

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

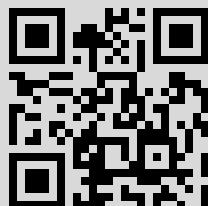
М. О. Корпусов, О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Гамильтона–Якоби, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 81–95

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 13:24:46





О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Гамильтона–Якоби

М. О. Корпусов

В данной работе предложен вывод нового модельного трехмерного уравнения третьего порядка типа Гамильтона–Якоби. Для этого уравнения рассмотрена начально-краевая задача в ограниченной области с гладкой границей и доказана локальная разрешимость в сильном обобщенном смысле; кроме того, получены достаточные условия разрушения за конечное время и достаточные условия глобальной во времени разрешимости.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm8955

1. Введение. В данной работе рассмотрим начально-краевую задачу для следующего модельного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + \mu |\nabla u|^p = 0, \quad p > 0, \quad \mu > 0. \quad (1.1)$$

Заметим, что уравнение Гамильтона–Якоби имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu |\nabla u|^2 = 0. \quad (1.2)$$

Поэтому мы сочли возможным назвать уравнение (1.1) *родственным уравнению Гамильтона–Якоби*. Классическое уравнение (1.2) исследовалось многими авторами и мы не будем здесь приводить все полученные для него результаты. Сейчас рассмотрим некоторые другие уравнения, типа Гамильтона–Якоби. Прежде всего рассмотрим уравнение Курамото–Сивашинского

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + \Delta^2 u + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 = 0, \quad (1.3)$$

которое исследовалось многими авторами. Мы отметим недавние результаты, полученные в работах [1]–[4]. В этих работах были исследованы начальные и начально-краевые задачи для уравнения Курамото–Сивашинского в ограниченных и неограниченных областях и были получены результаты о глобальной во времени разрешимости и разрушения за конечное время. При этом использовался метод нелинейной емкости, развитый в работах Похожаева и Митидиери [5]. Кроме того, в теории

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00376-а), а также президентской программы поддержки молодых докторов наук МД-99.2009.1.

теплового взрыва [6] рассматривается уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + |\nabla T|^2, \quad (1.4)$$

где $T = T(x, t)$ – это температура. Заметим, однако (см. [6]), что уравнение (1.4) заменой

$$v = \exp(T)$$

сводится к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v.$$

Довольно много работ посвящено исследованию нелинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \mu |\nabla u|^p + f(x, u), \quad (1.5)$$

для которого были получены результаты о разрушении и глобальной во времени разрешимости [6]–[10].

2. Вывод уравнения. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$ с гладкой поверхностно-односвязной границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Предположим, что эту область занимает кристаллический полупроводник. Как известно, в теории полупроводников (см., например, [11], [12]) хорошо работает квазистационарное приближение для системы уравнений Максвелла [13], электрическая часть которой имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации среды, n – плотность свободных зарядов, причем в силу поверхностно-односвязности границы $\partial\Omega$ определен потенциал электрического поля ϕ :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi.$$

Поскольку полупроводник, очевидно, является проводящей средой, мы должны дополнить уравнения (2.1) уравнением для тока свободных зарядов, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{J}$ – вектор тока свободных зарядов. Естественно, нам нужно записать выражение для этого вектора. При этом учтем тепловой разогрев полупроводника [11]; тогда для вектора $\mathbf{J}$ имеет место следующее выражение [13]:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} - \gamma \nabla T, \quad \sigma > 0, \quad \gamma > 0, \quad (2.3)$$

где T – это температура в полупроводнике. Причем для температуры T имеет место уравнение теплопроводности с тепловым нагревом за счет электрического поля $\mathbf{E}$ следующего вида [11]:

$$\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + Q(|\mathbf{E}|), \quad (2.4)$$

где параметр $\varepsilon > 0$ имеет следующий вид [11]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\alpha}, \quad (2.5)$$

