

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

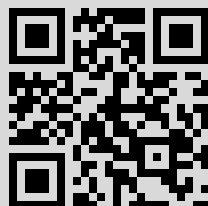
М. О. Корпусов, О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками на границе, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 103–140

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 13:30:58



УДК 517.957

М. О. Корпусов

О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками на границе

Рассмотрено модельное уравнение ионно-звуковых волн в “незамагниченной” плазме при учете нелинейных локализованных на границе источников, что приводит к рассмотрению нелинейного динамического граничного условия, “близкого” к нелинейному условию Неймана–Дирихле. Для данной начально-краевой задачи доказано существование слабого обобщенного решения и получены достаточные условия разрушения слабого обобщенного решения за конечное время. Получена оценка сверху времени существования решения, которое является и временем разрушения решения. Наконец, получены достаточные условия существования сильного обобщенного решения.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: разрушение, соболевские уравнения, плазма, ионно-звуковые волны, нелинейные граничные условия.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы рассмотрим одну модельную задачу для линейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме, занимающую некоторую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, которая является гладким многообразием класса $\mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Пусть n_x – вектор внешней нормали в точке $x \in \partial\Omega$. Предположим, что на границе $\partial\Omega$ рассматриваемой области Ω расположены нелинейные источники, причем, вообще говоря, локализованные в некоторой части границы. Тогда данная задача сводится к следующей системе уравнений (см. [1], [2]):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - u) + \Delta u = 0, \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial n_x} + \frac{\partial u}{\partial n_x} \right) \Big|_{\partial\Omega} = f(x, u)|_{\partial\Omega}, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x). \quad (1.3)$$

Основной целью настоящей работы является получение достаточных условий разрушения слабого обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3). В этой связи мы отметим, что существуют три основных метода исследования возникновения разрушения:

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-Офи-м-2011), а также Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов наук России” (грант № МД-99.2009.1).

- 1) метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [3];
- 2) энергетический метод Х. А. Левина [4]–[6];
- 3) метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в [7] (см. также [8]).

Отметим, что обобщению энергетического метода Х. А. Левина в случае уравнений соболевского типа с нелинейным оператором при производной по времени посвящена книга [9], где рассматривались задачи, одним из примеров которых может служить задача

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \Delta_{p_1} u) + \Delta u - \Delta_{p_2} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и

$$\Delta_p v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v), \quad p > 2.$$

Мы применим модификацию энергетического метода Х. А. Левина. Для этой задачи докажем, что при условии достаточно “больших” начальных данных задачи (функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$) решение задачи (1.1)–(1.3) разрушается за конечное время. Кроме того, мы докажем, что для любых начальных данных $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ решение задачи (1.1)–(1.3) существует локально во времени. Заметим, что мы используем при доказательстве разрушения следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi\Phi' + \gamma\Phi^2 \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta, \gamma \geq 0,$$

которое впервые было выведено в работе [6].

§ 2. Локальное существование слабого обобщенного решения

Прежде всего нам необходимо сформулировать некоторые условия для функции

$$f(x, s): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Каратеодориевой функцией, или функцией Каратеодори, называется функция $f(x, s)$, которая для почти всех $x \in \partial\Omega$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}$ и для всех $s \in \mathbb{R}$ измерима по $x \in \partial\Omega$ относительно меры Лебега $d\Gamma$ на многообразии $\partial\Omega$.

Предположим, что функция $f(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) функция $f(x, u)$ является каратеодориевой;
- (ii) для функции $f(x, u)$ выполнено следующее условие роста:

$$|f(x, u)| \leq c_1 + c_2|u|^{q+1}, \quad q \in (0, 2]; \quad (2.1)$$

- (iii) для любой функции $v(x) \in \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ при некотором $\vartheta > 2$ выполнено неравенство

$$\int_{\partial\Omega} v(x)f(x, v(x)) \geq \vartheta \int_{\partial\Omega} \int_0^{v(x)} f(x, s) ds d\Gamma; \quad (2.2)$$

(iv) функция $f(x, u)$ является локально по u липшиц-непрерывной, т. е. имеет место неравенство

$$\|f(x, u_1) - f(x, u_2)\|_{\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)} \leq \mu(R) \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}, \quad (2.3)$$

$$R = \max\{\|u_1\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}, \|u_2\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}\} \quad \forall u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega),$$

где $\mu(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Прежде всего приведем примеры функций $f(x, u)$, для которых выполнены условия (i)–(iv); например:

$$f(x, u) = \chi(x)|u|^{q+1}, \quad f(x, u) = \chi(x)|u|^q u,$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция некоторой части поверхности $\partial\Omega$,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \partial\Omega_0, \\ 0 & \text{при } x \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Таким образом, рассматривая задачу (1.1)–(1.3) при функциях $f(x, u)$, удовлетворяющих условиям (i)–(iv), мы учитываем реальную физическую ситуацию, когда источники, описываемые функцией $f(x, u)$, являются *пространственно локализованными* на границе области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Слабым обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $u(x, t)$ класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$, причем $u, u', u'' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$, удовлетворяющую равенству*

$$\int_{\Omega} [(\nabla u'', \nabla \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + u'' \varphi] dx = \int_{\partial\Omega} f(x, u) \varphi(x) d\Gamma \quad \forall \varphi(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad (2.4)$$

для почти всех $t \in [0, T]$ и начальным условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для полноты изложения укажем, как связаны исходная задача (1.1)–(1.3), понимаемая в классическом смысле, т. е. в классе $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}))$, с задачей (2.4). Действительно, умножим обе части уравнения (1.1) на функцию $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ и проинтегрируем по частям; тогда получим следующее равенство:

$$\int_{\Omega} [(\nabla u'', \nabla \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + u'' \varphi] dx = \int_{\partial\Omega} \mathfrak{N}_{tx}[u] \varphi(x) d\Gamma, \quad (2.5)$$

где

$$\mathfrak{N}_{tx}[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Далее надо лишь воспользоваться граничным условием (1.2), и мы получим равенство (2.4). Тем самым, классическое решение задачи (1.1)–(1.3) является слабым обобщенным решением в смысле определения 2.2.

Заметим, что можно дать эквивалентное определение слабого обобщенного решения. Доказательство этого факта проводится точно так же, как и в работе [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Слабым обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $u(x, t)$ класса $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$, причем $u, u', u'' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$, удовлетворяющую равенству*

$$\int_0^T \int_\Omega [(\nabla u'', \nabla w) + (\nabla u, \nabla w) + u'' w] dx dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} f(x, u) w d\Gamma dt \quad (2.6)$$

для всех $w \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x).$$

Теперь докажем существование решения задачи (2.4) при достаточно малом $T > 0$. С этой целью мы воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методом компактности [11]. Затем мы применим стандартную процедуру продолжения решения во времени. Доказательство проведем в несколько шагов.

ШАГ 1. Постановка задачи для приближенного решения. Пусть $\{w_j\} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ – базис этого гильбертового пространства. Будем искать решение

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k, \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_m]) \quad (2.7)$$

следующей задачи:

$$\int_\Omega [(\nabla u_m'', \nabla w_j) + (\nabla u_m, \nabla w_j) + u_m'' w_j] dx = \int_{\partial\Omega} f(x, u_m) w_j d\Gamma, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} u_{m0} = u_m(0) &= \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) w_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k w_k, \\ u_{m1} = u_m'(0) &= \sum_{k=1}^m c'_{mk}(0) w_k = \sum_{k=1}^m \beta_k w_k, \end{aligned} \quad (2.9)$$

причем

$$u_{m0} \rightarrow u_0, \quad u_{m1} \rightarrow u_1 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}^1(\Omega) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (2.10)$$

ШАГ 2. Локальная разрешимость в классе $\mathbb{C}^{(2)}([0, T_m])$. В $\mathbb{C}^{(2)}([0, T_m])$ задачу (2.8), (2.9) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c''_{mk}(t) + \sum_{k=1}^m \beta_{kj} c_{mk}(t) = F_j(c_m), \quad (2.11)$$

где

$$\alpha_{kj} \equiv \int_\Omega (\nabla w_k, \nabla w_j) dx + \int_\Omega w_k w_j dx, \quad \beta_{kj} \equiv \int_\Omega (\nabla w_k, \nabla w_j) dx, \quad (2.12)$$

$$F_j(c_m) = \int_{\partial\Omega} f\left(x, \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)w_k\right) w_j d\Gamma. \quad (2.13)$$

Прежде всего докажем, что определитель матрицы $\|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m$ больше нуля для любого $m \in \mathbb{N}$. С этой целью возьмем произвольный столбец

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^t \in \mathbb{R}^m$$

и образуем квадратичную форму

$$\sum_{k,j=1}^m \alpha_{kj} \xi_j \xi_k = \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx + \int_{\Omega} |\eta|^2 dx, \quad \eta = \sum_{l=1}^m \xi_l w_l. \quad (2.14)$$

Приравняв нулю квадратичную форму (2.14) и получим, что она равна нулю тогда и только тогда, когда $\eta = 0$. Поскольку семейство $\{w_j\}$ – базис в $\mathbb{H}^1(\Omega)$, т. е., в частности, является линейно независимым в $\mathbb{H}^1(\Omega)$, то $\eta = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = \{0\}_{k=1}^m$. Стало быть, в силу критерия Сильвестра мы приходим к выводу, что

$$\det \|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Значит, система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.11) является системой уравнений типа Коши–Ковалевской.

Теперь рассмотрим нелинейные функции (2.13) в правой части системы уравнений (2.11). Прежде всего заметим, что при условии $q \in (0, 2]$ имеет место вполне непрерывное вложение (см., например, [12])

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega).$$

С другой стороны, в силу условий (i), (ii) функция $f(x, w)$ принадлежит $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)$ как только $w \in \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$. Действительно, в силу условия (i) функция $f(x, w(x))$ измерима по мере Лебега $d\Gamma$ на многообразии $\partial\Omega$. Кроме того, из условия (ii) имеет место оценка

$$\left(\int_{\partial\Omega} |f(x, w)|^{(q+2)/(q+1)} d\Gamma \right)^{(q+1)/(q+2)} \leq \bar{c}_1 + c_2 \|w\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}^{q+1}.$$

Значит, оператор Немыцкого

$$N_f(u) \equiv f(x, u),$$

порожденный функцией Каратеодори $f(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, в силу теоремы М. А. Красносельского (см. [13]) является непрерывным отображением

$$N_f(u): \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)$$

в сильной топологии банаховых пространств $\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)$. В силу свойства (iv) имеет место оценка

$$\|N_f(v_1) - N_f(v_2)\|_{\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)} \leq \mu(R) \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}, \quad (2.15)$$

где

$$R \equiv \max\{\|v_1\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}, \|v_2\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}\}.$$

Теперь мы можем доказать локальную непрерывность по Липшицу функций (2.13):

$$F_j = F_j(c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mm}) = \int_{\partial\Omega} f\left(x, \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)w_k\right) w_j d\Gamma. \quad (2.16)$$

Действительно, пусть $c_m^1 = \{c_{m1}^1, \dots, c_{mm}^1\}^t$, $c_m^2 = \{c_{m1}^2, \dots, c_{mm}^2\}^t$ — два произвольных вектора из $\mathbb{R}^m$. Для удобства изложения введем следующие обозначения:

$$u_m^1 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^1 w_k, \quad u_m^2 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^2 w_k.$$

Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |F_j(c_m^1) - F_j(c_m^2)| &\leq \int_{\partial\Omega} |w_j| |f(x, u_m^1) - f(x, u_m^2)| d\Gamma \\ &= \int_{\partial\Omega} |w_j| |N_f(u_m^1) - N_f(u_m^2)| d\Gamma \\ &\leq \left(\int_{\partial\Omega} |w_j|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \left(\int_{\partial\Omega} |N_f(u_m^1) - N_f(u_m^2)|^{(q+2)/(q+1)} d\Gamma \right)^{(q+1)/(q+2)} \\ &\leq d_j \mu(R_m) \|u_m^1 - u_m^2\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)} = d_j \mu(R_m) \left(\int_{\partial\Omega} |u_m^1 - u_m^2|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \\ &\leq d_j^2 \mu(R_m) \left(\sum_{k=1}^m |c_{mk}^1 - c_{mk}^2|^2 \right)^{1/2} \leq a_{jm} \sum_{k=1}^m |c_{mk}^1 - c_{mk}^2|, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $\mu(\cdot)$ — функция из условия (iv),

$$R_m = \max\{\|u_m^1\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}, \|u_m^2\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}\}, \quad d_j \equiv \left(\int_{\partial\Omega} |w_j|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)}.$$

Стало быть, нелинейная функция в правой части системы уравнений (2.11) является локально непрерывной по Липшицу, а значит, в силу известной теоремы найдется такое число $T_m > 0$, зависящее, вообще говоря, от $m \in \mathbb{N}$, что система уравнений (2.11) имеет единственное решение $c_{mk}(t)$ класса $\mathbb{C}^{(2)}([0, T_m])$ при $k = \overline{1, m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Далее мы докажем, что на самом деле $T_m \geq T > 0$, где T не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

ШАГ 3. Априорные оценки. Умножим обе части равенства (2.8) на производные $c_{mj}'(t)$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1, m}$. В результате получим равенство

$$\int_{\Omega} [(\nabla u_m'', \nabla u_m') + (\nabla u_m', \nabla u_m) + u_m'' u_m'] dx = \int_{\partial\Omega} f(x, u_m) u_m' d\Gamma. \quad (2.18)$$

Введем обозначение

$$\psi(v) \equiv \int_{\partial\Omega} \mathcal{F}(x, v) d\Gamma \quad \forall v(x) \in \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega), \quad (2.19)$$

где

$$\mathcal{F}(x, v) \equiv \int_0^{v(x)} f(x, s) ds. \quad (2.20)$$

Справедлива следующая известная лемма. Для удобства изложения приведем полное ее доказательство.

ЛЕММА 2.1. Пусть функция $f(x, v)$ удовлетворяет условиям (i), (ii). Тогда функционал $\psi(v)$, действующий из $\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ в $\mathbb{R}$, является дифференцируемым по Фреше и его производная Фреше

$$\psi'_f(v): \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)$$

имеет вид

$$\psi'_f(v) = N_f(v)$$

для всех $v(x) \in \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ и почти всех $x \in \partial\Omega$ по мере $d\Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия (i), (ii) для функции $f(x, v)$. Тогда для потенциальной функции $\mathcal{F}(x, v)$, определенной формулой (2.20), имеет место следующее неравенство:

$$|\mathcal{F}(x, v)| \leq \left| \int_0^{v(x)} f(x, s) ds \right| \leq c_1 |v| + \frac{c_2}{p} |v|^p \leq \frac{c_1^{p'}}{p'} + \frac{|v|^p}{p} + \frac{c_2}{p} |u|^p = c_3 + c_4 |u|^p \quad (2.21)$$

при

$$p = q + 2, \quad p' = \frac{p}{p-1} = \frac{q+2}{q+1},$$

где мы воспользовались неравенством Юнга

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Очевидно, что по определению потенциальная функция $\mathcal{F}(x, v): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является каратеодориевой, и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского об операторе Немыцкого [13] приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_{\mathcal{F}}(v): \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^1(\Omega),$$

порожденный каратеодориевой функцией $\mathcal{F}(x, v)$, является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(v)$, определенный формулой (2.19), является ограниченным и непрерывным из $\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ в $\mathbb{R}$. Действительно, в силу оценки (2.21) имеет место цепочка неравенств

$$|\psi(v)| \leq \int_{\partial\Omega} |\mathcal{F}(x, v(x))| dx \leq \int_{\partial\Omega} c_3 dx + c_4 \int_{\partial\Omega} |v|^{q+2} dx \leq c_5 + c_4 \|v\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}^{q+2}. \quad (2.22)$$

Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть

$$v_n \rightarrow v \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(v_n) - \psi(v)| \leq \|N_{\mathcal{F}}(v_n) - N_{\mathcal{F}}(v)\|_{\mathbb{L}^1(\partial\Omega)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

в силу теоремы М. А. Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого. Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(v)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u, v) \equiv \psi(u + v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v \rangle_1, \quad u, v \in \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ — скобки двойственности между пространствами $\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ и $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)$. Значит, в силу явного выражения этих скобок двойственности имеет место неравенство

$$|\omega(u, v)| \leq \left| \int_{\partial\Omega} [\mathcal{F}(x, u(x) + v(x)) - \mathcal{F}(x, u(x))] dx - \int_{\partial\Omega} N_f(u)(x) v(x) dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, u(x) + v(x)) - \mathcal{F}(x, u(x)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \mathcal{F}(x, u(x) + tv(x)) dt \\ &= \int_0^1 f(x, u(x) + tv(x)) v(x) dt. \end{aligned}$$

Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\omega(u, v)| &\leq \int_0^1 \int_{\partial\Omega} |N_f(u + tv)(x) - N_f(u)(x)| |v(x)| dx dt \\ &\leq \int_0^1 \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)} \|v\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\begin{aligned} \lim_{\|v\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)} \rightarrow 0} \frac{|\omega(u, v)|}{\|v\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}} &\leq \lim_{\|v\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)} \rightarrow 0} \int_0^1 \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)} dt = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь напомним следующую теорему о цепном правиле для производной Фреше (см., например, [14]):

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbb{F}: \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ и $\mathbb{G}: \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{B}_3$ — операторы, причем $\mathbb{F}$ дифференцируем по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а $\mathbb{G}$ дифференцируем по Фреше в точке $\mathbb{F}(u)$. Тогда их композиция

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место равенство

$$\mathbb{K}'_f(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u).$$

С учетом результатов леммы 2.1 и теоремы 2.1 мы получим следующее равенство:

$$\int_{\partial\Omega} f(x, u_m) u'_m d\Gamma = \frac{d}{dt} \psi(u_m), \quad \psi(u_m) = \int_{\partial\Omega} \int_0^{u_m} f(x, s) ds d\Gamma. \quad (2.23)$$

Отсюда и из (2.18) получим равенство

$$\int_{\Omega} [(\nabla u''_m, \nabla u'_m) + (\nabla u'_m, \nabla u_m) + u''_m u'_m] dx = \frac{d}{dt} \psi(u_m), \quad (2.24)$$

из которого получим выражение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|u'_m\|^2 + \|\nabla u_m\|_2^2] = \frac{d}{dt} \psi(u_m), \quad (2.25)$$

где $\|\cdot\|$ – норма гильбертова пространства $\mathbb{H}^1(\Omega)$, которую мы выбрали следующим образом:

$$\|u\|^2 \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad (2.26)$$

а через $\|\cdot\|_r$ обозначена норма пространства Лебега $\mathbb{L}^r(\Omega)$ при $r \geq 1$. Интегрируя по времени равенство (2.25), получим

$$J_m + \|\nabla u_m\|_2^2 = \|u_{m1}\|^2 + \|\nabla u_{m0}\|_2^2 - 2\psi(u_{m0}) + 2\psi(u_m), \quad (2.27)$$

где

$$J_m = \|u'_m\|^2.$$

Теперь умножим обе части равенства (2.8) на $c_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. Тогда после “интегрирования по частям” получим

$$\Phi''_m - J_m + \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u_m f(x, u_m) d\Gamma, \quad (2.28)$$

где

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{2} \|u_m\|^2.$$

Подставим выражение для J_m из (2.27) в (2.28) и получим следующее равенство:

$$\Phi''_m = -2\|\nabla u_m\|_2^2 + b_m + 2\psi(u_m) + \int_{\partial\Omega} u_m f(x, u_m) d\Gamma, \quad (2.29)$$

где

$$b_m = \|u_{m1}\|^2 + \|\nabla u_{m0}\|_2^2 - 2\psi(u_{m0}).$$

Кроме того, для функционала $\psi(u_m)$, определенного равенством (2.23), справедлива оценка, вытекающая из (2.22):

$$|\psi(w)| \leq c_5 + c_4 \|w\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}^{q+2}. \quad (2.30)$$

Как известно, при $q \in (0, 2]$ имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega),$$

поэтому найдется такая наилучшая постоянная $a > 0$, что

$$\|w\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)} \leq a\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}^1(\Omega). \quad (2.31)$$

Поэтому из (2.30) вытекает оценка

$$|\psi(w)| \leq c_5 + c_4 a^{q+2} \|w\|^{q+2} \quad \forall w \in \mathbb{H}^1(\Omega). \quad (2.32)$$

Аналогично приходим к неравенству следующего вида:

$$\left| \int_{\partial\Omega} w f(x, w) d\Gamma \right| \leq c_6 + c_7 \|w\|^{q+2} \quad \forall w \in \mathbb{H}^1(\Omega). \quad (2.33)$$

Интегрируя уравнение (2.29) два раза по времени и учитывая, что величина b_m ограничена числом b_0 , не зависящим от $m \in \mathbb{N}$, мы получим из соотношений (2.32) и (2.33) следующее выражение:

$$\Phi_m(t) \leq 2 \int_0^t (t-s) \|u_m\|^2(s) ds + b_0 + 2(c_5 + c_6) \frac{t^2}{2} + c_8 \int_0^t (t-s) \|u_m\|^{q+2}(s) ds. \quad (2.34)$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$z^2 \cdot 1 \leq \frac{2}{q+2} z^{q+2} + \frac{q}{q+2}. \quad (2.35)$$

Из неравенств (2.34) и (2.35) получим

$$\Phi_m(t) \leq \frac{4}{q+2} \int_0^t (t-s) \|u_m\|^{q+2}(s) ds + b_0 + c_9 \frac{t^2}{2} + c_8 \int_0^t (t-s) \|u_m\|^{q+2}(s) ds, \quad (2.36)$$

откуда, в свою очередь, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\Phi_m(t) \leq b_0 + c_9 \frac{T^2}{2} + c_{10} T \int_0^t \|u_m\|^{q+2}(s) ds \leq b_0 + c_9 \frac{T^2}{2} + c_{11} T \int_0^t \Phi_m^{1+q/2}(s) ds. \quad (2.37)$$

Теперь осталось воспользоваться известной теоремой Гронуолла–Беллмана–Бихари и получить неравенство

$$\Phi_m(t) \leq \frac{b_0 + c_9 \frac{T^2}{2}}{\left[1 - \frac{q}{2} \left[b_0 + c_9 \frac{T^2}{2}\right]^{q/2} c_{11} T t\right]^{2/q}}, \quad (2.38)$$

из которого вытекает, что при выполнении неравенства

$$\frac{q}{2} \left[b_0 + c_9 \frac{T^2}{2} \right]^{q/2} c_{11} T^2 < 1$$

имеем

$$\Phi_m(t) \leq c_{12}(T) < +\infty \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.39)$$

