М. О. Корпусов, О разрушении решений модельных волновых уравнений с положительной энергией в нелинейной механике, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 1, 3–17

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 171, № 1
апрель, 2012

М. О. Корпусов*

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрены четыре задачи для модельных нелинейных уравнений, возникающих в нелинейной механике. Получены достаточные условия разрушения за конечное время для решений задач в ограниченной области с однородными условиями Дирихле. При этом начальная энергия системы может быть сколь угодно большой положительной величиной. Для доказательства разрушения использован модифицированный метод Левина.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, обобщенные уравнения Клейна–Гордона, нелинейные гиперболические уравнения, нелинейные смешанные краевые задачи, теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующие четыре задачи.

1. Однородная задача Дирихле для уравнения типа Клейна–Гордона, описывающего механику кристаллов [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u = u^2 + u^3,\\ u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad u'(x,0) = u_1(x)\end{gathered} \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\gamma}$ при $\gamma \in (0,1]$.

2. Однородная задача Дирихле для классической системы волновых уравнений, описывающей продольно-изгибные колебания пластины [2]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_0^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad u|_{x=0,l} = 0, \quad c_0 > 0, \quad l > 0,\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_0^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad w|_{x=0,l} = w_x|_{x=0,l} = 0, \quad c_1 > 0,\\ u(x,0) = u_0(x), \qquad w(x,0) = w_0(x), \qquad u'(x,0) = u_1(x), \qquad w'(x,0) = w_1(x).\end{gathered} \tag{2}$$

---

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: korpusov@gmail.com

3. Следующая задача, описывающая изгибные колебания физически нелинейного стержня [3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\alpha^2\lambda\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right],$$
$$u|_{x=0,l}=u_x|_{x=0,l}=0,\qquad u(x,0)=u_0(x),\qquad \alpha>0,\qquad \lambda>0. \tag{3}$$

4. Задача для волнового уравнения высокого порядка, которое описывает изгибные волны в тонком растянутом стержне [2]; мы запишем его в "оединиченных" коэффициентах:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\right)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right),$$
$$u|_{x=0,l}=u_x|_{x=0,l}=0,\qquad u(x,0)=u_0(x). \tag{4}$$

Для рассматриваемых задач получены схожие результаты. А именно, в работе [1] доказано разрушение решений уравнения (1) для случая отрицательных и не очень больших положительных начальных энергий. В других работах получено, что энергия может быть отрицательной или достаточно большой положительной величиной, удовлетворяющей определенным условиям (см., например, статью [4]). Однако из вида этих условий явно следует, что, во-первых, проверить их совместность достаточно сложно, во-вторых, при фиксированной u_0 и достаточно большой u_1 эти условия невыполнимы. В упомянутых работах используется классический метод Левина. В настоящей работе мы применяем модифицированный метод Левина, развитый в работе [5], который позволит нам получить всего два основных условия на начальные функции; кроме того, мы легко проверим совместность всех полученных условий.

Отметим, что существуют три основных метода исследования явления разрушения: энергетический метод Левина [6]–[11], метод нелинейной емкости Похожаева–Митидиери [12]–[14] и, наконец, метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [15], [16].

2. ОСНОВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Известно, какое значение имеет в стандартном методе Левина дифференциальное неравенство [6]

$$\Phi\Phi''-\alpha(\Phi')^2+\beta\Phi^2\geqslant 0,\qquad \alpha>1,\quad \beta\geqslant 0.$$

В работе [17] было получено следующее обобщение этого неравенства:

$$\Phi\Phi''-\alpha(\Phi')^2+\beta\Phi^2+\gamma\Phi\Phi'\geqslant 0,\qquad \alpha>1,\quad \beta\geqslant 0,\quad \gamma\geqslant 0.$$

С другой стороны, при доказательстве теоремы 4 в работе [6] использовалось несколько иное дифференциальное неравенство,

$$\Phi\Phi''-\alpha(\Phi')^2+\beta\Phi\geqslant 0,\qquad \alpha>1,\quad \beta\geqslant 0, \tag{5}$$

которое будет основным в настоящей работе.

Сделаем ряд предположений. Пусть имеют место соотношения

$$\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}\big([0,T]\big), \quad T>0, \qquad \Phi(t) \geqslant 0, \qquad \Phi(0)>0, \qquad \Phi'(0)>0 \tag{6}$$

и неравенства

$$\alpha > 1, \qquad \beta > 0. \tag{7}$$

Ясно, что из условий (6) вытекает существование такого момента времени $t_0 > 0$, что справедливо неравенство

$$\Phi'(t) > 0 \qquad \text{при} \qquad t \in [0, t_0). \tag{8}$$

Следовательно, $\Phi(t) > \Phi(0) \geqslant 0$ при $t \in [0, t_0)$. Разделим обе части неравенства (5) на $\Phi^{1+\alpha}$ и после ряда преобразований получим при $t \in [0, t_0)$ неравенство

$$\frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \beta\Phi^{-\alpha} \geqslant 0,$$

из которого нетрудно вывести следующее неравенство для функции $Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t)$:

$$-Z'' + \gamma Z^{\alpha_1} \geqslant 0, \qquad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}, \qquad \gamma = (\alpha-1)\beta. \tag{9}$$

