

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

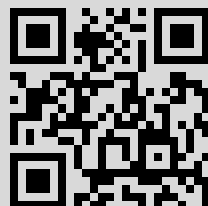
М. О. Корпусов, Разрушение решений обобщенного уравнения Клейна–Гордона с сильной диссипацией, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 2, 109–138

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 13:27:52



УДК 517.957

М. О. Корпусов

Разрушение решений обобщенного уравнения Клейна–Гордона с сильной диссипацией

Изучен вопрос о достаточных условиях разрушения решений одной модельной начально-краевой задачи, при этом использован модифицированный метод Х. А. Левина для получения достаточных условий разрушения решений за конечное время.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: разрушение, нелинейные уравнения Клейна–Гордона, уравнения соболевского типа.

DOI: 10.4213/im7947

§ 1. Введение

В настоящей работе мы рассмотрим однородную задачу Дирихле для следующего обобщенного уравнения Клейна–Гордона с сильной диссипацией:

$$u_{tt} - \mu \Delta u_t - \operatorname{div}(h(x, |\nabla u|) \nabla u) + g(x, u) = f(x, u), \quad \mu > 0. \quad (1.1)$$

Нашей целью будет получение результата о разрушении с произвольной положительной начальной энергией решения соответствующей смешанной краевой задачи с однородным условием Дирихле на границе ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad (1.2)$$

причем область Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$.

Отметим, что в физических задачах часто возникает следующее волновое уравнение с сильной диссипацией [1]:

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = 0,$$

а соответствующие нелинейные уравнения имеют вид [1]

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = L_1(u^2) + L_2(u^3) + \dots$$

Рассмотрение начально-краевой задачи (1.1), (1.2) обусловлено тем, что она возникает в теории акустических волн (см. [1], где, однако, рассматривается только линейная часть данного уравнения). При рассмотрении нелинейных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00376-а), а также Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов наук” (грант МД-99.2009.1).

волн можно добавить и соответствующую нелинейную часть. Кроме того, мы в названии статьи используем термин “обобщенное уравнение Клейна–Гордона” потому, что мы рассматриваем такое уравнение Клейна–Гордона, к которому добавлено сильно диссипативное слагаемое, хотя полученное уравнение формально не является гиперболическим.

Отметим, что существуют три основных метода исследования явления разрушения: энергетический метод Х. А. Левина [2]–[8], метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [9]–[11] и метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый А. А. Самарским, В. А. Галактионовым, С. П. Курдюмовым и А. П. Михайловым в работах [12], [13].

§ 2. Дифференциальное неравенство

Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad (2.1)$$

где

$$\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]), \quad \Phi(t) \geq 0, \quad \Phi(0) > 0.$$

Разделив обе части неравенства (2.1) на $\Phi^{1+\alpha}$, после некоторых преобразований получим соотношение

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right)' + \gamma\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \beta\Phi^{-\alpha} \geq 0,$$

из которого, в свою очередь, получим

$$\frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \frac{\gamma}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})' + \beta\Phi^{-\alpha} \geq 0. \quad (2.2)$$

Введем обозначение

$$Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t). \quad (2.3)$$

С учетом данного обозначения из (2.2) получим, что

$$Z'' + \gamma Z' - \beta(\alpha - 1)Z^{\alpha_1} \leq 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (2.4)$$

Введем новое обозначение

$$Y(t) = e^{\gamma t}Z(t), \quad (2.5)$$

с учетом которого из (2.4) получим

$$Y'' - \gamma Y' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}. \quad (2.6)$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$Y' = (\Phi^{1-\alpha}e^{\gamma t})' = \Phi^{-\alpha}(\alpha - 1)e^{\gamma t}\left[-\Phi'(t) + \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(t)\right]. \quad (2.7)$$

Пусть выполнено следующее начальное условие:

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0); \quad (2.8)$$

тогда найдется такое $t_0 > 0$, что будет иметь место неравенство

$$\Phi'(t) > \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(t), \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.9)$$

Следовательно, из неравенства (2.9) и выражения (2.7) получим, что $Y'(t) < 0$ при $t \in [0, t_0)$. Поскольку $-\gamma Y'(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_0)$, из (2.6) получим следующее неравенство:

$$Y'' - \beta(\alpha-1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha-1}, \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.10)$$

Теперь мы умножим обе части неравенства (2.10) на Y' и получим

$$Y'Y'' - \beta(\alpha-1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' \geq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha-1}, \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.11)$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] + \delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} - \alpha_1 e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y',$$

из которого получаем

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{1}{1+\alpha_1} \frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] + \frac{1}{1+\alpha_1} \delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}. \quad (2.12)$$

Подставив выражение (2.12) в (2.11), получим следующее неравенство:

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha-1)}{1+\alpha_1} \frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] - \frac{\beta(\alpha-1)\delta}{1+\alpha_1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \geq 0, \quad t \in [0, t_0],$$

из которого следует неравенство

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha-1)}{1+\alpha_1} \frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] \geq 0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (2.13)$$

Интегрируя неравенство (2.13), мы получим

$$(Y')^2 \geq A^2 + \frac{2\beta(\alpha-1)^2}{2\alpha-1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \geq A^2, \quad (2.14)$$

где

$$A^2 \equiv (Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha-1)^2}{2\alpha-1} Y^{1+\alpha_1}(0). \quad (2.15)$$

Пусть теперь выполнено условие

$$A^2 > 0.$$

После ряда преобразований последнее условие преобразуется к следующему виду:

$$A^2 = (\alpha-1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1} \Phi(0) \right] > 0. \quad (2.16)$$

Следовательно, условие $A^2 > 0$ эквивалентно условию

$$\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0). \quad (2.17)$$

Стало быть, согласно неравенствам (2.14) и (2.16) мы приходим к выводу о том, что

$$Y'(t) \leq -A < 0 \Rightarrow \Phi'(t_0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t_0).$$

Тогда $Y'(t_0) < 0$. Следовательно, используя алгоритм продолжения во времени, получим, что $Y'(t) < 0$ для всех $t \in [0, T]$. Значит, справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |Y'| \geq A > 0 &\Rightarrow Y'(t) \leq -A \Rightarrow Y(t) \leq Y(0) - At \\ &\Rightarrow \Phi^{1-\alpha}(t) \leq e^{-\gamma t} [\Phi^{1-\alpha}(0) - At] \\ &\Rightarrow \Phi(t) \geq \frac{e^{\gamma t/(\alpha-1)}}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{1/(\alpha-1)}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$ и выполнены условие

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad (2.19)$$

и условие (2.17), причем $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(0) > 0$. Тогда время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство

$$\begin{aligned} T \leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1}, \\ A^2 \equiv (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right], \end{aligned}$$

причем $\limsup_{t \uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty$.

§ 3. Локальная разрешимость

Прежде всего сформулируем некоторые условия для функций $h(x, s)$, $g(x, s)$ и $f(x, s)$.

Условия для функции $h(x, s)$ следующие:

- (i)₁ $h(x, s): \Omega \times \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;
- (ii)₁ имеют место неравенства для почти всех $x \in \Omega$:

$$c_2 s^{p-2} \leq h(x, s) \leq c_1 + c_2 s^{p-2}, \quad p \geq 2, \quad (3.1)$$

кроме того, $h(x, s) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, +\infty)$ для почти всех $x \in \Omega$, причем

$$|sh'_s(x, s)| \leq c_1 + c_2 s^{p-2}, \quad p \geq 2; \quad (3.2)$$

- (iii)₁ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ имеют место следующие неравенства:

$$0 \leq \int_{\Omega} h(x, |\nabla v(x)|) |\nabla v(x)|^2 dx \leq \theta_2 \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla v(x)|) dx, \quad \theta_2 > 0, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{H}(x, s) = \int_0^s h(x, \sigma) \sigma d\sigma$;

(iv)₁ функция $h(x, s)$ для почти всех $x \in \Omega$ является равномерно монотонной в следующем смысле:

$$(h(x, |\xi|)\xi - h(x, |\eta|)\eta, \xi - \eta) \geq a|\xi - \eta|^p \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \quad (3.4)$$

Отметим, что в силу условия (3.1) имеем

$$\operatorname{div}(h(x, |\nabla u|)\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

где оператор $\operatorname{div}(\cdot)$ понимается в слабом смысле. Именно, имеет место следующее равенство:

$$\langle \operatorname{div}(v), w \rangle_0 = - \int_{\Omega} (v, \nabla w) dx, \quad v \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p \geq 2,$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Условия для функции $g(x, s)$ следующие:

- (i)₂ $g(x, s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;
- (ii)₂ имеет место неравенство для почти всех $x \in \Omega$

$$|g(x, s)| \leq c_3 + c_4 |s|^{q_1+1}, \quad q_1 \in [0, p^* - 2); \quad (3.5)$$

(iii)₂ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ имеют место следующие неравенства:

$$b \int_{\Omega} |v|^{q_1+2}(x) dx \leq \int_{\Omega} v(x) g(x, v(x)) dx \leq \theta_3 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, v(x)) dx, \quad (3.6)$$

где $\theta_3 > 0$, $b > 0$ и $\mathcal{G}(x, s) = \int_0^s g(x, \sigma) d\sigma$;

(iv)₂ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_g(\cdot) = g(x, \cdot)$, порожденного функцией $g(x, u)$:

$$\|\mathcal{N}_g(u_1) - \mathcal{N}_g(u_2)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leq \mu_1(R_1) \|u_1 - u_2\|_{q_1+2}, \quad (3.7)$$

где $\mu_1(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и $R_1 = \max\{\|u_1\|_{q_1+2}, \|u_2\|_{q_1+2}\}$.

