М. О. Корпусов, О единственности решения одной нелинейной задачи о собственных колебаниях, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2011, том 51, номер 4, 642–646

УДК 519.63

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ[1)]

© 2011 г. М. О. Корпусов

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т)

e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2009 г.

Предложено одно условие, имеющее естественный физический смысл, которое позволяет выделить единственное решение из бесконечного множества "геометрически" разных решений задачи о собственных электрических колебаниях в полупроводнике при учете сильной диссипации и источников свободных зарядов. Библ. 14.

Ключевые слова: нелинейная задача о собственных колебаниях в полупроводнике, выделение единственного решения задачи, нелинейные задачи на собственные значения.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследованию нелинейных задач на собственные значения посвящено большое количество работ. В этой связи отметим работы [1], [2] и [3], а также работы [4]. В частности, в [5] и [2] исследован вопрос о существовании счетного множества критических точек функционалов Эйлера, соответствующих исходной краевой задаче. Действительно, для функционалов, обладающих свойством четности ($\psi(-u) = \psi(u)$ относительно некоторого многообразия $\mathcal{V} \subset B$, где B – некоторое банахово пространство) существуют такие мощные методы как метод категорий Люстерника–Шнирельмана (см. [6]), метод рода множеств Красносельского (см. ([7]), которые позволяют доказать существование по меньшей мере счетного множества критических точек четного функционала относительно инвариантного многообразия $\mathcal{V}$. Подробное изложение теории категорий Люстерника–Шнирельмана и теории рода Красносельского можно найти в [8]. Отметим, кроме того, следующие классические работы [5], [9] и [10]. Основная проблема в применении вариационного подхода к исследованию нелинейных задач на собственные значения заключается в том, что исходный функционал Эйлера, соответствующий нелинейной краевой задаче, вообще говоря, не является ограниченным ни снизу, ни сверху. Поэтому приходится рассматривать этот функционал или другой функционал (тоже связанный с исходной задачей) относительно некоторого многообразия. Именно этому сопоставлению исходной нелинейной краевой задаче некоторой задачи на условный экстремум посвящен метод глобального расслоения С.И. Похожаева (см. [11]). С другой стороны, для неограниченных функционалов может быть применен метод, основанный на так называемой теореме о горном перевале. По поводу этого подхода интересующегося читателя отсылаем к работе [9].

Итак, рассмотрим ограниченный полупроводник, занимающий поверхностно односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что в полупроводнике имеются источники свободных зарядов и, кроме того, имеется сильная диссипация.

Справедлива следующая исходная система уравнений (см. [12]):

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = n, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \varepsilon \geq 1, \tag{1.1}$$

где $n(x) \geq 0$ – концентрация свободных зарядов. В силу поверхностной односвязности области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ существует потенциал $u(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega)$ электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla u.$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00376-а), а также Президентской программы поддержки молодых докторов наук МД-99.2009.1.

Кроме того, справедливо следующее уравнение:

$$\partial n/\partial t = \operatorname{div}(d(n)\nabla n) - Q(u), \quad Q(u) = \mu_0|u|^{p-1}, \quad d(n) = d_0 n^{p-2}, \tag{1.2}$$

при $d_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ и $p > 2$. Поскольку мы рассматриваем стационарный случай, то мы предполагаем, что

$$\partial n/\partial t = 0.$$

Тогда система уравнений (1.1), (1.2) легко редуцируется к следующему одному уравнению:

$$\Delta\left(|\Delta u|^{p-1}\right) + \lambda|u|^{p-1} = 0. \tag{1.3}$$

В качестве краевых условий исходной системы уравнений (1.1), (1.2) возьмем следующие:

$$n(x)|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = 0,$$

откуда сразу же приходим к граничным условиям Навье:

$$\Delta u|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.4}$$

Наконец, отметим, что по своему физическому смыслу величина $n = n(x)$ есть концентрация свободных зарядов, поэтому $n(x) \ge 0$, но, поскольку $n(x) = -\varepsilon G\Delta u(x)$, то приходим к дополнительному условию

$$\Delta u(x) \le 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{1.5}$$

Это дополнительное условие играет ключевую роль в дальнейших рассмотрениях.