Заметим, что в силу (8)

$$Z'(t) = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi'(t) < 0 \qquad \text{при} \qquad t \in [0, t_0). \tag{10}$$

С учетом последнего соотношения умножим обе части неравенства (9) на Z' и после интегрирования получим

$$(Z')^2 \geqslant A^2 + \frac{2\gamma}{\alpha_1+1} Z^{1+\alpha_1}, \tag{11}$$

где

$$A^2 \equiv \big(Z'(0)\big)^2 - \frac{2\gamma}{\alpha_1+1} Z^{1+\alpha_1}(0) > 0.$$

Это условие эквивалентно следующему неравенству:

$$(\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\big(\Phi'(0)\big)^2 > \frac{2\gamma}{\alpha_1+1}\Phi^{(1+\alpha_1)(1-\alpha)}(0),$$

которое, в свою очередь, сводится к неравенству

$$\big(\Phi'(0)\big)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi^{2\alpha}(0)\Phi^{1-2\alpha}(0).$$

Таким образом, мы приходим к неравенству $\big(\Phi'(0)\big)^2 > 2\beta/(2\alpha-1)\cdot\Phi(0)$. Если мы потребуем выполнения этого неравенства, то из (11) получим, что $(Z')^2 \geqslant A^2$, следовательно, $|Z'| \geqslant A > 0$, откуда $Z'(t) \leqslant -A < 0$ при $t \in [0, t_0)$. На основании неравенства (10) приходим к выводу, что $\Phi'(t_0) > 0$. Используя алгоритм продолжения по времени, получим, что $\Phi'(t) > 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда из $Z'(t) \leqslant -A$ следует, что $Z(t) \leqslant Z(0) - At$, таким образом, $\Phi^{1-\alpha} \leqslant \Phi^{1-\alpha}(0) - At$. В результате мы приходим к оценке снизу

$$\Phi(t) \geqslant \big(\Phi^{1-\alpha}(0) - At\big)^{-1/(\alpha-1)},$$

из которой вытекает, что время $T \neq +\infty$, поскольку в противном случае найдется такое $T_\infty \leqslant \Phi^{1-\alpha}(0)/A < +\infty$, что $\limsup_{t\uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty$.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6), (7). *Тогда при дополнительном условии*

$$\big(\Phi'(0)\big)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)$$

для решений дифференциального неравенства $\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi \geqslant 0$ *имеют место следующие соотношения*:

$$\Phi(t) \geqslant \big(\Phi^{1-\alpha}(0) - At\big)^{-1/(\alpha-1)},$$

$$\limsup_{t\uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty, \qquad T \leqslant T_\infty \leqslant \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A} < +\infty.$$

3. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ

1. Сначала рассмотрим задачу (1).

Определение 1. *Сильным обобщенным решением* задачи (1) назовем функцию

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}\big([0,T]; \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big) \cap \mathbb{C}^{(1)}\big([0,T]; \mathbb{L}^2(\Omega)\big) \cap \mathbb{C}^{(2)}\big([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\big), \qquad T > 0, \tag{12}$$

удовлетворяющую равенству $\big\langle D(u), w\big\rangle = 0$ для всех $w(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и $t \in [0,T]$, где

$$D(u) \equiv u_{tt} - \Delta u + u - u^2 - u^3, \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad u'(x,0) = u_1(x) \tag{13}$$

и $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ – это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

В работе [18] показано, что для задачи (1), понимаемой в сильном обобщенном смысле, справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Для любых* $u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ *и* $u_1(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *существует единственное сильное обобщенное решение* $u(x)(t)$ *в классе*

$$\mathbb{C}\big([0,T_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big) \cap \mathbb{C}^{(1)}\big([0,T_0); \mathbb{L}^2(\Omega)\big) \cap \mathbb{C}^{(2)}\big([0,T_0); \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\big)$$

при некотором $T_0 = T_0(u_0,u_1) > 0$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *в последнем случае имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0}\big(\|\nabla u\|_2 + \|u'\|_2\big) = +\infty. \tag{14}$$

В той же работе [18] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено включение* (12), *тогда*

$$\Phi(t) \equiv \int_\Omega |u|^2\,dx \in \mathbb{C}^{(2)}\big([0,T]\big),$$

причем имеет место следующее равенство:

$$\langle u'', u\rangle = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) - J(t), \qquad J(t) \equiv \int_\Omega |u'|^2\,dx.$$

К сожалению, результата теоремы 1 недостаточно для вывода энергетических равенств, с помощью которых мы планируем доказать разрушение решения за конечное время, поскольку требуется большая гладкость решения. Одной из плодотворных идей для преодоления этой трудности является метод достаточно гладких приближений к точному решению. В частности, данную процедуру позволяет реализовать метод Галёркина. Рассмотрим его в применении к данной задаче.

Пусть $\{w_j\}$ – базис гильбертова пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, который мы выберем ортонормированным в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Рассмотрим следующую задачу для приближений метода Галёркина:

$$\big\langle D(u_m), w_j \big\rangle = 0, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{15}$$

где

$$D(u_m) \equiv u_m'' - \Delta u_m + u_m - u_m^2 - u_m^3, \qquad u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k,$$

и $u_m(0) \to u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, а $u_m'(0) \to u_1$ сильно в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Отметим, что задача (15) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $c_{mk}(t)$ при $k = \overline{1, m}$. Стандартным образом, используя ортонормированность базиса $\{w_j\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, можно доказать, что для системы (15) справедлива теорема Коши, следовательно, эта система имеет локальное решение $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}\big([0, T_m]\big)$. Таким образом, $u_m(x)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}\big([0, T_m]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)\big)$.

