

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

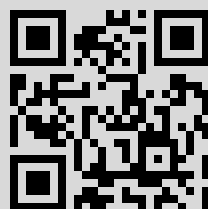
М. О. Корпусов, О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений с положительной энергией, *ТМФ*, 2012, том 171, номер 3, 355–369

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 13:37:50



© 2012 г.

М. О. Корпусов*

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Рассмотрена задача Дирихле для одной нелинейной системы уравнений, что является продолжением исследования нелинейных гиперболических уравнений и систем уравнений со сколь угодно большой положительной энергией. Для доказательства разрушения использован модифицированный метод Левина.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, обобщенные уравнения Клейна–Гордона, нелинейные гиперболические уравнения, нелинейные смешанные краевые задачи, теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для следующей нелинейной системы уравнений типа Клейна–Гордона–Фока:

$$\begin{aligned} u_{tt} + \mu u_t - a^2 \Delta u + m_1^2 u &= v^2 u, & u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ v_{tt} + \mu v_t - b^2 \Delta v + m_2^2 v &= u^2 v, & v|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & u'(x, 0) &= u_1(x), & v(x, 0) &= v_0(x), & v'(x, 0) &= v_1(x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mu \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$. Данная задача рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$.

Задача (1.1) при $\mu = 0$ впервые изучалась в работе [1]. Результаты о разрушении решения за конечное время были получены в работах [2]–[4]. В этих работах было ослаблено требование отрицательности начальной энергии. При этом во всех этих работах, как и в других работах, посвященных разрушению для гиперболических уравнений и систем уравнений, энергия является положительной, но вместе с этим условием на начальные функции налагаются два других основных условия, и представляется очень сложным понять, совместны они или нет. Более того, никто из авторов указанных работ такую проверку не проводил. Наконец, при любой фиксированной u_0 и при достаточно большой u_1 эти условия несовместны. Авторы

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: korpusov@gmail.com

упомянутых работ применяют классический метод “concavity” Левина. В настоящей работе мы используем модифицированный метод Левина, развитый в работе [5]. В результате вместо трех непроверяемых условий мы получаем всего два условия, которые легко проверяются на совместность.

Отметим, что существуют три основных метода исследования явления разрушения: энергетический метод Левина [6]–[12], метод нелинейной емкости Похожаева–Митидиери [13]–[15] и, наконец, метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [16], [17].

2. ОСНОВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Рассмотрим основное в настоящей работе дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad (2.1)$$

где $\Phi(t) \in C^{(2)}([0, T])$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(0) > 0$. Разделим обе части неравенства (2.1) на $\Phi^{1+\alpha}$ и после некоторых преобразований получим, что

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right)' + \gamma\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \beta\frac{1}{\Phi^\alpha} \geq 0,$$

откуда в свою очередь будем иметь

$$\frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \frac{\gamma}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})' + \beta\Phi^{-\alpha} \geq 0. \quad (2.2)$$

Введем обозначение $Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t)$. С учетом этого обозначения из (2.2) следует, что

$$Z'' + \gamma Z' - \beta(\alpha - 1)Z^{\alpha_1} \leq 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (2.3)$$

Введем новое обозначение $Y(t) = e^{\gamma t}Z(t)$, тогда на основе последнего неравенства можем записать

$$Y'' - \gamma Y' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}. \quad (2.4)$$

Заметим теперь, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$Y' = (\Phi^{1-\alpha}e^{\gamma t})' = \Phi^{-\alpha}(\alpha - 1)e^{\gamma t}\left(-\Phi'(t) + \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(t)\right). \quad (2.5)$$

Потребуем выполнения начального условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(0),$$

тогда найдется такое $t_0 > 0$, что для всех $t \in [0, t_0]$ будет иметь место неравенство

$$\Phi'(t) > \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi(t).$$

Отсюда с учетом соотношений (2.5) получим, что $Y'(t) < 0$ при $t \in [0, t_0)$. Поскольку $-\gamma Y'(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_0)$, из неравенства (2.4) вытекает следующее неравенство: при $t \in [0, t_0)$

$$Y'' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}. \quad (2.6)$$

Теперь умножим обе части неравенства (2.6) на Y' и получим для $t \in [0, t_0)$ неравенство

$$Y'Y'' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' \geq 0. \quad (2.7)$$

Теперь заметим, что

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}) + \delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} - \alpha_1 e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y',$$

откуда следует, что

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}) + \frac{1}{1 + \alpha_1} \delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}.$$

Подставим это соотношение в (2.7) и получим для $t \in [0, t_0)$ неравенство

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}) - \frac{\beta(\alpha - 1)\delta}{1 + \alpha_1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \geq 0,$$

из которого немедленно вытекает неравенство

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}) \geq 0.$$

Интегрируя его, имеем

$$(Y')^2 \geq A^2 + \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \geq A^2, \quad (2.8)$$