где постоянная c_{12} не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Таким образом, мы получили первую априорную оценку. Теперь мы воспользуемся равенством (2.27), из которого в силу (2.32) получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} J_m &\leq 2\Phi_m(t) + \|u_{m1}\|^2 + \|\nabla u_{m0}\|_2^2 + 2|\psi(u_{m0})| + 2c_5 + 2c_4 a^{q+2} \|u_m\|^{q+2} \\ &\leq c_{13} + 2\Phi_m(t) + c_{14} \Phi_m^{1+q/2}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

откуда приходим ко второй априорной оценке

$$J_m \leq c_{15}(T) < +\infty \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.41)$$

где постоянная c_{15} не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Из оценки (2.40) и вполне непрерывного вложения $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ при $q \in (0, 2]$ мы получим еще одну априорную оценку

$$\text{ess. sup}_{t \in (0, T)} \|u_m\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)}(t) \leq c_9, \quad (2.42)$$

где $c_9 > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь нам необходимо получить еще одно энергетическое равенство. С этой целью умножим обе части равенства (2.8) на $c''_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. В итоге получим следующее равенство:

$$\int_{\Omega} [|\nabla u''_m|^2 + |u''_m|^2] dx + \int_{\Omega} (\nabla u''_m, \nabla u_m) dx = \int_{\partial\Omega} f(x, u_m) u''_m d\Gamma, \quad (2.43)$$

из которого, используя неравенства Коши–Буняковского и Гёльдера, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|u''_m\|^2 &\leq \|\nabla u''_m\|_2 \|\nabla u_m\|_2 + \|u''_m\|_{\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)} \|f(x, u_m)\|_{\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u''_m\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\nabla u_m\|_2^2 + a \|u''_m\| [c_5 + c_4 a^{q+1} \|u_m\|^{q+1}] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u''_m\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u_m\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u''_m\|^2 + \frac{a^2}{2\varepsilon} [c_5 + c_4 a^{q+1} \|u_m\|^{q+1}]^2 \\ &\leq \varepsilon \|u''_m\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u_m\|^2 + \frac{a^2}{2\varepsilon} [c_5 + c_4 a^{q+1} \|u_m\|^{q+1}]^2 \leq \varepsilon \|u''_m\|^2 + \frac{c_{10}}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $c_{10} > 0$ – постоянная, не зависящая от $m \in \mathbb{N}$ и такая, что

$$\frac{1}{2} \|u_m\|^2 + \frac{a^2}{2} [c_5 + c_4 a^{q+1} \|u_m\|^{q+1}]^2 \leq c_{10},$$

причем она существует в силу априорной оценки (2.40). Таким образом, положив $\varepsilon = 1/2$ в оценке (2.44), мы получим следующую априорную оценку:

$$\text{ess. sup}_{t \in (0, T)} \|u''_m\|(t) \leq c_{11}, \quad (2.45)$$

где $c_{11} > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Итак, имеют место априорные оценки (2.39), (2.40) и (2.45) при некотором достаточно малом $T > 0$. Прежде всего докажем, что найденное на шаге 2 время существования решения T_m системы дифференциальных уравнений (2.8), (2.9) удовлетворяет условию $T_m \geq T > 0$, где T не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Действительно, с этой целью нам надо воспользоваться априорными оценками (2.41) и (2.45). Заметим, что

$$\begin{aligned} \|u_m\|^2(t) &= \sum_{k,j=1}^m \alpha_{kj} c_{mk}(t) c_{mj}(t), \\ \alpha_{kj} &\equiv \int_{\Omega} (\nabla w_k, \nabla w_j) dx + \int_{\Omega} w_j w_k dx. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Рассмотрим отдельно квадратичную форму в правой части (2.46). Как и ранее, можно доказать, что матрица $\|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m$ этой квадратичной формы является положительно определенной. Поскольку матрица этой квадратичной формы не зависит от времени, существует такая не зависящая от времени вещественная ортогональная матрица $\mathbb{Q}_m$, что

$$c_m = \mathbb{Q}_m d_m, \quad c_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^t, \quad d_m = (d_{m1}, \dots, d_{mm})^t, \quad (2.47)$$

причем

$$\sum_{k,j=1}^m \alpha_{kj} c_{mk}(t) c_{mj}(t) = \sum_{l=1}^m \lambda_l d_{ml}^2, \quad (2.48)$$

где $\lambda_l > 0$ для всех $l = \overline{1, m}$. Тогда из (2.46) и (2.48) с учетом априорной оценки (2.39) мы приходим к выводу о том, что

$$|d_{ml}| \leq c_{12}(m), \quad (2.49)$$

где постоянная не зависит от $l = \overline{1, m}$, но зависит от $m \in \mathbb{N}$. Теперь заметим, что всякая собственная матрица $\mathbb{Q}_m: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет конечную норму

$$\|\mathbb{Q}_m\|_{m \otimes m} = \sup_{\|\eta\|_m=1} \|\mathbb{Q}_m \eta\|_m < +\infty, \quad (2.50)$$

где $\|\eta\|_m \equiv (|\eta_1|^2 + \dots + |\eta_m|^2)^{1/2}$ — одна из эквивалентных норм на $\mathbb{R}^m$, но тогда из (2.47) мы получим неравенство

$$\|c_m\|_m \leq \|\mathbb{Q}_m\|_{m \otimes m} \|d_m\|_m,$$

из которого в силу (2.49) получим оценку

$$|c_{mk}| \leq c_{13}(m) < +\infty, \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.51)$$

где постоянная $c_{13}(m)$ зависит от $m \in \mathbb{N}$, но не зависит от $t \in [0, T_m]$. Аналогично, из априорной оценки (2.41) мы приходим к следующему неравенству:

$$|c'_{mk}| \leq c_{14}(m) < +\infty, \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.52)$$

где постоянная $c_{14}(m)$ зависит от $m \in \mathbb{N}$, но не зависит от $t \in [0, T_m]$. Для каждого фиксированного $m \in \mathbb{N}$, используя алгоритм продолжения решения системы уравнений (2.8), (2.9) по времени, мы получим, что решение можно продолжить до момента времени $T > 0$, не зависящего от $m \in \mathbb{N}$ и для которого выполнена оценка сверху (2.40).

ШАГ 4. Предельный переход. Из априорных оценок (2.39), (2.40) и (2.44) вытекает, что существует такая подпоследовательность $\{u_{m_l}\} \subset \{u_m\}$, что

$$u_{m_l} \xrightarrow{*} u \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad (2.53)$$

$$u'_{m_l} \xrightarrow{*} v \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad (2.54)$$

$$u''_{m_l} \xrightarrow{*} w \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)). \quad (2.55)$$

Прежде всего докажем, что $v = u'$. Действительно, из (2.53) вытекает, что

$$u'_{m_l} \xrightarrow{*} u' \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)),$$

но, с другой стороны, из (2.54) вытекает, что

$$u'_{m_l} \xrightarrow{*} v \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)).$$

Поэтому в силу отделимости *-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ имеет место равенство обобщенных функций $v = u'$. Аналогичным образом доказывается, что $w = v' = u''$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$.

Теперь рассмотрим отдельно интеграл

$$I_{mj} = \int_{\partial\Omega} f(x, u_m) w_j d\Gamma. \quad (2.56)$$

Еще раз заметим, что имеет место вполне непрерывное вложение (см., например, [12])

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega) \quad \text{при } q \in (0, 2].$$

Нам потребуется некий общий результат о компактности, доказанный в работе [11], который для полноты изложения мы приведем с доказательством.

ЛЕММА 2.2. Пусть последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|u_m\|_{\mathbb{V}_0} \leq C, \quad \int_0^T \|u'_m\|_{\mathbb{V}_0}^2 dt \leq C \quad \forall t \in (0, T), \quad (2.57)$$

где $0 < T < \infty$ и постоянная C зависит от T . Пусть, кроме того, имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{V}_0 \hookrightarrow \mathbb{W}.$$

Тогда существует функция $u(s) \in \mathbb{W}$ для почти всех $s \in [0, T]$ и имеет место предельное равенство $u_{m_k}(s) \rightarrow u(s)$ сильно в $\mathbb{W}$ для почти всех $s \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим рефлексивное банахово пространство

$$\mathbb{B} = \{u \mid u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0), \ u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)\}. \quad (2.58)$$

Заметим, что функция $u_m(t)$ после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега на $(0, T)$ принадлежит классу $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{V}_0) \subset \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{W})$. В силу (2.57) последовательность $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ ограничена в $\mathbb{B}$. Поскольку $\mathbb{B}$ – рефлексивное банахово пространство, то из последовательности $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m_k}\}_{m_k=1}^\infty$. В частности,

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0). \quad (2.59)$$

Докажем, что

$$u_{m_k}(s) \rightarrow u(s) \quad \text{сильно в } \mathbb{W} \quad \text{для почти всех } s \in [0, T]. \quad (2.60)$$

Без ограничения общности можно считать, что $u = 0$. Кроме того, s не играет никакой специальной роли, и нам остается только показать, что

$$u_{m_k}(0) \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}. \quad (2.61)$$

Определим теперь v_k равенством

$$v_k(t) = u_{m_k}(\lambda t), \quad (2.62)$$

где $\lambda > 0$ фиксировано, причем

$$u_{m_k}(0) = v_k(0), \quad \|v_k\|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)} \leq c_1 \lambda^{-1/2}, \quad \|v'_k\|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W})} \leq c_2 \lambda^{1/2}. \quad (2.63)$$

Если функция φ из класса $\mathbb{C}^1[0, T]$ и $\varphi(0) = -1$, $\varphi(T) = 0$, то

$$v_k(0) = \int_0^T (\varphi(t)v_k)' dt = \beta_k + \gamma_k, \quad \beta_k = \int_0^T \varphi v'_k dt, \quad \gamma_k = \int_0^T \varphi' v_k dt.$$

Значит,

$$\|u_{m_k}(0)\|_{\mathbb{W}} \leq \|\beta_k\|_{\mathbb{W}} + \|\gamma_k\|_{\mathbb{W}} \leq c_3 \lambda^{1/2} + \|\gamma_k\|_{\mathbb{W}}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\lambda > 0$ такое, что $c_3 \lambda^{1/2} \leq \varepsilon/2$. Поскольку $v_k \rightharpoonup 0$ слабо в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{V}_0)$, то $\gamma_k \rightharpoonup 0$ слабо в $\mathbb{V}_0$. Однако вложение $\mathbb{V}_0$ в $\mathbb{W}$ вполне непрерывно, поэтому имеет место сильная сходимост $\gamma_k \rightarrow 0$ в $\mathbb{W}$. Стало быть, для произвольного ε найдется такое N , что для всех $m_k > N$ имеет место неравенство

$$\|u_{m_k}(0)\|_{\mathbb{W}} \leq \varepsilon.$$

Тем самым (2.61) доказано. Лемма доказана.

Теперь мы воспользуемся результатом леммы 2.2, положив $\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\Omega)$ и $\mathbb{W} = \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$. Из леммы 2.2 вытекает существование такой подпоследовательности $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, что

$$u_{m_k}(t) \rightarrow \bar{u}(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega) \quad (2.64)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Докажем, что $\bar{u}(t)$ – след функции $u(t)$ на многообразии $\partial\Omega$. Действительно, из (2.53)

$$u_{m_k} \xrightarrow{*} u \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$$

и, кроме того, из (2.64) вытекает, что

$$u_{m_k} \xrightarrow{*} \bar{u} \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)).$$

Поскольку $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega))$, в силу отделимости банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega))$ получим, что $\bar{u}(t)$ – след функции $u(t)$ на многообразии $\partial\Omega$ для почти всех $t \in [0, T]$. Поэтому мы в дальнейшем вместо обозначения $\bar{u}(t)$ для следа будем использовать обозначение $u(t)$.

