

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

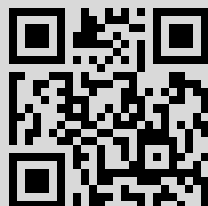
М. О. Корпусов, О разрушении ионно-звуковых волн
в плазме, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 1, 37–64

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 13:48:07



УДК 517.957

М. О. Корпусов

О разрушении ионно-звуковых волн в плазме

В работе рассмотрено одно модельное уравнение, описывающее ионно-звуковые волны в плазме при учете сильной нелинейной диссипации и нелинейных источников общего вида. Для соответствующей начально-краевой задачи в ограниченной трехмерной области с однородным условием Дирихле на границе этой области получены достаточные условия разрушения решения этой задачи. При этом получена оценка на время существования решения. Наконец, доказано, что для любых начальных данных из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ существует локальное во времени сильное обобщенное решение рассматриваемой задачи, т.е. доказано, что время разрушения решения задачи всегда больше нуля.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, нелинейные соболевские уравнения, нелинейные смешанные краевые задачи, волны в плазме.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследование достаточных условий возникновения эффекта разрушения решений разнообразных уравнений соболевского типа. При этом в работе [1] нами рассматривались исключительно нелинейные соболевские уравнения с первым порядком производной по времени. Отметим, что в этой работе мы систематически пользовались некоторым нетривиальным обобщением энергетического метода Х. А. Левина (см. [2]–[4]). Отметим, что еще в работе [1] этот метод мы распространили на случай нелинейного оператора по времени, т.е., например, для такой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \Delta_{p_1} u) + \Delta u - \Delta_{p_2} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ и

$$\Delta_p v \equiv \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) \quad \text{при } p > 2.$$

В настоящей работе мы распространим энергетический метод Х. А. Левина на случай следующего соболевского уравнения со второй производной по времени и с нелинейным эллиптическим оператором при производной по времени

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00376-а) и Программы Президента РФ поддержки молодых докторов наук (грант № МД-99.2009.1).

первого порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - u) + \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - g(x, u)) + \Delta u + f(x, u) = 0,$$

для которого метод Х. А. Левина, изложенный в работах [3] и [4], уже неприменим из-за наличия слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - g(x, u)).$$

Отметим, что существуют три основных метода исследования возникновения разрушения. Первый метод – это метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери (см. [5]), второй – это энергетический метод Х. А. Левина (см. [2]–[4]) и, наконец, третий метод – это метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова (см. [6], а также [7]).

§ 2. Постановка задачи

При рассмотрении квазистационарных процессов в плазме мы встречаемся со следующей зависимостью тензора диэлектрической проницаемости от частоты колебаний в среде (см., например, [8] и [9]):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}, \quad \Omega_i^2 \equiv \frac{4\pi N_i e^2}{m_i}, \quad (2.1)$$

где Ω_i – это так называемая *ленгмюровская* частота для ионов. Заметим, что выражение (2.1) выписано в смысле “частотного” представления и собственно оператор диэлектрической проницаемости в этом случае примет следующий вид:

$$\widehat{\varepsilon}(\cdot) = I(\cdot) + \Omega_i^2 \int_0^t d\tau(t - \tau)(\cdot), \quad (2.2)$$

где I – единичный оператор. Такой вид оператора диэлектрической проницаемости учитывает наличие временной дисперсии. Однако такой вид оператора диэлектрической проницаемости имеет место только в линейном приближении. Наша задача – рассмотреть соответствующее нелинейное обобщение.

Итак, общий вид уравнения, связывающего векторы индукции электрического поля $\mathbb{D}$ и напряженность электрического поля $\mathbb{E}$ в материальной среде, следующий:

$$\mathbb{D} = \mathbb{E} + 4\pi\mathbb{P}, \quad (2.3)$$

где $\mathbb{P}$ – вектор поляризации среды. Предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, в которой и расположена материальная среда, является поверхностно-односвязной. Поэтому в квазистационарном приближении имеем

$$\operatorname{rot} \mathbb{E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E} = -\nabla u, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Теперь учтем временную дисперсию среды вида (2.2) и нелинейность рассматриваемых в среде процессов:

$$\mathbb{P} = \varkappa_1 \int_0^t (t - \tau) [\mathbb{E}(\tau) + \mathbb{P}_1(\tau)] d\tau, \quad \varkappa_1 > 0, \quad (2.4)$$