где

$$A^2 \equiv (Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} Y^{1+\alpha_1}(0).$$

Теперь потребуем выполнения условия $A^2 > 0$, которое после ряда преобразований принимает вид

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right] > 0. \quad (2.9)$$

Следовательно, условие $A^2 > 0$ эквивалентно условию

$$\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0).$$

Таким образом, используя неравенства (2.8) и (2.9), мы приходим к выводу, что $Y'(t) \leq -A < 0$, следовательно,

$$\Phi'(t_0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t_0).$$

Но тогда $Y'(t_0) < 0$. Применяв алгоритм продолжения по времени, получим, что $Y'(t) < 0$ для всех $t \in [0, T]$. Таким образом, мы имеем с учетом $Y'(t) \leq -A$, что $Y(t) \leq Y(0) - At$, следовательно, $\Phi^{1-\alpha}(t) \leq e^{-\gamma t}(\Phi^{1-\alpha}(0) - At)$, откуда

$$\Phi(t) \geq \frac{e^{\gamma t/(\alpha-1)}}{(\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{1/(\alpha-1)}}.$$

В результате мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$ и выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad \left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0),$$

причем $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(0) > 0$. Тогда время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство $T \leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1}$, где A задано в (2.9), при этом

$$\limsup_{t \uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty.$$

3. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слабым обобщенным решением задачи (1.1) назовем функции $u(x)(t)$ и $v(x)(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} u(x)(t), v(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ u'(x)(t), v'(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \\ u''(x)(t), v''(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

такие, что

$$\int_0^T dt \langle \mathbf{D}(\mathbf{w}), \mathbf{g} \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{g}(x)(t) \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (3.1)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а $\mathbf{D}(\mathbf{w}) = (D_1(u, v), D_2(v, u))$,

$$\begin{aligned} D_1(u, v) &= u_{tt} + \mu u_t - a^2 \Delta u + m_1^2 u - v^2 u, \\ D_2(v, u) &= v_{tt} + \mu v_t - b^2 \Delta v + m_2^2 v - u^2 v. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заметим, что точно так же, как и в работе [18], можно доказать, что равенство (3.1) эквивалентно равенству

$$\int_0^T dt \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{w}), \mathbf{f} \rangle = 0 \quad (3.3)$$

для всех $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и для всех $\phi(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$.

Для доказательства локальной разрешимости в слабом обобщенном смысле мы воспользуемся методом Галёркина в сочетании с методом компактности [19].

ШАГ 1. Постановка приближений по Галёркину.

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{w}_m), \mathbf{g}_k \rangle = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{w}_m = (u_m, v_m)$, $\mathbf{g}_k = (g_{1k}, g_{2k})$, $\{\mathbf{g}_k\}$ – базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, который для удобства мы выберем ортонормированным в пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)$, и $\mathbf{w}_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) \mathbf{g}_k$. В уравнениях (3.4)

$$\mathbf{D}(\mathbf{w}_m) = (D_1(u_m, v_m), D_2(v_m, u_m)),$$

а дифференциальные операторы D_1 и D_2 заданы в (3.2).

Добавим начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_m(x)(0) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) \mathbf{g}_k &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{w}_0 = (u_0, v_0) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\ \mathbf{w}'_m(x)(0) = \sum_{k=1}^m c'_{mk}(0) \mathbf{g}_k &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{w}_1 = (u_1, v_1) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.5)$$

ШАГ 2. Локальная разрешимость системы приближений по Галёркину

Систему уравнений (3.4) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{kj} (c''_{mj} + \mu c'_{mj}) + \sum_{j=1}^m \beta_{kj} c_{kj} = \sum_{j=1}^m \gamma_{kj} (c_m) c_{mj}, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{kj} &= \int_{\Omega} dx (\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_j), \\ \beta_{kj} &= \int_{\Omega} dx [a^2 (\nabla g_{1j}, \nabla g_{1k}) + b^2 (\nabla g_{2j}, \nabla g_{2k}) + m_1^2 g_{1j} g_{1k} + m_2^2 g_{2j} g_{2k}], \\ \gamma_{kj} &= \int_{\Omega} dx (v_m^2 g_{1k} g_{1j} + u_m^2 g_{2k} g_{2j}). \end{aligned}$$

В силу специального выбора базиса $\{\mathbf{g}_k\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)$ имеем $\alpha_{kj} = \delta_{kj}$. Из явного вида уравнений (3.6) мы получаем, что найдется такое $T_m > 0$, что существует единственное решение $c_{mk}(t) \in C^{(2)}([0, T_m])$ системы уравнений (3.4).

ШАГ 3. Априорные оценки.