Теперь наша задача – доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. *Существует такая подпоследовательность $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, что*

$$I_{m_k} \rightarrow I \quad \text{для почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \quad (2.65)$$

где

$$I_{m_k} = \int_{\partial\Omega} w_j f(x, u_{m_k}) d\Gamma, \quad I = \int_{\partial\Omega} w_j f(x, u) d\Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу условий (i), (ii) каратеодориева функция $f(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ порождает оператор Немыцкого

$$N_f(u) \equiv f(x, u),$$

который в силу условия роста (ii) является сильно непрерывным из $\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ в $\mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega)$. С другой стороны, в силу результата леммы 2.2 имеет место предельное равенство (2.64). Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |I_{m_k} - I| &\leq \int_{\partial\Omega} |w_j| |N_f(u_{m_k}) - N_f(u)| d\Gamma \leq \left(\int_{\partial\Omega} |w_j|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \\ &\times \left(\int_{\partial\Omega} |N_f(u_{m_k}) - N_f(u)|^{(q+2)/(q+1)} d\Gamma \right)^{(q+1)/(q+2)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Таким образом, с учетом предельных равенств (2.53)–(2.55) и (2.65) можно перейти к пределу при $m_k \rightarrow +\infty$ в равенстве

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi_1(t) \int_{\Omega} [(\nabla u_m'', \nabla w_j) + (\nabla u_m, \nabla w_j) + u_m'' w_j] dx dt \\ = \int_0^T \varphi_1(t) \int_{\partial\Omega} f(x, u_m) w_j d\Gamma dt \end{aligned}$$

при $j = \overline{1, m}$ для всех $\varphi_1(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$ и в результате получить равенство

$$\int_0^T \varphi_1(t) \int_{\Omega} [(\nabla u'', \nabla w_j) + (\nabla u, \nabla w_j) + u'' w_j] dx dt = \int_0^T \varphi_1(t) \int_{\partial\Omega} f(x, u) w_j d\Gamma dt$$

при $j = \overline{1, \infty}$ для всех $\varphi_1(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$, из которого, в свою очередь, в силу основной леммы вариационного исчисления получим следующее равенство для почти всех $t \in [0, T]$:

$$\int_{\Omega} [(\nabla u'', \nabla w_j) + (\nabla u, \nabla w_j) + u'' w_j] dx = \int_{\partial\Omega} f(x, u) w_j d\Gamma, \quad j = \overline{1, \infty}. \quad (2.66)$$

Поскольку $\{w_j\} \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ – базис по условию, из равенства (2.66) получим, что для почти всех $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} [(\nabla u'', \nabla \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + u'' \varphi] dx = \int_{\partial\Omega} f(x, u) \varphi(x) d\Gamma \quad \forall \varphi(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega). \quad (2.67)$$

Таким образом, нами доказано существование слабого обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), понимаемого в смысле определения 2.2.

ШАГ 5. Единственность. Прежде всего заметим, что слабое обобщенное решение $u(x, t)$ после возможного изменения на множестве $[0, T]$ нулевой меры Лебега принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$. Однако этой гладкости недостаточно, чтобы можно было непосредственно из (2.4) получить требуемый результат. Поэтому мы воспользуемся эквивалентным определением слабого обобщенного решения в смысле определения 2.3. Предварительно докажем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2.4. Пусть $v^{(k)} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ при $k = 0, 1, 2$. Тогда для всех $t \in [0, T]$ имеет место равенство

$$2 \int_0^t \int_{\Omega} [(\nabla v'', \nabla v') + v'' v'] dx ds = \|v'\|^2(t) - \|v_1\|^2. \quad (2.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_\varepsilon(t)$ – “срезка” с ядром вида “шапочки” функции

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v(t) & \text{при } t \in [0, T], \\ 0 & \text{при } t \in \mathbb{R} \setminus [0, T]. \end{cases}$$

Тогда в этом случае

$$v_\varepsilon(t) \in \mathbb{C}^{(\infty)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega)).$$

Поскольку $v^{(k)} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ при $k = 0, 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t) &\rightarrow v(t) && \text{сильно в } \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)), \\ v'_\varepsilon(t) &\rightarrow v'(t) && \text{сильно в } \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)), \\ v''_\varepsilon(t) &\rightarrow v''(t) && \text{сильно в } \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)). \end{aligned}$$

С другой стороны, для функции $v_\varepsilon(t)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} [(\nabla v''_\varepsilon, \nabla v'_\varepsilon) + v''_\varepsilon v'_\varepsilon] dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v'_\varepsilon\|^2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.69)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\nabla v''_\varepsilon, \nabla v'_\varepsilon) + v''_\varepsilon v'_\varepsilon] dx &\rightarrow \int_{\Omega} [(\nabla v'', \nabla v') + v'' v'] dx \\ &\text{сильно в } \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(0, T) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Кроме того,

$$\|v'_\varepsilon\|^2 \rightarrow \|v'\|^2 \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^1_{\text{loc}}(0, T) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.71)$$

Однако тогда

$$\frac{d}{dt}\|v'_\varepsilon\|^2 \xrightarrow{*} \frac{d}{dt}\|v'\|^2 \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathcal{D}'(0, T) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.72)$$

Таким образом, мы можем перейти к пределу в равенстве (2.69) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле *-слабой топологии локально выпуклого пространства $\mathcal{D}'(0, T)$ и в результате получить равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|v'\|^2 = \int_{\Omega} [(\nabla v'', \nabla v') + v'' v'] dx, \quad (2.73)$$

понимаемое в смысле $\mathcal{D}'(0, T)$, т. е. в смысле равенства

$$\left\langle \left\langle \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|v'\|^2 - \int_{\Omega} [(\nabla v'', \nabla v') + v'' v'] dx, w \right\rangle \right\rangle = 0$$

для всех $w \in \mathcal{D}(0, T)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между пространствами $\mathcal{D}(0, T)$ и $\mathcal{D}'(0, T)$. Теперь заметим, что по условию леммы $v^{(k)} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ при $k = 0, 1, 2$, поэтому

$$\int_{\Omega} [(\nabla v'', \nabla v') + v'' v'] dx \in \mathbb{C}[0, T], \quad \|v'\| \in \mathbb{C}[0, T],$$

тем самым, из равенства (2.72) вытекает, что

$$\|v'\| \in \mathbb{AC}[0, T],$$

и, следовательно, из (2.73) и основной леммы вариационного исчисления получим, что для почти всех $t \in [0, T]$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\|v'\|^2 = \int_{\Omega} [(\nabla v'', \nabla v') + v'' v'] dx,$$

из которого интегрированием по времени получим равенство (2.68). Лемма доказана.

Теперь мы можем перейти к доказательству единственности слабого обобщенного решения рассматриваемой задачи.

Итак, пусть v_1 и v_2 – два слабых обобщенных решения при достаточно малом $T > 0$, соответствующих одним и тем же начальным условиям $u_0, u_1 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. Тогда из (2.6) получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla v''_1 - \nabla v''_2, \nabla w) + (\nabla v_1 - \nabla v_2, \nabla w) + [v''_1 - v''_2]w] dx ds \\ &= \int_0^T \int_{\partial\Omega} [f(x, v_1) - f(x, v_2)] w d\Gamma ds \quad \forall w \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Теперь возьмем в качестве $w(s)$ следующую функцию:

$$w(s) = \begin{cases} v'_1(s) - v'_2(s) & \text{при } s \in [0, t], \\ 0 & \text{при } s \in (t, T]. \end{cases} \quad (2.75)$$

После подстановки функции $w(s)$ из (2.75) в (2.74) получим в силу леммы 2.4 следующее равенство:

$$\|v'_1 - v'_2\|^2 + \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_2^2 = 2 \int_0^t \int_{\partial\Omega} (v'_1 - v'_2)(f(x, v_1) - f(x, v_2)) d\Gamma ds. \quad (2.76)$$

Рассмотрим отдельно правую часть равенства (2.76). Для нее справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} (v'_1 - v'_2)(f(x, v_1) - f(x, v_2)) d\Gamma ds \right| &\leq \int_0^t \left(\int_{\partial\Omega} [v'_1 - v'_2]^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \\ &\quad \times \left(\int_{\partial\Omega} [f(x, v_1) - f(x, v_2)]^{(q+2)/(q+1)} d\Gamma \right)^{(q+1)/(q+2)} ds \\ &\leq a \int_0^t \|v'_1 - v'_2\|(s) \mu(aR^*) \|v_1 - v_2\|(s) ds, \end{aligned} \quad (2.77)$$

где мы воспользовались условием (iv) для $f(x, v)$, а $R^* \equiv \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$. Заметим, что имеет место равенство

$$v_1(s) - v_2(s) = \int_0^s [v'_1(\sigma) - v'_2(\sigma)] d\sigma, \quad (2.78)$$

поскольку $v_1(0) - v_2(0) = 0$ и $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$. Из (2.78) получим следующую оценку:

$$\|v_1 - v_2\|(s) \leq \int_0^s \|v'_1 - v'_2\|(\sigma) d\sigma. \quad (2.79)$$

Теперь из равенства (2.76) и неравенств (2.77) и (2.79) получим искомое неравенство

$$\|v'_1 - v'_2\|^2 \leq c_{15}(T) \int_0^t \|v'_1 - v'_2\|(s) \int_0^s \|v'_1 - v'_2\|(\sigma) d\sigma ds \quad (2.80)$$

для всех $t \in [0, T]$. Рассмотрим функцию

$$F(t) \equiv \sup_{\tau \in [0, t]} \|v'_1 - v'_2\|^2(\tau). \quad (2.81)$$

С учетом определения функции $F(t)$ из неравенства (2.80) получим неравенство

$$F(t_1) \leq c_{15} t_1^2 F(t_1), \quad (2.82)$$

откуда вытекает, что если выбрать $t_1 > 0$ достаточно малым, то неравенство (2.82) выполнено тогда и только тогда, когда $F(t_1) = 0$. Теперь из соотношения (2.80) вытекает неравенство

$$F(t_2) \leq c_{15}(t_2 - t_1)^2 F(t_2), \quad (2.83)$$

из которого следует, что при некотором $t_2 > t_1$ неравенство (2.83) выполнено тогда и только тогда, когда $F(t_2) = 0$. На n -м шаге мы получим неравенство

$$F(t_n) \leq c_{15}(t_n - t_{n-1})^2 F(t_n), \quad t_0 = 0. \quad (2.84)$$

Тем самым, мы построили монотонно возрастающую последовательность $\{t_n\} \in \mathbb{R}_+$, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$F(t_n) = 0. \quad (2.85)$$

Последовательность $\{t_m\}$ либо сходится, либо расходится. Если она расходится, то в силу равенств (2.85) и (2.81) получим, что $v_1(t) = v_2(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$. Если она сходится, то имеется две возможности: либо предел $t^* \geq T$, либо $t^* \in (0, T)$. В первом случае опять приходим к равенству $v_1(t) = v_2(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$, а во втором случае из (2.85) получим, что

$$F(t^*) = 0,$$

и тогда мы можем снова продолжить указанный процесс. Таким образом, и в этом случае получим, что $v_1(t) = v_2(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$. Единственность слабого обобщенного решения доказана.