Условия для функции $f(x, s)$ следующие:

- (i)₃ $f(x, s) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией;
- (ii)₃ имеет место неравенство сверху для почти всех $x \in \Omega$

$$|f(x, s)| \leq c_5 + c_6 |s|^{q_2+1}, \quad q_2 \in (0, p^* - 2); \quad (3.8)$$

(iii)₃ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} f(x, v(x)) v(x) dx \geq \theta_1 \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, v(x)) dx, \quad \theta_1 > 2, \quad (3.9)$$

где $\mathcal{F}(x, s) = \int_0^s f(x, \sigma) d\sigma$;

(iv)₃ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_f(\cdot) = f(x, \cdot)$, порожденного функцией $f(x, u)$:

$$\|\mathcal{N}_f(u_1) - \mathcal{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leq \mu_2(R_2)\|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \quad (3.10)$$

где $\mu_2(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и $R_2 = \max\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\}$.

Здесь мы использовали стандартное обозначение

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{при } N > p, \\ +\infty & \text{при } N \leq p, \end{cases}$$

причем очевидно, что $p^* > 2$ при $p \geq 2$.

Все постоянные в сформулированных условиях положительны, если специально не оговорено противное.

Дадим определение слабого обобщенного решения для задачи, в классической постановке имеющей следующий вид:

$$u_{tt} - \mu \Delta u_t - \operatorname{div}(h(x, |\nabla u|) \nabla u) + g(x, u) = f(x, u), \quad (3.11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x). \quad (3.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слабым обобщенным решением задачи (3.11), (3.12) назовем решение $u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u'(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, следующей задачи:

$$\left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u' w(x) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla w) dx + \int_{\Omega} [g(x, u) - f(x, u)] w(x) dx + \int_{\Omega} (h(x, |\nabla u|) \nabla u, \nabla w(x)) dx, \varphi(t) \right\rangle \right\rangle = 0, \quad (3.13)$$

для всех

$$w(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \varphi(t) \in \mathcal{D}(0, T), \quad T > 0, \quad (3.14)$$

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad u'(x)(0) = u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (3.15)$$

где $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ – скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(0, T)$ и соответствующим пространством распределений $\mathcal{D}'(0, T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее будет доказано, что дополнительно имеет место включение $u'' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-s}(\Omega))$ при достаточно большом $s > 0$. Тогда после изменения функции на подмножестве из $[0, T]$, имеющем нулевую меру Лебега, выполнено

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-s}(\Omega)),$$

и поэтому начальные условия имеют смысл.

Здесь и далее мы используем обозначение $v'(x)(t)$ для частной производной по времени.

Доказательство локальной разрешимости задачи (3.13), (3.14) проведем методом Галёркина в сочетании с методами монотонности и компактности [14] в несколько шагов.

Шаг 1. Постановка задачи для галеркинских приближений. Рассмотрим задачу о галеркинских приближениях

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u_m'' + g(x, u_m) - f(x, u_m)] w_j(x) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u_m', \nabla w_j) dx \\ + \int_{\Omega} (h(x, |\nabla u_m|) \nabla u_m, \nabla w_j(x)) dx = 0, \quad w_j(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} u_m(t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathcal{C}^{(2)}([0, T_m]), \\ \{w_k(x)\} \subset \mathbb{H}_0^s(\Omega), \quad s > 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

– базис соответствующих собственных функций оператора $(-\Delta)^s$. Данный базис можно выбрать ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Кроме того, если $s > 0$ – достаточно большое число, имеют место следующие цепочки непрерывных и плотных вложений:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^s(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \\ \mathbb{H}_0^s(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \\ \mathbb{H}_0^s(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \\ \mathbb{H}_0^s(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega). \end{aligned}$$

Пусть, кроме того,

$$u_{0m} = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) w_k(x) \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad (3.18)$$

$$u_{1m} = \sum_{k=1}^m c'_{mk}(0) w_k(x) \rightarrow u_1 \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(\Omega). \quad (3.19)$$

Шаг 2. Априорные оценки. Теперь умножим обе части равенства (3.16) на c'_{mj} , просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_m'\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx \right] + \mu \|\nabla u_m'\|_2^2 \\ = \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m' dx. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Интегрируя обе части равенства (3.20) по t , получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_m'\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx + \mu \int_0^t \|\nabla u_m'\|_2^2 ds \\ = \overline{E}_m(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m' dx ds, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\bar{E}_m(0) = \frac{1}{2} \|u_{1m}\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx. \quad (3.22)$$

Докажем, что имеет место предельное равенство

$$\bar{E}_m(0) \rightarrow \bar{E}(0) \equiv \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (3.23)$$

Действительно, в силу (3.19) имеем

$$\|u_{1m}\|_2^2 \rightarrow \|u_1\|_2^2 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (3.24)$$

Заметим, что в силу (3.1) и (3.5) имеют место неравенства

$$|\mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|)| \leq \frac{c_1}{2} |\nabla u_{0m}|^2 + \frac{c_2}{p} |\nabla u_{0m}|^p \leq \left(\frac{c_1}{2}\right)^{(p-2)/2} \frac{p-2}{p} + \frac{c_2+2}{p} |\nabla u_{0m}|^p, \quad (3.25)$$

$$|\mathcal{G}(x, u_{0m})| \leq c_3 |u_{0m}| + \frac{c_4}{q_1+2} |u_{m0}|^{q_1+2} \leq \frac{q_1+1}{q_1+2} c_3^{(q_1+2)/(q_1+1)} + \frac{c_4+1}{q_1+2} |u_{m0}|^{q_1+2}. \quad (3.26)$$

Теперь воспользуемся свойством (3.18) и получим в силу теоремы М. А. Красносельского для операторов Немыцкого (см., например, [15]), что

$$\int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx, \quad (3.27)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (3.28)$$

Стало быть, предельное равенство (3.23) доказано. Следовательно, при фиксированных u_0 и u_1 найдется такое положительное число $d = d(u_0, u_1)$, что имеют место неравенства

$$|\bar{E}_m(0)| \leq d < +\infty. \quad (3.29)$$

Воспользуемся неравенствами (3.5), (3.6), (3.8), (3.9) и получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'_m|^2 dx + \frac{c_2}{\theta_2} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx + \frac{b}{\theta_3} \int_{\Omega} |u_m|^{q_1+2} dx + \mu \int_0^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds \\ \leq d + \int_0^t \int_{\Omega} (c_5 + c_6 |u_m|^{q_2+1}) |u'_m| dx dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Рассмотрим два основных случая:

- (I) $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$, что имеет место при $q_1 \geq 2q_2$;
- (II) $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$, что имеет место при $2q_2+2 \leq p^*$.

Случай (I). Справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |u_m|^{q_2+1} |u'_m| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_m|^{2q_2+2} dx \right)^{1/2} \leq c_7 \|u'_m\|_2 \|u_m\|_{q_1+2}^{q_2+1}. \quad (3.31)$$

Значит, из (3.30) с учетом (3.31) приходим к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\|u'_m\|_2^2 + \frac{b}{\theta_3} \int_{\Omega} |u_m|^{q_1+2} dx \leq d + \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_m\|_2^2 ds + \frac{c_5^2}{2} t + c_8 \int_0^t \|u'_m\|_2 \|u_m\|_{q_1+2}^{q_2+1} ds. \quad (3.32)$$

Введем функционал

$$\Psi_{1m}(t) \equiv \frac{1}{2}\|u'_m\|_2^2 + \frac{b}{\theta_3} \int_{\Omega} |u_m|^{q_1+2} dx. \quad (3.33)$$

Тогда из (3.32) получим следующую оценку:

$$\Psi_{1m}(t) \leq d + \int_0^t \Psi_{1m}(s) ds + \frac{c_5^2}{2} T + c_9 \int_0^t \Psi_{1m}^{1/2}(s) \Psi_{1m}^{(q_2+1)/(q_1+2)}(s) ds. \quad (3.34)$$

Имеет место цепочка соотношений

$$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{q_2+1}{q_1+2} = \frac{q_1+2q_2+4}{2q_1+4} \leq 1.$$

Теперь перепишем неравенство (3.34) следующим образом:

$$\Psi_{1m}(t) \leq d + \int_0^t \Psi_{1m}(s) ds + \frac{c_5^2}{2} T + c_9 \int_0^t \Psi_{1m}^{r_1}(s) ds. \quad (3.35)$$

