М. О. Корпусов, О разрушении решений волнового диссипативного уравнения типа Кирхгоффа с источником и с положительной энергией, *Сиб. матем. журн.*, 2012, том 53, номер 4, 874–891

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 517.957

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО ДИССИПАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА КИРХГОФФА С ИСТОЧНИКОМ И С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

М. О. Корпусов

Аннотация. Рассмотрена начально-краевая задача для волнового обобщенного диссипативного уравнения типа Кирхгоффа с источником. Доказано, что при достаточно большой положительной энергии имеет место разрушение за конечное время. Для доказательства разрушения использован модифицированный метод Х. А. Левина.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, обобщенные уравнения Клейна — Гордона, нелинейное гиперболическое уравнение, нелинейная смешанная краевая задача, теория поля.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_{tt} + \mu u_t - \phi\big(\|\nabla u\|_2^2\big)\Delta u = f(x,u), \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad \mu \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Задача (1.1), (1.2) рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

Дадим обзор результатов по исследованию задач вида (1.1), (1.2). Прежде всего отметим работу [1], где исследовались обобщенная разрешимость и единственность для волнового неоднородного уравнения типа Кирхгоффа следующего вида:

$$u_{tt} + (-1)^m a\left(\int\limits_\Omega |\nabla^m u|^2\,dx\right)\triangle^m u = f.$$

Кроме того, отметим работу [2], в которой рассматривался вопрос о разрушении за конечное время и глобальной во времени разрешимости для следующей задачи:

$$u_{tt} - \|\nabla u\|_2^{2\gamma}\Delta u - \Delta u_t = |u|^\alpha u, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для этой задачи получен результат о разрушении за конечное время для отрицательной начальной энергии и о глобальной разрешимости для достаточно

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–12018–офи–м–2011).

малой положительной энергии. Отметим также очень близкую к нашей задаче проблему, рассмотренную в работе [3], в которой исследовалась следующая задача:

$$u_{tt} - \phi(x)\|\nabla u\|_2^2\Delta u + \delta u_t = |u|^\alpha u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,\ \delta > 0,$$

$$u(0) = u_0(x), \quad u'(0) = u_1(x).$$

В этой работе доказаны разрушение за конечное время для отрицательных начальных энергий и глобальная разрешимость для малых положительных энергий. Отметим также работу [4].

Нашей целью является получение достаточных условий разрушения решений задачи (1.1), (1.2) при условии достаточно большой положительной энергии.

Заметим, что для нелинейных гиперболических уравнений и систем уравнений требование отрицательности начальной энергии уже ослаблено требованием положительности энергии. Отметим работу [5], в которой, как и в других работах по разрушению для гиперболических уравнений и систем уравнений, энергия положительна, но вместе с этим условием требуются два других основных условия на начальные функции и трудно понять, совместны они или нет. Более того, в указанной литературе такая работа не замечена. Наконец, при любом фиксированном u_0 и при достаточно большом u_1 эти условия несовместны. При этом используется классический «concavity» метод Х. А. Левина. В данной работе использован модифицированный метод Х. А. Левина, развитый в работе [6]. В результате вместо трех непроверяемых условий получается всего два условия, легко проверяемых на совместность.

Существуют три основных метода исследования явления разрушения. Первый — энергетический метод, развитый в [7–14]. Второй — метод нелинейной емкости [15, 16, 4] и, наконец, третий — метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в [17, 18].

§ 2. Основное дифференциальное неравенство

Рассмотрим основное для нас следующее дифференциальное неравенство:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geqslant 0, \quad \alpha > 1,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma \geqslant 0, \tag{2.1}$$

где $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T])$, $\Phi(t) \geqslant 0$, $\Phi(0) > 0$. Разделим обе части неравенства (2.1) на $\Phi^{1+\alpha}$, тогда после некоторых преобразований получим неравенство

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right)' + \gamma\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \beta\Phi^{-\alpha} \geqslant 0,$$

из которого, в свою очередь, следует, что

$$\frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \frac{\gamma}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})' + \beta\Phi^{-\alpha} \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Введем обозначение

$$Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t), \tag{2.3}$$

с учетом которого из (2.2) получим, что

$$Z'' + \gamma Z' - \beta(\alpha-1)Z^{\alpha_1} \leqslant 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}. \tag{2.4}$$

Введем новое обозначение

$$Y(t) = e^{\gamma t}Z(t), \tag{2.5}$$

в силу которого из (2.4) вытекает, что

$$Y'' - \gamma Y' - \beta(\alpha-1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1} \leqslant 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha-1}. \tag{2.6}$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$Y' = (\Phi^{1-\alpha}e^{\gamma t})' = \Phi^{-\alpha}(\alpha-1)e^{\gamma t}\biggl[-\Phi'(t) + \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(t)\biggr]. \tag{2.7}$$

Потребуем выполнения начального условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0). \tag{2.8}$$

Тогда найдется $t_0 > 0$ такое, что

$$\Phi'(t) > \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(t) \quad \text{при } t \in [0, t_0).$$

Следовательно, из неравенства (2.9) и выражения (2.7) получим, что

$$Y'(t) < 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0).$$

Поскольку $-\gamma Y'(t) \geqslant 0$ при $t \in [0, t_0)$, из (2.6) следует

$$Y'' - \beta(\alpha-1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1} \leqslant 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha-1} \quad \text{при } t \in [0, t_0). \tag{2.10}$$

Умножив обе части неравенства (2.10) на Y', получим

$$Y'Y'' - \beta(\alpha-1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' \geqslant 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha-1} \quad \text{при } t \in [0, t_0). \tag{2.11}$$

Имеет место следующее равенство:

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] + \delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} - \alpha_1 e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y',$$

из которого вытекает, что

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{1}{1+\alpha_1}\frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] + \frac{1}{1+\alpha_1}\delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}. \tag{2.12}$$

Подставим выражение (2.12) в (2.11):

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha-1)}{1+\alpha_1}\frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] - \frac{\beta(\alpha-1)\delta}{1+\alpha_1}e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \geqslant 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0),$$