ШАГ 6. Продолжение решения во времени. Теперь докажем, что существует такой момент времени $T_0 > 0$, что слабое обобщенное решение $u^{(k)}$ рассматриваемой задачи принадлежит классу $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ при $k = 0, 1, 2$ для всех $T \in (0, T_0)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае выполнено предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} [\|u\|^2 + \|u'\|^2] = +\infty.$$

Действительно, предположим, что $T_0 < +\infty$, но

$$\sup_{t \in (0, T_0)} [\|u\|^2 + \|u'\|^2] < +\infty. \quad (2.86)$$

Рассмотрим равенство (2.4):

$$\int_{\Omega} [(\nabla u'', \nabla \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + u'' \varphi] dx = \int_{\partial \Omega} f(x, u) \varphi(x) d\Gamma \quad \forall \varphi(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad (2.87)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Пусть $T' \in (0, T_0)$; тогда если в качестве начальных условий задачи (2.87) в точке $t = T'$ взять

$$u(T') = u_{0T'}, \quad u'(T') = u_{1T'}, \quad (2.88)$$

то для соответствующей задачи согласно доказанному существует единственное слабое обобщенное решение

$$u^{(k)} \in \mathbb{L}^\infty(T', T^*; \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad k = 0, 1, 2,$$

где

$$T^* = T^*(T') > 0,$$

причем функция $T^* = T^*(T')$ имеет положительный минимум в силу соотношения (2.86). Обозначим этот минимум снова через T^* . Теперь в качестве T' возьмем величину

$$T' = T_0 - \frac{T^*}{2}. \quad (2.89)$$

Для такого T' существует единственное слабое обобщенное решение $u^{(k)}$ задачи (2.87) и (2.88) класса $\mathbb{L}^\infty(T', T^*; \mathbb{H}^1(\Omega))$ при $k = 0, 1, 2$. Очевидно, что в рассматриваемом классе решение задачи (2.87), (2.88) и (2.4) “сшиваемы” в точке $t = T'$, и в итоге приходим к выводу, что существует решение задачи (2.4) с начальными условиями (1.3) на интервале $t \in (0, T' + T^*)$, но в силу (2.89) имеем $t \in (0, T_0 + T^*/2)$ при $T^* > 0$. Стало быть, продолжая этот процесс, мы получим, что $T_0 = +\infty$, но это противоречит исходному предположению о том, что $T_0 < +\infty$. Следовательно, предположение (2.86) не выполнено.

Таким образом, в настоящем параграфе доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $u_0, u_1 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ и выполнены условия (i), (ii) и (iv) для функции $f(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда найдется такое $T_0 > 0$, что существует единственное слабое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) при любом $T \in (0, T_0)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup [\|u\|^2 + \|u'\|^2] = +\infty. \quad (2.90)$$

§ 3. Разрушение слабого обобщенного решения

Докажем, что при выполнении некоторых условий, налагаемых на начальные данные, и при выполнении условия (iii) для функции $f(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ время $T_0 > 0$ существования решения конечно: $T_0 < +\infty$. В силу теоремы 2.2 это означает, что имеет место предельное равенство (2.90). На самом деле мы докажем более сильный результат, а именно

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup \Phi[u](t) = +\infty,$$

где

$$\Phi[u](t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |u|^2] \, dx.$$

Заметим, что мы не можем сразу же вывести необходимые нам энергетические соотношения для слабого обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), поскольку слабое обобщенное решение u принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}^1(\Omega))$, $u'' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ для всех $T \in (0, T_0)$, а для вывода энергетических соотношений нам нужна большая гладкость решения, т. е.

$$u \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}^1(\Omega)).$$

Поэтому воспользуемся результатом из § 2 о том, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует единственное решение

$$u_m \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$$

задачи (2.8), (2.9). Тогда умножим обе части равенства (2.8) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, в результате получим следующее равенство:

$$\int_{\Omega} [(\nabla u_m'', \nabla u_m) + |\nabla u_m|^2 + u_m'' u_m] dx = \int_{\partial\Omega} u_m f(x, u_m) d\Gamma. \quad (3.1)$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\nabla u_m'', \nabla u_m) + u_m'' u_m] dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(\nabla u_m', \nabla u_m) + u_m' u_m] dx - \int_{\Omega} [|\nabla u_m'|^2 + |u_m'|^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} [|\nabla u_m|^2 + |u_m|^2] dx - \int_{\Omega} [|\nabla u_m'|^2 + |u_m'|^2] dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_m|^2 + |u_m|^2] dx, \quad J_m(t) \equiv \int_{\Omega} [|\nabla u_m'|^2 + |u_m'|^2] dx, \quad (3.3)$$

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |u|^2] dx, \quad J(t) \equiv \int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + |u'|^2] dx. \quad (3.4)$$

С учетом введенных обозначений (3.3) и цепочки равенств (3.2) из равенства (3.1) получим

$$\Phi_m'' - J_m + \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u_m f(x, u_m) d\Gamma. \quad (3.5)$$

Будем называть (3.5) *первым энергетическим равенством*.

Умножим обе части равенства (2.8) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, в результате получим равенство

$$\int_{\Omega} [(\nabla u_m'', \nabla u_m') + (\nabla u_m, \nabla u_m') + u_m'' u_m'] dx = \int_{\partial\Omega} f(x, u_m) u_m' d\Gamma, \quad (3.6)$$

из которого в силу условий (i), (ii) и результатов леммы 2.1 и теоремы 2.1 получим

$$\frac{1}{2} \frac{dJ_m}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx = \frac{d}{dt} \psi(u_m), \quad (3.7)$$

где

$$\psi(v) \equiv \int_{\partial\Omega} \int_0^v f(x, s) ds d\Gamma. \quad (3.8)$$

Тогда с учетом обозначения (3.8) мы получим *второе энергетическое равенство*

$$\psi(u_m) - \frac{1}{2} J_m - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx = \psi(u_{m0}) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_{m1}|^2 + |u_{m1}|^2 + |\nabla u_{m0}|^2] dx. \quad (3.9)$$

Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$\psi(u_0) > \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |u_1|^2 + |\nabla u_0|^2] dx. \quad (3.10)$$

ЛЕММА 3.1. *Имеет место предельное равенство*

$$\psi(u_{m0}) \rightarrow \psi(u_0), \quad m \rightarrow +\infty. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega), \quad q \in (0, 2],$$

поэтому

$$u_{m0} \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega), \quad m \rightarrow +\infty. \quad (3.12)$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(x, v) = \int_0^v f(x, s) ds. \quad (3.13)$$

Во-первых, в силу каратеодориевости функции $f(x, s): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функция $\mathcal{F}(x, s): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ также каратеодориева. С другой стороны, в силу условия роста (ii) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(x, s)| &\leq \int_0^s |f(x, \sigma)| d\sigma \leq c_1 |s| + \frac{c_2}{q+2} |s|^{q+2} \\ &\leq \frac{q+1}{q+2} c_1^{(q+2)/(q+1)} + \frac{1+c_2}{q+2} |s|^{q+2} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 |s|^{q+2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\bar{c}_1 = \frac{q+1}{q+2} c_1^{(q+2)/(q+1)}, \quad \bar{c}_2 = \frac{1+c_2}{q+2}.$$

Таким образом, функция $\mathcal{F}(x, s)$ является каратеодориевой и удовлетворяет условию роста (3.14). Поэтому оператор Немыцкого

$$N_{\mathcal{F}}(v) \equiv \mathcal{F}(x, v),$$

порожденный функцией $\mathcal{F}(x, s)$, является непрерывным из $\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ в $\mathbb{L}^1(\partial\Omega)$ в сильных топологиях этих банаховых пространств. Данный результат есть следствие общей теоремы М. А. Красносельского [13]. Поэтому если $v_n \rightarrow v$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$ при $n \rightarrow +\infty$, то

$$\int_{\partial\Omega} N_{\mathcal{F}}(v_n) d\Gamma \rightarrow \int_{\partial\Omega} N_{\mathcal{F}}(v) d\Gamma, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Стало быть, в силу (3.12) приходим к выводу о том, что

$$\psi(u_{m0}) = \int_{\partial\Omega} N_{\mathcal{F}}(u_{m0}) d\Gamma \rightarrow \int_{\partial\Omega} N_{\mathcal{F}}(u_0) d\Gamma = \psi(u_0), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Лемма доказана.

Таким образом, из (3.11) будет следовать, что в силу неравенства (3.10) имеет место следующее неравенство для некоторой подпоследовательности $m \in \mathbb{N}$:

$$\psi(u_{m0}) > \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_{m1}|^2 + |u_{m1}|^2 + |\nabla u_{m0}|^2] dx. \quad (3.15)$$

Действительно, это следствие условий (2.10), из которых вытекает, что

$$\int_{\Omega} [|\nabla u_{m1}|^2 + |u_{m1}|^2 + |\nabla u_{m0}|^2] dx \rightarrow \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |u_1|^2 + |\nabla u_0|^2] dx.$$

Поэтому можно выбрать такие подпоследовательности последовательностей $\{u_{m0}\}$ и $\{u_{m1}\}$, что будет выполнено неравенство (3.15). Отсюда и из равенства (3.9) получим

$$\psi(u_m) > \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u'_m|^2 + |u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx. \quad (3.16)$$

Тогда в силу условия (iii) выполнено неравенство

$$\vartheta \psi(u_m) \leq \int_{\partial\Omega} u_m f(x, u_m) d\Gamma, \quad (3.17)$$

следовательно, из (3.16) мы получаем неравенство

$$\frac{\vartheta}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u'_m|^2 + |u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx \leq \int_{\partial\Omega} u_m f(x, u_m) d\Gamma. \quad (3.18)$$

Отсюда и из равенства (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_m'' - J_m - \frac{\vartheta}{2} J_m + \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx \\ \geq \int_{\partial\Omega} u_m f(x, u_m) d\Gamma - \frac{\vartheta}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u'_m|^2 + |u'_m|^2 + |\nabla u_m|^2] dx \geq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Следовательно, из (3.19) при $\vartheta > 2$ получим неравенство

$$\Phi_m'' - \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right) J_m \geq 0. \quad (3.20)$$

Далее нам потребуется следующая

ЛЕММА 3.2. *Справедливо неравенство*

$$(\Phi'_m)^2(t) \leq 2\Phi_m(t)J_m(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u_m(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$, справедливо равенство

$$\Phi'_m = \int_{\Omega} (\nabla u'_m, \nabla u_m) dx + \int_{\Omega} u'_m u_m dx.$$

Справедливы также следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\nabla u'_m, \nabla u_m) dx \right| &\leq \|\nabla u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_2, \\ \left| \int_{\Omega} u'_m u_m dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 (\Phi'_m)^2 &\leq \left(\|\nabla u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_2 + \left(\int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right)^{1/2} \right)^2 \\
 &\leq \|\nabla u'_m\|_2^2 \|\nabla u_m\|_2^2 + \int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \int_{\Omega} |u_m|^2 dx \\
 &\quad + 2 \|\nabla u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_2 \left(\int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\leq \|\nabla u'_m\|_2^2 \|\nabla u_m\|_2^2 + \int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \int_{\Omega} |u_m|^2 dx \\
 &\quad + \|\nabla u'_m\|_2^2 \int_{\Omega} |u_m|^2 dx + \|\nabla u_m\|_2^2 \int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \\
 &= \left(\|\nabla u'_m\|_2^2 + \int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \right) \left(\|\nabla u_m\|_2^2 + \int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right) = 2J_m(t) \Phi_m(t),
 \end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

при

$$a = \|\nabla u'_m\|_2 \left(\int_{\Omega} |u_m|^2 dx \right)^{1/2}, \quad b = \|\nabla u_m\|_2 \left(\int_{\Omega} |u'_m|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