2. СЛАБАЯ ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

В дальнейшем мы будем следовать результатам из [13].

Заметим, что в классе функций $u(x) \ge 0$ и $\Delta u(x) \le 0$ задача (1.3), (1.4) эквивалентна задаче

$$-\Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right) + \lambda|u|^{p-2}u = 0 \quad \text{при} \quad p > 2, \tag{2.1}$$

$$\Delta u|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2}$$

Теперь дадим определение слабого решения задачи (2.1), (2.2).

Определение 1. Функция $u(x) \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ называется *слабым решением задачи* (2.1), (2.2), если справедливо равенство

$$\begin{gathered}\langle D(u), w\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad w \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \\ D(u) \equiv -\Delta\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\right) + \lambda|u|^{p-2}u,\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B} \equiv \mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и

$$\mathbb{B}^* \equiv \left(\mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\right)^*.$$

Кроме того, должно быть выполнено условие (1.5).

Определение 2. Оператор $\operatorname{div}(\cdot)$ понимается в слабом смысле:

$$\langle \operatorname{div}\mathbf{v}, w\rangle = -\int_\Omega (\mathbf{v}, \nabla w)\,dx$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и всех $\mathbf{v} \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$.

Решать задачу (2.1), (2.2) мы будем сначала без требования выполнимости условия (1.5). Но после построения решений этой задачи просто выделим те решения, которые удовлетворяют этому условию.

Теперь дадим эквивалентную формулировку задачи (2.1), (2.2). Действительно, поскольку мы рассматриваем задачу (2.6) при условиях Навье (1.4), то можно ввести новую функцию согласно формуле

$$-\Delta u = v, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.4}$$

Второе же условие (условие Навье) просто означает, что введенная новая функция $v(x)$ обращается в ноль на границе $\partial\Omega$ рассматриваемой области Ω. Заметим, что если мы взяли бы вместо условий Навье условия Дирихле–Неймана, то ввести аналогичным образом как в (2.4) новую функцию уже не получилось бы, поскольку при дополнительном условии Неймана задача (2.4) имеет решение, только если $v = 0$. Введем в рассмотрение следующую степенную функцию:

$$\psi_p(s) \equiv |s|^{p-2}s \quad \text{при} \quad p > 1. \tag{2.5}$$

Ясно, что при условии $p > 1$ эта функция имеет обратную, которая имеет вид

$$\psi_p^{-1}(s) = \psi_{p'}(s) = |s|^{p'-2}s, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Таким образом, с учетом (2.4) и (2.5) из (2.1) получим следующее операторное равенство:

$$\psi_p(v) = \lambda\mathbb{K}\psi_p(\mathbb{K}v), \quad u = \mathbb{K}v, \tag{2.6}$$

где для оператора $\mathbb{K}$ выполнены свойства, собранные в следующей теореме.

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства:*

(i) (непрерывность) *существует такая постоянная* $c_p > 0$, *что*

$$\|\mathbb{K}f\|_{\mathbb{W}^{2,p}} \le c_p\|f\|_{\mathbb{L}^p}$$

справедливо для всех $p \in (1, \infty)$ *и всех* $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$;

(ii) (непрерывность) *для заданного* $k \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$, *существует такая постоянная* $c_{p,k} > 0$, *что*

$$\|\mathbb{K}f\|_{\mathbb{W}^{k+2,p}} \le c_{p,k}\|f\|_{\mathbb{W}^{k,p}}$$

справедливо для всех $p \in (1, \infty)$ *и* $f \in \mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$;

(iii) (симметричность) *имеет место равенство*

$$\int_\Omega \mathbb{K}uv\,dx = \int_\Omega u\mathbb{K}v\,dx,$$

справедливое для всех $u \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ *и* $v \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$ *при* $p \in (1, \infty)$;

(iv) (регулярность) *для заданного* $f \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ *имеем* $\mathbb{K}f \in \mathbb{C}^{1,\alpha}(\bar\Omega)$ *для всех* $\alpha \in (0,1)$, *более того, существует такая постоянная* $c_\alpha > 0$, *что*

$$\|\mathbb{K}f\|_{\mathbb{C}^{1,\alpha}} \le c_\alpha\|f\|_{\mathbb{L}^\infty};$$