Теперь задача заключается в выводе априорных оценок, которые получаются путем умножения обеих частей равенства (15) на c_{mj}' и суммирования по $j = \overline{1, m}$. Дальнейшие рассуждения основаны на теореме Гронуолла–Белмана–Бихари [19]. При этом мы получаем следующие априорные оценки:

$$\|\nabla u_m\|_2 \leqslant c_1(T) < +\infty, \qquad \|u_m'\|_2 \leqslant c_2(T) < +\infty, \tag{16}$$

где постоянные $c_1(T)$ и $c_2(T)$ не зависят от $m \in \mathbb{N}$, а величина $T > 0$ тоже не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и достаточно мала. Из этих априорных оценок и в силу специального выбора базиса $\{w_j\}$ можно доказать, что решения $c_{mk}(t)$ системы уравнений (15) существуют на сегменте $t \in [0, T]$, т. е. время существования решения не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь наша задача состоит в получении априорной оценки для u_m''. С этой целью мы воспользуемся техникой работы [20]. Пусть $V_m = \overline{\{w_1, \ldots, w_m\}}$ – линейная оболочка системы функций $\{w_k\}$, $k = \overline{1, m}$. Введем следующий проекционный оператор

$$\mathbb{P}_m \colon \mathbb{L}^2(\Omega) \to V_m \subset \mathbb{L}^2(\Omega), \qquad \mathbb{P}_m z = \sum_{k=1}^{m} (z, w_k) w_k, \qquad z(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega),$$

где

$$(z, w_k) = \int_{\Omega} z(x) w_k(x)\, dx.$$

С учетом введенного оператора $\mathbb{P}_m$ систему приближений (15) метода Галёркина можно переписать в следующем виде: $\langle u_m'' - \Delta u_m + u_m - u_m^2 - u_m^3, \mathbb{P}_m z\rangle = 0$ для всех

$z \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Отсюда получим, что $\mathbb{P}^*_m(u''_m - \Delta u_m + u_m - u^2_m - u^3_m) = 0$. Поскольку

$$u''_m = \sum_{k=1}^m c''_{mk} w_k, \qquad \mathbb{P}^*_m w_k = \mathbb{P}_m w_k = w_k,$$

имеет место равенство

$$u''_m = -u_m + \mathbb{P}^*_m(\Delta u_m + u^2_m + u^3_m). \tag{17}$$

Заметим, что $\mathbb{P}_m \in \mathcal{L}\big(\mathbb{H}^1_0(\Omega), \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$ и $\mathbb{P}^*_m \in \mathcal{L}\big(\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\big)$.

Наконец, имеют место следующие цепочки плотных и непрерывных вложений:

$$\begin{aligned} &\mathbb{H}^1_0(\Omega) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{L}^4(\Omega) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{4/3}(\Omega) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ &\mathbb{H}^1_0(\Omega) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{L}^3(\Omega) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{3/2}(\Omega) \overset{\mathrm{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда следуют априорные оценки

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{P}^*_m \Delta u_m\|_{-1} \leqslant c_6 \|\nabla u_m\|_2 \leqslant c_7(T) < +\infty, \\ &\big\|\mathbb{P}^*_m(u^2_m)\big\|_{-1} \leqslant c_8 \|u^2_m\|_{3/2} \leqslant c_9 \|\nabla u_m\|^2_2 \leqslant c_{10}(T) < +\infty, \\ &\big\|\mathbb{P}^*_m(u^3_m)\big\|_{-1} \leqslant c_{11} \|u^3_m\|_{4/3} \leqslant c_{12} \|\nabla u_m\|^3_2 \leqslant c_{13}(T) < +\infty. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя полученные соотношения (17)–(19), мы приходим к априорной оценке $\|u''_m\|_{-1} \leqslant c_{14}(T) < +\infty$, из которой, в свою очередь, вытекает, что

$$\int_0^T \|u''_m\|^2_{-1}\,dt \leqslant c_{15}(T) < +\infty, \tag{20}$$

причем $T > 0$ достаточно мало, а постоянные c_{14} и c_{15} не зависят от $m \in \mathbb{N}$.

Из априорных оценок (16), (20) мы получаем, что имеют место следующие предельные равенства:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad *\text{-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty\big(0, T; \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big), \tag{21}$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad *\text{-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty\big(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)\big), \tag{22}$$

$$u''_m \rightharpoonup u'' \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2\big(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\big). \tag{23}$$

Прежде всего заметим, что из априорных оценок (16) вытекает, что последовательность $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в $\mathbb{H}^1(Q_T)$, где $Q_T = (0, T) \times \Omega$. Таким образом, в силу полной непрерывности вложения $\mathbb{H}^1(Q_T)$ в $\mathbb{L}^2(Q_T)$ имеет место следующее предельное свойство для некоторой подпоследовательности, которую мы также далее будем обозначать через $\{u_m\}$: она сходится к u сильно в $\mathbb{L}^2(Q_T)$ и почти всюду в Q_T.

