$$

имеет место равномерная непрерывность последовательности $\{u_l\}$ функций на $[0, T]$ со значениями в $\mathbb{V}$.

Пусть теперь задано некоторое $\varepsilon > 0$. Укажем, как построить по нему $L(\varepsilon)$ такое, что для всех $l > L(\varepsilon)$ будет выполнена оценка

$$\|u_l(t) - u(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.59)$$

Это есть не что иное, как требуемая равномерная сходимость. Пользуясь равномерной непрерывностью последовательности $\{u_l\}$ и оценкой (6.57), выберем такое $\delta = \delta(\varepsilon/3)$, что при $|\bar{t} - \bar{t}| < \delta$ верно

$$\|u_l(\bar{t}) - u_l(\bar{t})\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|u(\bar{t}) - u(\bar{t})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.60)$$

Далее выберем такое $K = K(\delta)$, что точки $\{t_k\}_{k=1}^K \subset E$ расположены на расстоянии менее δ друг от друга (это возможно, так как E всюду плотно на $[0, T]$). Теперь выберем $L = L(\varepsilon/3)$ такое, что для всех t_k , $k = 1, \dots, K$ (конечного числа точек), и для всех $l > L$ верно

$$\|u_l(t_k) - u(t_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(это возможно в силу сходимости $u_l(t) \rightarrow u(t)$ в $\mathbb{V}$ на E). Найденное L и будет искомым. В самом деле, рассмотрим следующее неравенство:

$$\|u_l(t) - u(t)\| \leq \|u_l(t) - u_l(t_k)\| + \|u_l(t_k) - u(t_k)\| + \|u(t_k) - u(t)\|,$$

где $t \in [0, T]$, $l > L$, а точка t_k выбирается из условий $|t - t_k| < \delta$, $k \in \{1, \dots, K\}$ (это возможно по построению числа K). Тогда в силу выбора δ имеем

$$\|u_l(t) - u_l(t_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|u(t) - u(t_k)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а в силу выбора L получаем

$$\|u_l(t_k) - u(t_k)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

что и доказывает (6.59). Итак, утверждение леммы доказано.

С учетом леммы 6.6 мы приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности последовательности $\{u_l\}$, что в дополнение к предельному свойству (6.55) имеют место следующие предельные свойства:

$$\|u(0) - u_l(0)\| \rightarrow +0, \quad l \rightarrow +\infty, \quad (6.61)$$

$$\|u(T) - u_l(T)\| \rightarrow +0, \quad l \rightarrow +\infty. \quad (6.62)$$

Ясно, что равенство (6.52) в силу линейности по вторым аргументам в скобках двойственности можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \langle \mathbb{A}u', u'_l \rangle dt - \langle \mathbb{A}u_1, u_l(0) \rangle + \langle \mathbb{A}u'(T), u_l(T) \rangle \\ & + \int_0^T \sum_{j=0}^n \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u), u_l \right\rangle_j dt + \int_0^T \langle \chi(t), u_l \rangle_1 dt - \int_0^T \langle \mathbb{F}'_f(u), u_l \rangle_2 dt = 0, \end{aligned} \quad (6.63)$$

а с учетом предельных свойств (6.55), (6.61) и (6.62) мы можем перейти к пределу при $l \rightarrow +\infty$ в равенстве (6.63) и получить равенство

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \langle \mathbb{A}u', u' \rangle dt - \langle \mathbb{A}u_1, u_0 \rangle + \langle \mathbb{A}u'(T), u(T) \rangle \\ & + \int_0^T \sum_{j=0}^n \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u), u \right\rangle_j dt + \int_0^T \langle \chi(t), u \rangle_1 dt - \int_0^T \langle \mathbb{F}'_f(u), u \rangle_2 dt = 0. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Теперь нам нужно рассмотреть слагаемые

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u), u \right\rangle_j dt, \quad j = \overline{0, n}.$$

С этой целью заметим, что в силу свойства

$$\|\mathbb{A}'_{jf}(u)\|_{\mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{V}_j^*} \leq \overline{M}_j \|u\|_j^{p_j-2}$$

имеет место оценка

$$\|\mathbb{A}_j(v_1) - \mathbb{A}_j(v_2)\|_j^* \leq \mu_j(R) \|v_1 - v_2\|_j, \quad (6.65)$$

где

$$\mu_j(R) = c_j R, \quad R = \max\{\|v_1\|_j^{p_j-2}, \|v_2\|_j^{p_j-2}\}.$$

Следовательно, имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\|\mathbb{A}_j(v_1) - \mathbb{A}_j(v_2)\|_j^*)^{p'_j} dt \\ & \leq c_j^{p'_j} \int_0^T \max\{\|v_1\|_j^{(p_j-2)p_j/(p_j-1)}, \|v_2\|_j^{(p_j-2)p_j/(p_j-1)}\} \|v_1 - v_2\|_j^{p_j/(p_j-1)} dt \\ & \leq c_j^{p'_j} \left(\int_0^T \max\{\|v_1\|_j^{p_j}, \|v_2\|_j^{p_j}\} dt \right)^{(p_j-2)/(p_j-1)} \\ & \quad \times \left(\int_0^T \|v_1 - v_2\|_j^{p_j} dt \right)^{1/(p_j-1)}, \quad p'_j = \frac{p_j}{p_j-1}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Теперь рассмотрим итоговую на данный момент последовательность галёркинских приближений $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{V}_j)$. Заметим, что в силу доказанного предельного свойства (6.34)

$$\int_0^T \|u - u_m\|_j^{p_j} dt \rightarrow +0, \quad m \rightarrow +\infty, \quad (6.67)$$

но тогда в силу (6.66) имеем

$$\int_0^T (\|\mathbb{A}_j(u) - \mathbb{A}_j(u_m)\|_j^*)^{p'_j} dt \rightarrow +0, \quad m \rightarrow +\infty. \quad (6.68)$$

Заметим также, что согласно лемме 4.3 имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m), u_m \right\rangle_j dt &= \frac{p_j - 1}{p_j} \int_0^T \frac{d}{dt} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j dt \\ &= \frac{p_j - 1}{p_j} [\langle \mathbb{A}_j(u_m)(T), u_m(T) \rangle_j - \langle \mathbb{A}_j(u_m(0)), u_m(0) \rangle_j], \quad j = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Кроме того, в силу начального условия (6.2) и предельного свойства (6.48) имеют место предельные равенства

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \mathbb{A}_j(u_m)(T), u_m(T) \rangle_j = \langle \mathbb{A}_j(u)(T), u(T) \rangle_j, \quad (6.70)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \mathbb{A}_j(u_m)(0), u_m(0) \rangle_j = \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j. \quad (6.71)$$