и $\varepsilon_0 > 0$ – это фиксированное число, а параметр $\alpha > 0$ достаточно велик. Функция $Q(|\mathbf{E}|)$ описывает тепловую накачку в полупроводнике в самосогласованном электрическом поле $\mathbf{E}$ и хорошо аппроксимируется степенной функцией следующего вида [11]:

$$Q(|\mathbf{E}|) = q_0 |\mathbf{E}|^p, \quad p > 0, \quad q_0 > 0. \quad (2.6)$$

В силу свойства “малости” параметра (2.5) вместо уравнения (2.4) мы рассматриваем следующее уравнение:

$$\Delta T + Q(|\mathbf{E}|) = 0. \quad (2.7)$$

Теперь заметим, что по своему физическому смыслу величина

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \rho$$

описывает распределение связанных зарядов в полупроводнике, которое хорошо аппроксимируется линейной функцией

$$\rho = \rho_0 \phi, \quad \rho_0 > 0. \quad (2.8)$$

Дифференциальным следствием системы уравнений (2.1)–(2.8) является следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \phi - 4\pi \rho_0 \phi) + 4\pi \sigma \Delta \phi - 4\pi \gamma q_0 |\nabla \phi|^p = 0, \quad (2.9)$$

которое элементарными заменами сводится к уравнению типа С.Л. Соболева:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \phi - \phi) + \Delta \phi + \mu |\nabla \phi|^p = 0, \quad p > 0, \quad \mu > 0. \quad (2.10)$$

В следующих пунктах мы будем рассматривать либо задачу Дирихле, либо задачу Неймана, поэтому обсудим физический смысл этих граничных условий. Действительно, однородное условие Дирихле

$$\phi|_{\partial\Omega} = 0$$

означает, что граница полупроводника “заземлена”, а по договоренности электрический потенциал земли равен нулю. Однородное условие Неймана

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n_x} \right|_{\partial\Omega} = 0$$

означает, что нормальная компонента электрического поля на границе полупроводника равна нулю.

3. Задача Дирихле в $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$. Прежде всего сформулируем классическую формулировку задачи, для которой мы дадим обобщенную постановку. Итак, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$ является ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + \mu|\nabla u|^p = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad (3.1)$$

$$u = 0 \quad \text{в } \Gamma_T, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (3.2)$$

где $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$. Причем мы рассматриваем случай, когда $p > 0$.

Теперь сопоставим задаче (3.1), (3.2) обобщенную постановку. Действительно, дадим определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(x)(t)$ класса

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \quad (3.3)$$

называется *слабым обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.2), если при некотором $T > 0$ имеет место следующее равенство:

$$\langle D(u), w \rangle = 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, T], \quad \text{для всех } w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (3.4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а

$$D(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + \mu|\nabla u|^p.$$

и $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Случай $p \in (0, 1]$. Сначала получим первую априорную оценку, из которой сразу же вытекает отсутствие разрушения в данном случае. Если же мы потребуем большей гладкости от начальной функции $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$, то мы докажем и глобальную во времени разрешимость в смысле определения 1 и даже большей гладкости.

Итак, прежде всего возьмем в равенстве (3.4) функцию $w = u(x)(t)$; тогда после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2] + \|\nabla u\|_2^2 = \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p u \, dx, \quad (3.5)$$

где используем обозначение

$$\|v\|_q \equiv \left(\int_{\Omega} |v|^q \, dx \right)^{1/q} \quad \text{при } q \geq 1.$$

Поскольку при $p \in (0, 1]$, очевидно, $p \leq 1 + 2/N$ при $N \geq 3$, в силу неравенства Гёльдера и вложения

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega) \quad \text{при } q = \frac{2}{2-p} \quad (3.6)$$

справедлива следующая цепочка оценок:

$$\begin{aligned} \left| \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p u \, dx \right| &\leq |\mu| \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{p/2} \left(\int_{\Omega} |u|^{2/(2-p)} \, dx \right)^{(2-p)/2} \\ &\leq c_1(\Omega, p) |\mu| \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{(p+1)/2}, \end{aligned}$$