Теперь заметим, что последовательности $\{u^2_m\}$ и $\{u^3_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничены в $\mathbb{L}^{3/2}(Q_T)$ и в $\mathbb{L}^{4/3}(Q_T)$ соответственно в силу непрерывных вложений (18). Кроме того, с учетом сильной сходимости $u_m \to u$ имеем $u^2_m \to u^2$ и $u^3_m \to u^3$ для почти всех $(t, x) \in Q_T$. Следовательно, в силу известной леммы Лионса [21] $u^2_m \rightharpoonup u^2$

слабо в $\mathbb{L}^{3/2}(Q_T)$ и $u_m^3 \rightharpoonup u^3$ слабо в $\mathbb{L}^{4/3}(Q_T)$. С учетом этих сходимостей и предельных свойств (21), (22) мы можем перейти к пределу при $m \to +\infty$ и получить, что предельная функция $u(x)(t)$ является решением следующей задачи:

$$\int_0^T \langle D(u), v\rangle\, dt = 0 \qquad \text{для всех} \quad v(x)(t) \in \mathbb{L}^2\bigl(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)\bigr), \tag{24}$$

где $D(u)$ задан в (13).

Определение 2. Назовем *слабым обобщенным решением* задачи (1) функцию $u(x)(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)\bigr), \\ u'(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)\bigr), \qquad u''(x)(t) \in \mathbb{L}^2\bigl(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\bigr) \end{gathered} \tag{25}$$

и являющуюся решением задачи (24).

Замечание 1. Ясно, что сильное обобщенное решение является слабым обобщенным решением.

Используя стандартный алгоритм продолжения решения задачи по времени, мы получим следующий результат.

Теорема 3. *Для всякого $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и всякого $u_1(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ найдется такое $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что при $t \in [0, T_0]$ существует слабое обобщенное решение в смысле определения 2, причем $T \in (0, T_0)$ и либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, в последнем случае имеет место предельное равенство (14).*

Воспользуемся приближениями метода Галёркина $u_m \in \mathbb{C}^{(2)}\bigl([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)\bigr)$, чтобы вывести энергетические равенства, необходимые нам для доказательства разрушения, а затем в полученных выражениях перейдем к пределу при $m \to +\infty$.

Умножим обе части равенства (15) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\Phi_m'' - J_m + \|\nabla u_m\|_2^2 + \|u_m\|_2^2 - \|u_m\|_4^4 = \int_\Omega u_m^3\, dx, \tag{26}$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$\Phi_m = \int_\Omega |u_m|^2\, dx, \qquad J_m = \int_\Omega |u_m'|^2\, dx.$$

Теперь умножим обе части равенства (15) на c_{mj}' и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, получим после интегрирования по времени следующее равенство:

$$\frac{1}{2}J_m + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_2^2 - \frac{1}{4}\|u_m\|_4^4 - E_m(0) = \frac{1}{3}\int_\Omega u_m^3\, dx, \tag{27}$$

где

$$E_m(0) = \frac{1}{2}J_m(0) + \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 - \frac{1}{4}\|u_{0m}\|_4^4 - \frac{1}{3}\int_\Omega u_{0m}^3\, dx.$$

Из (27) вытекает следующее равенство:

$$\frac{3}{2}J_m + \frac{3}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{3}{2}\|u_m\|_2^2 - \frac{3}{4}\|u_m\|_4^4 - 3E_m(0) = \int_\Omega u_m^3\,dx.$$

Подставив выражение для $\int_\Omega u_m^3\,dx$ из последнего равенства в правую часть (26), получим

$$\frac{1}{2}\Phi_m'' - J_m + \|\nabla u_m\|_2^2 + \|u_m\|_2^2 - \|u_m\|_4^4 = \\ = \frac{3}{2}J_m + \frac{3}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{3}{2}\|u_m\|_2^2 - \frac{3}{4}\|u_m\|_4^4 - 3E_m(0),$$

откуда, в свою очередь, следует равенство

$$\frac{1}{2}\Phi_m'' - \frac{5}{2}J_m - \frac{1}{2}\bigl(\|\nabla u_m\|_2^2 + \|u_m\|_2^2\bigr) - \frac{1}{4}\|u_m\|_4^4 + 3E_m(0) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\Phi_m'' + 3E_m(0) \geqslant \frac{5}{2}J_m. \tag{28}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, можно доказать дифференциальное неравенство $(\Phi_m')^2 \leqslant 4J_m\Phi_m$. В результате, используя его вместе с (28), мы получим искомое дифференциальное неравенство:

$$\Phi_m\Phi_m'' - \frac{5}{4}(\Phi_m')^2 + 6E_m(0)\Phi_m \geqslant 0.$$

Сравнивая это дифференциальное неравенство с неравенством (5), получим, что $\alpha = 5/4$, $\beta = 6E_m(0)$. Займемся арифметикой:

$$\frac{2\beta}{2\alpha - 1} = \frac{12E_m(0)}{5/2 - 1} = 8E_m(0).$$

В силу теоремы 1 мы получим, что при условиях

$$\Phi_m'(0) > \bigl(8E_m(0)\Phi_m(0)\bigr)^{1/2} > 0, \qquad E_m(0) > 0,$$

где

$$\Phi_m(0) = \int_\Omega |u_{m0}|^2\,dx, \qquad \Phi_m'(0) = 2\int_\Omega u_{1m}u_{0m}\,dx > 0,$$