откуда

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha-1)}{1+\alpha_1}\frac{d}{dt}[e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}] \geqslant 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0). \tag{2.13}$$

Интегрируя последнее неравенство, имеем

$$(Y')^2 \geqslant A^2 + \frac{2\beta(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \geqslant A^2, \tag{2.14}$$

где

$$A^2 \equiv (Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha-1)^2}{2\alpha-1}Y^{1+\alpha_1}(0). \tag{2.15}$$

Потребуем выполнения условия $A^2 > 0$. После ряда преобразований оно примет вид

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right] > 0. \tag{2.16}$$

Значит, условие $A^2 > 0$ эквивалентно условию

$$\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0). \tag{2.17}$$

Стало быть, из неравенств (2.14) и (2.16) приходим к выводу, что

$$Y'(t) \leqslant -A < 0 \Rightarrow \Phi'(t_0) > \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(t_0).$$

Но тогда $Y'(t_0) < 0$. Следовательно, используя алгоритм продолжения во времени, получим, что

$$Y'(t) < 0 \quad \text{для всех } t \in [0,T].$$

Значит,

$$|Y'| \geqslant A > 0 \Rightarrow Y'(t) \leqslant -A \Rightarrow Y(t) \leqslant Y(0) - At$$
$$\Rightarrow \Phi^{1-\alpha}(t) \leqslant e^{-\gamma t}[\Phi^{1-\alpha}(0) - At] \Rightarrow \Phi(t) \geqslant \frac{e^{\gamma t/(\alpha-1)}}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{1/(\alpha-1)}}.$$

Таким образом, пришли к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T])$ *и выполнены условия*

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0), \tag{2.18}$$

$$\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0), \tag{2.19}$$

причем $\Phi(t) \geqslant 0$, $\Phi(0) > 0$. *Тогда время* $T > 0$ *не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство*

$$T \leqslant T_\infty \leqslant \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1},$$

$$A^2 \equiv (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right],$$

причем $\limsup\limits_{t\uparrow T_\infty}\Phi(t) = +\infty$.

§ 3. Локальная разрешимость

Прежде всего укажем условия, которым удовлетворяют функции $\phi(s)$ и $f(x,s)$.

Условия на функцию $\phi(s)$:

$(\mathrm{i})_1$ $\phi(s) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty))$;

$(\mathrm{ii})_1$ для всех $s \in \mathbb{R}^1_+$ выполнены следующие условия роста:

$$c_1 \leqslant \phi(s) \leqslant c_1 + c_2 s^{q_1}, \quad |s\phi'(s)| \leqslant c_2 s^{q_1} \quad \text{при } q_1 \geqslant 1; \tag{3.1}$$

$(\mathrm{iii})_1$ для всех $s \in \mathbb{R}^1_+$ выполнено неравенство

$$\phi(s)s \leqslant \frac{\theta_1}{2}\int\limits_0^s d\sigma\phi(\sigma) \quad \text{при } \theta_1 > 0; \tag{3.2}$$

$(\mathrm{iv})_1$ функция $\phi(s)$ является ограниченно липшиц-непрерывной:

$$|\phi(s_1) - \phi(s_2)| \leqslant \mu_1(\mathrm{R}_1)|s_1 - s_2|, \quad \mathrm{R}_1 = \max\left\{s_1^{q_1-1}, s_2^{q_1-1}\right\}, \tag{3.3}$$

где $\mu_1(\cdot)$ — неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах.

Условия на функцию $f(x,s)$**:**

$(\mathrm{i})_2$ $f(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой функцией и для почти всех $x \in \partial\Omega$ имеем $f(x,0) = 0$;

$(\mathrm{ii})_2$ имеют место оценки сверху для почти всех $x \in \Omega$:

$$|f(x,s)| \leqslant c_3 + c_4|s|^{q_2+1}, \quad |f'_s(x,s)| \leqslant c_4|s|^{q_2} \quad \text{при } q_2 > 0, \tag{3.4}$$

и неравенство

$$\sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial f(x,s)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_3 + c_4|s|^{q_2+1}; \tag{3.5}$$

$(\mathrm{iii})_2$ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega f(x,v(x))v(x) \geqslant \theta_2 \int\limits_\Omega \mathscr{F}(x,v(x))\,dx \quad \text{при } \theta_2 > 2, \tag{3.6}$$

где

$$\mathscr{F}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma\, f(x,\sigma);$$

$(\mathrm{iv})_2$ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathscr{N}_f(\cdot) = f(x,\cdot)$, порожденного функцией $f(x,u)$:

$$\|\mathscr{N}_f(u_1) - \mathscr{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}_2)\|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \tag{3.7}$$

где $\mu_2(\cdot)$ — неубывающая функция своего аргумента и

$$\mathrm{R}_2 = \max\left\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\right\}.$$

Дадим определение слабого обобщенного решения задачи (1.1), (1.2).

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) назовем функцию класса

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)\bigr), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \tag{3.8}$$

$$u''(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \tag{3.9}$$

удовлетворяющую равенству

$$\int\limits_0^T dt\langle D(u), v\rangle = 0 \quad \text{для всех } v(x)(t) \in \mathbb{L}^1\bigl(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)\bigr), \tag{3.10}$$

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(x)(0) = u_1(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \tag{3.11}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$,

$$D(u) \equiv u_{tt} + \mu u_t - \phi\big(\|\nabla u\|_2^2\big)\Delta u - f(x, u).$$

Замечание 1. В силу условий (3.8) и (3.9) после возможного изменения на множестве из $[0, T]$ нулевой меры Лебега функция $u(x)(t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, поэтому начальные условия (3.11) имеют смысл.

Заметим, что, как и в [6], можно доказать эквивалентность равенства (3.10) следующему равенству:

$$\int_0^T dt\, \psi(t)\, \langle D(u), w(x)\rangle = 0 \quad \text{для всех } w(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),\ \psi(t) \in \mathbb{L}^1(0, T). \tag{3.12}$$

Для доказательства локальной во времени разрешимости задачи (1.1), (1.2), понимаемой в слабом обобщенном смысле, нужно воспользоваться методом Галёркина в сочетании с методом компактности [19]. К сожалению, в силу специфики нелокального слагаемого в уравнении (1.1) мы не можем воспользоваться методом монотонности и поэтому для предельного перехода в галёркинских приближениях должны потребовать большей гладкости от начальных функций. Именно,

$$u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \quad u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Итак, приступим к доказательству локальной разрешимости.