Наконец, в силу предельного свойства (6.38) и того, что из слабой сходимости некоторой последовательности в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_j^*)$ вытекает ее слабая сходимость в $\mathbb{L}^{p'_j}(0, T; \mathbb{V}_j^*)$ при $p_j \geq 2$ (поскольку $p'_j \leq 2$), приходим к выводу, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеет место следующее предельное свойство:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \rightharpoonup \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^{p'_j}(0, T; \mathbb{V}_j^*), \quad j = \overline{0, n}. \quad (6.72)$$

Поэтому с учетом предельных свойств (6.67), (6.70)–(6.72) можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ для итоговой на данный момент подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ и получить в результате равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u), u \right\rangle_j dt \\ = \frac{p_j - 1}{p_j} [\langle \mathbb{A}_j(u(T)), u(T) \rangle_j - \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j], \quad j = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

С учетом этого равенства из (6.64) приходим к равенству

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle \mathbb{A}u', u' \rangle dt - \langle \mathbb{A}u_1, u_0 \rangle + \langle \mathbb{A}u'(T), u(T) \rangle \\ + \sum_{j=0}^n \frac{p_j - 1}{p_j} [\langle \mathbb{A}_j(u(T)), u(T) \rangle_j - \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j] \\ + \int_0^T (\chi(t), u)_1 dt - \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u), u)_2 dt = 0. \end{aligned} \quad (6.74)$$

В свою очередь, отсюда и из (6.50) приходим к следующему неравенству:

$$0 \leq \int_0^T (\chi - \mathbb{H}'_f(v), u - v)_1 dt, \quad v \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_1). \quad (6.75)$$

Далее используются стандартные рассуждения метода монотонности, но для полноты изложения приведем их. Действительно, возьмем $v = u - \lambda w$, где $w \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_1)$, $\lambda > 0$. Тогда получим неравенство

$$0 \leq \int_0^T (\chi - \mathbb{H}'_f(u - \lambda w), w)_1 dt,$$

в котором перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow +0$ (это возможно в силу ограниченной липшиц-непрерывности оператора $H'_f(\cdot)$), и следующее неравенство:

$$0 \leq \int_0^T (\chi - \mathbb{H}'_f(u), w)_1 dt, \quad w \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_1),$$

из которого получим противоречие, если $\chi(t) \neq \mathbb{H}'_f(u)$.

Таким образом, локальная разрешимость доказана. Для дальнейшего нам потребуется еще один результат о сильной сходимости последовательности галёркинских приближений. С этой целью потребуем выполнимости следующего дополнительного условия:

$$(\mathbb{H}'_f(v_1) - \mathbb{H}'_f(v_2), v_1 - v_2)_1 \geq a|v_1 - v_2|_1^p, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{W}_1. \quad (6.76)$$

В силу ограниченности последовательности u_m в $\mathbb{W}_1$ (см. (6.11)) с точностью до перехода к подпоследовательности имеем

$$u_m \rightharpoonup u \text{ слабо в } \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_1), \quad \mathbb{H}'_f(u_m) \rightharpoonup \mathbb{H}'_f(u) \text{ слабо в } \mathbb{L}^{p'}(0, T; \mathbb{W}_1^*), \quad (6.77)$$

и, кроме того, имеет место предельное равенство

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T (\mathbb{H}'_f(u_m), u_m)_1 dt = \int_0^T (\mathbb{H}'_f(u), u)_1 dt. \quad (6.78)$$

Итак, имеет место предельное соотношение

$$0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T (\mathbb{H}'_f(u) - \mathbb{H}'_f(u_m), u - u_m)_1 dt \geq a \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T |u - u_m|_1^p dt. \quad (6.79)$$

Следовательно, приходим к выводу о том, что

$$u_m \rightarrow u \text{ сильно в } \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_1) \quad (6.80)$$

и, очевидно, с точностью до подпоследовательности

$$u_m \rightarrow u \text{ сильно в } \mathbb{W}_1 \text{ для почти всех } t \in [0, T].$$

Шаг 6. Продолжение решений во времени. Теперь мы потребуем коэрцитивности оператора $\mathbb{A}$ в некотором слабом смысле. Именно, пусть

$$\|\mathbb{A}w\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \geq d\|w\|_{\overline{\mathbb{W}}}^*, \quad w \in \mathbb{V} \subset \overline{\mathbb{W}}^*. \quad (6.81)$$

Отсюда в силу (6.21) приходим к выводу, что $u'' \in \mathbb{L}^2(0, T; \overline{\mathbb{W}}^*)$.

Введем два функциональных класса банаховых пространств:

$$R_1 = \{v: v(t) \in \mathbb{W}_1, v'(t) \in \mathbb{V}\}, \quad R_2 = \{v: v(t) \in \mathbb{V}, v'(t) \in \overline{\mathbb{W}}^*\}.$$

По определению слабого обобщенного решения $u(t)$ имеем $u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; R_1)$, а после возможного изменения на подмножестве нулевой меры Лебега множества $[0, T]$ получим

$$u(t) \in \mathbb{C}([0, T]; R_2). \quad (6.82)$$

Понятно, что $R_1 \subset R_2$. В силу (6.82) след функции $u(t)$ существует в каждой точке $t \in [0, T]$. Введем следующие две функции:

$$\psi_1(T) = \operatorname{ess.\,sup}_{t \in [0, T]} (|u|_1(t) + \|u'\|(t)), \quad \psi_2(T) = \sup_{t \in [0, T]} (\|u\|(t) + \|u'\|_{\overline{\mathbb{W}}^*}(t)). \quad (6.83)$$

Пусть $T_0 > 0$ таково, что существует слабое обобщенное решение задачи при любом $T < T_0$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае

$$\lim_{T \uparrow T_0} \psi_1(T) = +\infty. \quad (6.84)$$

В самом деле, если (6.84) не выполнено, то $T_0 < +\infty$ и

$$\lim_{T \uparrow T_0} \psi_1(T) < +\infty. \quad (6.85)$$

Однако

$$\lim_{T \uparrow T_0} \psi_2(T) \leq b \lim_{T \uparrow T_0} \psi_1(T) < +\infty.$$

Стало быть,

$$\sup_{t \in [0, T_0]} (\|u\|(t) + \|u'\|_{\overline{\mathbb{W}}^*}(t)) < +\infty. \quad (6.86)$$

Прежде всего заметим, что мы можем при почти каждом $t \in [0, T]$ перейти к пределу в неравенстве (6.10) и получить следующее неравенство:

$$\frac{m}{2} \|u'\|^2 + c_1 |u|_1^p + \int_0^t \langle \mathbb{A}_0 u', u' \rangle_0 ds \leq E(0) + \frac{c_2}{2} \int_0^t (\|u'\|^2 + |u|_1^{2q+2}) ds, \quad (6.87)$$

из которого в силу (6.85) и коэрцитивности оператора $\mathbb{A}_0$ получим $u' \in \mathbb{L}^2(0, T_0; \mathbb{V}_0)$.