время T_{0m} существования решения u_m задачи (15) не существует глобально по времени. А именно, справедливо неравенство

$$\Phi_m(t) \geqslant \bigl(\Phi_m^{-1/4}(0) - A_m t\bigr)^{-1/4}, \tag{29}$$

где

$$A_m^2 = \frac{1}{16}\Phi_m^{-5/2}(0)\bigl[\bigl(\Phi_m'(0)\bigr)^2 - 8E_m(0)\Phi_m(0)\bigr].$$

В силу начальных условий задачи (15) имеют место следующие предельные выражения:

$$\Phi_m(0) \to \Phi(0) = \int_\Omega |u_0|^2\,dx, \qquad \Phi_m'(0) \to \Phi'(0) = 2\int_\Omega u_1u_0\,dx, \\ E_m(0) \to E(0) = \frac{1}{2}J(0) + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{4}\|u_0\|_4^4 - \frac{1}{3}\int_\Omega u_0^3\,dx. \tag{30}$$

Лемма 2. *Для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ равномерно по $t \in [0,T]$ справедливо предельное равенство*

$$\Phi_m(t) = \int_\Omega |u_m|^2 \, dx \to \int_\Omega |u|^2 \, dx = \Phi(t).$$

Доказательство этой леммы проводится на основе техники работы [22] с использованием предельных выражений (21), (22), а также того, что $\{u_m\}$ сходится к u сильно в $\mathbb{L}^2(Q_T)$ и почти всюду в Q_T.

Используя технику работы [5], можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (29) и получить неравенство $\Phi(t) \geqslant \bigl(\Phi^{-1/4}(0) - At\bigr)^{-1/4}$, где

$$A^2 = \frac{1}{16}\Phi^{-5/2}(0)\bigl[\bigl(\Phi'(0)\bigr)^2 - 8E(0)\Phi(0)\bigr],$$

при выполнении условий

$$\bigl(\Phi'(0)\bigr)^2 > 8E(0)\Phi(0) > 0, \qquad E(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0, \tag{31}$$

где $\Phi(0)$, $\Phi'(0)$, $E(0)$ заданы в (30) и $\Phi(t) = \int_\Omega |u|^2 \, dx$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $u_1(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, тогда при дополнительных условиях (31) существует слабое обобщенное решение задачи (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T_0; \mathbb{H}^1_0(\Omega)\bigr),$$
$$u'(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty\bigl(0, T_0; \mathbb{L}^2(\Omega)\bigr), \qquad u''(x)(t) \in \mathbb{L}^2\bigl(0, T_0; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\bigr),$$

причем

$$0 < T_0 \leqslant \Phi^{-1/4}(0)A^{-1}, \qquad A^2 = \frac{1}{16}\Phi^{-5/2}(0)\bigl[(\Phi'(0))^2 - 8E(0)\Phi(0)\bigr]$$

и, следовательно, выполнено предельное равенство (14).

Теперь мы должны проверить совместность полученных выше достаточных условий (31). Сначала выберем начальную функцию $u_0(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ настолько большой, чтобы имело место неравенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 < \frac{1}{4}\|u_0\|_4^4 + \frac{1}{3}\int_\Omega u_0^3 \, dx. \tag{32}$$

Такая функция $u_0(x)$ существует. Далее при фиксированной функции $u_0(x)$ положим $u_1(x) = \lambda u_0(x)$ при $\lambda > 0$. Теперь выберем $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$E(0) = \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |u_0|^2 \, dx + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{4}\|u_0\|_4^4 - \frac{1}{3}\int_\Omega u_0^3 \, dx > 0.$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\bigl(\Phi'(0)\bigr)^2 = 4\biggl(\int_\Omega u_0 u_1 \, dx\biggr)^2 = \lambda^2\biggl(\int_\Omega |u_0|^2 \, dx\biggr)^2.$$

В результате условие (31) принимает вид

$$\big(\Phi'(0)\big)^2 = 4\lambda^2\left(\int_\Omega |u_0|^2\,dx\right)^2 > 8E(0)\Phi(0) = 4\lambda^2\left(\int_\Omega |u_0|^2\,dx\right)^2 + \\ + 8\Phi(0)\left[\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{4}\|u_0\|_4^4 - \frac{1}{3}\int_\Omega u_0^3\,dx\right],$$

что, очевидно, выполнено в силу неравенства (32). Итак, совместность условий (31) проверена.

2. Теперь мы приступим к исследованию системы уравнений (2).

Определение 3. *Классическим решением* задачи (2) назовем функции $u(x)(t)$ и $w(x)(t)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}\big([0,T];\mathbb{C}(\overline{\Omega})\big) \cap \mathbb{C}\big([0,T];\mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})\big),$$
$$w(x)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}\big([0,T];\mathbb{C}(\overline{\Omega})\big) \cap \mathbb{C}\big([0,T];\mathbb{C}^{(4)}(\overline{\Omega})\big),$$

а также исходным начальным и граничным условиям, понимаемым в поточечном смысле.