При $r_1 \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$1 \cdot \Psi_{1m}^{r_1} \leq r_1 + (1 - r_1) \Psi_{1m}, \quad (3.36)$$

в силу которого из (3.35) получим при $r_1 \in (0, 1]$ требуемое неравенство

$$\Psi_{1m}(t) \leq d + c_{10} T + c_{11} \int_0^t \Psi_{1m}(s) ds. \quad (3.37)$$

Воспользуемся неравенством Гронволла–Беллмана–Бихари [16] и получим следующую *априорную оценку*:

$$\Psi_{1m}(t) \leq c_{12}(T) < +\infty \quad (3.38)$$

для любых $t \in [0, T]$ при произвольном фиксированном $T > 0$, причем c_{12} не зависит от $m \in \mathbb{N}$. В силу (3.30) из априорной оценки (3.38) получаем

$$\|\nabla u_m\|_p^p + \int_0^T \|\nabla u'_m\|_2^2 dt \leq c_{13}(T) < +\infty \quad (3.39)$$

для любых $t \in [0, T]$ при любом фиксированном $T > 0$, причем c_{13} не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Случай (II). Имеет место вложение

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega). \quad (3.40)$$

Справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |u_m|^{q_2+1} |u'_m| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_m|^{2q_2+2} dx \right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

В силу вложения (3.40) и неравенства (3.41) мы получим из оценки (3.30) следующую цепочку выражений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u'_m\|_2^2 + \frac{c_2}{\theta_2} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx \\ & \leq d + \frac{c_5^2}{2} t + \int_0^t \frac{1}{2} \|u'_m\|_2^2(s) ds + c_{14} \int_0^t \|u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_p^{q_2+1} ds. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Введем следующий функционал:

$$\Psi_{2m}(t) \equiv \frac{1}{2} \|u'_m\|_2^2 + \frac{c_2}{\theta_2} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^p dx. \quad (3.43)$$

Теперь рассмотрим следующие два подслучая:

(II)₁ $p < 2q_2 + 2$;

(II)₂ $p \geq 2q_2 + 2$.

Случай (II)₁. В силу вложения (3.40) приходим к неравенству

$$\Psi_{2m}(t) \leq d + \frac{c_5^2}{2} T + c_{15} \int_0^t [\Psi_{2m}(s) + \Psi_{2m}^{r_2}(s)] ds, \quad (3.44)$$

где

$$r_2 = \frac{p + 2q_2 + 2}{2p}, \quad (3.45)$$

причем, так как $p < 2q_2 + 2$, имеем $r_2 > 1$. В силу арифметического неравенства Гёльдера имеет место неравенство

$$1 \cdot \Psi_{2m} \leq \frac{r_2 - 1}{r_2} + \frac{1}{r_2} \Psi_{2m}^{r_2}. \quad (3.46)$$

Таким образом, из (3.44) получаем неравенство

$$\Psi_{2m}(t) \leq d + c_{16} T + c_{17} \int_0^t \Psi_{2m}^{r_2}(s) ds, \quad (3.47)$$

из которого в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари получим

$$\Psi_{2m}(t) \leq \frac{d + c_{16} T}{[1 - (r_2 - 1)(d + c_{16} T)^{r_2-1} c_{17} t]^{1/(r_2-1)}}, \quad (3.48)$$

а отсюда, в свою очередь, получаем следующую априорную оценку:

$$\Psi_{2m}(t) \leq c_{18}(T) < +\infty \quad (3.49)$$

для всех $t \in [0, T]$ при таком условии для $T > 0$, что $(r_2 - 1)(d + c_{16} T)^{r_2-1} c_{17} T < 1$, причем c_{18} не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Случай (II)₂. В этом случае $r_2 \leq 1$. Пусть сначала $r_2 = 1$; тогда из соотношения (3.44) имеем

$$\Psi_{2m}(t) \leq d + \frac{c_5^2}{2}T + 2c_{15} \int_0^t \Psi_{2m}(s) ds. \quad (3.50)$$

Тогда в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [16] мы получим неравенство

$$\Psi_{2m}(t) \leq \left(d + \frac{c_5^2}{2}T\right) \exp\{2c_{15}t\} \quad (3.51)$$

для всех $t \in [0, T]$ и любого фиксированного $T > 0$. Тем самым, получили априорную оценку

$$\Psi_{2m}(t) \leq c_{18}(T) < +\infty, \quad t \in [0, T], \quad (3.52)$$

для всех $T > 0$.

Рассмотрим теперь случай $r_2 < 1$; тогда в силу арифметического неравенства Гёльдера получим

$$\Psi_{2m}^{r_2} \cdot 1 \leq r_2 \Psi_{2m} + 1 - r_2. \quad (3.53)$$

В этом случае из неравенства (3.44) имеем

$$\Psi_{2m}(t) \leq d + \left(\frac{c_5^2}{2} + c_{15}(1 - r_2)\right)T + c_{15}(1 + r_2) \int_0^t \Psi_{2m}(s) ds, \quad (3.54)$$

откуда в силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари [16] получим

$$\Psi_{2m}(t) \leq \left(d + \left(\frac{c_5^2}{2} + c_{15}(1 - r_2)\right)T\right) \exp\{c_{15}(1 + r_2)t\}$$

для всех $t \in [0, T]$ при произвольном фиксированном $T > 0$. Следовательно, при любом фиксированном $T > 0$ мы пришли к априорной оценке

$$\Psi_{2m}(t) \leq c_{19}(T) < +\infty, \quad t \in [0, T]. \quad (3.55)$$

Кроме того, из априорных оценок (3.49), (3.52) и (3.55) и неравенства (3.32) получим еще одну априорную оценку

$$\int_{\Omega} |u_m|^{q_1+2} dx \leq c_{20}(T) < +\infty \quad (3.56)$$

для всех $t \in [0, T]$, причем $T > 0$ удовлетворяет условию малости в случае априорной оценки (3.49) и сколь угодно велико в случае оценок (3.52) и (3.55).

Наконец, в случаях (I) и (II) имеет место следующая априорная оценка:

$$\int_{\Omega} |u_m|^{2q_2+2} dx + \int_0^T \|\nabla u'_m\|_2^2 dt \leq c_{21}(T) < +\infty, \quad (3.57)$$

где величина $T > 0$ удовлетворяет условию малости в случае априорных оценок (3.38), (3.49) и сколь угодно велико в случае оценок (3.52) и (3.55).

Введем обозначение

$$\mathbb{A}(u) = -\operatorname{div}(h(x, |\nabla u|) \nabla u).$$

Заметим, что в силу свойства (3.1) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}(u)\|_{-1,p'} &= \sup_{\|\nabla v\|_p \leq 1} |\langle \mathbb{A}(u), v \rangle| = \sup_{\|\nabla v\|_p \leq 1} \left| \int_{\Omega} (h(x, |\nabla u|) \nabla u, \nabla v) dx \right| \\ &\leq \sup_{\|\nabla v\|_p \leq 1} \left[c_1 \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx + c_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx \right] \\ &\leq \sup_{\|\nabla v\|_p \leq 1} [c_1 \|\nabla v\|_p \|\nabla u\|_{p'} + c_2 \|\nabla v\|_p \|\nabla u\|_p^{p-1}] \\ &\leq c_1 \|\nabla u\|_{p'} + c_2 \|\nabla u\|_p^{p-1} \leq c_{22} [\|\nabla u\|_p + \|\nabla u\|_p^{p-1}], \end{aligned} \quad (3.58)$$

поскольку $p \geq 2$ и, следовательно, $p' = p/(p-1) \leq p$. Таким образом, в силу соотношения (3.58) получаем еще одну априорную оценку

$$\|\mathbb{A}(u_m)\|_{-1,p'} \leq c_{22} [\|\nabla u_m\|_p + \|\nabla u_m\|_p^{p-1}] \leq c_{23}(T) < +\infty, \quad (3.59)$$

где, как обычно, в ряде случаев $T > 0$ достаточно мало, а в других – сколь угодно велико.