Для вывода априорных оценок нам нужно, как обычно, умножить равенство (3.4) на $c'_{mj}(t)$ и просуммировать по $j = \overline{1, m}$: имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx (|u'_m|^2 + |v'_m|^2) + \mu \int_{\Omega} dx (|u'_m|^2 + |v'_m|^2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx (a^2 |\nabla u_m|^2 + b^2 |\nabla v_m|^2 + m_1^2 |u_m|^2 + m_2^2 |v_m|^2) = \\ &= \int_{\Omega} dx (v_m^2 u_m u'_m + u_m^2 v_m v'_m). \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx (|u'_m|^2 + |v'_m|^2) + \mu \int_0^t ds \int_{\Omega} dx (|u'_m|^2 + |v'_m|^2) + \\ & \quad + \int_{\Omega} dx (a^2 |\nabla u_m|^2 + b^2 |\nabla v_m|^2 + m_1^2 |u_m|^2 + m_2^2 |v_m|^2) = \\ & = \int_0^t ds \int_{\Omega} dx (v_m^2 u_m u'_m + u_m^2 v_m v'_m) + E_m(0), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} E_m(0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx (|u_{1m}|^2 + |v_{1m}|^2) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx (a^2 |\nabla u_{0m}|^2 + b^2 |\nabla v_{0m}|^2 + m_1^2 |u_{0m}|^2 + m_2^2 |v_{0m}|^2). \end{aligned}$$

Очевидно, что в силу условий сходимости (3.5) $E_m(0) \leq d < +\infty$, где $d > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим отдельно правую часть равенства (3.7). Поскольку $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и, следовательно, имеет место непрерывное вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^6(\Omega)$, справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} dx |v_m|^2 |u_m| |u'_m| \leq \left(\int_{\Omega} dx |u'_m|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |v_m|^{2r_1} \right)^{1/r_1} \left(\int_{\Omega} dx |u_m|^{r_2} \right)^{1/r_2},$$

где

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1, \quad 2r_1 = 6, \quad r_2 = 6.$$

Продолжим последнее неравенство. Действительно,

$$\int_{\Omega} dx |v_m|^2 |u_m| |u'_m| \leq c_1 \left(\int_{\Omega} dx |u'_m|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |\nabla u_m|^2 \right)^{1/2} \int_{\Omega} dx |\nabla v_m|^2. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом мы приходим к следующему неравенству:

$$\int_{\Omega} dx |u_m|^2 |v_m| |v'_m| \leq c_1 \left(\int_{\Omega} dx |v'_m|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |\nabla v_m|^2 \right)^{1/2} \int_{\Omega} dx |\nabla u_m|^2. \quad (3.9)$$

Введем обозначение

$$\phi_m(t) = \int_{\Omega} dx (|u'_m|^2 + |v'_m|^2 + |\nabla u_m|^2 + |\nabla v_m|^2).$$

Тогда с учетом (3.8) и (3.9) из неравенства (3.7) вытекает, что

$$\phi_m(t) \leq d + c_2 \int_0^t ds \phi_m^2,$$

откуда в силу теоремы Гронуолла–Белмана–Бихари [20] мы получаем неравенство $\phi_m(t) \leq d(1 - c_2 t d)^{-1}$, на основе которого приходим к априорной оценке

$$\phi_m(t) \leq c_3(T) < +\infty \quad (3.10)$$

при условии, что $c_2 T d < 1$, причем $c_3(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь получим априорные оценки для u_m'' и v_m'' . С этой целью мы воспользуемся техникой работы [21]. Введем обозначение $V_m = \overline{\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}}$ для линейной оболочки системы функций $\{\mathbf{g}_k\}$ при $k = \overline{1, m}$. Введем проекционный оператор $\mathbb{P}_m: \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega) \mapsto V_m \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)$ такой, что

$$\mathbb{P}_m \mathbf{z} = \sum_{k=1}^m (\mathbf{z}, \mathbf{g}_k)_2 \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{z}(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (\mathbf{z}, \mathbf{g}_k)_2 = \int_{\Omega} dx (\mathbf{z}(x), \mathbf{g}_k(x)).$$

Тогда систему приближений (3.8) метода Галёркина можно переписать в следующем виде:

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{w}_m), \mathbb{P}_m \mathbf{z} \rangle = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{z} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Следовательно, $\mathbb{P}_m^* \mathbf{D}(\mathbf{w}_m) = 0$. Поскольку

$$\mathbf{w}_m'' = \sum_{k=1}^m c_{mk}'' \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{w}_m' = \sum_{k=1}^m c_{mk}' \mathbf{g}_k, \quad \mathbb{P}_m^* \mathbf{g}_k = \mathbb{P}_m \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k,$$