Шаг 1. Постановка галёркинских приближений. Пусть $\{w_k\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ — решения задачи на собственные функции и собственные значения для оператора Лапласа в ограниченной области Ω с однородным условием Дирихле на границе, который мы выберем ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\langle D(u_m), w_j\rangle = 0 \quad \text{для всех } j = \overline{1, m}, \tag{3.13}$$

где $D(u_m) \equiv u_{mtt} + \mu u_{mt} - \phi\big(\|\nabla u_m\|_2^2\big)\Delta u_m - f(x, u_m)$,

$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k(x),$$

$$u_{0m} = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) w_k(x) \to u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \tag{3.14}$$

$$u_{1m} = \sum_{k=1}^m c'_{mk}(0) w_k(x) \to u_1 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Шаг 2. Априорные оценки. Поскольку функции $w_j(x)$ удовлетворяют равенству

$$-\frac{\Delta w_j}{\lambda_j} = w_j,$$

где λ_j — собственные значения, из (3.13) сразу получим

$$\langle D(u_m), \Delta w_j\rangle = 0 \quad \text{для всех } j = \overline{1, m}. \tag{3.16}$$

Умножив обе части равенства (3.13) на c'_{mj} и просуммировав по $j=\overline{1,m}$, имеем

$$\langle D(u_m), \Delta u'_m\rangle = 0. \tag{3.17}$$

Интегрируя по частям в (3.17), приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m\|_2^2 + \mu\|\nabla u'_m\|_2^2 + \int\limits_\Omega \phi\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2\bigr)\Delta u'_m \Delta u_m\,dx = \int\limits_\Omega f(x,u_m)\Delta u'_m\,dx. \tag{3.18}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\int\limits_\Omega \phi\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2\bigr)\Delta u'_m \Delta u_m\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\biggl[\phi\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2\bigr)\int\limits_\Omega |\Delta u_m|^2\,dx\biggr] - \phi'\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2\bigr)\int\limits_\Omega (\nabla u_m, \nabla u'_m)\,dx \int\limits_\Omega |\Delta u_m|^2\,dx, \tag{3.19}$$

$$\int\limits_\Omega f(x,u_m)\Delta u'_m\,dx = -\int\limits_\Omega (\nabla_x f(x,u_m(x)), \nabla u'_m)\,dx. \tag{3.20}$$

Из равенств (3.18)–(3.20) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\biggl[\|\nabla u'_m\|_2^2 + \phi\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2\bigr)\int\limits_\Omega |\Delta u_m|^2\,dx\biggr] &\leqslant \bigl|\phi'\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2\bigr)\bigr|\,\|\nabla u'_m\|_2\|\nabla u_m\|_2\int\limits_\Omega |\Delta u_m|^2\,dx \\ &+ \int\limits_\Omega |\nabla_x f(x,u_m(x))||\nabla u'_m|\,dx \\ &\leqslant c_2\|\nabla u'_m\|_2\|\nabla u_m\|_2^{2q_1-1}\int\limits_\Omega |\Delta u_m|^2\,dx \\ + \int\limits_\Omega [c_3 + c_4|u_m|^{q_2+1}]|\nabla u'_m|\,dx &+ c_4\int\limits_\Omega |u_m|^{q_2}|\nabla u_m||\nabla u'_m|\,dx = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Имеют место следующие оценки:

$$\mathrm{I}_1 \leqslant \frac{c_2^2}{2}\|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{8}\|\nabla u_m\|_2^{4(2q_1-1)} + \frac{1}{2}\biggl(\int\limits_\Omega |\Delta u_m|^2\,dx\biggr)^4, \tag{3.22}$$

$$\mathrm{I}_2 \leqslant \frac{c_3^2}{2}\operatorname{meas}(\Omega) + \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{c_4^2}{2}\int\limits_\Omega |u_m|^{2q_2+2}\,dx, \tag{3.23}$$

$$\mathrm{I}_3 \leqslant c_5\|\nabla u'_m\|_2\biggl(\int\limits_\Omega |u_m|^{q_2 r}\,dx\biggr)^{1/r}\biggl(\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^s\,dx\biggr)^{1/s}. \tag{3.24}$$

При этом требуем, чтобы

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}, \quad 1<r<\frac{N}{q_2}, \quad s=\frac{Nq_2 r}{N-q_2 r}. \tag{3.25}$$

Тогда

$$\frac{N-q_2r}{Nq_2r}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\Rightarrow r=\frac{q_2+1}{q_2}\frac{2N}{N+2}\Rightarrow s=\frac{2N(q_2+1)}{N-2q_2}.$$

В силу (3.25) имеем

$$q_2<\min\left\{\frac{N}{2},\frac{2N}{N-2}\right\}\quad \text{при } N>2.$$

Стало быть, при условиях (3.25) справедливо вложение $\mathbb{W}_0^{1,s}(\Omega)\subset\mathbb{L}^{q_2r}(\Omega)$. Тем самым из (3.24) вытекает неравенство

$$\mathrm{I}_3\leqslant\overline{c}_5\|\nabla u'_m\|_2\|\nabla u_m\|_s^{1+q_2}. \tag{3.26}$$