С учетом неравенств (3.20) и (3.21) мы получим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi_m \Phi_m'' - \alpha (\Phi'_m)^2 \geq 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\vartheta}{2} \right), \quad \vartheta > 2. \quad (3.22)$$

Предположим, что выполнено дополнительное условие

$$\Phi'(0) > 0 \iff \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} u_1 u_0 dx > 0, \quad (3.23)$$

из которого вытекает, что для некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{u_{m0}\}$ и $\{u_{m1}\}$ будет выполнено неравенство

$$\Phi'_m(0) > 0 \iff \int_{\Omega} (\nabla u_{m1}, \nabla u_{m0}) dx + \int_{\Omega} u_{m1} u_{m0} dx > 0. \quad (3.24)$$

Действительно, это следствие условий (2.10) и того, что

$$\int_{\Omega} (\nabla v_1, \nabla v_2) dx + \int_{\Omega} v_1 v_2 dx$$

есть скалярное произведение в $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Поскольку $\Phi_m(t) \geq 0$ по определению (3.3), из (3.24) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_m''}{\Phi_m^\alpha} - \alpha \frac{(\Phi_m')^2}{\Phi_m^{1+\alpha}} &\geq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\Phi_m'}{\Phi_m^\alpha} \right] \geq 0 \Rightarrow \frac{\Phi_m'}{\Phi_m^\alpha} \geq \frac{\Phi_m'(0)}{\Phi_m^\alpha(0)} = c_4 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \Phi_m^{1-\alpha} \geq c_{4m} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\Phi_m^{\alpha-1}(0)} - \frac{1}{\Phi_m^{\alpha-1}} \geq c_{4m}(\alpha-1)t \\ &\Rightarrow \frac{1}{\Phi_m^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\Phi_m^{\alpha-1}(0)} - c_{4m}(\alpha-1)t \Rightarrow \Phi_m(t) \geq \frac{1}{[\Phi_{m0}^{1-\alpha} - c_{4m}(\alpha-1)t]^{1/(\alpha-1)}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Следовательно, найдется такой момент времени $T_{m0} \in (0, T_{m1}]$, что

$$\limsup_{t \uparrow T_{m0}} \Phi_m(t) = +\infty,$$

где

$$T_{m1} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{\Phi_m(0)}{\Phi_m'(0)} = \frac{4}{\vartheta-2} \frac{\Phi_m(0)}{\Phi_m'(0)}, \quad \vartheta > 2. \quad (3.26)$$

Таким образом, из (3.25) вытекает неравенство

$$\Phi_m(t) \geq \frac{\Phi_{m0}^{\alpha/(\alpha-1)}}{[\Phi_{m0} - (\alpha-1)\Phi_m'(0)t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (3.27)$$

где

$$\Phi_{m0} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_{m0}|^2 + |u_{m0}|^2] dx, \quad \Phi_m'(0) = \int_{\Omega} [(\nabla u_{m0}, \nabla u_{m1}) + u_{m0}u_{m1}] dx.$$

Понятно, что в силу предельных равенств (2.10) имеют место следующие выражения:

$$\Phi_{m0} \rightarrow \Phi(0), \quad \Phi_m'(0) \rightarrow \Phi'(0), \quad m \rightarrow +\infty.$$

ЛЕММА 3.3. *Имеет место следующая предельная формула:*

$$\Phi_{m_k}(t) \rightarrow \Phi(t) \quad \text{для почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем более сильный результат: существует такая подпоследовательность $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, что для всех $t \in (0, T]$ имеет место предельное выражение

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\Omega} [|\nabla u'_{m_k}|^2 + |u'_{m_k}|^2 + |\nabla u_{m_k}|^2 + |u_{m_k}|^2] dx ds \\ &\rightarrow \int_0^t \int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + |u'|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2] dx ds, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Действительно, введем гильбертово пространство

$$\mathbb{W}(Q_t) \equiv \{u: u, u' \in \mathbb{L}^2(0, t; \mathbb{H}^1(\Omega))\}$$

относительно скалярного произведения

$$\langle w, \varphi \rangle = \int_0^t \int_{\Omega} [(\nabla w', \nabla \varphi') + w' \varphi' + (\nabla w, \nabla \varphi) + w \varphi] dx ds.$$

Заметим, что $\mathbb{W}(Q_t)$ как гильбертово пространство является равномерно выпуклым банаховым пространством относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{W}(Q_t)}$, порожденной скалярным произведением. Кроме того, заметим, что (см. § 2) в силу предельного перехода (см. шаг 4 в § 2) имеет место следующее свойство:

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{W}(Q_t).$$

Действительно, по доказанному имеют место предельные соотношения

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)), \\ u'_{m_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)) \end{aligned}$$

при $k \rightarrow +\infty$. Это означает, что справедливы предельные соотношения

$$\int_0^T \langle u_{m_k}, w \rangle ds \rightarrow \int_0^T \langle u, w \rangle ds, \quad \int_0^T \langle u'_{m_k}, w \rangle ds \rightarrow \int_0^T \langle u', w \rangle ds \quad (3.30)$$

при $k \rightarrow +\infty$ для всех $w \in \mathbb{L}^1(0, T; (\mathbb{H}^1(\Omega))^*)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между сильно сопряженными пространствами $(\mathbb{H}^1(\Omega))^*$ и $\mathbb{H}^1(\Omega)$. Докажем, что для всех

$$w \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^1(0, T; (\mathbb{H}^1(\Omega))^*)$$

выражение

$$\int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u, \nabla w) + uw] dx ds$$

порождает линейный и непрерывный функционал над $\mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$. Действительно, пусть $u_n \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$; тогда из явного вида этого функционала следует, что

$$\int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u_n, \nabla w) + u_n w] dx ds \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u, \nabla w) + uw] dx ds.$$

Отсюда, в частности, имеем, что и для функционала $\int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u, \nabla w) + uw] dx ds$ справедливы выражения (3.30). Теперь приходим к выводу, что имеют место следующие предельные равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u_{m_k}, \nabla \varphi) + u_{m_k} \varphi] dx ds &\rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u, \nabla \varphi) + u \varphi] dx ds, \\ \int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u'_{m_k}, \nabla \chi) + u'_{m_k} \chi] dx ds &\rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} [(\nabla u', \nabla \chi) + u' \chi] dx ds \end{aligned}$$

для любых функций $\varphi, \chi \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ при $k \rightarrow +\infty$.

Для любой функции $v \in \mathbb{W}(Q_t)$ рассмотрим в качестве функций $\varphi, \chi \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ следующие функции:

$$\varphi(s) = \begin{cases} v(s) & \text{при } s \in [0, t], \\ 0 & \text{при } s \in (t, T], \end{cases} \quad \chi(s) = \begin{cases} v'(s) & \text{при } s \in [0, t], \\ 0 & \text{при } s \in (t, T]. \end{cases}$$

Тогда сразу же получим следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} [(\nabla u_{m_k}, \nabla v) + u_{m_k} v] dx ds &\rightarrow \int_0^t \int_{\Omega} [(\nabla u, \nabla v) + uv] dx ds, \\ \int_0^t \int_{\Omega} [(\nabla u'_{m_k}, \nabla v') + u'_{m_k} v'] dx ds &\rightarrow \int_0^t \int_{\Omega} [(\nabla u', \nabla v') + u' v'] dx ds \end{aligned}$$

для любых $v \in \mathbb{W}(Q_t)$ при $k \rightarrow +\infty$, т. е. получили искомый результат.

Поэтому для доказательства утверждения настоящей теоремы нам достаточно сначала доказать (3.29), т. е. что

$$\|u_{m_k}\|_{\mathbb{W}(Q_t)} \rightarrow \|u\|_{\mathbb{W}(Q_t)}, \quad k \rightarrow +\infty.$$

С этой целью прежде всего заметим, что слабое обобщенное решение u принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$ для всех $T \in (0, T_0)$, и поэтому в качестве $w \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ в равенстве (2.6) можно взять

$$w(s) = \varphi(s)u'(s) \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)),$$

где

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \in [0, t], \\ 0 & \text{при } s \in (t, T]. \end{cases}$$

После подстановки $w(s)$ в (2.6) получим равенство

$$J(t) + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 2\psi(u) + E_0,$$

где $E_0 = J(0) + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - 2\psi(u_0)$, которое можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$J(t) + 2\Phi(t) = 2\psi(u) + \int_{\Omega} |u|^2 dx + E_0. \quad (3.31)$$

Аналогичным образом из равенства (2.8), справедливого для галеркинских приближений, получим равенство

$$J_m(t) + 2\Phi_m(t) = 2\psi(u_m) + \int_{\Omega} |u_m|^2 dx + E_{m0}, \quad (3.32)$$

где

$$E_{m0} = J_m(0) + \int_{\Omega} |\nabla u_{m0}|^2 dx - 2\psi(u_{m0}). \quad (3.33)$$

Заметим, что норма банахова пространства $\mathbb{W}(Q_t)$ совпадает с выражением

$$\int_0^t [J(s) + 2\Phi(s)] ds.$$

Теперь мы воспользуемся результатом леммы 2.2, в которой положим $\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\Omega)$ и $\mathbb{W} = \mathbb{L}^2(\Omega)$, поскольку, очевидно, имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Поэтому из леммы 2.2 вытекает существование такой подпоследовательности $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, что имеет место следующее предельное выражение:

$$u_{m_k}(s) \rightarrow u(s) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(\Omega) \quad \text{для почти всех } s \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

Тем самым, в правой части равенства (3.32)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_{m_k}|^2 dx &\rightarrow \int_{\Omega} |u|^2 dx \quad \text{для почти всех } s \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \\ E_{m_k 0} &\rightarrow E_0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что имеет место следующее предельное равенство:

$$\psi(u_{m_k}) \rightarrow \psi(u), \quad k \rightarrow +\infty,$$

но это является следствием доказательства леммы 3.1. Действительно, в силу леммы 2.2, в которой мы положим $\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\Omega)$ и $\mathbb{W} = \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$, получим, что

$$u_{m_k}(s) \rightarrow u(s) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega) \quad \text{для почти всех } s \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty,$$

поскольку

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega), \quad q \in (0, 2].$$

Стало быть, из равенства (3.32) вытекает следующее предельное равенство:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [J_{m_k}(s) + 2\Phi_{m_k}(s)] = 2\psi(u) + \int_{\Omega} |u|^2 dx + E_0 \quad \text{для почти всех } s \in [0, T]. \quad (3.34)$$

Тогда с учетом равенства (3.31) получим, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [J_{m_k}(s) + 2\Phi_{m_k}(s)] = J(s) + 2\Phi(s) \quad \text{для почти всех } s \in [0, T]. \quad (3.35)$$

Тем более, имеет место предельное выражение

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t [J_{m_k}(s) + 2\Phi_{m_k}(s)] ds = \int_0^t [J(s) + 2\Phi(s)] ds \quad \forall t \in (0, T]. \quad (3.36)$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\|u_{m_k}\|_{\mathbb{W}(Q_t)} \rightarrow \|u\|_{\mathbb{W}(Q_t)}, \quad k \rightarrow +\infty,$$

поэтому, поскольку $u_{m_k} \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}(Q_t)$, мы приходим к выводу, что

$$u_{m_k} \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{W}(Q_t) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из очевидного непрерывного вложения $\mathbb{W}(Q_t) \subset \mathbb{L}^2(0, t; \mathbb{H}^1(\Omega))$ мы получим, что имеет место следующее предельное выражение:

$$\int_0^t \Phi_{m_k}(s) ds \rightarrow \int_0^t \Phi(s) ds \quad \forall t \in (0, T], \quad k \rightarrow +\infty. \quad (3.37)$$