имеет место равенство

$$\mathbf{w}_m'' = -\mu \mathbf{w}_m' + \mathbb{P}_m^* (\mathbf{F}_1(\mathbf{w}_m) + \mathbf{F}_2(\mathbf{w}_m)), \quad (3.11)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{w}_m) = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}_m) + \mathbf{F}_2(\mathbf{w}_m)$,

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}_m) = (a^2 \triangle u_m - m_1^2 u_m, b^2 \triangle v_m - m_2^2 v_m)^t, \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{w}_m) = (v_m^2 u_m, u_m^2 v_m)^t.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_m &\in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \mathbb{P}_m^* &\in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов. Наконец, имеют место цепочки непрерывных и плотных вложений

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^4(\Omega) \otimes \mathbb{L}^4(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{L}^{4/3}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{4/3}(\Omega) \stackrel{\text{ds}}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

следовательно,

$$\mathbb{P}_m^* \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^{4/3}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{4/3}(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Таким образом, справедливы следующие априорные оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_m^* \mathbf{F}_1(\mathbf{w}_m)\|_{-1} &\leq c_6(T) < +\infty, \\ \|\mathbb{P}_m^* \mathbf{F}_2(\mathbf{w}_m)\|_{-1} &\leq c_7 \|\mathbf{F}_2(\mathbf{w}_m)\|_{4/3} \leq c_8 \|\mathbf{w}_m\|_1^3 \leq c_9(T) < +\infty, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{-1}$ и $\|\cdot\|_{4/3}$ – нормы соответствующих банаховых пространств $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и $\mathbb{L}^{4/3}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{4/3}(\Omega)$. Из соотношений (3.11), (3.12) получаем искомую априорную оценку

$$\|u_m''\|_{-1} \leq c_{10}(T) < +\infty. \quad (3.13)$$

ШАГ 4. Предельный переход.

Используя априорные оценки (3.10), (3.13), мы приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности $\{\mathbf{w}_m\}$ приближений метода Галёркина, что имеют место следующие предельные свойства:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{w} && \text{*-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \mathbf{w}_m' &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{w}' && \text{*-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)), \\ \mathbf{w}_m'' &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{w}'' && \text{*-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

где $\mathbf{w} = (u, v)$. Кроме того, из априорной оценки (3.10) вытекает, что справедливо равномерное по $m \in \mathbb{N}$ вложение $\{\mathbf{w}_m\} \subset \mathbf{H}^1(Q_T) = \mathbb{H}^1(Q_T) \otimes \mathbb{H}^1(Q_T)$, где $Q_T = (0, T) \otimes \Omega$. Поскольку имеет место компактное вложение $\mathbf{H}^1(Q_T) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)$, найдется такая подпоследовательность $\{\mathbf{w}_m\}$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_m &\rightarrow \mathbf{w} && \text{сильно в } \mathbb{L}^2(Q_T) \otimes \mathbb{L}^2(Q_T), \\ \mathbf{w}_m &\rightarrow \mathbf{w} && \text{для почти всех } (t, x) \in Q_T. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Введем обозначения $f_1(u, v) = u^2 v$, $f_2(u, v) = v^2 u$. В силу второго предельного перехода в (3.14), очевидно, имеем

$$\begin{aligned} f_1(u_m, v_m) &\rightarrow f_1(u, v), \\ f_2(u_m, v_m) &\rightarrow f_2(u, v) && \text{для почти всех } (t, x) \in Q_T. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx |f_1(u_m, v_m)|^{4/3} &\leq \int_{\Omega} dx |u_m|^{8/3} |v_m|^{4/3} \leq \\ &\leq \left(\int_{\Omega} dx |u_m|^{16/3} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |v_m|^{8/3} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c_{11} \|\nabla u_m\|_2^{8/3} \|\nabla v_m\|_2^{4/3} \leq c_{12}(T) < +\infty. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Аналогичным образом устанавливается оценка

$$\int_{\Omega} dx |f_2(u_m, v_m)|^{4/3} \leq c_{13}(T) < +\infty. \quad (3.17)$$

Итак, из соотношений (3.15)–(3.17) в силу леммы Лионса [19] вытекает, что

$$f_1(u_m, v_m) \rightharpoonup f_1(u, v), \quad f_2(u_m, v_m) \rightharpoonup f_2(u, v) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^{4/3}(Q_T).$$

Теперь мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в равенстве

$$\int_0^T dt \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{w}_m), \mathbf{g}_k \rangle = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

получим

$$\int_0^T dt \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{w}), \mathbf{g}_k \rangle = 0, \quad k = \overline{1, +\infty}.$$

Таким образом, мы доказали существование функции $\mathbf{w}(x)(t)$, удовлетворяющей равенству (3.3) и, следовательно, равенству (3.1) в силу их эквивалентности.

ШАГ 5. Единственность.