Заметим, что в силу априорной оценки (6.21), имеющей вид

$$\int_0^T \left(\left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A} u'_m \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \right)^2 dt \leq c_{12}(T) < +\infty, \quad (6.88)$$

найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что имеет место предельное свойство

$$\frac{d}{dt} \mathbb{A} u'_m \rightharpoonup \frac{d}{dt} \mathbb{A} u', \quad \mathbb{L}^2(0, T; \overline{\mathbb{W}}^*),$$

и тогда из неравенства (6.88) и слабой секвенциальной полунепрерывности нормы рефлексивного банахова пространства получим, что имеет место оценка

$$\int_0^T \left(\left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A} u' \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \right)^2 dt \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(\left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A} u'_m \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \right)^2 dt \leq c_{12}(T) < +\infty. \quad (6.89)$$

Теперь необходимо убедиться в том, что на самом деле $c_{12}(T) < +\infty$ для всех $T \in [0, T_0]$. С этой целью рассмотрим равенство (6.15). Главную сложность при получении равномерной априорной оценки для выражения в левой части представляет слагаемое

$$\mathbb{P}_m^t \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m).$$

При рассмотрении этого слагаемого можно будет гораздо легче изучить и остальные слагаемые. Итак, в силу (6.17) и (6.6) имеют место следующие априорные оценки:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \mathbb{P}_m^t \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \right\|_{\overline{\mathbb{W}}^*}^2 dt &\leq \int_0^T \left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \right\|_{\overline{\mathbb{W}}^*}^2 dt \leq d_j \int_0^T \left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \right\|_{\mathbb{V}_j^*}^2 dt \\ &\leq c_j \operatorname{ess.\,sup}_{s \in [0, T]} |u_m(s)|_1^{p_j-2} \int_0^T \langle \mathbb{A}'_{jf}(u_m) u'_m, u'_m \rangle_j dt \\ &\leq c_j \operatorname{ess.\,sup}_{s \in [0, T]} |u_m(s)|_1^{p_j-2} \left[E_m(0) + \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u_m), u'_m)_2 dt \right]. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Таким образом, мы получили оценку

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \right\|_{\overline{\mathbb{W}}^*}^2 dt \\ \leq c_j \operatorname{ess.\,sup}_{s \in [0, T]} |u_m(s)|_1^{p_j-2} \left[E_m(0) + \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u_m), u'_m)_2 dt \right]. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Кроме того, в силу неравенства (6.10) имеет место неравенство

$$\operatorname{ess.\,sup}_{s \in [0, T]} |u_m(s)|_1^{p_j-2} \leq d_j \left(E_m(0) + \frac{c_2}{2} \int_0^T (\|u'_m\|^2 + |u_m|_1^{2q+2}) dt \right)^{(p_j-2)/p}. \quad (6.92)$$

Поэтому из (6.91) и (6.92) вытекает искомая оценка

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}_j(u_m) \right\|_{\overline{\mathbb{W}}^*}^2 dt &\leq d_j \left(E_m(0) + \frac{c_2}{2} \int_0^T (\|u'_m\|^2 + |u_m|_1^{2q+2}) dt \right)^{(p_j-2)/p} \\ &\quad \times \left[E_m(0) + \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u_m), u'_m)_2 dt \right] = I_{1jm}. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Аналогичным образом получаются оценки для оставшихся слагаемых в равенстве (6.15), и можно получить следующую оценку:

$$\int_0^T \left(\left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}u'_m \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \right)^2 dt \leq \sum_{j=1}^n I_{1jm} + I_{2m} + I_{3m} + I_{4m}.$$

Затем перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в обеих частях последнего неравенства. В частности, для I_{1jm} в силу (6.27) и непрерывного вложения $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_2$, а также других полученных в данном параграфе предельных свойств путем перехода к нижнему пределу при $m \rightarrow +\infty$ в определении I_{1jm} будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} I_{1jm} &= d_j \left(E(0) + \frac{c_2}{2} \int_0^T (\|u'\|^2 + |u|_1^{2q+2}) ds \right)^{(p_j-2)/p} \\ &\quad \times \left[E(0) + \int_0^T (\mathbb{F}'_f(u), u')_2 dt \right] \\ &\leq d_j \left(E(0) + \frac{c_2}{2} \int_0^T (\|u'\|^2 + |u|_1^{2q+2}) ds \right)^{(p_j-2)/p} \\ &\quad \times \left[E(0) + \left(\int_0^T |\mathbb{F}'_f(u)|_2^* dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u'\|_0^2 dt \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Поскольку $u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; R_1)$ и при этом в силу доказанного ранее $u'(t) \in \mathbb{L}^2(0, T_0; \mathbb{V}_0)$, мы получим из (6.94), что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_{1jm} \leq c(T_0) < +\infty \quad (6.95)$$

для всех $T \in [0, T_0]$. Аналогичным образом рассматриваются все оставшиеся слагаемые в операторном равенстве (6.15). Таким образом, приходим к равномерной оценке

$$\int_0^{T_0} \left(\left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}u' \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \right)^2 dt \leq c(T_0) < +\infty. \quad (6.96)$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{A}u'(t_1) - \mathbb{A}u'(t_2)\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}u' \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* dt \leq |t_1 - t_2|^{1/2} \left(\int_0^{T_0} \left(\left\| \frac{d}{dt} \mathbb{A}u' \right\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* \right)^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.97)$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, T_0]$. Таким образом, из (6.97) и (6.81) следует равномерная непрерывность функции $u'(t)$, рассматриваемой на полуинтервале $[0, T_0]$ со значениями в $\overline{\mathbb{W}}^*$, а в силу доказательства леммы 6.6 – равномерная непрерывность функции $u(t)$, рассматриваемой на полуинтервале $[0, T_0]$ со значениями в $\mathbb{V}$. Таким образом, существует такое непрерывное продолжение функции $u(t)$, что $u(T_0) \in R_2$. Итак, мы получили, что

$$u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; R_1), \quad u(t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; R_2).$$

Из второго включения следует существование элемента $u(T_0) \in R_2$. Докажем, что на самом деле $u(T_0) \in R_1$. Положим

$$E = \{t \in [0, T_0] \mid u(t) \in R_1, \|u(t)\|_{R_1} \leq \|u\|_{\mathbb{L}^\infty(0, T_0; R_1)}\}.$$