где $c_1 = c_1(\Omega, p)$ – соответствующая постоянная вложения (3.6). Отсюда и из (3.5) вытекает неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2] \leq c_1 |\mu| \|\nabla u\|_2^{p+1}. \quad (3.7)$$

Если ввести обозначение

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} [\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2],$$

то из неравенства (3.7) легко вытекает неравенство

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq c_2 \Phi^\alpha, \quad c_2 = c_1 |\mu| 2^{(p+1)/2}, \quad \alpha = \frac{p+1}{2}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим отдельно два случая $p = 1$ и $p \in (0, 1)$. Действительно, в первом случае из (3.8) вытекает оценка

$$\Phi(t) \leq \Phi_0 e^{c_2 t}, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0). \quad (3.9)$$

Во втором случае из (3.8) приходим к неравенству

$$\Phi(t) \leq (\Phi_0^{(1-p)/2} + c_2 t)^{2/(1-p)}, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0). \quad (3.10)$$

Таким образом, из неравенств (3.9) и (3.10) вытекает, что слабое обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) не разрушается за конечное время при $p \in (0, 1]$. Докажем, что при $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ слабое обобщенное решение существует глобально во времени. С этой целью нам нужно воспользоваться классическим методом Галеркина в сочетании с методом компактности [14].

Шаг 1. Постановка задачи для галеркинских приближений. Итак, возьмем в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ (ортонормированный в $\mathbb{L}^2(\Omega)$) базис $\{w_j\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, составленный из решений задачи на собственные функции

$$\Delta w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

и рассмотрим галеркинские приближения

$$u_m = \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j, \quad (3.11)$$

для которых имеет место следующая задача:

$$\langle D(u_m), w_j \rangle = 0 \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.12)$$

где

$$D(u_m) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u_m - u_m) + \Delta u_m + \mu |\nabla u_m|^p.$$

Кроме того, выполнены начальные условия

$$c_{mj}(0) = \alpha_j, \quad u_m(0) = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{ при } m \rightarrow +\infty. \quad (3.13)$$

Шаг 2. Локальная разрешимость галеркинских приближений. Систему галеркинских приближений (3.12) в силу специального выбора базиса $\{w_j\}$ легко свести к следующему виду:

$$(1 + \lambda_j) \frac{dc_{mj}}{dt} + \lambda_j c_{mj} = F_j(\mathbf{c}_m), \quad F_j(\mathbf{c}_m) = \mu \int_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^m c_{mk} \nabla w_k \right|^p w_j, \quad (3.14)$$

где $\mathbf{c}_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})$ и $j = 1, \dots, m$. В силу теоремы Пеано система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.14) при начальном условии (3.13) имеет по меньшей мере одно решение класса

$$c_{mj}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T_m] \quad \text{при некотором } T_m > 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

Шаг 3. Априорные оценки. У нас уже имеются первые априорные оценки (3.9) и (3.10), справедливые для галеркинских приближений u_m , из которых получаем, что

$$\|\nabla u_m\|_2^2(t) \leq c(T) < +\infty \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad (3.16)$$

а $T > 0$ – произвольное фиксированное. Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств в силу специального выбора базиса $\{w_j\}$:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_m\|_2^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx = \sum_{k,j=1,1}^{m,m} c_{mj} c_{mk} \int_{\Omega} (\nabla w_j, \nabla w_k) dx \\ &= - \sum_{k,j=1,1}^{m,m} c_{mj} c_{mk} \int_{\Omega} w_j \Delta w_k dx \\ &= \sum_{k,j=1,1}^{m,m} c_{mj} c_{mk} \lambda_k \int_{\Omega} w_j w_k dx = \sum_{k=1}^m \lambda_k c_{mk}^2(t). \end{aligned}$$