Воспользуемся классической схемой, изложенной в работе [19]. Предположим, что существуют два слабых обобщенных решения задачи (1.1): $\mathbf{w}^1 = (u^1, v^1)$ и $\mathbf{w}^2 = (u^2, v^2)$. Введем функции

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2, \quad \mathbf{z}(t) = (z^1(t), z^2(t)) = \int_0^t d\sigma \mathbf{w}(\sigma), \\ \psi(t) &= (\psi^1(t), \psi^2(t)) = \begin{cases} -\int_t^s d\sigma \mathbf{w}(\sigma) & \text{при } t \leq s, \\ 0 & \text{при } t > s. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда при $t \leq s$ имеют место равенства $\psi(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(s)$, $\psi'(t) = \mathbf{w}(t)$, $\psi(0) = -\mathbf{z}(s)$ и $\psi(s) = 0$. Теперь положим в равенстве (3.1) $\mathbf{g} = \psi(t)$ и после интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^s dt (\mathbf{w}', \psi')_2 - \mu \int_0^s dt (\mathbf{w}, \mathbf{w})_2 + \int_0^s dt \int_{\Omega} dx [a^2(\nabla w^1, \nabla \psi^1) + b^2(\nabla w^2, \nabla \psi^2)] + \\ & + \int_0^s dt \int_{\Omega} dx (m_1^2 w^1 \psi^1 + m_2^2 w^2 \psi^2) = \int_0^s dt \int_{\Omega} dx [(v^1)^2 u^1 - (v^2)^2 u^2] \psi^1 + \\ & + \int_0^s dt \int_{\Omega} dx [(u^1)^2 v^1 - (u^2)^2 v^2] \psi^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Преобразуем слагаемые в этом равенстве. Прежде всего,

$$- \int_0^s dt (\mathbf{w}', \psi')_2 = - \int_0^s dt (\mathbf{w}', \mathbf{w})_2 = -\frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|_2^2(s). \quad (3.19)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^s dt \int_{\Omega} dx [a^2(\nabla w^1, \nabla \psi^1) + b^2(\nabla w^2, \nabla \psi^2)] = \\
 & = \int_0^s dt \int_{\Omega} dx [a^2(\nabla \psi^{1'}, \nabla \psi^1) + b^2(\nabla \psi^{2'}, \nabla \psi^2)] = \\
 & = - \int_{\Omega} ds [a^2 |\nabla z^1(s)|^2 + b^2 |\nabla z^2(s)|^2], \tag{3.20} \\
 & \int_0^s dt \int_{\Omega} dx (m_1^2 w^1 \psi^1 + m_2^2 w^2 \psi^2) = \\
 & = - \int_{\Omega} ds [m_1^2 |z^1(s)|^2 + m_2^2 |z^2(s)|^2].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим оставшиеся два слагаемых в правой части равенства (3.18). Имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\Omega} dx [(v^1)^2 u^1 - (v^2)^2 u^2] \psi^1 \right| \leq \int_{\Omega} dx |\psi^1| |w^1| |v^1|^2 + \int_{\Omega} dx |\psi^1| |u^2| |v^1 + v^2| |w^1| \leq \\
 & \leq \left(\int_{\Omega} dx |\psi^1|^6 \right)^{1/6} \left(\int_{\Omega} dx |v^1|^6 \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} dx |w^1|^2 \right)^{1/2} + \\
 & + \left(\int_{\Omega} dx |\psi^1|^6 \right)^{1/6} \left(\int_{\Omega} dx |u^2|^3 |v^1 + v^2|^3 \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} dx |w^1|^2 \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq c_{11}(T) \left(\int_{\Omega} dx |\psi^1|^6 \right)^{1/6} \left(\int_{\Omega} dx |w^1|^2 \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq c_{12}(T) \|w^1\|_2(t) (\|\nabla z^1(s)\|_2 + \|\nabla z^1(t)\|_2). \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^s dt \int_{\Omega} dx [(u^1)^2 v^1 - (u^2)^2 v^2] \psi^2 \right| \leq \\
 & \leq c_{13}(T) \|w^2\|_2(t) (\|\nabla z^2(s)\|_2 + \|\nabla z^2(t)\|_2). \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 & \int_0^s dt \left| \int_{\Omega} dx [(v^1)^2 u^1 - (v^2)^2 u^2] \psi^1 \right| \leq \\
 & \leq c_{12}(T) \int_0^s dt \|w^1\|_2(t) (\|\nabla z^1(s)\|_2 + \|\nabla z^1(t)\|_2) \leq \\
 & \leq \frac{c_{12}}{2} \int_0^s dt (\|w^1\|_2^2(t) + \|\nabla z^1(t)\|_2^2) + c_{12} \int_0^s dt \|w^1\|_2(t) \|\nabla z^1(s)\|_2 \leq \\
 & \leq \frac{c_{12}}{2} \int_0^s dt (\|w^1\|_2^2(t) + \|\nabla z^1(t)\|_2^2) + \frac{1}{4} \|\nabla z^1(s)\|_2^2 + c_{14} \int_0^s dt \|w^1\|_2^2(t). \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом из неравенства (3.22) получим оценку