Из первого включения следует, что $\overline{E} = [0, T_0]$. Рассмотрим произвольную последовательность

$$t_n \rightarrow T_0 - 0, \quad t_n \in E.$$

Тогда последовательность $\{u(t_n)\}$ ограничена в R_1 . Следовательно, из нее можно извлечь слабо сходящуюся к x в R_1 подпоследовательность $\{u(t_{n_k})\}$. Поскольку оператор вложения $R_1 \rightarrow R_2$ непрерывен, а всякий непрерывный оператор непрерывен и в смысле слабой сходимости, имеем $u(t_{n_k}) \rightarrow x$ слабо в R_2 . С другой стороны, из того, что $u(t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; R_2)$, следует, что $u(t_{n_k}) \rightarrow u(T_0)$ в R_2 сильно, а следовательно, слабо. Значит, $x = u(T_0)$, а поскольку x как предел (слабый) последовательности элементов пространства R_1 принадлежит R_1 , то $u(T_0) \in R_1$, что и требовалось показать. Итак,

$$u(T_0) \in R_1. \quad (6.98)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Несколько развив рассуждение, приведшее к (6.98), можно показать (этот факт для целей нашей работы не требуется, но интересен сам по себе), что функция $u(t): [0, T] \rightarrow R_1$ слабо непрерывна на отрезке $[0, T]$. Действительно, пусть $t_0 \in [0, T]$ — произвольная точка, $t_n \rightarrow t_0$, $t_n \in E$. Пользуясь непрерывностью функции $u(t): [0, T] \rightarrow R_2$ и рассуждая аналогично предыдущему, имеем для некоторой подпоследовательности $\{t_{n_k}\}$, что $u(t_{n_k}) \rightarrow u(t_0) \in R_1$ слабо в R_1 . (Отсюда, в частности, следует, что $\|u(t_0)\|_{R_1} \leq \|u(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(0, T; R_1)}$.) Докажем теперь, что то же предельное свойство имеет место для всей последовательности $\{t_n\}$. В самом деле, в противном случае нашлись бы такая подпоследовательность $\{t_{n_l}\}$ и такой элемент $f \in R_1^*$, что $\langle f, u(t_{n_l}) \rangle_{R_1} \not\rightarrow \langle f, u(t_0) \rangle_{R_1}$. Следовательно, существовали бы такая подпоследовательность $\{t_{n_{l_p}}\}$ и такое $c > 0$, что

$$|\langle f, u(t_{n_{l_p}}) \rangle_{R_1} - \langle f, u(t_0) \rangle_{R_1}| > c.$$

С другой стороны, ранее доказано, что из любой последовательности $\{u(t_k)\}$, где $t_k \rightarrow t_0$, можно извлечь слабо сходящуюся к $u(t_0)$ подпоследовательность. Применяя это утверждение к $\{u(t_{n_{l_p}})\}$, приходим к противоречию.

Пусть $T' \in (0, T_0)$. Используя результат о локальной разрешимости в слабом обобщенном смысле, заключаем, что существует такое $T^* = T^*(T') > 0$, что решение задачи (3.1), (3.2) существует при $t \in (T', T' + T^*)$. Заметим, что имеет место условие (6.98). Поэтому существует точная нижняя грань

$$T^{**} = \inf_{T' \in [0, T_0]} T^* > 0.$$

Теперь возьмем

$$T' = T_0 - \frac{T^{**}}{2}.$$

Получим следующее продолжение решения:

$$\hat{u} = \{u(t), t \in [0, T']; u(t - T'), t \in [T', T' + T^{**}]\}.$$

Тогда отсюда получим, что

$$\hat{u} = \{u(t), t \in [0, T']; u(t - T'), t \in [T', T_0 + T^{**}/2]\}.$$

Следовательно, нам удалось продолжить решение за момент времени $T_0 > 0$. Противоречие. Значит, имеет место предельное свойство (6.84).

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 6.8. Пусть, помимо исходных условий для операторных коэффициентов, сформулированных ранее, выполнены условия (6.7), (6.14), (6.22) (где, кроме того, $\mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{V}^*$), условие (6.81) и условия

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{V}, \quad \mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}_j \subset \mathbb{V}, \quad \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}, \quad \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{W}_2, \quad j = \overline{0, n}, \\ (\mathbb{H}'_f(v_1) - \mathbb{H}'_f(v_2), v_1 - v_2)_1 \geq a|v_1 - v_2|_1^p, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{W}_1, \end{aligned}$$

гильбертово пространство $\overline{\mathbb{W}} \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов w_j оператора $\mathbb{A}$. Тогда при условии $p \geq 2q + 2$ для всякого $T \in (0, +\infty)$ существует слабое обобщенное решение, а при условии $p < 2q + 2$ найдется такой момент времени $T_0 > 0$, что для всех $T \in (0, T_0)$ существует слабое обобщенное решение. При этом либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} (|u|_1(t) + \|u'\|(t)) = +\infty. \quad (6.99)$$

§ 7. Разрушение слабого обобщенного решения

Для получения достаточных условий разрушения слабого обобщенного решения за конечное время нельзя воспользоваться исходной постановкой задачи, поскольку слабое обобщенное решение не обладает нужной гладкостью. Однако построенные в § 6 галёркинские приближения нужной гладкостью обладают: $u_m(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{W}_1)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u_m, u_m \rangle + \int_0^t \left[\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_m, u_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \right] ds \\ + \frac{1}{2p_0} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \frac{1}{p_0} \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j, \quad (7.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_m(t) = \langle \mathbb{A}u'_m, u'_m \rangle + \int_0^t \left[\langle \mathbb{A}_0 u'_m, u'_m \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (\mathbb{A}_j(u_m))', u'_m \rangle_j \right] ds \\ + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j, \quad (7.2) \end{aligned}$$

где $p_0 = \max_{j=1, n} p_j$. Точно так же, как при доказательстве леммы 5.1, можно доказать неравенство

$$(\Phi'_m)^2 \leq p_0 \Phi_m J_m, \quad t \in [0, T]. \quad (7.3)$$

Теперь, используя в качестве исходной задачи для u_m постановку задачи о галёркинских приближениях (6.1)–(6.3), мы так же, как и в § 5, получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\Phi_m(t) \geq \frac{1}{[\Phi_m^{1-\alpha}(0) - A_m t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (7.4)$$

где

$$A_m^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) [(\Phi'_m(0))^2 - \delta_m \Phi_m(0)] > 0,$$

$$\delta_m = \begin{cases} \frac{2E_m(0)}{2\alpha - 1} & \text{при } E(0) > 0, \\ 0 & \text{при } E(0) \leq 0, \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{p_0} \left(1 + \frac{\theta}{2} \right), \quad p_0 = \max_{j=1, n} p_j,$$

$$\Phi_m(0) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A} u_{m0}, u_{m0} \rangle + \frac{1}{2p_0} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \frac{1}{p_0} \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j,$$

$$\Phi'_m(0) = \langle \mathbb{A} u_{m0}, u_{m1} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j,$$

$$E_m(0) = \frac{\theta}{2} \langle \mathbb{A} u_{m1}, u_{m1} \rangle + \theta \mathbb{H}(u_{m0}) + \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_{m0}, u_{m0} \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_{m0}), u_{m0} \rangle_j \right) - \theta \mathbb{F}(u_{m0}).$$