Теперь наша задача – доказать, что

$$\Phi_{m_k}(s) \rightarrow \eta(s) \quad \text{для почти всех } s \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \quad (3.38)$$

где $\eta(s) \in \mathbb{L}^1(0, T)$ – некоторая функция. С этой целью нам необходимо воспользоваться первым энергетическим равенством (3.5)

$$\Phi_{m_k}'' - J_{m_k} + \int_{\Omega} |\nabla u_{m_k}|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u_{m_k} f(x, u_{m_k}) d\Gamma, \quad (3.39)$$

в которое подставим величину J_{m_k} из равенства (3.32). В результате приведения подобных слагаемых получим уравнение

$$\begin{aligned} \Phi_{m_k}'' + 2\Phi_{m_k} &= G(u_{m_k}), \\ G(u_{m_k}) &= 2 \int_{\Omega} |u_{m_k}|^2 dx + \psi(u_{m_k}) + \int_{\partial\Omega} u_{m_k} f(x, u_{m_k}) d\Gamma + E_{m_k 0}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

По доказанному имеют место следующие предельные выражения:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_{m_k}|^2 dx &\rightarrow \int_{\Omega} |u|^2 dx \quad \text{для почти всех } s \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \\ \psi(u_{m_k}) &\rightarrow \psi(u), \quad k \rightarrow +\infty, \\ E_{m_k 0} &\rightarrow E_0, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Кроме того, так же, как это сделано в лемме 3.1, можно доказать, что в силу леммы 2.2, в которой $\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\Omega)$ и $\mathbb{W} = \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$, имеет место утверждение:

$$\int_{\partial\Omega} u_{m_k} f(x, u_{m_k}) d\Gamma \rightarrow \int_{\partial\Omega} u f(x, u) d\Gamma$$

для почти всех $s \in [0, T]$ при $k \rightarrow +\infty$.

Таким образом,

$$G(u_{m_k}) \rightarrow G(u) = 2 \int_{\Omega} |u|^2 dx + \psi(u) + \int_{\partial\Omega} u f(x, u) d\Gamma + E_0 \quad (3.41)$$

для почти всех $s \in [0, T]$ при $k \rightarrow +\infty$. Уравнение (3.40) легко интегрируется, и мы получим следующее эквивалентное в классе $\mathbb{C}^{(2)}[0, T]$ уравнение:

$$\Phi_{m_k}(t) = a_{1m_k} \sin(\sqrt{2}t) + a_{0m_k} \cos(\sqrt{2}t) + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{2}(t-s))}{\sqrt{2}} G(u_{m_k})(s) ds, \quad (3.42)$$

где

$$a_{0m_k} = \Phi_{0m_k}, \quad a_{1m_k} = \frac{1}{2} \Phi'_{m_k}(0).$$

Из равенств (3.41) и (3.42) вытекает, что

$$\Phi_{m_k}(s) \rightarrow \eta(s) \quad \text{для почти всех } s \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \quad (3.43)$$

где $\eta(s) \in \mathbb{L}^1(0, T)$.

Таким образом, из (3.37) и (3.43) приходим к выводу, что

$$\int_0^t [\Phi(s) - \eta(s)] ds = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

но тогда $\Phi(s) = \eta(s)$ для почти всех $s \in [0, T]$. Следовательно, отсюда и из выражения (3.43) приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим неравенство (3.27). Перепишем его в следующем виде:

$$\Phi_m(t) \geq \frac{A_{m0}}{[T_{m1} - t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (3.44)$$

где

$$T_{m1} = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_{m0}}{\Phi'_m(0)}, \quad A_{m0} = \frac{\Phi_{m0}^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\alpha - 1)^{1/(\alpha-1)} (\Phi'_m(0))^{1/(\alpha-1)}}.$$

В силу сходимости последовательности $\{T_{m1}\}$, что следует из условий (2.10), можно выделить монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{T_{m1}\}$. Возможны два следующих случая: $T_{m1} \downarrow T_1$, $T_{m1} \uparrow T_1$, где, как уже доказано, $T_1 > 0$.

Рассмотрим второй случай. Тогда для любого фиксированного $\bar{m} \in \mathbb{N}$ неравенство (3.44) выполнено равномерно по $t \in [0, T_{\bar{m}1}]$ для всех $m > \bar{m}$. Тем самым, можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и получить следующее неравенство:

$$\Phi(t) \geq \frac{A_0}{[T_1 - t]^{1/(\alpha-1)}} \quad \forall t \in [0, T_{\bar{m}1}], \quad (3.45)$$

где

$$T_1 = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_0}{\Phi'(0)}, \quad A_0 = \frac{\Phi_0^{\alpha/(\alpha-1)}}{(\alpha - 1)^{1/(\alpha-1)} (\Phi'(0))^{1/(\alpha-1)}}.$$

Осталось перейти к пределу при $\bar{m} \rightarrow +\infty$ и получить из (3.45) оценку

$$\Phi(t) \geq \frac{A_0}{[T_1 - t]^{1/(\alpha-1)}} \quad \forall t \in [0, T_1]. \quad (3.46)$$

Таким образом, во втором случае приходим к неравенству $T_0 \leq T_1$.

Рассмотрим теперь первый случай. Итак, пусть $T_{m1} \downarrow T_1$. Сделаем предположение, что $T_1 < T_0$, но тогда

$$M \equiv \sup_{t \in [0, T_1]} \Phi(t) < +\infty.$$

Поэтому неравенство (3.44) выполнено равномерно по $t \in [0, T_1]$, и мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в этом неравенстве и получить, что

$$M \geq \Phi(t) \geq \frac{A_0}{[T_1 - t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad t \in [0, T_1],$$

но эта цепочка неравенств противоречива, в силу чего мы приходим к выводу о том, что $T_1 \geq T_0$.

Таким образом, в силу теоремы 2.2 и результатов, полученных в настоящем параграфе, мы доказали следующий основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для функции $f(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены условия (i)–(iv) u , кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. Тогда найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что существует единственное слабое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) для всех $T \in (0, T_0)$, причем при условиях

$$2 \int_{\partial\Omega} \int_0^{u_0(x)} f(x, s) ds d\Gamma > \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |u_1|^2] dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx, \quad (3.47)$$

$$\int_{\Omega} [(\nabla u_1, \nabla u_0) + u_0 u_1] dx > 0 \quad (3.48)$$

время существования решения $T_0 \in (0, T_1]$ совпадает со временем разрушения решения, где

$$T_1 = \frac{4}{\vartheta - 2} \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)},$$

$$\Phi'(0) = \int_{\Omega} [(\nabla u_1, \nabla u_0) + u_0 u_1] dx, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |u_0|^2] dx,$$

причем имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup \Phi(t) = +\infty, \quad (3.49)$$

где функция $\Phi(t)$ определена формулой (3.4).

§ 4. Гладкость слабого обобщенного решения

Здесь мы рассмотрим задачу о том, при каких дополнительных достаточных условиях для функции $f(x, s): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ слабое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) обладает большей гладкостью, а именно

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_{00}); \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad (4.1)$$

где $T_{00} > 0$ – время жизни решения задачи, аналогичное времени T_0 из теоремы 2.2.

Приведем другие условия, которым удовлетворяет $f(x, s)$:

(i)_a функция $f(x, u)$ является дифференцируемой по $u \in \mathbb{R}$ для $d\Gamma$ -почти всех $x \in \partial\Omega$;

(ii)_a функция

$$F(x, u) \equiv f'_u(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.2)$$

является каратеодориевой;

(iii)_a для функции $F(x, u)$ выполнено следующее условие роста:

$$|F(x, u)| \leq c_1 + c_2|u|^q, \quad q \in (0, 2]. \quad (4.3)$$

При выполнении условий (i)_a–(iii)_a мы можем получить еще одну априорную оценку для галеркинских приближений $u_m(t)$, введенных на шаге 1 доказательства теоремы 2.2, из которой будет следовать, что после возможного изменения на подмножестве $[0, T]$ нулевой меры Лебега слабое обобщенное решение будет принадлежать классу $\mathbb{C}^{(2)}([0, T_{00}); \mathbb{H}^1(\Omega))$.

Действительно, будем следовать схеме доказательства теоремы 2.2. При этом мы так же будем доказывать теорему о гладкости в несколько шагов.

Шаг 1. Локальная разрешимость. Будем искать галеркинские приближения (2.7)

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)w_k$$

в классе $\mathbb{C}^{(3)}[0, T_m]$. В этом классе при выполнении условий (i)_a–(iii)_a мы можем продифференцировать один раз равенство (2.11) и получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_{mk}'''(t) + \sum_{k=1}^m \beta_{kj} c_{mk}' = G_j(c_{mk}, c_{mk}'), \quad (4.4)$$

где

$$G_j(c_{mk}, c_{mk}') \equiv \int_{\partial\Omega} F\left(x, \sum_{l=1}^m c_{ml}(t)w_l\right) \sum_{k=1}^m c_{mk}'(t)w_k w_j d\Gamma, \quad (4.5)$$

а матрицы $\|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m$ и $\|\beta_{kj}\|_{k,j=1}^m$ определены равенствами (2.12). Систему уравнений (4.4) дополним уже введенными начальными условиями (2.9). Однако для корректной постановки задачи (4.4) нам нужно еще одно начальное условие $c_{mk}''(0)$ при $k = \overline{1, m}$. С этой целью заметим, что из (2.11) вытекает еще одно начальное условие

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} c_{mk}''(0) = - \sum_{k=1}^m \beta_{kj} c_{mk}(0) + F_j(c_{m1}(0), \dots, c_{mm}(0)), \quad (4.6)$$

где

$$F_j(c_{m1}(0), \dots, c_{mm}(0)) = \int_{\partial\Omega} f\left(x, \sum_{k=1}^m c_{mk}(0)w_k\right) w_j d\Gamma.$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (4.6) относительно

$$c_m''(0) = (c_{m1}''(0), \dots, c_{mm}''(0))^t \quad (4.7)$$

вытекает, что эта неоднородная система имеет единственное решение, поскольку согласно уже доказанному имеем

$$\det \|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^m > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Поэтому задача (4.4) вместе с начальными условиями (2.9) и (4.7) поставлена корректно, и в силу (4.8) получаем, что система уравнений (4.4) является системой типа Коши–Ковалевской. Для дальнейшего нам необходимо доказать, что функция

$$G_j = G_j(c_m, c'_m), \quad j = \overline{1, m}, \quad (4.9)$$

относительно столбцов

$$c_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^t \in \mathbb{R}^m, \quad c'_m = (c'_{m1}, \dots, c'_{mm})^t \in \mathbb{R}^m$$

является непрерывной на множестве $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$. Прежде всего докажем, что функция

$$F(x, u)v: \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

является каратеодориевой. Действительно, это следствие свойства (ii)_a, причем для функции $F(x, u)v$ имеет место цепочка неравенств, следующая из условия роста (iii)_a:

$$\begin{aligned} |F(x, u)v| &\leq c_1|v| + c_2|v||u|^q \\ &\leq \frac{q}{q+1}c_1^{(q+1)/q} + \frac{1}{q+1}|v|^{q+1} + \frac{1}{q+1}|v|^{q+1} + \frac{q}{q+1}c_2^{(q+1)/q}|u|^{q+1} \\ &= \bar{c}_1 + \bar{c}_2|v|^{q+1} + \bar{c}_3|u|^{q+1}. \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы М. А. Красносельского (см. [13]) оператор Немыцкого $N_{F(x, u)v}(u, v)$, порожденный функцией $F(x, u)v$, является сильно непрерывным:

$$N_{F(x, u)v}(u, v): \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega) \otimes \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\partial\Omega). \quad (4.10)$$

