М. О. Корпусов, Разрушение решений уравнения теплопроводности с двойной нелинейностью, *ТМФ*, 2012, том 172, номер 3, 339–343

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 172, № 3
сентябрь, 2012

 М. О. Корпусов*

# РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрена модельная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с двойной нелинейностью. Для доказательства разрушения решения использован модифицированный метод Левина.

**Ключевые слова:** разрушение за конечное время, нелинейная теплопроводность, нелинейные параболические уравнения с двойной нелинейностью, нелинейные смешанные краевые задачи.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу с двойной нелинейностью из теории горения [1]:

$$\frac{\partial \phi(x,u)}{\partial t} - \triangle(|u|^{q_1}u) = |u|^{q_2}u, \qquad x\in\Omega, \quad t>0, \tag{1}$$

$$\phi(x,u) = u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)|u|^{p_k-2}u, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где $q_1, q_2 > 0$ и $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ – это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega\in\mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta\in(0,1]$. Отметим, что уравнения с двойными нелинейностями изучались в работах [2]–[10]. Для исследования задачи мы используем модифицированный метод Левина, развитый в работе [11].

**Постановка задачи.** Предположим, что выполнены следующие условия для функции $\phi(x,u)$: коэффициенты $a_k(x)\in\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ и $a_k(x)\geqslant 0$ для почти всех $x\in\Omega$, а показатели $p_k>2$ для всех $k=\overline{1,n}$. Решение задачи (1)–(3) будем понимать в классическом смысле: $u(x)(t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}))$ при некотором $T>0$.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
E-mail: korpusov@gmail.com

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Выпишем основное дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma\Phi'\Phi + \beta\Phi \geqslant 0, \qquad \alpha > 1, \quad \beta \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0,$$

где $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T])$, $\Phi(t) \geqslant 0$, $\Phi(0) > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,T])$ *и выполнены условия*

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0), \qquad \left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0),$$

*причем* $\Phi(t) \geqslant 0$, $\Phi(0) > 0$. *Тогда время* $T > 0$ *не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство*

$$T \leqslant T_\infty \leqslant \Phi^{1-\alpha}(0)A^{-1}, \tag{4}$$

*где*

$$A^2 \equiv (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1}\Phi(0)\right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha-1}\Phi(0)\right]. \tag{5}$$

*При этом*

$$\limsup_{t\uparrow T_\infty}\Phi(t) = +\infty. \tag{6}$$

## 3. РАЗРУШЕНИЕ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Прежде всего предположим, что найдется некоторое $T > 0$, для которого существует классическое решение задачи (1)–(3). Введем ряд обозначений. Пусть

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{q_1+2}\int_0^t \|u\|_{q_1+2}^{q_1+2}\,ds + \sum_{k=1}^n \frac{p_k-1}{q_1+p_k}\int_0^t\int_\Omega a_k(x)|u|^{p_k+q_1}\,dx\,ds +$$
$$+ \frac{1}{(q_1+2)(q_1+p_{k_0})}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k-1}{(q_1+p_k)(q_1+p_{k_0})}\int_\Omega a_k(x)|u_0|^{p_k+q_1}\,dx,$$

где $p_{k_0} = \max\{p_1,\ldots,p_n\}$ и $\|u\|_q^q = \int_\Omega |u|^q\,dx$. Пусть также

$$J(t) \equiv \int_0^t\int_\Omega |u|^{q_1}(u')^2\,dx\,ds + \sum_{k=1}^n (p_k-1)\int_0^t\int_\Omega a_k(x)|u|^{q_1+p_k-2}(u')^2\,dx\,ds +$$
$$+ \frac{1}{q_1+2}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k-1}{q_1+p_k}\int_\Omega a_k(x)|u_0|^{p_k+q_1}\,dx.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для всех* $t \in [0,T]$ *имеет место следующее неравенство*:

$$(\Phi')^2 \leqslant (q_1 + p_{k_0})\Phi J. \tag{7}$$

Доказательство леммы основано на неравенстве Коши–Буняковского.