где относительно $\mathbb{P}_1$ известно, что

$$\operatorname{div} \mathbb{P}_1 = -f(x, u), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad (2.5)$$

а u – введенный выше потенциал электрического поля. Здесь мы сделаем одно замечание. Величина $\operatorname{div} \mathbb{P}_1$ по своей физической сущности (см., например, [10]) есть распределение плотности связанных зарядов. Поэтому функция $f(x, u)$ и описывает их распределение. Более того, из условий, которые мы потребуем от функции $f(x, u)$, будет следовать, что функция $f(x, u)$ описывает распределение источников связанных зарядов.

Как известно, помимо связанных зарядов, которые не могут перемещаться на макроскопические расстояния, существуют еще свободные заряды. Часть уравнений, учитывающих в квазистационарном приближении наличие свободных зарядов, следующая:

$$\operatorname{div} \mathbb{D} = -4\pi n, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbb{J} + g(x, u), \quad (2.6)$$

где n – плотность свободных зарядов в среде, $\mathbb{J}$ – вектор плотности тока свободных зарядов, а величина $g(x, u)$, как будет следовать из дальнейшего, описывает распределение “стоков” свободных зарядов. Вектор плотности тока свободных зарядов $\mathbb{J}$ связан с напряженностью электрического поля следующим соотношением:

$$\mathbb{J} = \sigma \mathbb{E}, \quad \sigma > 0, \quad (2.7)$$

где σ – коэффициент проводимости среды.

Теперь наша задача – редуцировать систему уравнений (2.3)–(2.7) к одному уравнению в некоторой поверхностно-односвязной и ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Действительно, из уравнений (2.3)–(2.6) получим уравнение

$$\Delta u + 4\pi \varkappa_1 \int_0^t (t - \tau) [\Delta u(\tau) + f(x, u(\tau))] d\tau = 4\pi n, \quad (2.8)$$

а из уравнений (2.6) и (2.7) получим уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\sigma \Delta u + g(x, u). \quad (2.9)$$

Наконец, из уравнений (2.8) и (2.9) получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + 4\pi \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \Delta u - g(x, u)) + 4\pi \varkappa_1 \Delta u + 4\pi \varkappa_1 f(x, u) = 0,$$

которое в безразмерных переменных примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - g(x, u)) + \Delta u + f(x, u) = 0.$$

В дальнейшем мы будем исследовать несколько более общее уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u - u) + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - g(x, u)) + \Delta u + f(x, u) = 0, \quad (2.10)$$

которое естественно назвать уравнением *ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками и сильной нелинейной диссипацией*. Заметим, что линейное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u - u) + \Delta u = 0 \quad (2.11)$$

описывает линейные ионно-звуковые волны в “незамагниченной” плазме (см. [11], [12]). В частности, для уравнения (2.11) были поставлены и изучены разнообразные начально-краевые задачи (см., например, [13]). Мы же будем изучать сильную обобщенную разрешимость уравнения (2.10) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ при следующих условиях:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad (2.12)$$

где символом v' мы будем обозначать частную производную по переменной t , $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

§ 3. Разрушение сильного обобщенного решения

Прежде всего нам нужно ввести некоторые условия на функции $g(x, u)$ и $f(x, u)$. Напомним определение каратеодориевой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Каратеодориевой функцией, или функцией Каратеодори,* называется функция $f(x, s)$, которая для почти всех $x \in \Omega$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}$ и для всех $s \in \mathbb{R}$ измерима по $x \in \Omega$.

Предположим, что функция $g(x, u): \Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i)₁ функция $g(x, u)$ является каратеодориевой;
- (ii)₁ для функции $g(x, u)$ выполнены условия роста

$$|g(x, u)| \leq a_1(x) + c_1|u|^{q_1+1}, \quad a_1(x) \in \mathbb{L}_+^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega), \quad q_1 \in (0, 2], \quad (3.1)$$

для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, s)$ по переменной $s \in \mathbb{R}$ принадлежит $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, причем

$$|g'_u(x, u)| \leq a_3 + c_3|u|^{q_1}, \quad a_3, c_3 > 0, \quad (3.2)$$

$$g'_u(x, u) \geq -\lambda_1 \quad \text{для всех } u \in \mathbb{R} \text{ и почти всех } x \in \Omega, \quad (3.3)$$