Теперь наша задача – перейти в неравенстве (7.4) к пределу при $m \rightarrow +\infty$. Прежде всего в силу леммы 6.6 имеем

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \mathbb{A} u_m, u_m \rangle = \langle \mathbb{A} u, u \rangle \quad \text{равномерно по } t \in [0, T]. \quad (7.5)$$

Кроме того, по доказанному ранее имеем

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p_j}(0, T; \mathbb{V}_j), \quad (7.6)$$

$$\mathbb{A}_j(u_m) \rightarrow \mathbb{A}_j(u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p'_j}(0, T; \mathbb{V}_j^*) \quad (7.7)$$

при $j = \overline{0, n}$. Отсюда вытекает, что

$$\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j \rightarrow \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \quad \text{для почти всех } t \in [0, T], \quad (7.8)$$

причем числовая последовательность $\{\langle \mathbb{A}_j(u_m), u_m \rangle_j\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена. Следовательно, в силу (7.5)–(7.8) и начальных условий (6.2), (6.3) мы приходим к выводу, что поточечно при $t \in [0, T]$ имеет место следующее предельное свойство:

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t), \quad t \in [0, T], \quad (7.9)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u, u \rangle + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u), u \rangle_j \right) ds \\ + \frac{1}{2p_0} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \frac{1}{p_0} \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j.\end{aligned}$$

При помощи начальных условий (6.2) и (6.3) можно получить, что

$$\begin{aligned}A_m &\rightarrow A, \\ A^2 &= (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) [(\Phi'(0))^2 - \delta \Phi(0)] > 0, \\ \delta &= \begin{cases} \frac{2E(0)}{2\alpha - 1} & \text{при } E(0) > 0, \\ 0 & \text{при } E(0) \leq 0, \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{p_0} \left(1 + \frac{\theta}{2} \right), \quad p_0 = \max_{j=1, n} p_j, \\ \Phi(0) &= \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}u_0, u_0 \rangle + \frac{1}{2p_0} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \frac{1}{p_0} \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \\ \Phi'(0) &= \langle \mathbb{A}u_0, u_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j, \\ E(0) &= \frac{\theta}{2} \langle \mathbb{A}u_1, u_1 \rangle + \theta \mathbb{H}(u_0) \\ &\quad + \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \langle \mathbb{A}_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle \mathbb{A}_j(u_0), u_0 \rangle_j \right) - \theta \mathbb{F}(u_0).\end{aligned}$$

Поэтому в пределе получим из (7.4) предельное свойство

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{1/(\alpha-1)}}. \quad (7.11)$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполнены условие $p < 2q + 2$ и условия теоремы 6.8. Тогда при выполнении условий

$$\begin{aligned}\Phi'(0) &> (\delta \Phi(0))^{1/2}, \quad \Phi(0) > 0, \quad \theta > 2(p_0 - 1), \quad \theta \geq \mu, \\ \delta &= \begin{cases} \frac{2E(0)}{2\alpha - 1} & \text{при } E(0) > 0, \\ 0 & \text{при } E(0) \leq 0, \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{p_0} \left(1 + \frac{\theta}{2} \right), \quad p_0 = \max_{j=1, n} p_j,\end{aligned} \quad (7.12)$$

время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство

$$\begin{aligned}T &\leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1}, \\ A^2 &\equiv (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) [(\Phi'(0))^2 - \delta \Phi(0)],\end{aligned}$$

причем для всех $t \in [0, T_\infty)$ выполнено (7.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Докажем, что при выполнении условий теоремы 7.1 имеет место свойство $T_0 < +\infty$. Действительно, пусть $T_0 = +\infty$, но тогда

$$|u|_1(t) + \|u'\| \leq c(T) < +\infty, \quad t \in [0, T],$$

для всех $T \in (0, +\infty)$. Однако поскольку имеет место вложение

$$\mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}, \quad \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{0, n},$$

мы приходим к выводу о том, что

$$\Phi(t) \leq c(T) < +\infty, \quad t \in [0, T],$$

для всех $T \in (0, +\infty)$. Полученное противоречие доказывает, что при условиях теоремы 7.1 имеем $T_0 < +\infty$ и, стало быть, имеет место предельное равенство (6.99).

§ 8. Локальная разрешимость в смысле сильного обобщенного решения и его разрушение

Прежде всего сделаем основное предположение: пусть $\mathbb{W} = \mathbb{V}$. Решение задачи (3.1), (3.2) будем понимать в сильном обобщенном смысле определения 3.3. Для удобства изложения снова выпишем нашу задачу

$$\mathbb{A} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_j(u) \right) + \mathbb{H}'_f(u) - \mathbb{F}'_f(u) = \theta \in \mathbb{V}^*, \quad (8.1)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{V}, \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{V}. \quad (8.2)$$

Из условий $\mathbb{A}$ и теоремы Браудера–Минти вытекает существование обратного оператора

$$\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{V}, \quad \|\mathbb{A}^{-1}v_1 - \mathbb{A}^{-1}v_2\|^* \leq \frac{1}{m} \|v_1 - v_2\|, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{V}.$$

Введем обозначение $v = \mathbb{A}u$. Тогда задача (8.1), (8.2) относительно функции $u(t)$ из класса $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{V})$ (на этом классе функций операторы d^2/dt^2 и $\mathbb{A}$ коммутируют) преобразуется в задачу Коши следующего вида:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\mathbb{A}_0 \mathbb{A}^{-1}v + \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_j(\mathbb{A}^{-1}v) \right) + \mathbb{H}'_f(\mathbb{A}^{-1}v) - \mathbb{F}'_f(\mathbb{A}^{-1}v) = \theta \in \mathbb{V}^*, \quad (8.3)$$

$$v_0 = v(0) = \mathbb{A}u_0, \quad v_1 = v'(0) = \mathbb{A}u_1. \quad (8.4)$$

Отметим, что в классе $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{V}^*)$ уравнение (8.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v = H(v) \equiv & v_0 + v_1 t + \left(\mathbb{A}_0 \mathbb{A}^{-1}v_0 + \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_j(\mathbb{A}^{-1}v_0) \right) t \\ & + \int_0^t (t-s) [\mathbb{F}'_f(\mathbb{A}^{-1}v) - \mathbb{H}'_f(\mathbb{A}^{-1}v)] ds - \int_0^t \left[\mathbb{A}_0 \mathbb{A}^{-1}v + \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_j(\mathbb{A}^{-1}v) \right] ds. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Введем теперь следующее замкнутое, ограниченное и выпуклое подмножество банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}^*)$:

$$\mathbb{V}_r \equiv \left\{ v \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}^*) : \|v\| \equiv \operatorname{ess.\,sup}_{t \in [0, T]} \|v\|^* \leq r \right\}.$$