Приступим к выводу энергетических равенств. Сначала умножим обе части уравнения (1) на $|u|^{q_1}u$ и проинтегрируем по области $\Omega$. После интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \int_\Omega |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2\,dx = \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}. \tag{8}$$

Теперь умножим обе части уравнения (1) на $(|u|^{q_1}u)'$ и проинтегрируем по области $\Omega$, тогда после интегрирования по частям получим равенство

$$(q_1+1)\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2\,dx = \frac{q_1+1}{q_1+q_2+2}\frac{d}{dt}\|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2},$$

из которого после ряда преобразований имеем

$$(q_1+q_2+2)\frac{dJ}{dt} + \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2\,dx = \frac{d}{dt}\|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по времени и получим следующее равенство:

$$(q_1+q_2+2)J + \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}\int_\Omega |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2\,dx - E(0) = \|u\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} E(0) \equiv (q_1+q_2+2)\left(\frac{1}{q_1+2}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{p_k-1}{q_1+p_k}\int_\Omega a_k(x)|u_0|^{p_k+q_1}\,dx\right) + \\ + \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2}\int_\Omega |\nabla(|u_0|^{q_1}u_0)|^2\,dx - \|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Из соотношений (8) и (9) выводим равенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + E(0) = (q_1+q_2+2)J + \left(\frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2} - 1\right)\int_\Omega |\nabla(|u|^{q_1}u)|^2\,dx. \tag{11}$$

Теперь потребуем выполнения условия $q_2 \geqslant q_1$, тогда из (11) вытекает неравенство

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + E(0) \geqslant (q_1+q_2+2)J.$$

Отсюда и из неравенства (7) получаем искомое дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi \geqslant 0, \qquad \alpha = \frac{q_1 + q_2 + 2}{q_1 + p_{k_0}}, \quad \beta = E(0). \tag{12}$$

Потребуем выполнения условия $q_2 + 2 > p_{k_0}$, тогда, очевидно, $\alpha > 1$.

Рассмотрим случаи $E(0) > 0$ и $E(0) \leqslant 0$. Начнем со случая $E(0) > 0$, поскольку он более сложный. Воспользуемся теоремой 1 и получим, что при выполнении условий

$$\Phi(0) > 0, \qquad \Phi'(0) > \left(\frac{2\beta}{2\alpha - 1}\Phi(0)\right)^{1/2} > 0 \tag{13}$$

имеет место разрушение за конечное время. Рассмотрим подробнее второе неравенство в (13). После ряда преобразований оно приводится к следующему виду:

$$\|u_0\|_{q_1+q_2+2}^{q_1+q_2+2} > \frac{q_1+q_2+2}{2q_1+2} \int_\Omega |\nabla(|u_0|^{q_1}u_0)|^2\,dx + \\ + \frac{q_1+p_{k_0}}{2}\left(\frac{1}{q_1+2}\|u_0\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k - 1}{q_1+p_k}\int_\Omega a_k(x)|u_0|^{p_k+q_1}\,dx\right). \tag{14}$$

Случай $E(0) \leqslant 0$ значительно проще, и результат о разрушении решения получается из тех же формул теоремы 1, в которых формально нужно положить $\beta = 0$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены указанные в разделе 1 условия для функции $\phi(x,s)$, тогда при выполнении начального условия (14) и условий $q_2 \geqslant q_1$, $q_2+2 > p_{k_0}$ время $T > 0$ не может быть сколь угодно большим, а именно найдется такое $T_0$, что выполнено соотношение (4) и имеет место предельное равенство (6), где $A^2$ задано в (5), постоянная $\alpha$ – в (12), постоянная $\beta$ определяется как*

$$\beta = \begin{cases} E(0) & \text{при} \quad E(0) > 0, \\ 0 & \text{при} \quad E(0) \leqslant 0 \end{cases}$$

*и $E(0)$ задано формулой (10).*

Замечание 1. В точности так же, как и для задачи (1)–(3), можно получить результат о разрушении решения для следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial\phi(x,u)}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla(|u|^{q_1}u)|^{p-2}\nabla(|u|^{q_1}u)) = |u|^{q_2}u, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где, как и выше, $\phi(x,u)$ имеет вид (2), параметры $q_1, q_2 > 0$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи_м-2011).

## Список литературы


[1] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением для квазилинейных уравнений параболическиого типа*, Наука, М., 1987.

[2] А. С. Калашников, *УМН*, **42**:2(254) (1987), 135–176.

[3] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

[4] P. A. Raviart, *J. Functional Analysis*, **5**:2 (1970), 299–328.

[5] А. В. Иванов, *Алгебра и анализ*, **4**:6 (1992), 114–130.

[6] Г. И. Лаптев, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 83–112.

[7] Г. И. Лаптев, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 43–64.

[8] H. A. Levine, S. R. Park, J. Serrin, *J. Differential Equations*, **142**:1 (1998), 212–229.

[9] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, 2001.

[10] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **69** (1977), 77–102.

[11] A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, **15**, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.


Поступила в редакцию 23.12.2011