где $\lambda_1 > 0$ – первое собственное значение оператора Лапласа в рассматриваемой ограниченной области Ω с однородным условием Дирихле на границе и, кроме того, функция $g'_u(x, u)$ каратеодориева;

- (iii)₁ функция $g(x, u)$ является локально по u липшиц-непрерывной, т.е. имеет место неравенство

$$\|g(x, u_1) - g(x, u_2)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leq \mu_1(R_1) \|u_1 - u_2\|_{q_1+2}, \quad (3.4)$$

$$R_1 = \max\{\|u_1\|_{q_1+2}, \|u_2\|_{q_1+2}\} \quad \forall u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega),$$

где $\|\cdot\|_r$ – норма пространства Лебега $\mathbb{L}^r(\Omega)$ при $r \geq 1$, а $\mu_1(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента.

Предположим, функция $f(x, u): \Omega \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i)₂ функция $f(x, u)$ является каратеодориевой;
(ii)₂ для функции $f(x, u)$ выполнено условие роста

$$|f(x, u)| \leq a_2(x) + c_2|u|^{q_2+1}, \quad a_2(x) \in \mathbb{L}_+^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega), \quad q_2 \in (0, 4]; \quad (3.5)$$

- (iii)₂ при некотором $\theta > 2$ для любой функции $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} v(x) f(x, v(x)) dx \geq \theta \int_{\Omega} dx \int_0^{v(x)} f(x, s) ds; \quad (3.6)$$

- (iv)₂ функция $f(x, u)$ является локально по u липшиц-непрерывной, т.е. имеет место неравенство

$$\|f(x, u_1) - f(x, u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leq \mu_2(R_2) \|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \quad (3.7)$$

$$R_2 = \max\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\} \quad \forall u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega),$$

где $\|\cdot\|_r$ – норма пространства Лебега $\mathbb{L}^r(\Omega)$ при $r \geq 1$, а $\mu_2(\cdot)$ – неубывающая функция своего аргумента.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что множество функций $f(x, u)$, удовлетворяющих условиям (i)₂–(iv)₂, и множество функций $g(x, u)$, удовлетворяющих условиям (i)₁–(iii)₁, не пусто. Действительно, например, функции

$$f(x, u) = \chi_2(x)|u|^{q_2}u, \quad f(x, u) = \chi_2(x)|u|^{q_2+1}$$

при $q_2 \in (0, 4]$ удовлетворяют указанным условиям, причем функция $\chi_2(x)$ – это характеристическая функция произвольной измеримой подобласти $\Omega_2 \subseteq \Omega$, т.е.

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_2, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

А в качестве функции $g(x, u)$ можно взять функцию $g(x, u) = \chi_1(x)|u|^{q_1}u$ при $q_1 \in (0, 2]$, где $\chi_1(x)$ – характеристическая функция измеримой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$, т.е.

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_1, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Таким образом, рассматривая задачу (2.10), (2.12) при функциях $f(x, u)$ и $g(x, u)$, удовлетворяющих условиям (i)₂–(iv)₂ и условиям (i)₁–(iii)₁, мы учитываем реальную физическую ситуацию, когда источники, описываемые функцией $f(x, u)$, и стоки, описываемые функцией $g(x, u)$, являются пространственно локализованными.

Теперь дадим определение сильного обобщенного решения задачи (2.10), (2.12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Сильным обобщенным решением задачи (2.10), (2.12) назовем функцию $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющую при некотором $T > 0$ равенству*

$$\begin{aligned} \langle D(u), w \rangle &= 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(0, x) = u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$D(u) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - u) + \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - g(x, u)) + \Delta u + f(x, u),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а символом v' мы обозначаем производную по времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Слабой производной функции $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ в смысле скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ называется следующая величина:*