Наконец,

$$|u_m|^{q_1} u_m \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega), \quad (3.60)$$

$$|u_m|^{q_2} u_m \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega). \quad (3.61)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы получить априорную оценку для u_m'' . С этой целью воспользуемся техникой работ [17] и [18]. Пусть $V_m = \{w_1, \dots, w_m\}$ – линейная оболочка системы функций $\{w_k\}$ при $k = \overline{1, m}$. Введем следующий проектирующий оператор:

$$\mathbb{P}_m: \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow V_m \subset \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{P}_m z = \sum_{k=1}^m (z, w_k) w_k, \quad z(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega),$$

где $(z, w_k) = \int_{\Omega} z(x) w_k(x) dx$. С учетом введенного оператора $\mathbb{P}_m$ систему галеркинских приближений (3.16) можно переписать в следующем виде:

$$\langle u_m'' - \mu \Delta u_m' + \mathbb{A}(u_m) + \mathcal{N}_g(u_m) - \mathcal{N}_f(u_m), \mathbb{P}_m z \rangle_s = 0 \quad \forall z \in \mathbb{H}_0^s(\Omega), \quad (3.62)$$

где $\mathbb{A}(v) = -\operatorname{div}(h(x, |\nabla v|) \nabla v)$, а $\mathcal{N}_g(\cdot)$ и $\mathcal{N}_f(\cdot)$ – операторы Немыцкого, порожденные каратеодориевыми функциями $g(x, u)$ и $f(x, u)$ соответственно, $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ – скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-s}(\Omega)$. Тогда из (3.62) получим следующее равенство:

$$\mathbb{P}_m^t (u_m'' - \mu \Delta u_m' + \mathbb{A}(u_m) + \mathcal{N}_g(u_m) - \mathcal{N}_f(u_m)) = 0. \quad (3.63)$$

Поскольку

$$u_m'' = \sum_{k=1}^m c_{mk}'' w_k, \quad \mathbb{P}_m^t w_k = \mathbb{P}_m w_k = w_k,$$

имеет место равенство

$$u_m'' = -\mathbb{P}_m^t(-\mu\Delta u_m' + \mathbb{A}(u_m) + \mathcal{N}_g(u_m) - \mathcal{N}_f(u_m)). \quad (3.64)$$

Заметим, можно доказать, что $\mathbb{P}_m \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^s(\Omega), \mathbb{H}_0^s(\Omega))$ и $\mathbb{P}_m^t \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{-s}(\Omega), \mathbb{H}^{-s}(\Omega))$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Наконец, в силу исходного выбора достаточно большой величины $s > 0$ имеют место следующие цепочки непрерывных и плотных вложений:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_0^s(\Omega) &\stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \\ \mathbb{H}_0^s(\Omega) &\stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \\ \mathbb{H}_0^s(\Omega) &\stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \\ \mathbb{H}_0^s(\Omega) &\stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-s}(\Omega), \end{aligned}$$

поэтому имеют место следующие априорные оценки:

$$\int_0^T \|\mathbb{P}_m^t \Delta u_m'\|_{-s}^2 dt \leq c_{21} \int_0^T \|\Delta u_m'\|_{-1}^2 dt \leq c_{22} \int_0^T \|\nabla u_m'\|_2^2 dt \leq c_{23}(T) < +\infty, \quad (3.65)$$

$$\|\mathbb{P}_m^t \mathbb{A}(u_m)\|_{-s} \leq c_{24} \|\mathbb{A}(u_m)\|_{-1,p'} \leq c_{25}(T) < +\infty, \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_m^t \mathcal{N}_g(u_m)\|_{-s} &\leq c_{26} \|\mathcal{N}_g(u_m)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \\ &\leq c_{27} + c_{28} \|u_m\|_{q_1+2}^{q_1+1} \leq c_{29}(T) < +\infty, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_m^t \mathcal{N}_f(u_m)\|_{-s} &\leq c_{30} \|\mathcal{N}_f(u_m)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \\ &\leq c_{31} + c_{32} \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+1} \leq c_{33}(T) < +\infty, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где через $\|\cdot\|_{-s}$ обозначена норма в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^{-s}(\Omega)$. Из соотношений (3.64)–(3.68) мы приходим к априорной оценке

$$\int_0^T \|u_m''\|_{-s}^2 dt \leq c_{35}(T) < +\infty, \quad (3.69)$$

причем в зависимости от полученных ранее априорных оценок либо $T > 0$ достаточно мало, либо $T > 0$ сколь угодно велико.

Итак, нужные априорные оценки (3.38), (3.39), (3.49), (3.52), (3.55)–(3.57), (3.59)–(3.61) получены.

Шаг 3. Локальная разрешимость. Перепишем равенство (3.16) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 c_m}{dt^2} + B \frac{dc_m}{dt} &= f_1(c_m) + f_2(c_m) + f_3(c_m), \\ c_m &= (c_{m1}, \dots, c_{mm})^t, \quad A = \|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m, \quad B = \|\beta_{kj}\|_{k,j=1}^m, \end{aligned} \quad (3.70)$$

где

$$\alpha_{kj} = \int_{\Omega} w_k(x) w_j(x) dx, \quad \beta_{kj} = \mu \int_{\Omega} (\nabla w_k, \nabla w_j) dx,$$

$$f_1(c_m) = - \int_{\Omega} (h(x, |\nabla u_m|) \nabla u_m, \nabla w_j) dx,$$

$$f_2(c_m) = - \int_{\Omega} g(x, u_m) w_j dx, \quad f_3(c_m) = \int_{\Omega} f(x, u_m) w_j dx.$$

Пусть

$$u_m^1 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^1 w_k, \quad u_m^2 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^2 w_k,$$

$$c_m^1 = (c_{m1}^1, \dots, c_{mm}^1)^t, \quad c_m^2 = (c_{m1}^2, \dots, c_{mm}^2)^t.$$

Справедливо неравенство

$$|f_1(c_m^1) - f_1(c_m^2)| \leq \int_{\Omega} |\nabla w_j| |h(x, |\nabla u_m^1|) \nabla u_m^1 - h(x, |\nabla u_m^2|) \nabla u_m^2| dx. \quad (3.71)$$

Пусть $s_1 = |\nabla u_m^1|$, $s_2 = |\nabla u_m^2|$. Потребуем сначала, чтобы $s_1 < s_2$, тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|h(x, s_1) \nabla u_m^1 - h(x, s_2) \nabla u_m^2|$$

$$\leq |h(x, s_1) - h(x, s_2)| |\nabla u_m^1| + |h(x, s_2)| |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|$$

$$\leq |h'_s(x, s_3)| |s_1 - s_2| |\nabla u_m^1| + |h(x, s_2)| |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|, \quad (3.72)$$

где $s_3 \in [s_1, s_2]$. Продолжим цепочку неравенств (3.72):

$$|h(x, s_1) \nabla u_m^1 - h(x, s_2) \nabla u_m^2|$$

$$\leq |s_3 h'_s(x, s_3)| |s_1 - s_2| s_3^{-1} |\nabla u_m^1| + |h(x, s_2)| |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|$$

$$\leq [c_1 + c_2 s_2^{p-2}] |s_1 - s_2| s_1^{-1} |\nabla u_m^1| + [c_1 + c_2 s_2^{p-2}] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|$$

$$\leq 2[c_1 + c_2 s_2^{p-2}] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|. \quad (3.73)$$

Аналогично рассматривается случай, когда $s_2 < s_1$. Таким образом, из соотношений (3.71) и (3.73) получаем следующую цепочку неравенств:

$$|f_1(c_m^1) - f_1(c_m^2)| \leq 2 \int_{\Omega} |\nabla w_j| [c_1 + c_2 \max\{|\nabla u_m^1|^{p-2}, |\nabla u_m^2|^{p-2}\}] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| dx$$

$$\leq d_{mj}^1 |c_m^1 - c_m^2|, \quad (3.74)$$

$$d_{mj}^1 = 2 \int_{\Omega} |\nabla w_j|^2 [c_1 + c_2 \max\{|\nabla u_m^1|^{p-2}, |\nabla u_m^2|^{p-2}\}] dx.$$

Итак, мы получили неравенство

$$|f_1(c_m^1) - f_1(c_m^2)| \leq d_{mj}^1 |c_m^1 - c_m^2|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.75)$$

Рассмотрим теперь функцию $f_2(c_m)$. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|f_2(c_m^1) - f_2(c_m^2)| \leq \int_{\Omega} |\mathcal{N}_g(u_m^1) - \mathcal{N}_g(u_m^2)| |w_j| dx$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\int_{\Omega} |\mathcal{N}_g(u_m^1) - \mathcal{N}_g(u_m^2)|^{(q_1+2)/(q_1+1)} dx \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)} \left(\int_{\Omega} |w_j|^{q_1+2} dx \right)^{1/(q_1+2)} \\
 &\leq d_{mj}^2 \mu_1(R_{m1}) \left(\int_{\Omega} |u_m^1 - u_m^2|^{q_1+2} dx \right)^{1/(q_1+2)} \leq (d_{mj}^2)^2 \mu_1(R_{m1}) |c_m^1 - c_m^2|,
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

где $d_{mj}^2 = \left(\int_{\Omega} |w_j|^{q_1+2} dx \right)^{1/(q_1+2)}$, $R_{m1} = \max\{\|u_m^1\|_{q_1+2}, \|u_m^2\|_{q_1+2}\}$.

Итак, в силу (3.76) мы пришли к оценке

$$|f_2(c_m^1) - f_2(c_m^2)| \leq (d_{mj}^2)^2 \mu_1(R_{m1}) |c_m^1 - c_m^2|. \tag{3.77}$$

Аналогично приходим к выводу, что имеет место следующее неравенство:

$$|f_3(c_m^1) - f_3(c_m^2)| \leq (d_{mj}^3)^2 \mu_2(R_{m2}) |c_m^1 - c_m^2|, \tag{3.78}$$

где $d_{mj}^3 = \left(\int_{\Omega} |w_j|^{q_2+2} dx \right)^{1/(q_2+2)}$, $R_{m2} = \max\{\|u_m^1\|_{q_2+2}, \|u_m^2\|_{q_2+2}\}$.