При условии $s\leqslant 2^*$, которое, очевидно, выполнено при

$$s=\frac{2N(q_2+1)}{N-2q_2},$$

имеет место непрерывное вложение $\mathbb{H}^2(\Omega)\cap\mathbb{H}_0^1(\Omega)\subset\mathbb{W}_0^{1,s}(\Omega)$, поэтому из (3.26) приходим к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3&\leqslant\hat{c}_5\|\nabla u'_m\|_2\big(\|\Delta u_m\|_2^2+\|\nabla u_m\|_2^2\big)^{(1+q_2)/2}\\&\leqslant\frac{\hat{c}_5^2}{2}\|\nabla u'_m\|_2^2+\frac{1}{2}\big(\|\Delta u_m\|_2^2+\|\nabla u_m\|_2^2\big)^{1+q_2}\\&\leqslant\frac{\hat{c}_5^2}{2}\|\nabla u'_m\|_2^2+c(q_2)\|\Delta u_m\|_2^{2(1+q_2)}+c(q_2)\|\nabla u_m\|_2^{2(1+q_2)}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Тем самым из (3.21) с учетом (3.22), (3.23) и (3.27) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\nabla u'_m\|_2^2+\phi\big(\|\nabla u_m\|_2^2\big)\int\limits_\Omega|\Delta u_m|^2\,dx\right]\\&\quad\leqslant\frac{c_2^2}{2}\|\nabla u'_m\|_2^2+\frac{1}{8}\|\nabla u_m\|_2^{4(2q_1-1)}+\frac{1}{2}\left(\int\limits_\Omega|\Delta u_m|^2\,dx\right)^4\\&\qquad+\frac{c_3^2}{2}\operatorname{meas}(\Omega)+\|\nabla u'_m\|_2^2+\frac{c_4^2}{2}\int\limits_\Omega|u_m|^{2q_2+2}\,dx\\&\qquad+\frac{\hat{c}_5^2}{2}\|\nabla u'_m\|_2^2+c(q_2)\|\Delta u_m\|_2^{2(1+q_2)}+c(q_2)\|\nabla u_m\|_2^{2(1+q_2)}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Потребуем непрерывное вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega)\subset\mathbb{L}^q(\Omega)$ при $q=2q_2+2$, которое выполнено при условии

$$q_2\leqslant 2, \tag{3.29}$$

поскольку $N=3$. При выполнении условий (3.29) имеет место неравенство

$$\frac{c_4^2}{2}\int\limits_\Omega|u_m|^{2q_2+2}\,dx\leqslant c_6\|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2}. \tag{3.30}$$

Положим

$$g_m(t)=\|\nabla u'_m\|_2^2+c_1\|\Delta u_m\|_2^2.$$

Проинтегрировав по времени обе части неравенства (3.21), с учетом (3.1) получим неравенство

$$g_m(t) \leqslant d_1 + c_7 t + c_8 \int\limits_0^t \left[g_m(s) + g_m^4(s) + g_m^{q_1+2}(s)\right] ds \\ + c_9 \int\limits_0^t \left[\|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2} + \|\nabla u_m\|_2^{4(2q_1-1)}\right] ds, \quad (3.31)$$

где

$$\|\nabla u_{1m}\|_2^2 + \phi\big(\|\nabla u_{0m}\|_2^2\big) \int\limits_\Omega |\Delta u_{0m}|^2 \, dx \leqslant d_1.$$

Наша задача — получить априорную оценку для последнего слагаемого в неравенстве (3.31). С этой целью умножим обе части равенства (3.13) на c'_{mj}, просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_m\|_2^2 + \int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s)\, ds\right] + \mu \|u'_m\|_2^2 = \int\limits_\Omega f(x, u_m) u'_m \, dx. \quad (3.32)$$

Из (3.32) интегрированием по времени ввиду (3.1) следует неравенство

$$\|u'_m\|_2^2 + c_1 \|\nabla u_m\|_2^2 \leqslant \overline{E}_m(0) + 2 \int\limits_0^t ds \int\limits_\Omega f(x, u_m) u'_m \, dx, \quad (3.33)$$

где

$$\overline{E}_m(0) = \|u_{1m}\|_2^2 + \int\limits_0^{\|\nabla u_{0m}\|_2^2} \phi(s)\, ds.$$

В силу предельных свойств (3.14) и (3.15)

$$\overline{E}_m(0) \leqslant d < +\infty. \quad (3.34)$$

При условии вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$ имеет место следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_\Omega f(x, u_m) u'_m \, dx\right| \leqslant \frac{c_3^2}{2} + \int\limits_\Omega |u'_m|^2 \, dx + c_9 \|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2}. \quad (3.35)$$

Введем обозначение $h_m \equiv \|u'_m\|_2^2 + c_1 \|\nabla u_m\|_2^2$. Тогда из (3.33)–(3.35)

$$h_m(t) \leqslant d + c_{10} t + c_{11} \int\limits_0^t ds \big[h_m(s) + h_m^{q_2+1}(s)\big]\, ds. \quad (3.36)$$

Воспользовавшись арифметическим неравенством Гёльдера, имеем

$$h_m \leqslant \frac{1}{q_2+1} h_m^{q_2+1} + \frac{q_2+1}{q_2+2}.$$

С учетом этого неравенства из (3.36) приходим к неравенству

$$h_m(t) \leqslant d + c_{12} t + c_{13} \int\limits_0^t ds h_m^{q_2+1}(s)\, ds \leqslant d + c_{12} T + c_{13} \int\limits_0^t ds h_m^{q_2+1}(s)\, ds. \quad (3.37)$$

Привлекая теорему Гронуолла — Беллмана — Бихари [20], выводим, что

$$h_m(t) \leqslant \frac{d + c_{12}T}{[1 - q_2(d + c_{12}T)^{q_2} c_{13} t]^{1/q_2}}. \tag{3.38}$$

Таким образом, из (3.38) следует априорная оценка

$$\|u'_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 \leqslant c_{14}(T) < +\infty \tag{3.39}$$

при условии, что

$$q_2(d + c_{12}T)^{q_2} c_{13} T < 1.$$

Вернемся к неравенству (3.31). Рассуждая, как при выводе неравенства (3.37), с учетом априорной оценки (3.39) получим вторую априорную оценку

$$\|\nabla u'_m\|_2^2 + c_1 \|\Delta u_m\|_2^2 \leqslant c_{15}(T) < +\infty \tag{3.40}$$

при достаточно малом $T > 0$. Из априорных оценок (3.39) и (3.40) вытекает, что последовательность $\{u_m\}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\{u_m\} \quad \text{равномерно по } m \text{ ограничена в } \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)\bigr); \tag{3.41}$$

$$\{u'_m\} \quad \text{равномерно по } m \text{ ограничена в } \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)\bigr). \tag{3.42}$$