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle \equiv \left\langle v, -\frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2, 3.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться данным определением слабой производной и говорить об интегрировании по “частям” в указанном смысле. В частности, стандартная ситуация следующая:

$$\begin{aligned} \langle \Delta v, w \rangle &\equiv -\langle \nabla v, \nabla w \rangle = - \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx, \\ v &\in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Теперь приступим к выводу необходимых для нас энергетических равенств. Пусть существует сильное обобщенное решение задачи (2.10), (2.12) при некотором $T > 0$, т.е. $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) \equiv \Phi[u](t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad (3.9)$$

$$J(t) \equiv J[u](t) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u'|^2 dx + \int_{\Omega} |u'|^2 dx. \quad (3.10)$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при некотором $T > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$(\Phi')^2(t) \leq 2\Phi(t)J(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то справедливо равенство

$$\Phi' = \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx + \int_{\Omega} u' u dx.$$

Справедливы также следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx \right| &\leq \|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2, \\ \left| \int_{\Omega} u' u dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |u'|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} (\Phi')^2 &\leq \left(\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 + \left(\int_{\Omega} |u'|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \|\nabla u'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} |u'|^2 dx \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\quad + 2\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 \left(\int_{\Omega} |u'|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|\nabla u'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} |u'|^2 dx \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\quad + \|\nabla u'\|_2^2 \int_{\Omega} |u|^2 dx + \|\nabla u\|_2^2 \int_{\Omega} |u'|^2 dx \\ &= \left(\|\nabla u'\|_2^2 + \int_{\Omega} |u'|^2 dx \right) \left(\|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right) = 2J(t)\Phi(t), \end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

при

$$a = \|\nabla u'\|_2 \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad b = \|\nabla u\|_2 \left(\int_{\Omega} |u'|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Приступим к выводу первого и второго энергетического равенств. Действительно, пусть

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

– сильное обобщенное решение задачи (2.10), (2.12), понимаемой в смысле определения 2 при некотором $T > 0$. Положим в равенстве (3.8) $w = u$; тогда после

интегрирования по “частям” в смысле определения 3 получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u) dx + \int_{\Omega} u'' u dx + \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx \\ + \int_{\Omega} g'_u(x, u) u' u dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f(x, u) u dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\int_{\Omega} (\nabla u'', \nabla u) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx - \|\nabla u'\|_2^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla u'\|_2^2, \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} u'' u dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u' u dx - \int_{\Omega} |u'|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} |u'|^2 dx. \quad (3.14)$$

Поэтому равенство (3.12) с учетом (3.13) и (3.14) и введенных обозначений (3.9) и (3.10) можно переписать в следующем виде:

$$\Phi'' - J + \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx + \int_{\Omega} g'_u(x, u) u' u dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f(x, u) u dx. \quad (3.15)$$

Имеет место оценка

$$\left| \int_{\Omega} (\nabla u', \nabla u) dx \right| \leq \|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} J + \frac{1}{\varepsilon} \Phi. \quad (3.16)$$

В силу условия роста (3.2) имеет место следующая цепочка оценок:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} g'_u(x, u) u' u dx \right| &\leq a_3 \int_{\Omega} |u u'| dx + c_3 \int_{\Omega} |u|^{q_1+1} |u'| dx \\ &\leq a_3 \|u'\|_2 \|u\|_2 + c_3 \|u'\|_2 \left(\int_{\Omega} |u|^{2(q_1+1)} dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отдельно рассмотрим выражение

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{2(q_1+1)} dx \right)^{1/2}.$$

Пусть $q = 2q_1 + 2$; тогда в силу свойства (3.1) и того, что $N = 3$, приходим к выводу, что имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega).$$

Поэтому существует такая постоянная $c_4 > 0$, что

$$\|w\|_q \leq c_4 \|\nabla w\|_2 \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Следовательно, для $q_1 \in (0, 2]$ имеет место неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{2(q_1+1)} dx \right)^{1/2} \leq c_4^{q_1+1} \|\nabla u\|_2^{q_1+1}. \quad (3.18)$$

Поэтому от цепочки неравенств (3.17) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} g'_u(x, u) u' u \, dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u'\|_2^2 + \frac{a_3^2}{2\varepsilon} \|u\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u'\|_2^2 + \frac{c_3^2}{2\varepsilon} c_4^{2(q_1+1)} \|\nabla u\|_2^{2(q_1+1)} \\ &\leq \varepsilon J + \frac{c_5}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_6}{\varepsilon} \Phi^{1+q_1}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$c_5 = a_3^2, \quad c_6 = 2^{q_1} c_3^2 c_4^{2(q_1+1)}.$$

Следовательно, из оценок (3.16) и (3.19) и равенства (3.15) получим неравенство

$$\Phi'' - J + \frac{3\varepsilon}{2} J + \frac{c_7}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_6}{\varepsilon} \Phi^{1+q_1} + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq \int_{\Omega} u f(x, u) \, dx, \quad (3.20)$$

где $c_7 = 1 + c_5$, $c_6 = 2^{q_1} c_3^2 c_4^{2(q_1+1)}$.