Теперь докажем обратимость матрицы A , фигурирующей в левой части уравнения (3.70). Действительно, рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{k,j=1}^m \alpha_{kj} \xi^k \xi^j = \int_{\Omega} |\eta|^2 dx, \quad \eta = \sum_{j=1}^m w_j \xi^j.$$

Ясно, что эта квадратичная форма равна нулю тогда и только тогда, когда $\eta = 0$ для почти всех $x \in \Omega$, но поскольку имеет место плотное вложение

$$\mathbb{H}_0^s(\Omega) \overset{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^2(\Omega)$$

и $\{w_j\}$ – базис в $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$, то $\{w_j\}$ является галеркинским базисом в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, а значит, равенство

$$\eta = \sum_{j=1}^m w_j \xi^j = 0 \quad \text{для почти всех } x \in \Omega$$

эквивалентно требованию, чтобы $\xi^j = 0$ для всех $j = \overline{1, m}$. Следовательно, рассматриваемая квадратичная форма является положительно определенной, а значит, в силу критерия Сильвестра определитель квадратной матрицы A больше нуля.

Итак, в силу теоремы Коши мы приходим к выводу о том, что согласно (3.75), (3.77) и (3.78) существует единственное решение $c_{mk}(t)$ задачи (3.70) в классе $\mathbb{C}^{(2)}([0, T_m])$ при некотором $T_m > 0$.

Шаг 4. Предельный переход. Используя полученные априорные оценки (3.38), (3.39), (3.49), (3.52), (3.55)–(3.57), (3.59)–(3.61), мы можем перейти к пределу в задаче о галеркинских приближениях при $m \rightarrow +\infty$.

Сначала докажем, что на самом деле время $T_m > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Действительно, с этой целью нам надо воспользоваться полученными априорными оценками. Заметим, что

$$\|u_m\|_2^2(t) = \sum_{k,j=1}^m \alpha_{kj} c_{mk}(t) c_{mj}(t), \quad \alpha_{kj} \equiv \int_{\Omega} w_j w_k dx. \tag{3.79}$$

Рассмотрим квадратичную форму в правой части равенства (3.79). Как и ранее, можно доказать, что матрица $\|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m$ этой квадратичной формы является положительно определенной. Поскольку $\|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m$ не зависит от времени, существует такая не зависящая от времени вещественная ортогональная матрица $\mathbb{Q}_m$, что

$$c_m = \mathbb{Q}_m d_m, \quad c_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^t, \quad d_m = (d_{m1}, \dots, d_{mm})^t, \quad (3.80)$$

причем

$$\sum_{k,j=1}^m \alpha_{kj} c_{mk}(t) c_{mj}(t) = \sum_{l=1}^m \lambda_l d_{ml}^2, \quad (3.81)$$

где $\lambda_l > 0$ для всех $l = \overline{1, m}$. Тогда из (3.79) и (3.80) мы приходим к выводу о том, что

$$|d_{ml}| \leq c_{22}(m, T) \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.82)$$

где постоянная не зависит от $l = \overline{1, m}$, но зависит от $m \in \mathbb{N}$. Теперь заметим, что всякая собственная матрица $\mathbb{Q}_m: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет конечную норму

$$\|\mathbb{Q}_m\|_{m \times m} = \sup_{\|\eta\|_m=1} \|\mathbb{Q}_m \eta\|_m < +\infty, \quad (3.83)$$

где $\|\eta\|_m \equiv (|\eta_1|^2 + \dots + |\eta_m|^2)^{1/2}$ — одна из эквивалентных норм на $\mathbb{R}^m$. Тогда из (3.83) мы получим следующее неравенство:

$$\|c_m\|_m \leq \|\mathbb{Q}_m\|_{m \times m} \|d_m\|_m,$$

из которого получим оценку

$$|c_{mk}| \leq c_{23}(m, T) < +\infty, \quad k = \overline{1, m}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.84)$$

где постоянная $c_{23}(m)$ зависит от $m \in \mathbb{N}$, но не зависит от $t \in [0, T]$. Аналогично, из априорных оценок мы приходим к неравенству

$$|c'_{mk}| \leq c_{24}(m, T) < +\infty, \quad k = \overline{1, m}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.85)$$

где постоянная $c_{24}(m)$ зависит от $m \in \mathbb{N}$, но не зависит от $t \in [0, T]$. Для каждого фиксированного $m \in \mathbb{N}$, используя алгоритм продолжения решения системы уравнений (3.70) во времени, мы получим, что решение задачи галеркинских приближений можно продолжить до момента времени $T > 0$, не зависящего от $m \in \mathbb{N}$.

Выполним предельный переход. Рассмотрим различные случаи.

Если $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$, что имеет место при $q_1 \geq 2q_2$, то для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеем предельные равенства

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad (3.86)$$

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)), \quad (3.87)$$

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (3.88)$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (3.89)$$

$$\mathbb{A}(u_m) \xrightarrow{*} \chi \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)), \quad (3.90)$$

причем $T > 0$ является произвольным фиксированным.

Пусть теперь $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$, что имеет место при $2q_2 + 2 \leq p^*$. Тогда выполнены (3.86)–(3.90), причем $T > 0$ достаточно мало в случае $p < 2q_2 + 2$ и сколь угодно велико и фиксировано при $p \geq 2q_2 + 2$. Кроме того, во всех случаях в силу (3.88) имеем

$$\left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'_m w(x) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u' w(x) dx, \varphi(t) \right\rangle \right\rangle \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty, \quad (3.91)$$

для всех $\varphi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ и $w(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Наконец, из оценок (3.60) и (3.61) вытекает, что

$$|u_m|^{q_1} u_m \xrightarrow{*} w_1 \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega)), \quad (3.92)$$

$$|u_m|^{q_2} u_m \xrightarrow{*} w_2 \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega)). \quad (3.93)$$

Заметим, что, так как имеют место равномерные по $m \in \mathbb{N}$ вложения

$$\begin{aligned} \{u_m\} &\in \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \{u'_m\} &\in \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \subset \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \end{aligned}$$

имеет место равномерное по $m \in \mathbb{N}$ вложение

$$\{u_m\} \subset \mathbb{H}^1(Q_T), \quad Q_T = (0, T) \times \Omega.$$

Поскольку вложение $\mathbb{H}^1(Q_T) \subset \mathbb{L}^2(Q_T)$ является вполне непрерывным, мы приходим к выводу, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеет место сходимость

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(Q_T) \text{ и почти всюду в } Q_T. \quad (3.94)$$

В силу данной сходимости почти всюду и каратеодориевости функций $g(x, u)$ и $f(x, u)$ мы приходим к выводу о том, что

$$g(x, u_m) \rightarrow g(x, u), \quad f(x, u_m) \rightarrow f(x, u), \quad m \rightarrow +\infty, \quad (3.95)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, в силу полученных ранее априорных оценок имеем

$$\{g(x, u_m)\} \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N} \text{ ограничена в } \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(Q_T), \quad (3.96)$$

$$\{f(x, u_m)\} \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N} \text{ ограничена в } \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T). \quad (3.97)$$

Теперь в силу леммы Ж.-Л. Лионса (см. [14, лемма 1.3]) из (3.92)–(3.97) имеем

$$g(x, u_m) \rightarrow g(x, u) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(Q_T), \quad (3.98)$$

$$f(x, u_m) \rightarrow f(x, u) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T). \quad (3.99)$$

Таким образом, мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и получить, что предельная функция $u(x)(t)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u' w(x) dx + \int_{\Omega} [g(x, u) - f(x, u)] w(x) dx \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla w) dx + \langle \chi, w \rangle_0(t), \varphi(t) \right\rangle \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

для всех $w(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и всех $\varphi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Кроме того, в силу полученной ранее априорной оценки (3.69) имеет место равномерное по $m \in \mathbb{N}$ вложение

$$\{u'_m\} \subset \mathbb{W} \equiv \{v: v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}^{-s}(\Omega))\}, \quad (3.101)$$

при этом $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ компактно вложено в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Поэтому в силу известной теоремы Ж.-Л. Лионса (см., например, [14]) банахово пространство $\mathbb{W}$ компактно вложено в банахово пространство $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$. Следовательно, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеет место предельное равенство

$$u'_m \rightarrow u' \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(Q_T) \text{ и почти всюду в } Q_T = (0, T) \times \Omega. \quad (3.102)$$

Теперь наша задача заключается в доказательстве равенства

$$\chi = \mathbb{A}(u), \quad (3.103)$$

где $\mathbb{A}(u) = -\operatorname{div}(h(x, |\nabla u|)\nabla u)$. С этой целью воспользуемся методом монотонности [14], а также будем использовать технику из работ [17] и [18].