Получим априорную оценку для последовательности $\{u''_m\}$. С этой целью воспользуемся техникой из [21]. Пусть $V_m = \overline{\{w_1, \dots, w_m\}}$ — линейная оболочка системы функций $\{w_k\}$ при $k = \overline{1, m}$. Введем проектирующий оператор:

$$\mathbb{P}_m : \mathbb{L}^2(\Omega) \to V_m \subset \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{P}_m z = \sum_{k=1}^m (z, w_k) w_k, \quad z(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega),$$

где

$$(z, w_k) = \int\limits_\Omega z(x) w_k(x)\, dx.$$

С учетом оператора $\mathbb{P}_m$ систему галёркинских приближений (3.11) можно переписать в виде

$$\langle u''_m + \mu u'_m + \mathbb{A}(u_m) + \mathbb{B}(u_m), \mathbb{P}_m z \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{3.43}$$

где $\mathbb{A}(v) = -\phi\bigl(\|\nabla v\|_2^2\bigr)\Delta v$, $\mathbb{B}(v) = -\mathscr{N}_f(v)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Из (3.43) получим

$$\mathbb{P}_m^*(u''_m + \mu u'_m + \mathbb{A}(u_m) + \mathbb{B}(u_m)) = 0. \tag{3.44}$$

Поскольку $u''_m = \sum\limits_{k=1}^m c''_{mk} w_k$ и $\mathbb{P}_m^* w_k = \mathbb{P}_m w_k = w_k$, имеем

$$u''_m = -\mu u'_m - \mathbb{P}_m^*(\mathbb{A}(u_m) + \mathbb{B}(u_m)). \tag{3.45}$$

Заметим, что $\mathbb{P}_m \in \mathscr{L}\bigl(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega)\bigr)$ и $\mathbb{P}_m^* \in \mathscr{L}(\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Кроме того, имеют место следующие цепочки непрерывных и плотных вложений:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

поэтому $\mathbb{P}_m^* \in \mathscr{L}(\mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Тем самым верны следующие априорные оценки:

$$\|\mathbb{P}_m^* \mathbb{A}(u_m)\|_{-1} \leqslant c_{15} \|\mathbb{A}(u_m)\|_{-1} \leqslant c_{16} \|\nabla u_m\|_2 + c_{17} \|\nabla u_m\|_2^{2+q_1} \leqslant c_{18} < +\infty, \tag{3.46}$$

$$\|\mathbb{P}^*_m \mathbb{B}(u_m)\|_{-1} \leqslant c_{19}\|\mathbb{B}(u_m)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leqslant c_{20} + c_{21}\|u_m\|^{q_2+1}_{q_2+2} \leqslant c_{22}(T) < +\infty. \quad (3.47)$$

Из (3.45)–(3.47) приходим к априорной оценке

$$\|u''_m\|_{-1} \leqslant c_{23}(T) < +\infty. \quad (3.48)$$

Шаг 3. Локальная разрешимость системы уравнений Галёркина. Перепишем систему уравнений Галёркина (3.13) в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}[c''_{mk} + \mu c'_{mk}] = f_{1j}(c_m) + f_{2j}(c_m), \quad c_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^t, \quad (3.49)$$

где

$$f_{1j}(c_m) = -\phi\bigl(\|\nabla u_m\|^2_2\bigr)\int_\Omega (\nabla u_m, \nabla w_j), \quad f_{2j}(c_m) = \int_\Omega f(x, u_m) w_j.$$

В силу выбора $\{w_k\}$ имеем $\alpha_{kj} = \delta_{kj}$. Ввиду свойств (3.3) и (3.7) нетрудно доказать ограниченную липшиц-непрерывность функций $f_{1j}(c_m)$ и $f_{2j}(c_m)$. Тем самым по теореме Коши приходим к выводу о существовании единственного решения системы уравнений (3.13) в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_m])$ при некотором $T_m > 0$. Из априорных оценок (3.41) и (3.42) следует, что $T_m = T > 0$, т. е. время существования решения системы уравнений Галёркина не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 4. Предельный переход. Из априорных оценок (3.41), (3.42) и (3.48) вытекает существование такой подпоследовательности $\{u_m\}$, что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad *\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)\bigr), \quad (3.50)$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad *\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{H}^1_0(\Omega)\bigr), \quad (3.51)$$

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad *\text{-слабо в } \quad \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)). \quad (3.52)$$

Кроме того, в силу (3.41) и (3.42) последовательность $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в пространстве $\mathbb{H}^1(Q_T)$, которое, очевидно, компактно вложено в $\mathbb{L}^2(Q_T)$. Следовательно, существует такая подпоследовательность $\{u_m\}$, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(Q_T) \text{ для почти всех } (t, x) \in Q_T, \quad (3.53)$$

где $Q_T = (0, T) \times \Omega$.

Лемма 3.1. *Для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ равномерно по $t \in [0, T]$ имеет место сходимость*

$$u_m(t) \to u(t) \quad \textit{сильно в } \mathbb{H}^1_0(\Omega). \quad (3.54)$$

Доказательство. Воспользуемся техникой из [22]. По доказанному $u \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)\bigr)$, $u' \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{H}^1_0(\Omega)\bigr)$ и $u_m \to u$ для почти всех $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|\nabla u(t_1) - \nabla u(t_2)\|_2 \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u'\|_2\, dt \leqslant \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u'\|^2_2\, dt\right)^{1/2} |t_1 - t_2| \leqslant c(T)|t_1 - t_2|. \quad (3.55)$$

Значит, функция $u(t)$ равномерно непрерывна на $[0,T]$ со значениями в $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

Заметим, что для последовательности u_m имеем

$$\|\Delta u_m\|_2(t) + \|\nabla u_m\|_2(t) \leqslant c(T) < +\infty.$$

В силу того, что $\mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)$ компактно вложено в $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ для каждого $t\in[0,T]$, найдется такая подпоследовательность, что

$$u_m(t)\to u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}^1_0(\Omega),$$