Теперь приступим к выводу второго энергетического равенства. Предварительно нам надо напомнить определение оператора Немыцкого и один вспомогательный результат. Введем следующий функционал:

$$\psi(v) \equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, v(x)) \, dx, \quad \mathcal{F}(x, v) = \int_0^v f(x, s) \, ds. \quad (3.21)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор $N_f(v) \equiv f(x, v)$, порожденный каратеодориевой функцией $f(x, v)$, называется *оператором Немыцкого*.

Справедлива следующая известная лемма (см., например, [14]).

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(x, v)$ удовлетворяет условиям (i)₂–(ii)₂. Тогда функционал

$$\psi(v) : \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

является дифференцируемым по Фреше, и его производная Фреше

$$\psi'_f(v) : \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega)$$

равна

$$\psi'_f(v) = N_f(v) \quad \forall v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$$

и почти всех $x \in \Omega$.

Положим теперь в равенстве (3.8) $w = u'$. Тогда после интегрирования по частям в смысле определения 3 получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + g'_u(x, u) |u'|^2] \, dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) \, dx. \quad (3.22)$$

Действительно, воспользуемся следующим утверждением (см., например, [15]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{F}: \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ и $\mathbb{G}: \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{B}_3$, причем оператор $\mathbb{F}$ дифференцируем по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а оператор $\mathbb{G}$ дифференцируем по Фреше в точке $\mathbb{F}(u)$. Тогда их композиция

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{K}'_f(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u). \quad (3.23)$$

Итак, в качестве оператора $\mathbb{F}$ возьмем $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а в качестве оператора $\mathbb{G}$ возьмем $\psi(v)$, который в силу леммы 2 дифференцируем по Фреше на банаховом пространстве $\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$. Теперь заметим, что в силу условия (ii)₂ имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega).$$

Поэтому если в теореме 1 мы положим $\mathbb{B}_1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{B}_2 = \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ и $\mathbb{B}_3 = \mathbb{R}$, то будет иметь место равенство (3.23) для функционала $\psi(v)$, определенного формулой (3.21):

$$\frac{d}{dt}\psi(v) = \int_{\Omega} v' f(x, v) dx \quad \forall v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)). \quad (3.24)$$

Заметим, что в силу условия (3.3) из свойства (ii)₂ получаем следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + g'_u(x, u)|u'|^2] dx \geq 0. \quad (3.25)$$

Действительно, поскольку по предположению $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, имеем $u' \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, и поэтому в силу неравенства Фридрихса имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} [|\nabla u'|^2 + g'_u(x, u)|u'|^2] dx \geq \int_{\Omega} [g'_u(x, u) + \lambda_1]|u'|^2 dx \geq 0.$$

Тем самым, из равенства (3.22) и (3.25) получим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) dx,$$

из которого после интегрирования по t получим неравенство

$$E(t) \geq E(0), \quad E(t) \equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) dx - \frac{1}{2}J - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (3.26)$$

Потребуем, чтобы было выполнено условие

$$E(0) \equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \geq 0. \quad (3.27)$$

Тогда из неравенства (3.26) получим неравенство

$$E(t) \equiv \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u) dx - \frac{1}{2}J - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0. \quad (3.28)$$

Теперь воспользуемся условием (iii)₂ и тогда из (3.28) получим неравенство

$$\int_{\Omega} u(x)f(x, u) dx - \frac{\theta}{2}J - \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0 \quad \text{при } \theta > 2. \quad (3.29)$$

Тогда из (3.20) и (3.29) получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \Phi'' - \left(1 + \frac{\theta}{2}\right)J + \frac{3\varepsilon}{2}J + \frac{c_7}{\varepsilon}\Phi + \frac{c_6}{\varepsilon}\Phi^{1+q_1} + \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ \geq \int_{\Omega} u(x)f(x, u) dx - \frac{\theta}{2}J - \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\theta > 2$, то из последнего неравенства получим неравенство

$$\left(1 + \frac{\theta}{2} - \frac{3\varepsilon}{2}\right)J \leq \Phi'' + \frac{c_7}{\varepsilon}\Phi + \frac{c_6}{\varepsilon}\Phi^{1+q_1} \quad \text{при } \theta > 2. \quad (3.30)$$