Рассмотрим выражение

$$X_m = \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m) - \mathbb{A}(v), u_m - v \rangle_0 dt, \quad v \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad (3.104)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. В силу свойства (iv)₂ имеем

$$X_m \geq 0. \quad (3.105)$$

Теперь рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle_0 dt &= \int_0^T \langle \mathcal{N}_f(u_m) - \mathcal{N}_g(u_m), u_m \rangle_0 dt \\ &\quad + \mu \int_0^T \langle \Delta u'_m, u_m \rangle_0 dt - \int_0^T \langle v'_m, u_m \rangle_0 dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega [\mathcal{N}_f(u_m) - \mathcal{N}_g(u_m)] u_m dx dt + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 \\ &\quad - \frac{\mu}{2} \|\nabla u_m(T)\|_2^2 - \int_0^T \int_\Omega v'_m u_m dx dt, \quad v_m = u'_m. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Заметим, что имеет место предельное равенство

$$\int_0^T \int_\Omega [\mathcal{N}_f(u_m) - \mathcal{N}_g(u_m)] u_m dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega [\mathcal{N}_f(u) - \mathcal{N}_g(u)] u dx dt. \quad (3.107)$$

Действительно, во-первых,

$$f(x, u_m) u_m \rightharpoonup f(x, u) u, \quad g(x, u_m) u_m \rightharpoonup g(x, u) u$$

почти всюду в Q_T , что имеет место в силу каратеодориевости этих функций и доказанного свойства сходимости почти всюду последовательности функций u_m к функции u ; во-вторых, потребуем выполнения следующих вложений:

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega), \quad (3.108)$$

что имеет место либо при $N < p$, либо при $N \geq p$ и выполнении достаточных условий

$$q_1 < \frac{N(p-2)+2p}{N-p}, \quad q_2 < \frac{N(p-2)+2p}{N-p},$$

причем найдется такое $\theta > 1$, что имеют место неравенства

$$(q_1 + 2)\theta \leq \frac{Np}{N-p}, \quad (q_2 + 2)\theta \leq \frac{Np}{N-p}.$$

Тогда в силу свойств (ii)₃, (ii)₄ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |g(x, u_m) u_m|^\theta dx dt &\leq c_3 \int_0^T \int_{\Omega} |u_m|^\theta dx dt + c_4 \int_0^T \int_{\Omega} |u_m|^{\theta(q_1+2)} dx dt \\ &\leq \bar{c}_3 \int_0^T \|\nabla u_m\|_p^\theta dt + \bar{c}_4 \int_0^T \|\nabla u_m\|_p^{(q_1+2)\theta} dt, \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, u_m) u_m|^\theta dx dt &\leq c_5 \int_0^T \int_{\Omega} |u_m|^\theta dx dt + c_6 \int_0^T \int_{\Omega} |u_m|^{\theta(q_2+2)} dx dt \\ &\leq \bar{c}_5 \int_0^T \|\nabla u_m\|_p^\theta dt + \bar{c}_6 \int_0^T \|\nabla u_m\|_p^{(q_2+2)\theta} dt. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Тем самым, в силу полученных ранее априорных оценок и леммы Ж.-Л. Лионса (см. [14, лемма 1.3]) приходим к выводу о том, что для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеют место предельные равенства

$$f(x, u_m) u_m \rightharpoonup f(x, u) u \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^\theta(Q_T), \quad (3.111)$$

$$g(x, u_m) u_m \rightharpoonup g(x, u) u \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^\theta(Q_T) \quad (3.112)$$

при некотором $\theta > 1$. Тогда, очевидно, имеют место предельные равенства

$$\int_0^T \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m dx dt \cdot 1 \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} f(x, u) u dx dt \cdot 1, \quad (3.113)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx dt \cdot 1 \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} g(x, u) u dx dt \cdot 1, \quad (3.114)$$

поскольку $1 \in \mathbb{L}^\gamma(Q_T)$ при $\gamma = \theta/(\theta - 1)$. Стало быть, предельное равенство (3.107) доказано.

Рассмотрим теперь слагаемое

$$\int_0^T \int_{\Omega} v'_m u_m dx dt, \quad v_m = u'_m,$$

в равенстве (3.106). Интегрируя по частям последнее выражение, получим

$$-\int_0^T \int_{\Omega} v'_m u_m dx dt = \int_{\Omega} u_{1m} u_{0m} dx - \int_{\Omega} u'_m(T) u_m(T) dx + \int_{\Omega} \int_0^T |u'_m|^2 dt dx. \quad (3.115)$$

Напомним, что $\{u_m(T)\}$ ограничено в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\{u'_m(T)\}$ ограничено в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Поскольку пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ вполне непрерывно вложено в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m(T) \rightarrow \xi_1 \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(\Omega), \quad u'_m(T) \rightharpoonup \xi_2 \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(\Omega). \quad (3.116)$$

Поскольку по доказанному ранее $u_m(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-s}(\Omega))$, то $u(T)$, $u(0)$ и $u'(T)$, $u'(0)$ имеют смысл. С другой стороны, в силу (3.94), (3.102) имеем

$$u_m(T) \rightarrow u(T), \quad u'_m(T) \rightarrow u'(T) \quad \text{для почти всех } x \in \Omega,$$

поэтому $\xi_1 = u(T)$ и $\xi_2 = u'(T)$ для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, понятно, что в силу априорных оценок можно выбрать такую подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$u_m(T) \rightharpoonup u(T) \quad \text{слабо в } \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Заметим, что в силу полунепрерывности нормы банахова пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ имеет место предельное неравенство

$$\|\nabla u(T)\|_2^2 \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|\nabla u_m(T)\|_2^2.$$

Таким образом, в силу свойств (3.107), (3.115) и (3.116) приходим к выводу о том, что справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle_0 dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega} [\mathcal{N}_f(u) - \mathcal{N}_g(u)] u dx dt + \int_{\Omega} u_1 u_0 dx \\ &- \int_{\Omega} u'(T) u(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} |u'|^2 dx dt + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{\mu}{2} \|\nabla u(T)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Теперь мы перейдем к верхнему пределу при $m \rightarrow +\infty$ в (3.104) и получим с учетом (3.117) следующее неравенство:

$$\begin{aligned} 0 &\leq - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u - v \rangle_0 dt - \int_0^T \langle \chi, v \rangle_0 dt + \int_0^T \int_{\Omega} [\mathcal{N}_f(u) - \mathcal{N}_g(u)] u dx dt \\ &+ \int_{\Omega} u_1 u_0 dx - \int_{\Omega} u'(T) u(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} |u'|^2 dx dt \\ &+ \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{\mu}{2} \|\nabla u(T)\|_2^2, \quad v \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Воспользуемся галеркинской схемой (3.16) и получим эквивалентное равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(t) \int_{\Omega} u''_m w(x) dx dt + \int_0^T \varphi(t) \mu \int_{\Omega} (\nabla u'_m, \nabla w) dx dt + \int_0^T \varphi(t) \langle \mathbb{A}(u_m), w \rangle dt \\ + \int_0^T \varphi(t) \int_{\Omega} [\mathcal{N}_g(u_m) - \mathcal{N}_f(u_m)] w(x) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.119)$$

для всех $w \in V_m \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T])$. Проинтегрируем по частям в первом слагаемом равенства (3.119) и получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(t) \int_{\Omega} u_m'' w(x) dx dt &= \int_{\Omega} u_m'(T) w(x) \varphi(T) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} u_m'(0) w(x) \varphi(0) dx - \int_0^T \varphi'(t) \int_{\Omega} u_m' w(x) dx dt. \end{aligned} \quad (3.120)$$

С учетом (3.120) перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в равенстве (3.119) и в результате получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'(T) w(x) \varphi(T) dx - \int_{\Omega} u'(0) w(x) \varphi(0) dx - \int_0^T \varphi'(t) \int_{\Omega} u' w(x) dx dt \\ + \int_0^T \varphi(t) \langle \chi, w \rangle dt + \mu \int_0^T \varphi(t) \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla w) dx dt \\ + \int_0^T \varphi(t) \int_{\Omega} [\mathcal{N}_g(u) - \mathcal{N}_f(u)] w(x) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.121)$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T])$.

Теперь заметим, что множество вида $\{\varphi(t)w(x)\}$ при $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T])$ плотно в банаховом пространстве

$$\mathbb{V} \equiv \{v \mid v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))\}.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} u &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u' &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \subset \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Следовательно, $u \in \mathbb{V}$. Значит, u можно с любой наперед заданной точностью приблизить функцией вида $\varphi(t)w(x)$. При этом найдется такая последовательность $\{\varphi_n(t)w_n(x)\}$, что, в частности,

$$\int_0^T [\|u - \varphi_n w_n\|_{1,p}^2 + \|u' - \varphi_n' w_n\|_2^2] dt \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

но тогда можно доказать, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\{\varphi_n w_n\}$, для которой $\|u - \varphi_n w_n\|_2 \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Значит, в частности,

$$\|u(T) - \varphi_n(T)w_n\|_2 \rightarrow 0, \quad \|u(0) - \varphi_n(0)w_n\|_2 \rightarrow 0.$$

Поэтому из (3.121) получим следующее предельное равенство:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'(T)u(T) dx - \int_{\Omega} u'(0)u(0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} |u'|^2 dx dt + \int_0^T \langle \chi, u \rangle dt \\ + \frac{\mu}{2} \|\nabla u(T)\|_2^2 - \frac{\mu}{2} \|\nabla u(0)\|_2^2 + \int_0^T \int_{\Omega} [\mathcal{N}_g(u) - \mathcal{N}_f(u)] u dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Теперь из (3.118) с учетом (3.122) получим

$$0 \leq - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u - v \rangle_0 dt - \int_0^T \langle \chi, v \rangle_0 dt + \int_0^T \langle \chi, u \rangle_0 dt = \int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v \rangle_0 dt. \quad (3.123)$$

Пусть теперь $v = u - \lambda w$, где $w \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ и $\lambda > 0$. Тогда после подстановки этого v в соотношение (3.123) получим

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w \rangle_0 dt.$$

В силу ограниченной липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{A}(u)$, что следует из условия (ii)₂, вытекает возможность перейти к пределу при $\lambda \rightarrow +0$ и получить следующее неравенство:

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u), w \rangle_0 dt.$$

Если предположить, что $\chi \neq \mathbb{A}(u)$, то, очевидно, найдется такое $w \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, что будет иметь место неравенство

$$0 > \int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u), w \rangle_0 dt.$$

Итак, мы доказали, что $\chi(t) = \mathbb{A}(u)$ в равенстве (3.100).