Прежде всего докажем, что при достаточно большом $r > 0$, достаточно малом $T > 0$ и при

$$\|v_0\|^* \leq \frac{r}{2} \quad (8.6)$$

оператор $H(\cdot)$ отображает множество $\mathbb{V}_r$ в себя. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|H(v)\| &\leq \|v_0\|^* + T \left[\frac{M_0}{m} \|v_0\|^* + \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{m^{p_j-1}} (\|v_0\|^*)^{p_j-1} + \|v_1\|^* \right] \\ &+ T^2 \left[\frac{M_F}{m^{q+1}} \|v\|^{q+1} + \frac{M_H}{m^{p-1}} \|v\|^{p-1} \right] + T \left[\frac{M}{m} \|v\| + \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{m^{p_j-1}} \|v\|^{p_j-1} \right]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Итак, фиксируем $r > 0$ настолько большим, что выполняется неравенство (8.6). Тогда можно выбрать $T > 0$ настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$\|H(v)\| \leq r, \quad v \in \mathbb{V}_r.$$

Значит, $H(\cdot) : \mathbb{V}_r \rightarrow \mathbb{V}_r$. Докажем теперь, что этот оператор является сжимающим на $\mathbb{V}_r$. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|H(\bar{v}) - H(\bar{\bar{v}})\| &\leq \left[\frac{a_1 T^2}{m} \mu_1(R_1) + \frac{a_2 T^2}{m} \mu_2(R_2) + \frac{a_3 T M}{m} \right. \\ &\quad \left. + T \sum_{j=1}^n \frac{\bar{M}_j a_{4j}}{m^{p_j-1}} (R_j^*)^{p_j-2} \right] \|\bar{v} - \bar{\bar{v}}\|, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a_1}{m} \max\{\|\bar{v}\|, \|\bar{\bar{v}}\|\}, \quad R_2 = \frac{a_2}{m} \max\{\|\bar{v}\|, \|\bar{\bar{v}}\|\}, \\ R_j^* &= a_{4j} \max\{\|\bar{v}\|, \|\bar{\bar{v}}\|\} \end{aligned}$$

и a_1 – константа непрерывного вложения $\mathbb{W}_2^* \subset \mathbb{V}^*$, a_2 – константа непрерывного вложения $\mathbb{W}_1^* \subset \mathbb{V}^*$, a_3 – константа непрерывного вложения $\mathbb{V}_0^* \subset \mathbb{V}^*$, a_{4j} – константа непрерывного вложения $\mathbb{V}_j^* \subset \mathbb{V}^*$. Итак, при достаточно большом $r > 0$ и достаточно малом $T > 0$ из (8.8) мы получим искомое неравенство

$$\|H(\bar{v}) - H(\bar{\bar{v}})\| \leq \frac{1}{2} \|\bar{v} - \bar{\bar{v}}\| \quad \forall \bar{v}, \bar{\bar{v}} \in \mathbb{V}_r.$$

Следовательно, в силу теоремы о сжимающем отображении существует единственное решение $v(t) \in \mathbb{V}_r$ уравнения (8.5). При этом, стандартным методом

продолжая решение интегрального уравнения (8.5) во времени, получим, что найдется максимальное $T_0 > 0$ такое, что для всех $T \in (0, T_0)$ существует решение класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{V}^*)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\lim_{T \uparrow T_0} \sup_{t \in [0, T]} \|v\|^*(t) = +\infty.$$

Теперь можно стандартным образом применить “бутстэп”-метод и в результате из равенства (8.5) получить, что на самом деле $v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0); \mathbb{V}^*)$.

Наконец, в силу свойства липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{A}^{-1}$ приходим к выводу, что $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0); \mathbb{V})$. Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 8.1. *Для всех $u_0, u_1 \in \mathbb{V}$ существует единственное сильное обобщенное решение $u(t)$ задачи (8.1), (8.2) класса $\mathbb{C}^{(2)}([0, T_0); \mathbb{V})$ при некотором $T_0 > 0$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{T \uparrow T_0} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbb{A}u\|(t) = +\infty. \quad (8.9)$$

Результат о достаточных условиях разрушения сильного обобщенного решения задачи (8.1), (8.2) был получен нами ранее в теореме 2.1. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1. Тогда время $T_0 > 0$ из теоремы 8.1 ограничено и, следовательно, имеет место предельное свойство (8.9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда в силу результата теоремы 2.1 имеем $T_0 < +\infty$, значит, из теоремы 8.1 следует, что имеет место второй случай альтернативы.

§ 9. Примеры

Прежде всего отметим, что процедура получения достаточных условий разрушения решения никак не связана с ограниченностью области и поэтому может быть применена к соответствующим задачам Коши. Однако вопрос о локальной разрешимости часто может быть изучен только для ограниченных областей. Во всех рассмотренных примерах доказательство разрушения может быть проведено для задач Коши. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей, а через p^* мы стандартным образом обозначаем следующую величину:

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{при } N > p, \\ +\infty & \text{при } N \leq p. \end{cases}$$

Пусть также

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}^2(\Omega), \quad a_j(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega), \quad 0 < a_0 \leq a_j(x)$$

в следующих примерах.

ПРИМЕР 9.1. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Delta u + \sum_{j=1}^n a_j(x) |u|^{p_j-2} u \right) - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |u|^q u, \quad (9.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (9.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9.3)$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= I, & \mathbb{A}_0 &= -\Delta, & \mathbb{A}_j(u) &= a_j(x) |u|^{p_j-2} u, \\ \mathbb{H}(u) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx, & \mathbb{F}(u) &= \frac{1}{q+2} \int_{\Omega} |u|^{q+2} dx; \end{aligned}$$

здесь и далее I – единичный оператор. Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \mathbb{L}^2(\Omega), & \mathbb{V}_0 &= \mathbb{H}_0^1(\Omega), & \mathbb{V}_j &= \mathbb{L}^{p_j}(\Omega), \\ \mathbb{W}_1 &= \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), & \mathbb{W}_2 &= \mathbb{L}^{q+2}(\Omega), & \mathbb{B} &= \mathbb{H}_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

$\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}_0^s(\Omega)$ при достаточно большом $s > 1$ и $\{w_k\} \subset \overline{\mathbb{W}}$ – решения задачи

$$(-\Delta)^s w_k = \lambda_k w_k, \quad \mathbb{J} = (-\Delta)^{-s}: \mathbb{H}^{-s}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^s(\Omega).$$

Поэтому имеет место условие (6.14). Итак, при условиях

$$q+2 < p^*, \quad p_j < p^*, \quad j = \overline{1, n},$$

имеют место вполне непрерывные вложения

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Ясно, что

$$\mathbb{W}_2 = \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{V}$$

при $q > 0$ и $\mathbb{V}_j = \mathbb{L}^{p_j}(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{V}$. Кроме того,

$$\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{V}.$$

Наконец, при условии $q+2 \leq 2^*$ имеет место следующее вложение:

$$\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) = \mathbb{W}_2.$$

В случае $2q+2 \leq 2^*$ имеет место свойство (6.7). Свойства (6.22) и (6.81) также выполнены. Поэтому имеет место теорема 6.8, а при условиях теоремы 7.1 получим разрушение решения.