Теперь потребуем, чтобы $\varepsilon > 0$ удовлетворяло неравенству

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta}{2} - \frac{3\varepsilon}{2}\right) > 1 \implies \varepsilon \in \left(0, \frac{\theta - 2}{3}\right) \quad \text{при } \theta > 2.$$

Из неравенств (3.11) и (3.30) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному неравенству второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma\Phi^{2+q_1} \geq 0, \quad (3.31)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta}{2} - \frac{3\varepsilon}{2}\right), \quad \beta = \frac{c_7}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{c_6}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{\theta - 2}{3}\right), \quad \theta > 2.$$

Введем новую функцию

$$\Psi = \Phi^{1-\alpha}. \quad (3.32)$$

Разделим обе части неравенства (3.31) на $\Phi^{1+\alpha} \geq 0$ (по определению (3.9)); тогда получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\Phi''}{\Phi^{\alpha}} - \frac{\alpha(\Phi')^2}{\Phi^{1+\alpha}} + \beta\Phi^{1-\alpha} + \gamma\Phi^{1+q_1-\alpha} &\geq 0 \\ \implies \frac{d}{dt} \left[\frac{\Phi'}{\Phi^{\alpha}} \right] + \beta\Phi^{1-\alpha} + \gamma\Phi^{1+q_1-\alpha} &\geq 0 \\ \implies \frac{1}{1-\alpha} \frac{d^2}{dt^2} \Phi^{1-\alpha} + \beta\Phi^{1-\alpha} + \gamma\Phi^{1+q_1-\alpha} &\geq 0, \end{aligned}$$

откуда с учетом введенного обозначения (3.32) получим неравенство

$$\frac{1}{1-\alpha} \Psi'' + \beta\Psi + \gamma\Psi^{(1+q_1-\alpha)/(1-\alpha)} \geq 0. \quad (3.33)$$

Теперь сделаем еще одно предположение относительно начальных данных:

$$\Phi'(0) = \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} u_1 u_0 dx > 0. \quad (3.34)$$

Поскольку по предположению $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T])$. Значит, найдется такой момент времени $t_1 > 0$, что

$$\Phi'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.35)$$

Теперь заметим, что в силу определения (3.32) функции $\Psi(t)$ имеет место выражение

$$\Psi' = (1 - \alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi', \quad (3.36)$$

из которого в силу (3.35), поскольку $\alpha > 1$, получим

$$\Psi'(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.37)$$

Тогда, умножая (3.33) на Ψ' , получим неравенство

$$\frac{1}{1 - \alpha} \Psi' \Psi'' + \beta \Psi' \Psi + \gamma \Psi' \Psi^{(1+q_1-\alpha)/(1-\alpha)} \leq 0 \quad \forall t \in [0, t_1],$$

из которого получим неравенство

$$\Psi' \Psi'' \geq \beta(\alpha - 1) \Psi' \Psi + \gamma(\alpha - 1) \Psi' \Psi^{(1+q_1-\alpha)/(1-\alpha)} \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Отсюда получим неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Psi')^2 \geq \frac{\beta(\alpha - 1)}{2} \frac{d}{dt} \Psi^2 + \frac{\gamma(\alpha - 1)}{\delta} \frac{d}{dt} \Psi^\delta, \quad (3.38)$$

где

$$\delta = 1 + \frac{1 + q_1 - \alpha}{1 - \alpha}.$$

Рассмотрим условие $\delta > 0$. Действительно, имеют место следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \delta > 0 &\implies \frac{1 - \alpha + 1 + q_1 - \alpha}{1 - \alpha} > 0 \implies \frac{2\alpha - 2 - q_1}{\alpha - 1} > 0 \\ &\implies 2\alpha > q_1 + 2 \implies 1 + \frac{\theta - 3\varepsilon}{2} > q_1 + 2 \implies \theta - 3\varepsilon > 2q_1 + 2 \\ &\implies \varepsilon \in \left(0, \frac{\theta - 2q_1 - 2}{3}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, с необходимостью получим еще условие на величину $\theta > 2$ из условия (iii)₂:

$$\theta > 2 + 2q_1. \quad (3.39)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что существуют такие функции $f(x, u)$, для которых условие (3.39) выполняется. Действительно, пусть

$$f(x, u) = \chi(x)|u|^{q_2}u \quad \text{при } q_2 > 2q_1.$$

Для этой функции $\theta = q_2 + 2$, и поэтому при условии $q_2 > 2q_1$ имеет место условие (3.39).