Из этой цепочки равенств и первой априорной оценки (3.16) вытекает, что время $T_m > 0$ существования решения системы (3.14) на самом деле не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Приступим к выводу *второй априорной оценки*. С этой целью умножим обе части равенства (3.12) на c'_{mj} и просуммируем по $j = 1, \dots, m$. Тогда после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\|\nabla u'_m\|_2^2 + \|u'_m\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 = \mu \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p u'_m dx, \quad (3.17)$$

Имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 \left| \mu \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p u'_m dx \right| &\leq |\mu| \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx \right)^{p/2} \left(\int_{\Omega} |u'_m|^{2/(2-p)} dx \right)^{(2-p)/2} \\
 &\leq |\mu| c_1(\Omega, p) \|\nabla u_m\|_2^p \|\nabla u'_m\|_2 \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{\mu^2 c_1^2}{2\varepsilon} \|\nabla u_m\|_2^{2p}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Из (3.17) и (3.18) вытекает *вторая априорная оценка* при $\varepsilon = 1$:

$$\int_0^T \|\nabla u'_m\|_2^2 dt \leq c(T) < +\infty \tag{3.19}$$

для всех $t \in [0, T]$ и при произвольном фиксированном $T > 0$. К сожалению, для предельного перехода в равенстве (3.12) нам нужна *третья и четвертая априорные оценки*. С этой целью заметим, что поскольку $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$, то $w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$. Теперь предположим, что

$$u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \quad u_m(0) \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega). \tag{3.20}$$

С другой стороны, поскольку

$$w_j = -\frac{1}{\lambda_j} \Delta w_j,$$

из равенства (3.12) вытекает равенство

$$\langle D(u_m), \Delta w_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{3.21}$$

где

$$D(u_m) \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u_m - u_m) + \Delta u_m + \mu |\nabla u_m|^p.$$

Теперь умножим обе части равенства (3.21) на c_{mj} и просуммируем по $j = 1, \dots, m$; тогда после интегрирования по частям получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\Delta u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2] + \|\Delta u_m\|_2^2 = \mu \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p \Delta u_m dx. \tag{3.22}$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\left| \mu \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p \Delta u_m dx \right| \leq |\mu| \left(\int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^{2p} dx \right)^{1/2}. \tag{3.23}$$

Рассмотрим отдельно два случая: $p = 1$ и $p \in (0, 1)$. В первом случае мы легко приходим к неравенству

$$\left| \mu \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p \Delta u_m dx \right| \leq \frac{1}{2} \|\Delta u_m\|_2^2 + \frac{|\mu|^2}{2} \|\nabla u_m\|_2^2. \tag{3.24}$$

Во втором случае справедливо неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^{2p} dx \right)^{1/2} \leq |\Omega|^{(1-p)/2} \|\nabla u_m\|_2^p, \tag{3.25}$$

из которого и из (3.23) приходим к следующему неравенству:

$$\left| \mu \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p \Delta u_m dx \right| \leq \frac{1}{2} \|\Delta u_m\|_2^2 + c_3 \|\nabla u_m\|_2^{2p}, \quad (3.26)$$

где

$$c_3 = \frac{|\Omega|^{1-p} \mu^2}{2},$$

а $|\Omega|$ – это мера Лебега области Ω . Из неравенств (3.22), (3.24) и (3.26) в рассматриваемом случае $p \in (0, 1]$ приходим к *третьей априорной оценке*

$$\|\Delta u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 \leq c(T) < +\infty \quad (3.27)$$

для всех $t \in [0, T]$ при произвольном фиксированном $T > 0$.

Наконец, получим четвертую априорную оценку. С этой целью умножим обе части равенства (3.21) на c'_{mj} и просуммируем по $j = 1, \dots, m$. Тогда после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\|\Delta u'_m\|_2^2 + \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u_m\|_2^2 = \mu \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p \Delta u'_m dx. \quad (3.28)$$

Теперь рассуждая точно так же как и при выводе второй априорной оценки (3.19) приходим к *четвертой априорной оценке*:

$$\int_0^T [\|\Delta u'_m\|_2^2 + \|\nabla u'_m\|_2^2] dt \leq c(T) < +\infty \quad (3.29)$$

для всех $t \in [0, T]$ при любом фиксированном $T > 0$.