$$\begin{aligned} \int_0^s dt \left| \int_{\Omega} dx [(u^1)^2 v^1 - (u^2)^2 v^2] \psi^2 \right| &\leq \\ &\leq \frac{c_{13}}{2} \int_0^s dt (\|w^2\|_2^2(t) + \|\nabla z^2(t)\|_2^2) + \frac{1}{4} \|\nabla z^2(s)\|_2^2 + c_{15} \int_0^s dt \|w^2\|_2^2(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Положим

$$\Psi(t) = \|w^1\|_2^2(t) + \|\nabla z^1(t)\|_2^2 + \|w^2\|_2^2(t) + \|\nabla z^2(t)\|_2^2.$$

Тогда с учетом выражений (3.18)–(3.24) имеем неравенство

$$\Psi(s) \leq c_{16}(T) \int_0^s dt \Psi(t),$$

из которого и вытекает единственность слабого обобщенного решения.

Используя стандартный алгоритм продолжения решений по времени, приходим к выводу о справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых $(u_0, v_0) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и всех $(u_1, v_1) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)$ существует единственное слабое обобщенное решение $\mathbf{w}(x)(t)$ задачи (1.1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x)(t) &= (u(x)(t), v(x)(t)) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \mathbf{w}'(x)(t) &= (u'(x)(t), v'(x)(t)) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)), \\ \mathbf{w}''(x)(t) &= (u''(x)(t), v''(x)(t)) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

при некотором $T_0 > 0$ и всех $T \in (0, T_0)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} (\|u'\|_2^2(t) + \|v'\|_2^2(t) + \|\nabla u\|_2^2(t) + \|\nabla v\|_2^2(t)) = +\infty. \quad (3.25)$$

4. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Отметим, что гладкость построенного в предыдущем разделе слабого обобщенного решения недостаточна для получения достаточных условий его разрушения. Однако приближения $\mathbf{w}_m(x)(t)$ метода Галёркина обладают такой гладкостью:

$$\mathbf{w}_m(x)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Умножим равенство (3.4) на $c_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. После интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_m(t)}{dt^2} - J_m(t) + \frac{\mu}{2} \frac{d\Phi_m(t)}{dt} + a^2 \|\nabla u_m\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_m\|_2^2 + \\ + m_1^2 \|u_m\|_2^2 + m_2^2 \|v_m\|_2^2 = 2 \int_{\Omega} dx u_m^2 v_m^2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\Phi_m(t) \equiv \int_{\Omega} dx (|u_m|^2 + |v_m|^2), \quad J_m(t) \equiv \int_{\Omega} dx (|u'_m|^2 + |v'_m|^2).$$

Теперь умножим равенство (3.4) на $c'_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. После интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_m(t) + \frac{a^2}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{b^2}{2} \|\nabla v_m\|_2^2 + \frac{m_1^2}{2} \|u_m\|_2^2 + \frac{m_2^2}{2} \|v_m\|_2^2 \right) + \\ + \mu J_m(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx v_m^2 u_m^2, \end{aligned}$$

из которого мы приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} J_m(t) + a^2 \|\nabla u_m\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_m\|_2^2 + \\ + m_1^2 \|u_m\|_2^2 + m_2^2 \|v_m\|_2^2 - E_m(0) \leq \int_{\Omega} dx v_m^2 u_m^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$E_m(0) \equiv J_m(0) + a^2 \|\nabla u_{0m}\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_{0m}\|_2^2 + m_1^2 \|u_{0m}\|_2^2 + m_2^2 \|v_{0m}\|_2^2 - \int_{\Omega} dx v_{0m}^2 u_{0m}^2.$$

Подставим оценку для $\int_{\Omega} dx v_m^2 u_m^2$ из неравенства (4.2) в равенство (4.1), получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_m(t)}{dt^2} - J_m(t) + \frac{\mu}{2} \frac{d\Phi_m(t)}{dt} + a^2 \|\nabla u_m\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_m\|_2^2 + \\ + m_1^2 \|u_m\|_2^2 + m_2^2 \|v_m\|_2^2 \geq 2J_m(t) + 2a^2 \|\nabla u_m\|_2^2 + \\ + 2b^2 \|\nabla v_m\|_2^2 + 2m_1^2 \|u_m\|_2^2 + 2m_2^2 \|v_m\|_2^2 - 2E_m(0), \end{aligned}$$