Слабая обобщенная разрешимость задачи (3.11), (3.12) в смысле определения 1 доказана.

Шаг 5. Продолжение решения во времени. Пусть $T = T_0 > 0$, причем $T_0 > 0$ – максимальный момент времени, т. е. либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < \infty$ и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} [\|\nabla u\|_p(t) + \|u'\|_2(t)] = +\infty.$$

Пусть $T_0 < +\infty$, но

$$\|\nabla u\|_p(t) + \|u'\|_2(t) \leq C < +\infty \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Заметим теперь, что после изменения функции на подмножестве нулевой меры Лебега множества $[0, T_0]$ имеем $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-s}(\Omega))$, и, следовательно, для каждого $t \in [0, T_0]$ имеют смысл следы $u(t)$ и $u'(t)$. Кроме того, $u(t) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $u'(t) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T_0]$.

Пусть $T' \in (0, T_0)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'(x)(t)w(x) dx + \int_{\Omega} h_1(x, \Delta u) \Delta w(x) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla w) dx \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{\Omega} h_2(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w) dx - \int_{\Omega} h_3(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w) dx, \varphi(t) \right\rangle \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.124)$$

для всех $v \in \mathbb{L}^p(0, T'; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $u'(0) = u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Используя полученные ранее априорные оценки, мы теперь можем доказать, что функция $u(x)(t)$ имеет след при $t = T_0$, причем $u(x)(T_0) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, а $u'(x)(T_0) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\left\langle \left\langle \frac{d}{ds} \int_{\Omega} u'(x)(s)w(x) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u'(x)(s), \nabla w) dx + \int_{\Omega} h_1(x, \Delta u) \Delta w(x) dx + \int_{\Omega} h_2(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w) dx - \int_{\Omega} h_3(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w) dx, \varphi(s) \right\rangle \right\rangle = 0 \quad (3.125)$$

для всех $\varphi(s) \in \mathcal{D}(T', T' + t)$, $v \in \mathbb{L}^p(T', T' + t; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$,

$$u(T') = u_{0T'} \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad u'(T') = u_{1T'} \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

В равенстве (3.125) мы рассматриваем скобки двойственности $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ между пространством основных функций $\mathcal{D}(T', T' + t)$ и соответствующим пространством распределений $\mathcal{D}'(T', T' + t)$.

Сделаем замену переменных $\sigma = s - T'$ и $w(\sigma) = u(\sigma + T')$. Приходим к следующей задаче:

$$\left\langle \left\langle \frac{d}{d\sigma} \int_{\Omega} u'(x)(\sigma)w(x) dx + \mu \int_{\Omega} (\nabla u'(x)(\sigma), \nabla w) dx + \int_{\Omega} h_1(x, \Delta u) \Delta w(x) dx + \int_{\Omega} h_2(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w) dx - \int_{\Omega} h_3(x, |\nabla u|)(\nabla u, \nabla w) dx, \varphi(\sigma + T') \right\rangle \right\rangle = 0 \quad (3.126)$$

для всех $v(\sigma + T') \in \mathbb{L}^p(0, t; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $w(0) = u_{1T'} \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $w'(0) = u_{1T'} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Используя полученный ранее результат о локальной разрешимости задачи вида (3.124), получим, что найдется такое $t = T^* = T^*(T') > 0$, при котором существует слабое обобщенное решение задачи (3.124). Поскольку

$$\sup_{T' \in [0, T_0]} (\|\nabla u\|_p(T') + \|u'\|_2(T')) < +\infty,$$

существует точная нижняя грань функции $T^* = T^*(T') > 0$, которую мы обозначим $T^{**} > 0$. Теперь возьмем

$$T' = T_0 - \frac{T^{**}}{2}$$

и получим, что

$$\hat{u} = \{u(t), t \in [0, T']; w(t - T'), t \in [T', T' + T^{**}]\},$$

однако $T' = T_0 - T^{**}/2$, поэтому

$$\hat{u} = \{u(t), t \in [0, T']; w(t - T'), t \in [T', T_0 + T^{**}/2]\}.$$

Мы пришли к выводу, что решение исходной задачи можно продолжить за момент времени $T_0 > 0$. Поэтому получили противоречие с условием конечности момента времени $T_0 > 0$.

Следовательно, нами доказана следующая теорема о локальной и глобальной разрешимости задачи (3.11), (3.12), понимаемой в слабом обобщенном смысле определения 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия $(i)_1 - (iv)_1$, $(i)_2 - (iv)_2$ и $(i)_3$, $(ii)_3$, $(iv)_3$. Тогда если выполнено условие $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$, причем $p < 2q_2 + 2$, то найдется такой момент времени $T_0 > 0$, что

$$\begin{aligned} u(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u'(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \end{aligned}$$

причем $T \in (0, T_0)$ и либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} [\|\nabla u\|_p(t) + \|u'\|_2(t)] = +\infty.$$

Если выполнено условие $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$, причем $p \geq 2q_2 + 2$ или $\mathbb{L}^{2q_1+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned} u(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u'(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

при $T \in (0, T_0)$ для всех $T_0 > 0$.

Как всегда, воспользуемся галеркинскими приближениями для вывода достаточных условий разрушения рассматриваемой задачи за конечное время. Действительно, введем сначала следующие обозначения:

$$\Phi_m(t) = \|u_m\|_2^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u_m\|_2^2 ds + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2, \quad (3.127)$$

$$J_m(t) = \|u'_m\|_2^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds. \quad (3.128)$$

Установим связь функционалов Φ_m и J_m – это ключевой момент нашего модифицированного метода. Действительно, с одной стороны,

$$\Phi'_m(t) = 2 \int_\Omega u'_m u_m dx + \mu \|\nabla u_m\|_2^2 \leq 2 \|u'_m\|_2 \|u_m\|_2 + \mu \|\nabla u_m\|_2^2, \quad (3.129)$$

с другой – справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla u_m\|_2^2 &= \mu \int_0^t \frac{d}{ds} \|\nabla u_m\|_2^2(s) ds + \mu \|\nabla u_{0m}\|_2^2 \\ &= 2\mu \int_0^t \int_\Omega (\nabla u'_m, \nabla u_m) dx ds + \mu \|\nabla u_{0m}\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Из (3.130) нетрудно получить следующую оценку:

$$\mu \|\nabla u_m\|_2^2 \leq 2\mu \left(\int_0^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\nabla u_m\|_2^2 ds \right)^{1/2} + \mu \|\nabla u_{0m}\|_2^2. \quad (3.131)$$

Теперь из неравенств (3.129) и (3.131) мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1. Для всякого $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$(\Phi'_m)^2 \leq 4\Phi_m \left(J_m + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 \right). \quad (3.132)$$

Теперь наша задача – получить оценку сверху функционала J_m . С этой целью умножим равенство (3.16) на $c_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|u_m\|_2^2 - \|u'_m\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \|\nabla u_m\|_2^2(s) ds + \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx \\ + \int_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|) |\nabla u_m|^2 dx = \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m dx. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Теперь умножим обе части равенства (3.16) на c'_{mj} , просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u'_m\|_2^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds \right) \\ + \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx \right) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Интегрируя равенство (3.134), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u'_m\|_2^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx \\ + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx - E_m(0) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx, \end{aligned} \quad (3.135)$$

где

$$E_m(0) = \frac{1}{2} \|u_{1m}\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx. \quad (3.136)$$

Теперь воспользуемся неравенством (3.9) и получим из (3.135) следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1}{2} \|u'_m\|_2^2 + \theta_1 \mu \int_0^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds + \theta_1 \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx \\ + \theta_1 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx - \theta_1 E_m(0) \leq \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m dx, \end{aligned} \quad (3.137)$$

из которого в силу (3.133) с учетом обозначений (3.127) и (3.128) получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Phi_m - \|u'_m\|_2^2 + \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx + \int_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|) |\nabla u_m|^2 dx \\ \geq \frac{\theta_1}{2} \|u'_m\|_2^2 + \theta_1 \mu \int_0^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds + \theta_1 \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx \\ + \theta_1 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx - \theta_1 E_m(0). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Теперь в силу свойств (3.3) и (3.6) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx \leq \theta_3 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx, \\ 0 &\leq \int_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|) |\nabla u_m|^2 dx \leq \theta_2 \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx. \end{aligned}$$

Пусть выполнены дополнительные условия

$$\theta_1 \geq \theta_2, \quad \theta_1 \geq \theta_3.$$

Таким образом, из неравенства (3.138) приходим к следующему неравенству:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Phi_m + \theta_1 E_m(0) \geq \left(1 + \frac{\theta_1}{2}\right) J_m, \quad (3.139)$$

поскольку по условию $\theta_1 > 2$.