причем выбор этой подпоследовательности зависит от $t\in[0,T]$. Используя диагональный процесс Кантора, получим некоторую подпоследовательность $\{u_m\}$, сходящуюся равномерно к u на некотором счетном всюду плотном в $[0,T]$ множестве E:

$$u_m(t)\to u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}^1_0(\Omega) \text{ для всех } t\in E. \tag{3.56}$$

Поскольку E всюду плотно в $[0,T]$, в силу равномерной непрерывности функции $u(t)$ на E ее можно по непрерывности продолжить на весь сегмент $[0,T]$. Ввиду того, что $u_m\in\mathbb{L}^\infty\big(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)\big)$, $u'_m\in\mathbb{L}^\infty\big(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$, как и для u, можно доказать равномерную непрерывность функции u_m на $[0,T]$. Докажем, что $u_m(t)\to u(t)$ сильно в $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ равномерно по $t\in[0,T]$. Действительно, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\|\nabla u_m(t)-\nabla u(t)\|_2 &\leqslant \|\nabla u_m(t)-\nabla u_m(t^*)\|_2\\ &\quad+\|\nabla u_m(t^*)-\nabla u(t^*)\|_2+\|\nabla u(t^*)-\nabla u(t)\|_2,\end{aligned} \tag{3.57}$$

где $t\in[0,T]$, $t^*\in E$. Рассмотрим каждое слагаемое в правой части неравенства (3.57). Действительно, для любых $t\in[0,T]$ и $\varepsilon>0$ найдутся такие $t^*\in E$ и достаточно большое $m\in\mathbb{N}$, что для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\|\nabla u_m(t)-\nabla u_m(t^*)\|_2 &\leqslant \int_{t^*}^{t}\|\nabla u'_m\|_2\,ds\\ &\leqslant \left(\int_{t}^{t^*}\|\nabla u'_m\|_2^2\,ds\right)^{1/2}|t-t^*| \leqslant c(T)|t-t^*| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)-\nabla u(t^*)\|_2 &\leqslant \int_{t^*}^{t}\|\nabla u'\|_2\,ds\\ &\leqslant \left(\int_{t}^{t^*}\|\nabla u'\|_2^2\,ds\right)^{1/2}|t-t^*| \leqslant c(T)|t-t^*| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\|\nabla u_m(t^*)-\nabla u(t^*)\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.60}$$

при достаточно большом $m\in\mathbb{N}$ в силу (3.56). Из неравенств (3.58)–(3.60) вытекает, что при любом $\varepsilon>0$ для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ имеет место следующее неравенство:

$$\|\nabla u_m(t)-\nabla u(t)\|_2 \leqslant \varepsilon \quad \text{равномерно по } t\in[0,T].$$

Лемма доказана. $\square$

Заметим, что поскольку $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ вложено непрерывно в $\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$, в силу леммы 1 имеем, что равномерно по $t \in [0,T]$

$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega).$$

Но тогда в силу условия роста (3.4) и теоремы М. А. Красносельского [23] для операторов Немыцкого приходим к выводу о том, что

$$f(x,u_m) \to f(x,u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \tag{3.61}$$

равномерно по $t \in [0,T]$.

Таким образом, можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ и получить, что предельная функция $u(x)(t)$ удовлетворяет равенству (3.12), которое эквивалентно равенству (3.10). Воспользовавшись стандартным алгоритмом продолжения решения во времени, можно показать, что справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$, $u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и, кроме того, выполнены неравенства*

$$0 < q_2 < \min\left\{\frac{N}{2}, \frac{2}{N-2}\right\} \quad \textit{при } N > 2.$$

Тогда существует слабое обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) *в классе*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)\bigr), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0,T;\mathbb{H}_0^1(\Omega)\bigr),$$

$$u''(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad T_0 = T_0(u_0,u_1) > 0,$$

причем $T \in (0,T_0)$ и либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow T_0}\bigl[\|\nabla u'\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2\bigr] = +\infty.$$

§ 4. Разрушение решений

Для получения достаточных условий воспользуемся системой галёркинских уравнений (3.13), поскольку галёркинские приближения обладают нужной гладкостью. Действительно, $u_m(x)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0,T];\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{H}^2(\Omega)\bigr)$. С этой целью умножим обе части равенства (3.13) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. В результате получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2}\frac{d\Phi_m}{dt} - \mathrm{J}_m + \phi\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2\bigr)\int\limits_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx = \int\limits_\Omega f(x,u_m)u_m\,dx, \tag{4.1}$$

где

$$\Phi_m(t) \equiv \int\limits_\Omega |u_m|^2\,dx, \quad \mathrm{J}_m(t) \equiv \int\limits_\Omega |u_m'|^2\,dx.$$

Умножим обе части равенства (3.13) на c_{mj}' и просуммируем по $j = \overline{1,m}$. После интегрирования по частям приходим ко второму энергетическому равенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{J}_m(t) + \int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2}\phi(s)\,ds\right] + \mu\mathrm{J}_m = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \mathscr{F}(x,u_m)\,dx. \tag{4.2}$$

Интегрируя по времени в этом равенстве, получим

$$\frac{1}{2}\mathrm{J}_m(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s)\,ds - E_m(0) \leqslant \int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_m)\,dx, \tag{4.3}$$

где

$$E_m(0) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{1m}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_{0m}\|_2^2} \phi(s)\,ds - \int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_{0m})\,dx. \tag{4.4}$$

В силу (3.6) из неравенства (4.3) вытекает, что

$$\frac{\theta_2}{2}\mathrm{J}_m(t) + \frac{\theta_2}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s)\,ds - \theta_2 E_m(0) \leqslant \int\limits_\Omega f(x, u_m)u_m\,dx. \tag{4.5}$$

Теперь из (4.1) и (4.5) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2}\frac{d\Phi_m}{dt} - \mathrm{J}_m + \int\limits_\Omega \phi\big(\|\nabla u_m\|_2^2\big)|\nabla u_m|^2\,dx$$

$$\geqslant \frac{\theta_2}{2}\mathrm{J}_m(t) + \frac{\theta_2}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s)\,ds - \theta_2 E_m(0). \tag{4.6}$$