Пусть теперь $c_m^1 = (c_{m1}^1, \dots, c_{mm}^1)^t$, $c_m^2 = (c_{m1}^2, \dots, c_{mm}^2)^t \in \mathbb{R}^m$ и, кроме того,

$$u_m^1 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^1(t)w_k, \quad u_m^2 = \sum_{k=1}^m c_{mk}^2(t)w_k.$$

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\partial\Omega} F(x, u_m^1)(u_m^1)' w_j d\Gamma - \int_{\partial\Omega} F(x, u_m^2)(u_m^2)' w_j d\Gamma \right| \\ &\leq \left(\int_{\partial\Omega} |N_{F(x, u_m^1)v_m^1} - N_{F(x, u_m^2)v_m^2}|^{(q+2)/(q+1)} d\Gamma \right)^{(q+1)/(q+2)} \\ &\quad \times \left(\int_{\partial\Omega} |w_j|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при

$$\int_{\partial\Omega} |u_m^1 - u_m^2|^{q+2} d\Gamma \rightarrow 0, \quad \int_{\partial\Omega} |v_m^1 - v_m^2|^{q+2} d\Gamma \rightarrow 0,$$

где $v_m^1 = (u_m^1)'$, $v_m^2 = (u_m^2)'$. Однако

$$u_m^1 - u_m^2 = \sum_{k=1}^m [c_{mk}^1 - c_{mk}^2]w_k, \quad v_m^1 - v_m^2 = \sum_{k=1}^m [(c_{mk}^1)' - (c_{mk}^2)']w_k,$$

поэтому имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Omega} |u_m^1 - u_m^2|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} &\leq \sum_{k=1}^m |c_{mk}^1 - c_{mk}^2| \left(\int_{\partial\Omega} |w_k|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)}, \\ \left(\int_{\partial\Omega} |v_m^1 - v_m^2|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} &\leq \sum_{k=1}^m |(c_{mk}^1)' - (c_{mk}^2)'| \left(\int_{\partial\Omega} |w_k|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)}, \end{aligned}$$

из которых и вытекает непрерывность функций $G_j = G_j(u_m, u'_m)$.

Таким образом, в силу известной теоремы мы приходим к выводу, что существует решение системы уравнений (4.4) при начальных условиях (2.9) и (4.7) класса $\mathbb{C}^{(3)}[0, T_m]$ при некотором $T_m > 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

ШАГ 2. Четвертая априорная оценка. Выведем нужную нам дополнительную априорную оценку, которая с учетом априорных оценок (2.39), (2.40) и (2.44) является четвертой.

Продифференцируем по $t \in [0, T]$ равенство (2.8), что можно сделать в силу результата, полученного на шаге 1. Имеем

$$\int_{\Omega} [(\nabla u_m''', \nabla w_j) + (\nabla u_m', \nabla w_j) + u_m''' w_j] dx = \int_{\partial\Omega} F(x, u_m) u_m' w_j d\Gamma. \quad (4.11)$$

Умножим обе части равенства (4.11) на $c_{mj}''(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$; тогда получим

$$\|u_m'''\|^2 + \int_{\Omega} (\nabla u_m''', \nabla u_m') dx = \int_{\partial\Omega} F(x, u_m) u_m' u_m''' d\Gamma. \quad (4.12)$$

Справедливы следующие оценки:

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla u_m''', \nabla u_m') dx \right| \leq \|\nabla u_m'''\|_2 \|\nabla u_m'\|_2 \leq \|u_m'''\| \|u_m'\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_m'''\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u_m'\|^2, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} F(x, u_m) u_m' u_m''' d\Gamma \right| &\leq \left(\int_{\partial\Omega} |F(x, u_m)|^{(q+2)/q} d\Gamma \right)^{(q+2)/q} \\ &\quad \times \left(\int_{\partial\Omega} |u_m'|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \left(\int_{\partial\Omega} |u_m'''|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \\ &\leq \left[c_1 (\text{meas } \partial\Omega)^{q/(q+2)} + c_2 \left(\int_{\partial\Omega} |u_m|^{q+2} d\Gamma \right)^{q/(q+2)} \right] \\ &\quad \times \left(\int_{\partial\Omega} |u_m'|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \left(\int_{\partial\Omega} |u_m'''|^{q+2} d\Gamma \right)^{1/(q+2)} \\ &\leq [c_3 + c_4 \|u_m\|] \|u_m'\| \|u_m'''\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_m'''\|^2 + \frac{c_{16}}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где мы воспользовались опять вложением $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q+2}(\partial\Omega)$, кроме того, $c_{16} \in (0, +\infty)$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$ в силу априорных оценок (2.41), (2.45). Таким образом, из (4.12)–(4.14) имеем неравенство

$$\|u_m'''\|^2 \leq \varepsilon \|u_m'''\|^2 + \frac{c_7}{2\varepsilon} + \frac{c_{16}}{2\varepsilon},$$

из которого, положив $\varepsilon = 1/2$, получим четвертую априорную оценку

$$\operatorname{ess. sup}_{t \in (0, T)} \|u_m'''\| \leq c_{17}, \quad (4.15)$$

где $c_{17} \in (0, +\infty)$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Заметим теперь, что, используя априорные оценки (2.39), (2.40) и (2.44), можно точно так же, как и на шаге 3 в § 2, доказать, что решение задачи (4.4) существует на некотором отрезке $[0, T]$ при $T > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$, при этом используется стандартный алгоритм продолжения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Наконец, из (4.15) вытекает, что имеет место следующее предельное выражение:

$$u_{m_l}''' \xrightarrow{*} g \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)) \quad \text{при } l \rightarrow +\infty. \quad (4.16)$$

Кроме того, имеет место предельное равенство (2.55)

$$u_{m_l}'' \xrightarrow{*} u'' \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)). \quad (4.17)$$

Однако из (4.16) вытекает, что

$$u_{m_l}''' \xrightarrow{*} g \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)) \quad \text{при } l \rightarrow +\infty, \quad (4.18)$$

а из (4.17) вытекает, что

$$u_{m_l}''' \xrightarrow{*} u''' \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)). \quad (4.19)$$

В силу отделимости *-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$ мы получим, что $g = u'''$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}'(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega))$.

Таким образом, с учетом результатов из § 2 мы получим, что

$$u^{(k)} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad k = \overline{0, 3}.$$

Следовательно, после возможного изменения на подмножестве $[0, T]$ нулевой меры Лебега мы получим, что слабое обобщенное решение $u(t)$ задачи (1.1)–(1.3) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$.

Все дальнейшие доказательства проводятся точно так же, как и в § 2. Поэтому приходим к следующему результату о гладкости.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия (i), (ii), (iv), а также условия (i)_a–(iii)_a. Тогда для любых $u_0, u_1 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ найдется такое максимальное $T_{00} = T_{00}(u_0, u_1) > 0$, что существует единственное слабое обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3) класса $\mathbb{C}^{(2)}([0, T_{00}); \mathbb{H}^1(\Omega))$, причем либо $T_{00} = +\infty$, либо $T_{00} < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_{00}} [\|u\|^2 + \|u'\|^2 + \|u''\|^2] = +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что при условиях теоремы 4.1 слабое обобщенное решение является сильным обобщенным решением, т. е. $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$ для всех $T \in (0, T_{00})$, и выполнено равенство

$$\int_{\Omega} [(\nabla u'', \nabla \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + u'' \varphi] dx = \int_{\partial \Omega} f(x, u) \varphi(x) d\Gamma \quad (4.20)$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ и $t \in [0, T]$, кроме того, выполнены начальные условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x).$$

Тогда мы можем воспользоваться энергетическими равенствами, выводимыми из (4.20) непосредственно для функции $u(x, t)$. Мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть для функции $f(x, u): \partial\Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены условия (i)–(iv), (i)_a–(iii)_a u , кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. Тогда найдется такое максимальное $T_{00} = T_{00}(u_0, u_1) > 0$, что существует единственное сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) для всех $T \in (0, T_{00})$, причем при условиях

$$2 \int_{\partial\Omega} \int_0^{u_0(x)} f(x, s) ds d\Gamma \geq \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + |u_1|^2] dx + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx, \quad (4.21)$$

$$\int_{\Omega} [(\nabla u_1, \nabla u_0) + u_0 u_1] dx > 0 \quad (4.22)$$

время существования решения $T_{00} \in (0, T_1]$ совпадает со временем разрушения решения, где

$$T_1 = \frac{4}{\vartheta - 2} \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)},$$

$$\Phi'(0) = \int_{\Omega} [(\nabla u_1, \nabla u_0) + u_0 u_1] dx, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla u_0|^2 + |u_0|^2] dx,$$

причем имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_{00}} \sup \Phi(t) = +\infty, \quad (4.23)$$

где функция $\Phi(t)$ определена формулой (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В выражении (4.21) имеет место нестрогое неравенство, в отличие от соответствующего условия (3.47), при доказательстве которого существенно то, что выполнено строгое неравенство. Кроме того, заметим, что всегда выполнено неравенство

$$T_{00} \leq T_0.$$

Тогда при условиях теоремы 4.2 выполнены условия теоремы 3.1, причем имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup \Phi(t) = +\infty.$$

Отсюда и из (4.23) получаем равенство $T_{00} = T_0$.

В настоящей работе мы рассмотрели модельную “физически” осмысленную ситуацию. Действительно, распределение источников на границе плазмы описывалась функцией $f(x, u)$, которая может быть локализована в некоторой “малой” части границы области, которую занимает плазма. Поскольку до сих пор

не удастся создать достаточно устойчивую плазму и довольно часто в плазме возникает “взрывная” неустойчивость, то в этой связи изучение достаточных условий “взрыва” (“blow up”) или, наоборот, достаточных условий глобальной по времени разрешимости важно и с практической точки зрения.

Список литературы

1. С. А. Габов, *Новые задачи математической теории волн*, Физматлит, М., 1998.
2. А. Б. Альшин, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников, “Однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения ионно-звуковых волн в плазме”, *Докл. РАН*, **361**:6 (1998), 749–751; англ. пер.: A. B. Al'shin, Yu. D. Pletner, A. G. Sveshnikov, “Unique solvability of the Dirichlet problem for the ion-sound wave equation in plasma”, *Dokl. Math.*, **58**:1 (1998), 148–150.
3. Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
4. H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
5. H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
6. В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
7. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
8. В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “Third-order nonlinear dispersive equations: shocks, rarefaction, and blowup waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:10 (2008), 1784–1810.
9. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
10. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “О разрушении решения системы уравнений Осколкова”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 83–108; англ. пер.: M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, “Blow-up of Oskolkov's system of equations”, *Sb. Math.*, **200**:4 (2009), 549–572.
11. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
12. К. Байocchi, А. Капело, *Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: C. Baiocchi, A. Capelo, *Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problems*, Wiley, Chichester, 1984.

13. М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, ГИТТЛ, М., 1956; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
14. L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonlinear analysis*, Ser. Math. Anal. Appl., **9**, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2006.

М. О. Корпусов (М. О. KORPUSOV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет
E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило в редакцию
13.01.2010