из которого сразу же вытекает следующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_m(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{2} \frac{d\Phi_m(t)}{dt} + 2E_m(0) \geq 3J_m(t).$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем $(\Phi'_m)^2 \leq 4\Phi_m J_m$. Из последних двух неравенств следует дифференциальное неравенство

$$\Phi_m \Phi_m'' - \frac{3}{2} (\Phi'_m)^2 + \mu \Phi_m \Phi'_m + 4E_m(0) \Phi_m \geq 0,$$

сравнивая которое с дифференциальным неравенством (2.1), мы заключаем, что $\alpha = 3/2$, $\beta = 4E_m(0)$, $\gamma = \mu$. Воспользуемся результатом теоремы 1. При выполнении условий

$$\Phi'_m(0) > 2\mu \Phi_m(0), \quad [\Phi'_m(0) - 2\mu \Phi_m(0)]^2 > 4E_m(0) \Phi_m(0), \quad E_m(0) > 0,$$

где $\Phi_m(0) > 0$, время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно $T \leq T_{\infty} \leq \Phi_m^{-1/2}(0) A_m^{-1}$, где

$$A_m^2 \equiv \frac{1}{4} \Phi_m^{-3}(0) [(\Phi'_m(0) - 2\mu \Phi_m(0))^2 - 4E_m(0) \Phi_m(0)].$$

При этом

$$\Phi_m(t) \geq \frac{e^{2\mu t}}{(\Phi_m^{-1/2}(0) - A_m t)^2}. \quad (4.3)$$

Теперь мы должны перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{\mathbf{w}_m\}$. Действительно, в силу предельных свойств (3.5)

$$\Phi_m(0) \rightarrow \Phi(0) = \int_{\Omega} dx (|u_0|^2 + |v_0|^2), \quad (4.4)$$

$$\Phi'_m(0) \rightarrow \Phi'(0) = 2 \int_{\Omega} dx (u_0 u_1 + v_0 v_1), \quad (4.5)$$

$$E_m(0) \rightarrow E(0) = \int_{\Omega} dx (|u_1|^2 + |v_1|^2) + a^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_0\|_2^2 + m_1^2 \|u_0\|_2^2 + m_2^2 \|v_0\|_2^2 - \int_{\Omega} dx v_0^2 u_0^2, \quad (4.6)$$

$$A_m^2 \rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \frac{(\Phi'(0) - 2\mu\Phi(0))^2 - 4E(0)\Phi(0)}{\Phi^3(0)}. \quad (4.7)$$

Используя технику работы [22], можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Для некоторой подпоследовательности $\{\mathbf{w}_m\}$ равномерно по $t \in [0, T]$ имеет место предельный переход*

$$\Phi_m(t) = \int_{\Omega} dx (|u_m|^2 + |v_m|^2) \rightarrow \int_{\Omega} dx (|u|^2 + |v|^2) = \Phi(t). \quad (4.8)$$

Теперь точно так же, как в работе [5], переходим к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (4.3) и получаем неравенство

$$\Phi(t) \geq \frac{e^{2\mu t}}{(\Phi^{-1/2}(0) - At)^2},$$

на основании которого заключаем, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть для $(u_0, v_0) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $(u_1, v_1) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)$ выполнены условия*

$$\Phi'(0) > 2\mu\Phi(0) + (4E(0)\Phi(0))^{1/2} > 0, \quad E(0) > 0, \quad (4.9)$$

где $\Phi(0)$, $\Phi'(0)$ и $E(0)$ заданы в (4.4), (4.5) и (4.6) соответственно. Тогда для времени $T_0 > 0$ из теоремы 2 имеет место оценка сверху $T_0 \leq \Phi^{-1/2}(0)A^{-1}$, где A определено в (4.7), и, таким образом, справедливо предельное равенство (3.25).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Докажем совместность условий (4.9). Прежде всего выберем $\mathbf{w}_0 = (u_0, v_0)$ настолько большой, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} dx v_0^2 u_0^2 > 2\|u_0\|_2^2 + 2\|v_0\|_2^2 + a^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_0\|_2^2 + m_1^2 \|u_0\|_2^2 + m_2^2 \|v_0\|_2^2. \quad (4.10)$$

Очевидно, что такие функции u_0, v_0 существуют. Теперь зафиксируем выбранную $\mathbf{w}_0$ и положим $\mathbf{w}_1 = \lambda(u_0, v_0)$ при $\lambda > \mu$. Заметим, что при таком выборе

$$\Phi'(0) - 2\mu\Phi(0) = 2(\lambda - \mu)\Phi(0) > 0. \quad (4.11)$$

Теперь выберем $\lambda > \mu$ настолько большим, чтобы было выполнено неравенство $E(0) > 0$, где теперь

$$E(0) = \lambda^2 \int_{\Omega} dx (|u_0|^2 + |v_0|^2) + a^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_0\|_2^2 + \\ + m_1^2 \|u_0\|_2^2 + m_2^2 \|v_0\|_2^2 - \int_{\Omega} dx v_0^2 u_0^2 > 0.$$