ПРИМЕР 9.2. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta^2 u - \sum_{j=1}^n \operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) + \Delta(|\Delta u|^{p-2} \Delta u) = -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u), \quad (9.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{2,p}(\Omega), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (9.5)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n_x} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9.6)$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= I, & \mathbb{A}_0 &= \Delta^2, & \mathbb{A}_j(u) &= -\operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u), \\ \mathbb{H}(u) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\Delta u|^p dx, & \mathbb{F}(u) &= \frac{1}{q+2} \int_{\Omega} |\nabla u|^{q+2} dx. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \mathbb{L}^2(\Omega), & \mathbb{V}_0 &= \mathbb{H}_0^2(\Omega), & \mathbb{V}_j &= \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), \\ \mathbb{W}_1 &= \mathbb{W}_0^{2,p}(\Omega), & \mathbb{W}_2 &= \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), & \mathbb{B} &= \mathbb{H}_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Кроме того, $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}_0^s(\Omega)$ при достаточно большом $s > 0$, а $\{w_k\} \subset \overline{\mathbb{W}}$ – решения задачи

$$(-\Delta)^s w_k = \lambda_k w_k, \quad \mathbb{J} = (-\Delta)^{-s}: \mathbb{H}^{-s}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^s(\Omega),$$

поэтому имеет место свойство (6.14).

Итак, в этом случае при условиях

$$q+2 < p^*, \quad p_j < p^*$$

для $j = \overline{0, n}$ имеют место вполне непрерывные вложения

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{0, n}.$$

Очевидно, что

$$\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{V}.$$

При условии

$$q+2 \leq 2^*$$

имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) = \mathbb{W}_2.$$

Наконец, при условии

$$2q+2 \leq 2^*$$

имеет место свойство (6.7). При этом имеют место условия (6.22) и (6.81), поэтому, в свою очередь, имеет место теорема 6.8, а при условиях теоремы 7.1 получим разрушение решения.

ПРИМЕР 9.3. Рассмотрим следующую задачу:

$$-\Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta^2 u - \sum_{j=1}^n \operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) + \Delta^2 u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u), \quad (9.7)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (9.8)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9.9)$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= -\Delta, & \mathbb{A}_0 &= \Delta^2, & \mathbb{A}_j(u) &= -\operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u), \\ \mathbb{H}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx, & \mathbb{F}(u) &= \frac{1}{q+2} \int_{\Omega} |\nabla u|^{q+2} dx. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \mathbb{H}_0^1(\Omega), & \mathbb{V}_0 &= \{u \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ \mathbb{W}_j &= \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega), & \mathbb{W}_1 &= \{u \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ & & \mathbb{W}_2 &= \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega), & \mathbb{B} &= \mathbb{L}^2(\Omega). \end{aligned}$$

Итак, при условиях $q+2 < 2^*$, $p_j < 2^*$, $j = \overline{1, n}$, имеют место вполне непрерывные вложения

$$\mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{W}_1 \hookrightarrow \mathbb{V}_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_2 &= \mathbb{W}_0^{1,q+2}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) = \mathbb{V}, & \mathbb{V}_j &= \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) = \mathbb{V}, \\ \mathbb{V}_0 &\subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) = \mathbb{V}, & \mathbb{V}_0 &\subset \mathbb{W}_2, & q+2 &\leq 2^*. \end{aligned}$$

Наконец, при условии $2q+2 \leq 2^*$ имеет место свойство (6.7). Также выполнено условие (6.22). Отметим, что оператор $\mathbb{A}$ согласно следующему замечанию удовлетворяет всем тем свойствам, которые использовались нами при доказательстве локальной разрешимости в слабом обобщенном смысле.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.4. Известно, что в пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ существует базис (в смысле сходимости по норме пространства $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$) из собственных векторов оператора Лапласа, если только область Ω имеет достаточно гладкую границу (см., например, [17, с. 132–133]). Далее, известно (см. [17, с. 119] или [18, с. 44]), что величина $\|\Delta u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ является на пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ нормой, эквивалентной стандартной $\mathbb{H}_0^2$ -норме. Следовательно, выбрав скалярное произведение в $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ как $(\Delta u, \Delta v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ и соответствующим образом нормируя ортогональную в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ систему собственных функций $\{v_n\}$ оператора Лапласа в области Ω , мы получим требуемый ортогональный базис, поскольку

$$(\Delta v_n, \Delta v_m)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \lambda_n \lambda_m (v_n, v_m)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Теперь докажем свойство (6.81). Действительно, прежде всего отметим, что имеет место цепочка непрерывных и одного плотного вложений

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \subset (\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))^*. \quad (9.10)$$

В рассматриваемом случае

$$\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega).$$

Заметим, что

$$\Delta: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (9.11)$$

Обозначим через $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{\overline{\mathbb{W}}}$ скобки двойственности между $\overline{\mathbb{W}}$ и $\overline{\mathbb{W}}^*$. Поэтому в силу плотного вложения в (9.10) и (9.11) мы приходим к выводу, что имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \langle \langle -\Delta u, u \rangle \rangle_{\overline{\mathbb{W}}}, \quad (9.12)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между $\mathbb{V} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{V}^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств для каждого $z \in \mathbb{V} \subset \overline{\mathbb{W}}^*$:

$$\begin{aligned} \|\Delta z\|_{\overline{\mathbb{W}}}^* &= \sup_{\|\Delta w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}=1} |\langle \langle \Delta z, w \rangle \rangle_{\overline{\mathbb{W}}}| = \sup_{\|\Delta w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}=1} |\langle \Delta z, w \rangle| \\ &= \sup_{\|\Delta w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} (\nabla w, \nabla z) dx \right| = \sup_{\|\Delta w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} z \Delta w dx \right| = \|z\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (9.13)$$

для всех

$$w \in \overline{\mathbb{W}} = \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Последнее равенство в (9.13) обосновывается следующим образом: достаточно положить w равной (с точностью до нормировки) решению однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью z . Тогда, поскольку область Ω имеет (см. замечание 9.4) достаточно гладкую границу, это решение принадлежит пространству $\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Очевидно, что имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{L}^2(\Omega) \subset (\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega))^*.$$

Стало быть, свойство (6.81) доказано.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы проверить выполнимость условия (6.14). Отметим, что

$$\overline{\mathbb{W}} \equiv \{u \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega): u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

и что дуализирующим отображением $\mathbb{J}$ между $\overline{\mathbb{W}}^*$ и $\overline{\mathbb{W}}$ является интегральный оператор с ядром вида функции Грина следующей задачи:

$$\Delta^2 G(\cdot, y) = \delta(\cdot - y) \quad \text{в } \Omega, \quad G(\cdot, y) = -\Delta G(\cdot, y) = 0 \quad \text{в } \partial\Omega.$$

Решение данной задачи, как известно, существует и может быть выражено явным образом. Заметим, что в силу нашего выбора системы функций $\{w_k\}$ они являются решениями следующей задачи:

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k \implies \Delta^2 w_k = \lambda_k^2 w_k, \quad w_k|_{\partial\Omega} = \Delta w_k|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда дуализирующее отображение $\mathbb{J}$ обладает следующим свойством:

$$\mathbb{J}w_k = \frac{w_k}{\lambda_k^2}.$$

Отсюда вытекает условие (6.14).