Воспользовавшись неравенством (3.2), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2}\frac{d\Phi_m}{dt} - \mathrm{J}_m + \frac{\theta_1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s)\,ds$$

$$\geqslant \frac{\theta_2}{2}\mathrm{J}_m(t) + \frac{\theta_2}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s)\,ds - \theta_2 E_m(0). \tag{4.7}$$

Потребуем выполнения условия $\theta_2 \geqslant \theta_1$, тогда из неравенства (4.7) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2}\frac{d\Phi_m}{dt} + \theta_2 E_m(0) \geqslant \left(1 + \frac{\theta_2}{2}\right)\mathrm{J}_m. \tag{4.8}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, можно доказать, что

$$(\Phi_m')^2 \leqslant 4\mathrm{J}_m\Phi_m. \tag{4.9}$$

Из (4.8) и (4.9) приходим к искомому дифференциальному неравенству

$$\Phi_m\Phi_m'' - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\theta_2}{2}\right)(\Phi_m')^2 + \mu\Phi_m\Phi_m' + 2\theta_2 E_m(0)\Phi_m \geqslant 0. \tag{4.10}$$

Сравнивая (4.10) с дифференциальным неравенством (2.1), получим, что

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\theta_2}{2}\right) > 1 \quad \text{при } \theta_2 > 2, \quad \beta = 2\theta_2 E_m(0),$$

$$\gamma = \mu, \quad \frac{2\beta}{2\alpha - 1} = 8E_m(0), \quad \frac{\gamma}{\alpha - 1} = \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}.$$

Потребуем выполнения условий теоремы 1:

$$\Phi_m'(0) > \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi_m(0) > 0, \tag{4.11}$$

$$\left(\Phi_m'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi_m(0)\right)^2 > 8E_m(0)\Phi_m(0), \tag{4.12}$$

$$E_m(0) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{1m}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_{0m}\|_2^2} \phi(s)\,ds - \int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_{0m})\,dx > 0. \tag{4.13}$$

При выполнении условий (4.11)–(4.13) время $T > 0$ существования галёркинских приближений $u_m(x)(t)$ ограничено сверху:

$$T \leqslant \Phi_m^{(2-\theta_2)/4}(0)A_m^{-1},$$

$$A_m^2 \equiv \left(\frac{\theta_2 - 2}{4}\right)^2 \Phi_m^{-1-\theta_2/2}(0)\left[\left(\Phi_m'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi_m(0)\right)^2 - 8E_m(0)\Phi_m(0)\right],$$

причем

$$\Phi_m(t) \geqslant \frac{e^{4\mu t/(\theta_2 - 2)}}{\left[\Phi_m^{(2-\theta_2)/4}(0) - A_m t\right]^{4/(\theta_3 - 2)}}, \tag{4.14}$$

где

$$\Phi_m'(0) = 2\int\limits_\Omega u_{1m}(x)u_{0m}(x)\,dx, \quad \Phi_m(0) = \int\limits_\Omega |u_{0m}|^2\,dx.$$

В силу предельных свойств (3.14) и (3.15) и условий $(\mathrm{i})_1$, $(\mathrm{ii})_1$, $(\mathrm{i})_2$, $(\mathrm{ii})_2$, а также теоремы М. А. Красносельского для операторов Немыцкого [23] получим следующие предельные свойства:

$$E_m(0) \to E(0) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_1|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s)\,ds - \int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx, \tag{4.15}$$

$$A_m^2 \to A^2 \equiv \left(\frac{\theta_2 - 2}{4}\right)^2 \Phi^{-1-\theta_2/2}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi(0)\right)^2 - 8E(0)\Phi(0)\right],$$

$$\Phi_m'(0) \to \Phi'(0) = 2\int\limits_\Omega u_1(x)u_0(x)\,dx, \quad \Phi_m(0) \to \Phi(0) = \int\limits_\Omega |u_0|^2\,dx.$$

Наконец, ввиду леммы 1 приходим к выводу о том, что равномерно по $t \in [0, T]$ имеет место следующее предельное свойство:

$$\Phi_m(t) \to \Phi(t) \equiv \int\limits_\Omega |u|^2\,dx. \tag{4.16}$$

Теперь точно так же, как и в [24], можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (4.14) и получить следующее неравенство:

$$\Phi(t) \geqslant \frac{e^{4\mu t/(\theta_2 - 2)}}{[\Phi^{(2-\theta_2)/4}(0) - At]^{4/(\theta_2 - 2)}}. \tag{4.17}$$

Таким образом, мы пришли к основной теореме настоящей работы.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2, а также условие* $(\mathrm{iii})_2$. *Тогда при выполнении основных условий*

$$\Phi'(0) > \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi(0) + (8E(0)\Phi(0))^{1/2} > 0, \quad E(0) > 0, \tag{4.18}$$

$$\theta_2 \geqslant \theta_1 \tag{4.19}$$

для времени существования решения $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$ *выполнена оценка сверху*

$$T_0 \leqslant \Phi^{(2-\theta_2)/4}(0)A^{-1},$$

т. е. имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t\uparrow T_0}\left[\|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\right] = +\infty,$$

где

$$\Phi(0) = \int_\Omega |u_0|^2\,dx, \quad \Phi'(0) = 2\int_\Omega u_1 u_0\,dx,$$

$$E(0) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega |u_1|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2}\phi(s)\,ds - \int_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx,$$

$$A^2 \equiv \left(\frac{\theta_2 - 2}{4}\right)^2 \Phi^{-1-\theta_2/2}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi(0)\right)^2 - 8E(0)\Phi(0)\right].$$

Замечание 2. Проверим совместность всех условий (4.18) при достаточно малых $\mu \geqslant 0$. Действительно, сначала выберем $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ настолько «большим», что выполнено следующее неравенство:

$$\int_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx > \frac{1}{2}\int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2}\phi(s)\,ds + \frac{2}{\theta_2 - 2}\int_\Omega |u_0|^2\,dx. \tag{4.20}$$