Шаг 4. Предельный переход. Из априорных оценок (3.27) и (3.29) в силу известных результатов вытекает, что существует такие подпоследовательность $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ и функция $u(x)(t)$, что имеют место следующие свойства:

$$u_{m_m} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{*-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad (3.30)$$

$$u'_{m_m} \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad (3.31)$$

для любого фиксированного $T > 0$.

Заметим, что имеет место важное утверждение, фактически доказанное в работе [14] (см. также [15]):

ЛЕММА 1. Пусть последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|u_m\|_{\mathbb{V}_0} \leq c, \quad \int_0^T dt \|u'_m\|_{\mathbb{V}_0}^2 \leq c \quad \text{для всех } t \in (0, T), \quad (3.32)$$

где $0 < T < +\infty$ и постоянная $c > 0$ зависит от T , но не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}.$$

Тогда существует функция $u(s) \in \mathbb{W}$ для почти всех $s \in [0, T]$ и имеет место предельное равенство

$$u_{m_k}(s) \rightarrow u(s) \quad \text{сильно в } \mathbb{W} \text{ для почти всех } s \in [0, T].$$

Возьмем в утверждении этой теоремы $\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$, а в качестве $\mathbb{W} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и получим, что

$$u_{m_m}(s) \rightarrow u(s) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{ для почти всех } s \in [0, T]. \quad (3.33)$$

Теперь мы можем перейти к пределу в равенстве (3.12) при $m \rightarrow +\infty$. В отдельном рассмотрении нуждается предельный переход в выражении

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{m_m}|^p w_j \, dx. \quad (3.34)$$

Заметим, что при $p \in (0, 1]$ справедливо неравенство

$$|a^p - b^p| \leq |a - b|^p, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_{m_m}|^p w_j \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^p w_j \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} ||\nabla u_{m_m}|^p - |\nabla u|^p| |w_j| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u_{m_m} - \nabla u|^p |w_j| \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{m_m} - \nabla u|^2 \, dx \right)^{p/2} \left(\int_{\Omega} |w_j|^{2/(2-p)} \, dx \right)^{(p-2)/p}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

из которого в силу (3.33) при каждом фиксированном $j \in \mathbb{N}$ получим требуемый результат. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \in (0, 1]$ и $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$. Тогда существует слабое обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) класса

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$$

для произвольного $T > 0$.

Случай 1 $1 \leq p \leq 1 + 2/N$. Докажем сначала теорему о локальной разрешимости задачи (3.1)–(3.2), понимаемой в слабом обобщенном смысле определения 1, в классе

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

при некотором максимальном $T_0 > 0$, зависящем от $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. С этой целью рассмотрим следующий оператор:

$$\mathbb{A}u \equiv -\Delta u + \mathbb{I}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.36)$$

Используя теорему Браудера–Минти точно так же, как и в работе [15], можно доказать, что этот оператор обратим, причем обратный оператор является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица равной 1. Тогда начально-краевую задачу (3.1), (3.2), понимаемую в слабом смысле определения 1, можно представить в классе

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

в следующем абстрактном виде:

$$\frac{dv}{dt} + \mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v = \mu |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v|^p, \quad v(0) = v_0 = \mathbb{A}^{-1} u_0, \quad v = \mathbb{A}^{-1} u, \quad (3.37)$$

где

$$\mathbb{B}_1 \equiv -\Delta: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad \mathbb{B}_2 \equiv \nabla: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}^2(\Omega). \quad (3.38)$$

Заметим, что оператор

$$\mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \quad (3.39)$$

является липшиц-непрерывным. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|\mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v_1 - \mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v_2\|_* \leq \|\mathbb{A}^{-1} v_1 - \mathbb{A}^{-1} v_2\| \leq \|v_1 - v_2\|_* \quad \text{для всех } v_1, v_2 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (3.40)$$