ПРИМЕР 9.5. Рассмотрим следующую задачу:

$$(I - \Delta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \sum_{j=1}^n a_j(x) |u|^{p_j-2} u \right) = |u|^q u, \quad a_j(x) \in \mathbb{L}_+^\infty(\mathbb{R}^N), \quad (9.14)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N), \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N). \quad (9.15)$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= I - \Delta, \quad \mathbb{A}_0 = I, \quad \mathbb{A}_j(u) = a_j(x) |u|^{p_j-2} u, \\ \mathbb{F}(u) &= \frac{1}{q+2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+2} dx, \quad \mathbb{H}(u) = 0, \end{aligned}$$

при этом

$$\mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{V}_0 = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{V}_j = \mathbb{L}^{p_j}(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{W}_2 = \mathbb{L}^{q+2}(\mathbb{R}^N).$$

Теперь потребуем выполнения следующих условий: $p_j \in (2, 2^*]$, $q+2 \in (2, 2^*]$. В этом случае получаем, что выполнено основное предположение из § 8:

$$\mathbb{W} = \mathbb{V} = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 8.1, а при выполнении условий теоремы 8.2 имеет место разрушение решения.

ПРИМЕР 9.6. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} (I + \Delta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u + \sum_{j=1}^n \operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) \\ = -\operatorname{div}(|\nabla u|^q \nabla u), \quad a_j(x) \in \mathbb{L}_+^\infty(\mathbb{R}^N), \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N), \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N). \quad (9.17)$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= I + \Delta^2, \quad \mathbb{A}_0 = -\Delta, \quad \mathbb{A}_j(u) = -\operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u), \\ \mathbb{F}(u) &= \frac{1}{q+2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{q+2} dx, \quad \mathbb{H}(u) = 0, \end{aligned}$$

при этом

$$\mathbb{V} = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{V}_j = \mathbb{W}^{1,p_j}(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{W}_2 = \mathbb{W}^{1,q+2}(\mathbb{R}^N).$$

Теперь потребуем выполнения следующих условий: $p_j \in (2, 2^*]$, $q + 2 \in (2, 2^*]$. В этом случае получаем, что выполнено основное предположение из § 8:

$$\mathbb{W} = \mathbb{V} = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 8.1, а при выполнении условий теоремы 8.2 имеет место разрушение решения.

ПРИМЕР 9.7. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} (I + \Delta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u + \sum_{j=1}^n \operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) \\ = -\Delta u \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{q/2}, \quad a_j(x) \in \mathbb{L}_+^\infty(\mathbb{R}^N), \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N), \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N). \quad (9.19)$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} = I + \Delta^2, \quad \mathbb{A}_0 = -\Delta, \quad \mathbb{A}_j(u) = -\operatorname{div}(a_j(x) |\nabla u|^{p_j-2} \nabla u), \\ \mathbb{F}(u) = \frac{1}{q+2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{(q+2)/2}, \quad \mathbb{H}(u) = 0, \end{aligned}$$

при этом

$$\mathbb{V} = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{V}_j = \mathbb{W}^{1,p_j}(\mathbb{R}^N), \quad \mathbb{W}_2 = \mathbb{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

Предположим, что выполнены следующие условия: $p_j \in (2, 2^*]$, $q > 0$. В этом случае получаем, что выполнено основное предположение из § 8:

$$\mathbb{W} = \mathbb{V} = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^N).$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 8.1, а при выполнении условий теоремы 8.2 имеет место разрушение решения.

Список литературы

1. H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
2. H. A. Levine, P. Pucci, J. Serrin, “Some remarks on global nonexistence for nonautonomous abstract evolution equations”, *Harmonic analysis and nonlinear differential equations* (Riverside, CA, 1995), *Contemp. Math.*, **208**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 253–263.
3. P. Pucci, J. Serrin, “Some new results on global nonexistence for abstract evolution with positive initial energy”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **10:2** (1997), 241–247.

4. P. Pucci, J. Serrin, “Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy”, *J. Differential Equations*, **150**:1 (1998), 203–214.
5. B. Straughan, “Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48**:2 (1975), 381–390.
6. В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
7. H. A. Levine, G. Todorova, “Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy in four space-time dimensions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:3 (2001), 793–805.
8. A. B. Al’shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*, De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **15**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011, xii+648 pp.
9. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: È. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
10. S. I. Pohozaev, “Critical nonlinearities in partial differential equations”, *Milan J. Math.*, **77**:1 (2009), 127–150.
11. V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “On similarity solutions and blow-up spectra for a semilinear wave equation”, *Quart. Appl. Math.*, **61**:3 (2003), 583–600.
12. V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations”, *Nonlinear Anal.*, **53**:3-4 (2003), 453–466.
13. В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. I. Pokhozhaev, “Third-order nonlinear dispersive equations: Shocks, rarefaction, and blowup waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:10 (2008), 1784–1810.
14. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987, 480 с.; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995, xxii+535 pp.
15. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differentialgleichungen*, Math. Lehrbücher und Monogr., **38**, Akademie-Verlag, Berlin, 1974, ix+281 pp.
16. Ю. А. Дубинский, “Слабая сходимости в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях”, *Матем. сб.*, **67(109)**:4 (1965), 609–642.
17. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973, 407 с.; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985, xxx+322 pp.

18. Ф. Сьярле, *Метод конечных элементов для эллиптических задач*, Мир, М., 1980, 512 с.; пер. с англ.: P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, Stud. Math. Appl., 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York–Oxford, 1978, xix+530 pp.

МАКСИМ ОЛЕГОВИЧ КОРПУСОВ

(МАХІМ О. KORPUSOV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

физический факультет

E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило в редакцию

17.03.2013

АЛЕКСАНДР АНАТОЛЬЕВИЧ ПАНИН

(ALEXANDER A. PANIN)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

физический факультет

E-mail: a-panin@yandex.ru