Теперь мы предположим, что найдется такое $T > 0$, что существует классическое решение задачи (2), докажем, что время $T > 0$ при некоторых достаточных условиях не может быть равно $+\infty$, и получим оценку сверху для этого момента времени.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) \equiv \int_\Omega \big(|u|^2 + |w|^2\big)\,dx, \qquad J(t) \equiv \int_\Omega \big(|u'|^2 + |w'|^2\big)\,dx.$$

Нетрудно показать, что в силу неравенства Коши–Буняковского справедливо следующее дифференциальное неравенство:

$$(\Phi')^2 \leqslant 4J\Phi. \tag{33}$$

Умножим первое уравнение (2) на $u(x)(t)$, а второе уравнение – на $w(x)(t)$, проинтегрируем по области Ω и сложим получившиеся равенства, в результате будем иметь следующее энергетическое равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) - J(t) + c_0^2\|u_x\|_2^2 + c_1^2\|w_{xx}\|_2^2 = \frac{3c_0^2}{2}\int_\Omega (w_x)^2 u_x\,dx. \tag{34}$$

Теперь умножим первое уравнение в (2) на $u'(x)(t)$, а второе уравнение – на $w'(x)(t)$, проинтегрируем по области Ω, после чего сложим получившиеся равенства, в результате будем иметь второе энергетическое равенство:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J + \frac{c_0^2}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{c_1^2}{2}\|w_{xx}\|_2^2\right) = \frac{c_0^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (w_x)^2 u_x\,dx.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по времени, тогда

$$\frac{1}{2}J + \frac{c_0^2}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{c_1^2}{2}\|w_{xx}\|_2^2 - E(0) = \frac{c_0^2}{2}\int_\Omega (w_x)^2 u_x\,dx, \tag{35}$$

где
$$E(0) = \frac{1}{2}J(0) + \frac{c_0^2}{2}\|u_{0x}\|_2^2 + \frac{c_1^2}{2}\|w_{0xx}\|_2^2 - \frac{c_0^2}{2}\int_\Omega (w_{0x})^2 u_{0x}\,dx.$$
После подстановки выражения для $(c_0^2/2)\int_\Omega (w_x)^2 u_x\,dx$ из (35) в (34) мы получим, что имеет место равенство
$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) - J(t) + c_0^2\|u_x\|_2^2 + c_1^2\|w_{xx}\|_2^2 = \frac{3}{2}J + \frac{3c_0^2}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{3c_1^2}{2}\|w_{xx}\|_2^2 - 3E(0),$$
из которого сразу же выводим неравенство
$$\frac{1}{2}\Phi'' - \frac{5}{2}J + 3E(0) \geqslant 0.$$
Отсюда с учетом (33) мы получаем искомое дифференциальное неравенство:
$$\Phi\Phi'' - \frac{5}{4}(\Phi')^2 + 6E(0)\Phi \geqslant 0.$$
Сравнивая это неравенство с неравенством (5), приходим к выводу, что
$$\alpha = \frac{5}{4}, \qquad \beta = 6E(0), \qquad \frac{2\beta}{2\alpha - 1} = 8E(0).$$
Таким образом, опираясь на теорему 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть найдется такое $T > 0$, что при $t \in [0, T]$ существует классическое решение задачи (2), тогда при выполнении условий*
$$\big(\Phi'(0)\big)^2 > 8E(0)\Phi(0) > 0, \qquad E(0) > 0, \qquad \Phi'(0) > 0 \tag{36}$$
имеет место неравенство $\Phi(t) \geqslant \big(\Phi^{-1/4}(0) - At\big)^{-1/4}$, т.е. время T не может быть сколь угодно большим, $T \leqslant \Phi^{-1/4}(0)A^{-1}$, где
$$\Phi(t) = \int_\Omega \big(|u|^2 + |w|^2\big)\,dx, \qquad \Phi'(0) = 2\int_\Omega (u_0 u_1 + w_0 w_1)\,dx,$$
$$A^2 = \frac{1}{16}\Phi^{-5/2}(0)\big[\big(\Phi'(0)\big)^2 - 8E(0)\Phi(0)\big].$$

Как всегда, мы должны доказать совместность полученных достаточных условий (36). Выберем начальные функции $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ и $w_0(x) \in \mathbb{C}^{(4)}(\overline{\Omega})$ настолько “большими”, чтобы было выполнено неравенство
$$\frac{c_0^2}{2}\|u_{0x}\|_2^2 + \frac{c_1^2}{2}\|w_{0xx}\|_2^2 < \frac{c_0^2}{2}\int_\Omega (w_{0x})^2 u_{0x}\,dx. \tag{37}$$
Такие функции, очевидно, существуют. Теперь при фиксированных функциях u_0 и w_0 выберем функции u_1 и w_1 следующим образом: $u_1 = \lambda u_0$, $w_1 = \lambda w_0$, где $\lambda > 0$ настолько велико, что
$$E(0) = \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega \big(|u_0|^2 + |w_0|^2\big)\,dx + \frac{c_0^2}{2}\|u_{0x}\|_2^2 + \\ + \frac{c_1^2}{2}\|w_{0xx}\|_2^2 - \frac{c_0^2}{2}\int_\Omega (w_{0x})^2 u_{0x}\,dx > 0.$$