Докажем теперь ограниченную липшиц-непрерывность оператора $|\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v|^p$. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств при $q = 2/p$ и $p \in [1, 2)$:

$$\begin{aligned} & \| |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v_1|^p - |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v_2|^p \|_* \\ & \leq p \| |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)| \max\{|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)|^{p-1}, |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^{p-1}\} \|_* \\ & \leq c_1(p) \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^q \right. \\ & \quad \left. \times \max\{|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)|^{q(p-1)}, |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^{q(p-1)}\} dx \right)^{1/q} \\ & \leq c_1(p) \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega} \max\{|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)|^{2(p-1)/(2-q)}, |\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)|^{2(p-1)/(2-q)}\} dx \right)^{(2-q)/(2q)} \\ & = \mu(R) \|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_2, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где

$$\mu(R) = c_1 R^{p-1}, \quad R = \max\{\|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_1)\|_2, \|\nabla \mathbb{A}^{-1}(v_2)\|_2\}.$$

Заметим теперь, что в классе

$$v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

мы можем свести нашу задачу (3.37) к интегральному уравнению

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ds G(v)(s), \quad G(v)(s) = -\mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{-1} v(s) + \mu |\mathbb{B}_2 \mathbb{A}^{-1} v(s)|^p, \quad (3.42)$$

и при достаточно малом $T > 0$ в силу оценок (3.40) и (3.41) можно применить метод сжимающих отображений в банаховом пространстве

$$\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

и доказать существование единственного решения интегрального уравнения (3.42) в этом банаховом пространстве. Далее можно воспользоваться “бутстрэп” методом (см., например, [15]) и доказать, что это решение на самом деле из класса

$$\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Затем нужно применить стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений во времени и получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \in [1, 2)$ и $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Тогда найдется такое $T_0 = T_0(u_0) > 0$, что существует единственное решение $u(x)(t)$ задачи (3.1), (3.2), понимаемое в слабом смысле определения 1, в классе

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

причем либо $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место следующее предельное равенство:

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_2(t) = +\infty. \quad (3.43)$$

Теперь займемся выводом априорной оценки, из которой будет следовать, что для достаточно малых начальных данных время $T_0 = +\infty$. Действительно, возьмем в равенстве (3.4) в качестве $w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ само решение $u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и тогда после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \|\nabla u\|_2^2 = \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p u \, dx, \quad \Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2. \quad (3.44)$$

В силу неравенства Фридрихса

$$\lambda_1 \|u\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2$$

из (3.44) вытекает неравенство

$$\frac{d\Phi}{dt} + \lambda_1 \|u\|_2^2 \leq \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p u \, dx. \quad (3.45)$$

Из (3.44) и (3.45) следует неравенство

$$\frac{d\Phi}{dt} + 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} \Phi(t) \leq \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p u \, dx. \quad (3.46)$$

Теперь оценим интеграл в правой части последнего неравенства. Действительно, пусть

$$p \in \left[1, \frac{1+2}{N}\right] \quad \text{при } N \geq 3.$$

Тогда имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^p u \, dx &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{p/2} \left(\int_{\Omega} |u|^{2/(2-p)} \, dx \right)^{(p-2)/2} \\ &\leq c_2(\Omega) \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{p/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &= c_2(\Omega) \|\nabla u\|_2^{p+1} \leq c_2(\Omega) 2^{(p+1)/2} \Phi^{(p+1)/2}(t). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Итак, из (3.46) и (3.47) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{d\Phi}{dt} + 2\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}\Phi(t) \leq c_3\Phi^{(p+1)/2}, \quad c_3 = c_2 2^{(p+1)/2}|\mu|. \quad (3.48)$$