Таким образом, из неравенств (3.132) и (3.139) получаем искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi_m \Phi_m'' - \alpha (\Phi_m')^2 + \beta \Phi_m \geq 0, \quad (3.140)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta_1}{2}\right), \quad \beta = \mu \left(1 + \frac{\theta_1}{2}\right) \|\nabla u_{0m}\|_2^2 + 2\theta_1 E_m(0),$$

причем в силу условия $\theta_1 > 2$ имеем $\alpha > 1$, а из требования положительности начальной энергии ($E_m(0) > 0$) вытекает, что $\beta > 0$.

Следовательно, из теоремы 1 мы получим, что при достаточных условиях

$$\Phi_m'(0) > \left(\frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0)\right)^{1/2} > 0, \quad E_m(0) > 0 \quad (3.141)$$

имеет место следующая оценка:

$$\Phi_m(t) \geq (\Phi_m^{1-\alpha}(0) - A_m t)^{-1/(\alpha-1)}, \quad (3.142)$$

где

$$\begin{aligned} A_m^2 &= (\alpha - 1)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi_m'(0))^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi_m(0) \right], \\ \Phi_m'(0) &= 2 \int_{\Omega} u_{1m} u_{0m} dx + \mu \|\nabla u_{0m}\|_2^2, \quad \Phi_m(0) = \|u_{0m}\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2. \end{aligned}$$

Далее необходимо перейти к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в неравенстве (3.142), и здесь нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Для почти всех $t \in [0, T]$ и некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ имеет место следующее предельное свойство:

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t), \quad (3.143)$$

где

$$\Phi(t) = \|u\|_2^2 + \mu \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 ds + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2. \quad (3.144)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу начального условия (3.18) нам достаточно доказать, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ обладает следующим свойством:

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{ для почти всех } t \in [0, T]. \quad (3.145)$$

С этой целью введем оператор

$$\mathbb{A}(v) = -\operatorname{div}(h(x, |\nabla v|)\nabla v): \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Ранее нами было доказано, что

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m) - \mathbb{A}(u), u_m - u \rangle_0 dt \leq 0,$$

но тогда в силу свойства (3.4) равномерной монотонности функции $h(x, |\xi|)\xi$ приходим к выводу о том, что

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \|\nabla u_m - \nabla u\|_p^p dt \leq 0.$$

Стало быть, $u_m \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, следовательно, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \text{ для почти всех } t \in [0, T],$$

откуда в силу условия $p \geq 2$ и вытекает утверждение леммы.

Таким образом, в силу начальных условий (3.18) и (3.19), а также результата леммы 2 мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и получить следующее неравенство:

$$\Phi(t) \geq (\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{-1/(\alpha-1)}, \quad (3.146)$$

где

$$\begin{aligned} A^2 &= (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right], \\ \Phi'(0) &= 2 \int_{\Omega} u_1 u_0 dx + \mu \|\nabla u_0\|_2^2, \quad \Phi(0) = \|u_0\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2. \end{aligned}$$

Следовательно, нами доказана

ТЕОРЕМА 3. Для любых $u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ при выполнении условий $p < 2q_2 + 2$, $\theta_1 \geq \theta_2$, $\theta_1 \geq \theta_3$ и

$$\Phi'(0) > \left(\frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right)^{1/2}, \quad E(0) > 0 \quad (3.147)$$

для времени существования решения $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$ выполнена оценка

$$T_0 \leq \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1},$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta_1}{2} \right), \quad \beta = \mu \left(1 + \frac{\theta_1}{2} \right) \|\nabla u_0\|_2^2 + 2\theta_1 E(0), \\ E(0) &= \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx, \\ A^2 &= (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right], \\ \Phi'(0) &= 2 \int_{\Omega} u_1 u_0 dx + \mu \|\nabla u_0\|_2^2, \quad \Phi(0) = \|u_0\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теперь наша задача – доказать совместность полученных условий (3.147). Сначала выберем нетривиальную начальную функцию $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx + \frac{4\mu^{1/2} \|u_0\|_2^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + \mu^2 \|\nabla u_0\|_2^4}{8\|u_0\|_2^2 + 4\mu \|\nabla u_0\|_2^2} &> \frac{\|u_0\|_2^2 \|\nabla u_0\|_2^2}{4\|u_0\|_2^2 + 2\mu \|\nabla u_0\|_2^2} \\ &+ \frac{\mu}{8} \left(1 + \frac{2}{\theta_1} \right) \|\nabla u_0\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx. \quad (3.148)\end{aligned}$$

При таком фиксированном $u_0(x)$ выберем $u_1(x) = \lambda u_0(x)$ при $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы было выполнено условие положительности начальной энергии

$$E(0) = \frac{\lambda^2}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx > 0.$$

Заметим, что

$$\Phi'(0) = 2\lambda \int_{\Omega} |u_0|^2 dx + \mu \|\nabla u_0\|_2^2 > 0.$$

При этом условие (3.147) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}4\lambda^2 \|u_0\|_2^4 + 4\lambda\mu \|u_0\|_2^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + \mu^2 \|\nabla u_0\|_2^4 \\ > \left(8E(0) + \mu \left[1 + \frac{2}{\theta_1} \right] \|\nabla u_0\|_2^2 \right) \left(\|u_0\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 \right) \\ = 4\lambda^2 \|u_0\|_2^4 + 2\lambda^2 \mu \|u_0\|_2^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + \left(\mu \left[1 + \frac{2}{\theta_1} \right] \|\nabla u_0\|_2^2 + 8 \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx \right. \\ \left. + 8 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx - 8 \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx \right) \left(\|u_0\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 \right). \quad (3.149)\end{aligned}$$

Пусть $\lambda = 1/\mu^{1/2}$, $\mu > 0$; тогда после ряда преобразований в (3.149) получим соотношение

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx + \frac{4\mu^{1/2} \|u_0\|_2^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + \mu^2 \|\nabla u_0\|_2^4}{8\|u_0\|_2^2 + 4\mu \|\nabla u_0\|_2^2} &> \frac{\|u_0\|_2^2 \|\nabla u_0\|_2^2}{4\|u_0\|_2^2 + 2\mu \|\nabla u_0\|_2^2} \\ &+ \frac{\mu}{8} \left(1 + \frac{2}{\theta_1} \right) \|\nabla u_0\|_2^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx,\end{aligned}$$

которое совпадает с неравенством (3.148). Таким образом, при достаточно малом $\mu > 0$ совместность условий (3.147) доказана.

Список литературы

1. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, М., 1990.
2. H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
3. B. Straughan, “Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48** (1975), 381–390.
4. H. A. Levine, G. Todorova, “Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2001), 793–805.
5. P. Pucci, J. Serrin, “Some new results on global nonexistence for abstract evolution with positive initial energy”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **10:2** (1997), 241–247.
6. P. Pucci, J. Serrin, “Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy”, *J. Differential Equations*, **150:1** (1998), 203–214.
7. В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10:1** (1978), 53–70.
8. A. B. Al’shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*, De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **15**, de Gruyter, Berlin, 2011.
9. Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
10. V. A. Galaktionov, E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “On global solutions and blow-up for Kuramoto–Sivashinsky-type models, and well-posed Burnett equations”, *Nonlinear Anal.*, **70:8** (2009), 2930–2952.
11. S. I. Pohozaev, “Critical nonlinearities in partial differential equations”, *Milan J. Math.*, **77:1** (2009), 127–150.
12. В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48:10** (2008), 1819–1846; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “Third-order nonlinear dispersive equations: Shocks, rarefaction, and blowup waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48:10** (2008), 1784–1810.
13. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
14. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
15. М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, ГИТТЛ, М., 1956; англ. пер.: M. A. Krasnosel’skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

16. В. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
17. O. A. Lima, A. T. Lourendo, A. O. Marino, “Weak solutions for a strongly-coupled nonlinear system”, *Electron. J. Differential Equations*, 2006, 180.
18. O. A. Lima, M. R. Clark, “On a class of nonlinear Klein–Gordon equations”, *Proceedings of 52 Seminario Brasileiro de Analise*, 2000, 445–451.

М. О. Корпусов (M. O. Korpusev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
E-mail: korpusev@gmail.com

Поступило в редакцию
23.12.2011