(v) (регулярность и принцип максимума Хопфа) *пусть* $f \in \mathbb{C}(\bar\Omega)$ *и* $f \ge 0$, *тогда* $w = Kf \in C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$ *для всех* $\alpha \in (0,1)$ *и* w *удовлетворяет свойствам* $w > 0$ *в* Ω *и* $\partial w/\partial n < 0$ *на границе* $\partial\Omega$;

(vi) (упорядоченность) *если* $f, g \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ *и* $f \ge g$ *в* Ω, *то имеем* $\mathbb{K}f < \mathbb{K}g$ *в* Ω.

Ясно, что из (2.6) вытекает равенство

$$v = \lambda^{1/(p-1)}\psi_{p'}\left(\mathbb{K}\psi_p(\mathbb{K}v)\right), \quad u = \mathbb{K}v. \tag{2.7}$$

Для полноты изложения докажем, что если $v \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ есть решение задачи (2.11), то $u = \mathbb{K}v$ – слабое решение исходной задачи (2.1), (2.2). Прежде всего, заметим, что по построению

$$u|_{\partial\Omega} = \mathbb{K}v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тогда

$$\psi_p(\mathbb{K}v)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Рассмотрим функцию $w = \mathbb{K}\psi_p(\mathbb{K}v)$; эта функция является решением задачи

$$\Delta w = -\psi_p(\mathbb{K}v), \quad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Значит,

$$\mathbb{K}\psi_p(\mathbb{K}v)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Следовательно,

$$\psi_{p'}(\mathbb{K}\psi_p(\mathbb{K}v))|_{\partial\Omega}=0.$$

Откуда и из (2.7) вытекает, что

$$v|_{\partial\Omega}=0 \Rightarrow \Delta u|_{\partial\Omega}=0.$$

Таким образом, если $v(x)$ – решение задачи (2.11), то $u=\mathbb{K}v$ удовлетворяет граничным условиям Навье (1.4). Докажем теперь, что $u=\mathbb{K}v$ – решение задачи

$$-\Delta\psi_p(-\Delta u)=\lambda\psi_p(u).$$

Действительно, пусть $v\in\mathbb{L}^p(\Omega)$, тогда $\mathbb{K}v\in\mathbb{W}^{2,p}(\Omega)\cap\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, откуда следует, что $\psi_p(\mathbb{K}v)\in L^{p'}(\Omega)$, тогда $\mathbb{K}\psi_p(\mathbb{K}v)\in\mathbb{W}^{2,p'}(\Omega)\cap\mathbb{W}_0^{1,p'}(\Omega)$, отсюда и из (2.6) получаем $\psi_p(v)\in\mathbb{W}^{2,p'}(\Omega)\cap\mathbb{W}_0^{1,p'}(\Omega)$. Следовательно, имеет место следующее равенство, понимаемое в слабом смысле определения 1:

$$-\Delta\psi_p(-\Delta u)=\lambda\psi_p(u).$$

Таким образом, задачи (1.3), (1.4) и (2.6) эквивалентны. Следовательно, можно дать эквивалентное определение слабого решения задачи (1.3), (1.4).

Определение 3. Функцию $u(x)\in\mathbb{W}^{2,p}(\Omega)\cap\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ назовем *слабым решением* задачи (1.3), (1.4), если функция $v=-\Delta u$ есть решение операторного уравнения (2.11), понимаемого в смысле $\mathbb{L}^{p'}(\Omega)$. При этом $\lambda=\lambda_e$ называется *собственным значением* задачи (1.3), (1.4), если существует нетривиальное решение этой задачи при таком λ. Это решение будем обозначать символом u_e.