Фиксируем такое u_0 и выберем

$$u_1 = \lambda u_0 \quad \text{при } \lambda > \frac{2\mu}{\theta_2 - 2}.$$

В этом случае имеет место неравенство

$$\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi(0) = 2\left(\lambda - \frac{2\mu}{\theta_2 - 2}\right)\Phi(0) > 0. \tag{4.21}$$

Наконец, выберем $\lambda > 2\mu/(\theta_2 - 2)$ настолько «большим», что

$$E(0) \equiv \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2}\phi(s)\,ds - \int_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx > 0.$$

При выполнении условия (4.21) неравенство (4.18) эквивалентно такому:

$$\left(\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi(0)\right)^2 > 8E(0)\Phi(0). \tag{4.22}$$

Подставив в (4.22) нашу замену, получим для его левой и правой частей следующие равенства:

$$\left(\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi(0)\right)^2 = 4\left(\lambda - \frac{2\mu}{\theta_2 - 2}\right)^2 \Phi^2(0) = \left(4\lambda^2 - \frac{16\mu\lambda}{\theta_2 - 2} + \frac{16\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2}\right)\Phi^2(0), \tag{4.23}$$

$$8E(0)\Phi(0) = 4\lambda^2\Phi^2(0) + 8\Phi(0)\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s)\,ds - \int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx\right]. \tag{4.24}$$

Из (4.22) с учетом выражений (4.23) и (4.24) получим

$$\left(\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}\Phi(0)\right)^2 = \left(4\lambda^2 - \frac{16\mu\lambda}{\theta_2 - 2} + \frac{16\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2}\right)\Phi^2(0)$$
$$> 8E(0)\Phi(0) = 4\lambda^2\Phi^2(0) + 8\Phi(0)\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s)\,ds - \int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx\right], \tag{4.25}$$

откуда легко приходим к неравенству

$$\int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx + \frac{2\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2}\int\limits_\Omega |u_0|^2\,dx > \frac{2\mu\lambda}{\theta_2 - 2}\int\limits_\Omega |u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s)\,ds. \tag{4.26}$$

Выберем $\lambda = \frac{1}{\mu}$ при $\mu \in \left(0, \left(\frac{\theta_2 - 2}{2}\right)^{1/2}\right)$, а в случае $\mu = 0$ параметр $\lambda > 0$ достаточно велик. С учетом явного выбора параметра λ видим, что предыдущие условия выполнены при достаточно малом $\mu \geqslant 0$. Подставив это явное выражение для λ в (4.26), получим неравенство

$$\int\limits_\Omega \mathscr{F}(x, u_0)\,dx + \frac{2\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2}\int\limits_\Omega |u_0|^2\,dx > \frac{2}{\theta_2 - 2}\int\limits_\Omega |u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s)\,ds.$$

которое, очевидно, выполнено в силу (4.20). Таким образом, задача свелась к проверке выполнимости условия (4.20) при некоторых функциях $\phi(s)$ и $f(x, s)$. Заодно проверим выполнимость условий (4.19). Возьмем $\phi(s) = 1 + s$, $f(x, s) = |s|^{q_2} s$, тогда

$$\mathscr{F}(x, s) = \frac{|s|^{q_2 + 2}}{q_2 + 2}, \quad \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s)\,ds = \frac{1}{4}\|\nabla u_0\|_2^4 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2.$$

Таким образом, при $q_2 > 2$ условие (4.20) выполнено при достаточно больших u_0. Кроме того, $\theta_2 = q_2 + 2 > 4 = \theta_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Похожаев С. И.* Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 1. С. 152–166.
2. *Ono K.* On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 2. P. 151–177.

3. *Papadopoulos P. G., Stavrakakis N. M.* Global existence and blow-up results for an equation of Kirchhoff type on R^N // Topol. Methods Nonlinear Anal. 2001. V. 17. P. 91–109.

4. *Galaktionov V. A., Pohozaev S. I.* Blow-up, critical exponents and asymptotic spectra for nonlinear hyperbolic equations. Prepr. Univ. Bath. Math. 2000. N 00/10.

5. *Wang Ya.* Non-existence of global solutions of a class of coupled non-linear Klein–Gordon equations with non-negative potentials and arbitrary initial energy // IMA J. Appl. Math. 2009. V. 74, N 3. P. 392–415.

6. *Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. Berlin: De Gruyter, 2011. (De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl.; V. 15).

7. *Tsutsumi M.* Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1972. V. 8. P. 211–229.

8. *Калантаров В. К., Ладыженская О. А.* Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов // Зап. ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.

9. *Levine H. A.* Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathscr{F}(u)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. P. 1–21.

10. *Levine H. A., Pucci P., Serrin J.* Some remarks on the global nonexistence problem for nonautonomous abstract evolution equations // Contemp. Math. 1997. V. 208. P. 253–263.

11. *Pucci P., Serrin J.* Some new results on global nonexistence for abstract evolution equation with positive initial energy // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1997. V. 10. P. 241–247.

12. *Pucci P., Serrin J.* Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy // J. Differ. Equations. 1998. V. 150. P. 203–214.

13. *Straughan B.* Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 2. P. 381–390.

14. *Levine H. A., Todorova G.* Blow-up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy in four space-time dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 129. P. 793–805.

15. *Митидиери Э. Л., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 234.

16. *Pohozaev S. I.* Critical nonlinearities in partial differential equations // Milan J. Math. 2009. V. 77, N 1. P. 127–150.

17. *Галактионов В. А., Похожаев С. И.* Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1819–1846.

18. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

19. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

20. *Демидович В. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

21. *Lima O. A., Lourendo A. T., Marino A. O.* Weak solutions for a strongly-coupled nonlinear system // Electron. J. Differ. Equ. 2006. V. 130. P. 1–18. http://ejde.math.txstate.edu.

22. *Дубинский Ю. А.* Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Мат. сб. 1965. Т. 67, № 4. С. 609–642.

23. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956.

24. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* О разрушении решения системы уравнений Осколкова // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 4. С. 83–108.

Статья поступила 11 июля 2011 г.

Корпусов Максим Олегович
Московский гос. университет, физический факультет, кафедра математики,
Воробьевы горы, Москва 119899
korpusov@gmail.com