Заметим, что

$$\big(\Phi'(0)\big)^2 = 4\bigg(\int_\Omega (u_0u_1 + w_0w_1)\,dx\bigg)^2 = 4\lambda^2\bigg(\int_\Omega \big(|u_0|^2 + |w_0|^2\big)\,dx\bigg)^2.$$

Теперь условие (36) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\big(\Phi'(0)\big)^2 = 4\bigg(\int_\Omega (u_0u_1 + w_0w_1)\,dx\bigg)^2 = 4\lambda^2\bigg(\int_\Omega \big(|u_0|^2 + |w_0|^2\big)\,dx\bigg)^2 > \\ > 8E(0)\Phi(0) = 4\lambda^2\bigg(\int_\Omega \big(|u_0|^2 + |w_0|^2\big)\,dx\bigg)^2 + \\ + 8\Phi(0)\bigg(\frac{c_0^2}{2}\|u_{0x}\|_2^2 + \frac{c_1^2}{2}\|w_{0xx}\|_2^2 - \frac{c_0^2}{2}\int_\Omega (w_{0x})^2 u_{0x}\,dx\bigg).\end{aligned}$$

Последнее неравенство, очевидно, выполнено при условии (37). Таким образом, совместность условий (36) доказана.

3. Теперь мы приступим к изучению задачи (3). Прежде всего заметим, что можно привести это уравнение к более удобному для дальнейшего использования виду. Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$w_{xxxx}(w_{xx})^2 + 2w_{xx}(w_{xxx})^2 = \frac{\partial}{\partial x}\big(w_{xxx}(w_{xx})^2\big) = \frac{1}{3}\big((w_{xx})^3\big)_{xx}.$$

С учетом этих выкладок мы рассмотрим более общую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = \Delta(\Delta u)^3, \qquad u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{38}$$

где уравнение рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\gamma}$ при $\gamma \in (0,1]$.

Определение 4. *Классическим решением* задачи (38) назовем функцию $u(x)(t)$, удовлетворяющую включению

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}\big([0,T];\mathbb{C}(\overline{\Omega})\big) \cap \mathbb{C}\big([0,T];\mathbb{C}^{(4)}(\overline{\Omega})\big),$$

а также исходным начальным и граничным условиям, понимаемым в поточечном смысле.

Теперь предположим, что найдется такое $T > 0$, что существует классическое решение задачи (38). Умножим обе части равенства (38) на u, в результате получим энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi - J + \|\Delta u\|_2^2 = \|\Delta u\|_4^4, \tag{39}$$

где теперь

$$\Phi(t) \equiv \int_\Omega |u|^2\,dx, \qquad J \equiv \int_\Omega |u'|^2\,dx.$$

Умножим обе части уравнения (38) на u' и получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J(t)+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2\right)=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|_4^4.$$

Теперь проинтегрируем обе части последнего равенства по t: имеем

$$\frac{1}{2}J(t)+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2-E(0)=\frac{1}{4}\|\Delta u\|_4^4, \tag{40}$$

где

$$E(0)=\frac{1}{2}J(0)+\frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2-\frac{1}{4}\|\Delta u_0\|_4^4.$$

Из (40) получаем уравнение $2J(t)+2\|\Delta u\|_2^2-4E(0)=\|\Delta u\|_4^4$, с помощью которого, подставляя выражение для $\|\Delta u\|_4^4$ в равенство (39), выводим следующее соотношение:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi-J+\|\Delta u\|_2^2=2J(t)+2\|\Delta u\|_2^2-4E(0).$$

Из него немедленно получаем неравенство $\Phi''/2-3J+4E(0)\geqslant 0$. С другой стороны, справедливо неравенство (33). Таким образом, приходим к искомому неравенству:

$$\Phi\Phi''-\frac{3}{2}(\Phi')^2+8E(0)\Phi\geqslant 0.$$

Сравнивая данное дифференциальное неравенство с дифференциальным неравенством (5), заключаем, что

$$\alpha=\frac{3}{2},\qquad \beta=8E(0),\qquad \frac{2\beta}{2\alpha-1}=8E(0).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть найдется такое $T>0$, что при $t\in[0,T]$ существует классическое решение задачи* (3), *тогда при выполнении условий* (36) *имеет место неравенство $\Phi(t)\geqslant\big(\Phi^{-1/2}(0)-At\big)^{-1/2}$, т. е. время T не может быть сколь угодно большим, $T\leqslant\Phi^{-1/2}(0)A^{-1}$, где*

$$\Phi(t)=\int_\Omega|u|^2\,dx,\qquad \Phi'(0)=2\int_\Omega u_0u_1\,dx,\qquad A^2=\frac{1}{4}\Phi^{-3}(0)\big[\big(\Phi'(0)\big)^2-8E(0)\Phi(0)\big].$$

Доказательство совместности условий (36) в случае задачи (2) проводится так же, как и ранее.

4. Рассмотрим задачу (4).

Определение 5. *Классическим решением* задачи (4) назовем функцию $u(x)(t)$, удовлетворяющую включению

$$u(x)(t)\in\mathbb{C}\big([0,T];\mathbb{C}^{(4)}(\overline{\Omega})\big)\cap\mathbb{C}^{(2)}\big([0,T];\mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})\big),$$

а также исходным начальным и граничным условиям, понимаемым в поточечном смысле.