Введем функционалы

$$f_1(v)=\frac{1}{p}\int_\Omega|v|^p\,dx,\quad f_2(v)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\mathbb{K}v|^p\,dx. \tag{2.8}$$

Заметим, что задача (2.6) в слабом смысле эквивалентна задаче

$$\partial f_1(v)+\lambda\partial f_2(v)=\theta\in\mathbb{L}^{p'}(\Omega),$$

где символом $\partial\varphi$ обозначен субдифференциал функционала φ, который для выпуклых дифференцируемых по Фреше функционалов φ совпадает с производной Фреше. Функционалы $f_1(v)$ и $f_2(v)$, определенные на $\mathbb{L}^p(\Omega)$, удовлетворяют всем условиям работы [14]. Введем обозначения

$$R(v)=f_2(v)/f_1(v),\quad \lambda_1=\left[\sup\left\{R(v):v\in\mathbb{L}^p(\Omega),\,v\neq\vartheta\right\}\right]^{-1}.$$

Тогда справедлива следующая важная (см. [11])

Теорема 2. *Выполнены следующие свойства*:

(i) *задача* (2.6) *не имеет нетривиального решения при* $\lambda\in(0,\lambda_1)$;

(ii) *собственное значение* $\lambda_1>0$ *простое*, *т.е. множество собственных функций образует одномерное подпространство в* $\mathbb{L}^p(\Omega)$;

(iii) *задача* (2.6) *имеет положительное решение*, *тогда и только тогда*, *когда* $\lambda=\lambda_1$;

(iv) *собственное значение* λ_1 *является изолированным.*

Из утверждения (iii) этой теоремы вытекает следующий важный вывод, что множество решений задачи (2.1), (2.2) при дополнительном условии (1.5) состоит из пары (λ_1,u_1), где λ_1 и $u_1(x)\in\mathbb{W}^{2,p}(\Omega)\cap\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, которое определено с точностью до положительного множителя, причем

$$-v_1(x)=\Delta u_1(x)\le 0\quad\text{для почти всех}\quad x\in\Omega.$$

Но, с другой стороны,

$$u_1(x)=\mathbb{K}v_1(x)\ge 0$$

в силу неотрицательности $v_1(x)$ и свойства неотрицательности оператора $\mathbb{K}$. Следовательно, задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение в классе функций $\Delta u(x)\le 0$ и $u(x)\ge 0$, а поэтому единственное решение имеет и задача (1.3), (1.4). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Задача* (1.3), (1.4) *при условии* (1.5) *имеет нетривиальное единственное слабое решение* $(\lambda_1, u_1(x)) \in \mathbb{R}^1_+ \otimes \left(\mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)\right)$ *в том смысле, что найдется некоторое единственное* $\lambda = \lambda_1 > 0$ *и соответствующее одномерное множество собственных функций* $\{\mu u_1(x)\}$, *где* $\mu \in \mathbb{R}^1_+$ *и* $u_1(x) \geq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Похожаев С.И.* О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 1. С. 36.
2. *Похожаев С.И.* О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач // Матем. сб. 1970. Т. 82. № 2. С. 192.
3. *Kuzin I., Pohozaev S.* Entire solutions of semilinear elliptic equations. Nonlinear Differential Equations and their Applications, 33. Basel: Birkhauser, 1997.
4. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
5. *Климов В.С.* О функционалах с бесконечным числом критических значений // Матем. сб. 1976. Т. 100. № 1(5). С. 102–116.
6. *Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Гостехиздат, 1930.
7. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
8. *Drabek P., Milota Y.* Methods of nonlinear analisys. Applications to differential equations. Birkhauser, 2007.
9. *Ambrosetti A., Rabinowitz P.H.* Dual variational methods in critical point theory and applications // J. Different. Equat. 1973. V. 14. P. 349–381.
10. *Clark C.D.* A variant of the Lusternik–Schnirelman theory // Indiana Univ. Math. Jornal. 1972. V. 22. № 1. P. 65–74.
11. *Похожаев С.И.* О методе расслоения решения нелинейных краевых задач // Тр. МИАН СССР. 1990. Т. 192. С. 146–163.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. М.: Наука, 1992. Т. 8.
13. *Drabek P., Otani M.* Global bifurcation result for the p-biharmonic operator // EJDE. 2001. № 48. P. 1–19.
14. *Otani M., Idogawa T.* The first eigenvalues of some abstract elliptic operators // Funkcialaj Ekvacioj. 1995. № 38. P. 1–9.