Это неравенство легко интегрируется и мы приходим к оценке сверху

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \frac{e^{-\alpha t}}{[\Phi_0^{(1-p)/2} - (c_3/\alpha)[1 - e^{-\alpha(p-1)t/2}]]^{2/(p-1)}}, \\ \alpha &= 2\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}, \quad c_3 = c_2 2^{(p+1)/2}|\mu|. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Если потребовать, чтобы

$$\Phi_0 \leq \left(\frac{\alpha}{c_2 2^{(p+1)/2}|\mu|} \right)^{2/(p-1)}, \quad \Phi_0 = \Phi(0), \quad \alpha = 2\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}, \quad (3.50)$$

то из неравенства (3.49) вытекает оценка

$$\Phi(t) \leq \left(\frac{\alpha}{c_2 2^{(p+1)/2}|\mu|} \right)^{2/(p-1)}. \quad (3.51)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p \in [1, 1 + 2/N]$ при $N \geq 3$, $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и выполнено неравенство

$$\Phi_0 \leq \left(\frac{\alpha}{c_2 2^{(p+1)/2}|\mu|} \right)^{2/(p-1)}, \quad \Phi_0 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2, \quad \alpha = 2\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}.$$

Тогда существует единственное решение $u(x)(t)$ задачи (3.1), (3.2), понимаемое в слабом смысле определения 1, в классе

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty); \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Случай $p > p_0$. Прежде, чем переходить к детальному рассмотрению этого случая, нам нужно изучить сходимость следующего интеграла – нелинейную “емкость”:

$$a = a(p; \Omega; N) \equiv \frac{1}{\lambda_1} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla \psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)} dx \right)^{(p-1)/p}, \quad (3.52)$$

где функция $\psi_1(x)$ – есть первая собственная функция, соответствующая первому собственному значению $\lambda_1 > 0$ оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$:

$$\Delta \psi_1(x) + \lambda_1 \psi_1(x) = 0, \quad \psi_1(x)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.53)$$

Обозначим через $p_0 = p_0(\Omega; N) > 1$ такое число, что при $p > p_0$ интеграл в правой части равенства (3.52) сходится. Докажем, что существуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, для которых такое p_0 существует. Действительно, пусть $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ –

шар радиуса $R > 0$. Тогда можно вычислить первую собственную функцию и первое собственное значение задачи (3.53) (см., например, [6]). Действительно,

$$\psi_1(x) = \psi_1(|x|) = c_0 r^{(2-N)/2} J_{(N-2)/2}(\lambda_1^{1/2} r), \quad \lambda_1 = \frac{(z_{N1})^2}{R^2}, \quad r = |x|,$$

где z_{N1} – первый корень функции Бесселя $J_{(N-2)/2}(x)$. Заметим теперь, что для функции Бесселя $J_\nu(z)$ справедлива следующая формула Эйлера [16]:

$$J_\nu(z) = \frac{((1/2)z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left\{ 1 - \frac{z^2}{z_{\nu,n}^2} \right\}, \quad (3.54)$$

где $z_{\nu,1} < z_{\nu,2} < \dots < z_{\nu,n} < \dots$ – это корни функции Бесселя $J_\nu(z)$. Из явного вида (3.54) следует, что подынтегральная функция в (3.52) имеет интегрируемую особенность при $p > 2$, т.е. число $p_0 = 2$ в случае шара. Теперь мы предположим, что рассматриваем область Ω , для которой число p_0 существует, и пусть

$$p > p_0. \quad (3.55)$$

Получим достаточные условия разрушения слабого обобщенного решения задачи (3.1), (3.2) класса

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

при таких p . С этой целью в качестве w возьмем $\psi_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в равенстве (3.4). Тогда после интегрирования по частям получим в указанном классе следующее равенство:

$$(\lambda_1 + 1) \frac{dJ}{dt} + \lambda_1 J(t) = \mu \int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi_1(x) dx, \quad J(t) \equiv \int_{\Omega} u(x)(t) \psi_1(x). \quad (3.56)$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \int_{\Omega} u \psi_1(x) dx \right| = \frac{1}{\lambda_1} \left| \int_{\Omega} u \Delta \psi_1 dx \right| = \frac{1}{\lambda_1} \left| \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \psi_1) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla \psi_1| dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} \psi_1^{1/p} |\nabla u| \frac{|\nabla \psi_1|}{\psi_1^{1/p}} dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1} \left(\int_{\Omega} \frac{|\nabla \psi_1|^{p/(p-1)}}{\psi_1^{1/(p-1)}(x)} dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi_1 dx \right)^{1/p} = a \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi_1 dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Таким образом, из неравенств (3.56) и (3.57) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному неравенству:

$$(\lambda_1 + 1) \frac{dJ}{dt} + \lambda_1 J(t) \geq \frac{\mu}{a^p} |J(t)|^p, \quad J(t) \equiv \int_{\Omega} u(x)(t) \psi_1(x), \quad (3.58)$$

которое легко сводится к следующему неравенству:

$$\frac{d\Psi}{dt} \geq \beta e^{-\alpha(p-1)t} |\Psi(t)|^p, \quad \Psi(t) = e^{\alpha t} J(t), \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}, \quad \beta = \frac{\mu}{a^p(\lambda_1 + 1)}, \quad (3.59)$$

из которого вытекает неравенство

$$J(t) \geq \frac{e^{-\alpha t}}{[J_0^{1-p} - (\beta/\alpha)[1 - e^{-\alpha(p-1)t}]]^{1/(p-1)}}, \quad J_0 = J(0). \quad (3.60)$$

Теперь потребуем выполнения начального условия

$$J_0 > \left(\frac{\lambda_1 a^p}{\mu} \right)^{1/(p-1)}. \quad (3.61)$$

Тогда из неравенства (3.60) вытекает существование такого T_∞ , что

$$\limsup_{t \uparrow T_\infty} J(t) = +\infty, \quad T_\infty \leq -\frac{1}{p-1} \ln \left(1 - \frac{\lambda_1 a^p}{\mu} J_0^{1-p} \right). \quad (3.62)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p > p_0$. Тогда при выполнении условия

$$J_0 > \left(\frac{\lambda_1 a^p}{\mu} \right)^{1/(p-1)}, \quad J_0 \equiv \int_{\Omega} u_0(x) \psi_1(x) dx,$$

имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_\infty} J(t) = +\infty, \quad T_\infty \leq -\frac{1}{p-1} \ln \left(1 - \frac{\lambda_1 a^p}{\mu} J_0^{1-p} \right),$$

где

$$J(t) \equiv \int_{\Omega} u(x)(t) \psi_1(x) dx.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.
- [2] С. И. Похожаев, “О разрушении решений уравнения Курамото–Сивашинского”, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 97–106.
- [3] V. A. Galaktionov, E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “On global solutions and blow-up for Kuramoto–Sivashinsky-type models, and well-posed Burnett equations”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **70**:8 (2009), 2930–2952.
- [4] S. I. Pohozaev, “Critical nonlinearities in partial differential equations”, *Milan J. Math.*, **77**:1 (2009), 127–150.
- [5] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [6] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [7] M. Chipot, F. B. Weissler, “Some blowup results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term”, *SIAM J. Math. Anal.*, **20**:4 (1989), 886–907.
- [8] M. Fila, “Remarks on blow up for a nonlinear parabolic equation with a gradient term”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:3 (1991), 795–801.

- [9] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Springer, New York, 2006.
- [10] P. Souplet, F. B. Weissler, “Poincaré’s inequality and global solutions of a nonlinear parabolic equation”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **16**:3 (1999), 335–371.
- [11] Ф. Г. Басс, В. С. Бочков, Ю. С. Гуревич, *Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках*, Наука, М., 1984.
- [12] В. Л. Бонч-Бруевич В, С. Г. Калашников, *Физика полупроводников*, Наука, М., 1990.
- [13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
- [14] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [15] М. О. Корпусов, *Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях*, УРСС, М., 2011.
- [16] Г. Н. Ватсон, *Теория Бесселевых функций*, Ч. 1, ИЛ, М., 1949.

М. О. Корпусов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило

26.03.2012

Исправленный вариант

08.06.2012