Заметим, что в силу неравенства (4.11) первое неравенство в (4.9) эквивалентно неравенству

$$(\Phi'(0) - 2\mu\Phi(0))^2 > 4E(0)\Phi(0). \quad (4.12)$$

Подставим сюда (4.11) и получим следующие равенства:

$$(\Phi'(0) - 2\mu\Phi(0))^2 = 4(\lambda - \mu)^2 \Phi^2(0) = (4\lambda^2 - 8\lambda\mu + 4\mu^2) \Phi^2(0), \\ 4E(0)\Phi(0) = 4\lambda^2 \Phi^2(0) + 4\Phi(0) \left[a^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_0\|_2^2 + \right. \\ \left. + m_1^2 \|u_0\|_2^2 + m_2^2 \|v_0\|_2^2 - \int_{\Omega} dx v_0^2 u_0^2 \right].$$

Подставляя эти соотношения в неравенство (4.12), мы после элементарных преобразований получим неравенство

$$\int_{\Omega} dx u_0^2 v_0^2 + \mu^2 \int_{\Omega} dx (|u_0|^2 + |v_0|^2) > \\ > 2\lambda\mu \int_{\Omega} dx (|u_0|^2 + |v_0|^2) + a^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_0\|_2^2 + m_1^2 \|u_0\|_2^2 + m_2^2 \|v_0\|_2^2.$$

Теперь для $\mu > 0$ положим $\lambda = 1/\mu$, а в случае $\mu = 0$ будем считать, что параметр $\lambda > 0$ достаточно велик. Ясно, что при достаточно малом $\mu > 0$ параметр λ будет достаточно большим, и условия, сформулированные выше, будут выполнены. После указанной подстановки мы получим неравенство

$$\int_{\Omega} dx u_0^2 v_0^2 + \mu^2 \int_{\Omega} dx (|u_0|^2 + |v_0|^2) > \\ > 2 \int_{\Omega} dx (|u_0|^2 + |v_0|^2) + a^2 \|\nabla u_0\|_2^2 + b^2 \|\nabla v_0\|_2^2 + m_1^2 \|u_0\|_2^2 + m_2^2 \|v_0\|_2^2,$$

которое, очевидно, верно при выполнении условия (4.10).

Итак, при достаточно малых $\mu \geq 0$ совместность условий (4.9) проверена.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011).

Список литературы

- [1] I. Segal, *Proc. Symp. Appl. Math. Amer. Math. Soc.*, **17** (1965), 210–226.
- [2] J. Zhang, *Math. Methods Appl. Sci.*, **26**:1 (2003), 11–25.
- [3] Y. Wang, *IMA J. Appl. Math.*, **74**:3 (2009), 392–415.
- [4] W. Liu, *Nonlinear Anal.*, **73**:1 (2010), 244–255.

- [5] A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, **15**, De Gruyter, Berlin, 2011.
- [6] H. A. Levine, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, 1–21.
- [7] H. A. Levine, P. Pucci, J. Serrin, “Some remarks on global nonexistence for nonautonomous abstract evolution equations”, *Harmonic Analysis and Nonlinear Differential Equations: A Volume in Honor of Victor L. Shapiro* (Riverside, CA, USA, November 3–5, 1995), Contemporary Mathematics, **208**, eds. M. L. Lapidus, L. H. Harper, A. J. Rumbos, AMS, Providence, RI, 1997, 253–263.
- [8] P. Pucci, J. Serrin, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **10**:2 (1997), 241–247.
- [9] P. Pucci, J. Serrin, *J. Diff. Equations*, **150**:1 (1998), 203–214.
- [10] B. Straughan, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48** (1975), 381–390.
- [11] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **69** (1977), 77–102.
- [12] H. A. Levine, G. Todorova, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129** (2003), 793–805.
- [13] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, ред. С. М. Никольский, Е. Ф. Мищенко, Наука, М., 2001.
- [14] S. I. Pohozaev, *Milan J. Math.*, **77**:1 (2009), 127–150.
- [15] V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, *Blow-up, critical exponents and asymptotic spectra for nonlinear hyperbolic equations*, Univ. of Bath, Bath, UK, 2000, Preprint 00/10.
- [16] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.
- [17] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [18] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 83–108.
- [19] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [20] В. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [21] O. A. Lima, A. T. Lourdoo, A. O. Marinho, *EJDE*, **130** (2006), 1–18.
- [22] Ю. А. Дубинский, *Матем. сб.*, **67(109)**:4 (1965), 609–642.

Поступила в редакцию 9.06.2011