Предположим, что найдется такое $T > 0$, при котором существует классическое решение задачи (4). Умножим обе части уравнения (4) на $u(x)(t)$ и получим энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) - J(t) + \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 = \int_\Omega (u_x)^3\,dx, \tag{41}$$

где

$$\Phi(t) \equiv \int_\Omega \bigl(|u_x|^2 + |u|^2\bigr)\,dx, \qquad J(t) \equiv \int_\Omega \bigl(|u_x'|^2 + |u'|^2\bigr)\,dx.$$

Теперь умножим обе части равенства (4) на $u'(x)(t)$ и после интегрирования по частям получим соотношение

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J(t) + \frac{1}{2}\|u_{xx}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|_2^2\right] = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_x)^3\,dx,$$

интегрируя которое по t, будем иметь

$$\frac{1}{2}J(t) + \frac{1}{2}\|u_{xx}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|_2^2 - E(0) = \frac{1}{3}\int_\Omega (u_x)^3\,dx, \tag{42}$$

где

$$E(0) \equiv \frac{1}{2}J(0) + \frac{1}{2}\|u_{0xx}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{0x}\|_2^2 - \frac{1}{3}\int_\Omega (u_{0x})^3\,dx.$$

Из равенства (42) следует, что

$$\frac{3}{2}J(t) + \frac{3}{2}\|u_{xx}\|_2^2 + \frac{3}{2}\|u_x\|_2^2 - 3E(0) = \int_\Omega (u_x)^3\,dx, \tag{43}$$

откуда, подставляя выражение для $\int_\Omega (u_x)^3\,dx$ в (41), выводим уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) - J(t) + \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 = \frac{3}{2}J(t) + \frac{3}{2}\|u_{xx}\|_2^2 + \frac{3}{2}\|u_x\|_2^2 - 3E(0),$$

из которого вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) - \frac{5}{2}J(t) + 3E(0) \geqslant 0.$$

Отсюда с учетом уже неоднократно использовавшегося неравенства (33) мы получаем искомое неравенство:

$$\Phi\Phi'' - \frac{5}{4}(\Phi')^2 + 6E(0)\Phi \geqslant 0.$$

Сравнивая это дифференциальное неравенство с (5), приходим к выводу, что

$$\alpha = \frac{5}{4}, \qquad \beta = 6E(0), \qquad \frac{2\beta}{2\alpha - 1} = 8E(0).$$

Таким образом, с учетом теоремы 1 мы пришли к следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть найдется такое $T > 0$, что при $t \in [0, T]$ существует классическое решение задачи (4), тогда при выполнении условий (36) имеет место неравенство $\Phi(t) \geqslant \left(\Phi^{-1/2}(0) - At\right)^{-1/2}$, т. е. время T не может быть сколь угодно большим, $T \leqslant \Phi^{-1/4}(0)A^{-1}$, где*

$$\Phi(t) = \int_\Omega \left(|u|^2 + |u_x|^2\right) dx, \qquad \Phi'(0) = 2\int_\Omega (u_0 u_1 + u_{0x} u_{1x})\, dx,$$
$$A^2 = \frac{1}{16}\Phi^{-5/2}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - 8E(0)\Phi(0)\right].$$

Доказательство совместности условий (36) проводится так же, как и ранее для задачи (3).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011).

Список литературы

[1] K. Li, Q. Zhang, *J. Differ. Equations*, **146**:1 (1998), 5–21.

[2] В. И. Ерофеев, В. В. Кажаев, Н. П. Семерикова, *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*, Физматлит, М., 2002.

[3] Г. Каудерер, *Нелинейная механика*, ИЛ, М., 1961.

[4] Y. Wang, *IMA J. Appl. Math.*, **74**:3 (2009), 392–415.

[5] A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 15, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[6] H. A. Levine, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.

[7] H. A. Levine, P. Pucci, J. Serrin, *Contemp. Math.*, **208** (1997), 253–263.

[8] P. Pucci, J. Serrin, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **10**:2 (1997), 241–247.

[9] P. Pucci, J. Serrin, *J. Differ. Equations*, **150**:1 (1998), 203–214.

[10] B. Straughan, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48** (1975), 381–390.

[11] H. A. Levine, G. Todorova, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2003), 793–805.

[12] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, *Тр. МИАН*, **234** (2001), 3–383.

[13] S. I. Pohozaev, *Milan J. Math.*, **77**:1 (2009), 127–150.

[14] V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, *Blow-up, critical exponents and asymptotic spectra for nonlinear hyperbolic equations*, Preprint 00/10, Univ. of Bath, Bath, 2000.

[15] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.

[16] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.

[17] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **69** (1977), 77–102.

[18] T. Cazenave, A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **13**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1998.

[19] В. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.

[20] O. A. Lima, A. T. Lourêndo, A. O. Marinho, *Electron. J. Differ. Equations*, **130** (2006), 1–18.

[21] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

[22] Ю. А. Дубинский, *Матем. сб.*, **67(109)**:4 (1965), 609–642.

Поступила в редакцию 18.06.2011