Пусть выполнено условие (3.39). Продолжим рассмотрение неравенства (3.38). После его интегрирования получим неравенство

$$(\Psi')^2 \geq A^2 + \beta(\alpha - 1)\Psi^2 + \frac{2\gamma(\alpha - 1)}{\delta}\Psi^\delta \geq A^2, \quad (3.40)$$

где

$$A^2 \equiv (\Psi'(0))^2 - \beta(\alpha - 1)\Psi^2(0) - \frac{2\gamma(\alpha - 1)}{\delta}\Psi^\delta(0). \quad (3.41)$$

Теперь потребуем, чтобы выполнялось еще одного условия на начальные данные

$$A^2 > 0. \quad (3.42)$$

С учетом определения (3.32) функции $\Psi(t)$ из условия (3.42) получим следующее эквивалентное неравенство:

$$(\alpha - 1)^2\Phi_0^{-2\alpha}(\Phi'(0))^2 - \beta(\alpha - 1)\Phi_0^{-2\alpha}\Phi_0^2 - \frac{2\gamma(\alpha - 1)}{\delta}\Phi_0^{-\delta\alpha}\Phi_0^\delta > 0,$$

из которого получим неравенство

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{(\alpha - 1)\delta}\Phi_0^{\alpha(2-\delta)+\delta}. \quad (3.43)$$

Проведем следующие алгебраические преобразования:

$$\begin{aligned} \alpha(2 - \delta) + \delta &= 2\alpha + (1 - \alpha)\delta = 2\alpha + 1 - \alpha + 1 + q_1 - \alpha = 2 + q_1, \\ \delta(\alpha - 1) &= \alpha - 1 - 1 - q_1 + \alpha = 2\alpha - q_1 - 2. \end{aligned}$$

Таким образом, от (3.43) приходим к следующему неравенству:

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2}\Phi_0^{2+q_1}, \quad (3.44)$$

причем $2\alpha - q_1 - 2 > 0$ при условии $\theta > 2 + 2q_1$ и

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{\theta - 2q_1 - 2}{3}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теперь наша задача – доказать, что множество функций $f(x, u)$ и $g(x, u)$, а также множество начальных условий $u_0(x), u_1(x)$, удовлетворяющих одновременно условиям (3.27), (3.34) и (3.44), не пусто. Действительно, пусть $2q_1 < q_2$ и, кроме того, $q_3 \in (2q_1, q_2)$, и при фиксированной функции $u_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, для которой $\|\nabla u_0\|_2 > 0$, положим

$$u_1(x) = |u_0|^{q_3/2}u_0,$$

где $u_1(x)$ принадлежит $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Тогда условие (3.34) примет вид

$$\left(1 + \frac{q_3}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 |u_0|^{q_3/2} dx + \int_{\Omega} |u_0|^{2+q_3/2} dx > 0,$$

и это условие, очевидно, выполнено. Проверим теперь условие (3.44). Действительно, после подстановки получим неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\left(1 + \frac{q_3}{2} \right) \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 |u_0|^{q_3/2} dx + \int_{\Omega} |u_0|^{2+q_3/2} dx \right)^2 \\ & \geq \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2} \Phi_0^{2+q_1}. \end{aligned}$$

Пусть теперь вместо $u_0(x)$ мы возьмем $ru_0(x)$, где $r > 0$. Тогда условие (3.34) не изменится, а после подстановки последнего неравенства получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & r^{4+q_3} \left(\left(1 + \frac{q_3}{2} \right) \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 |u_0|^{q_3/2} dx + \int_{\Omega} |u_0|^{2+q_3/2} dx \right)^2 \\ & \geq r^4 \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_0^2 + r^{4+2q_1} \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2} \Phi_0^{2+q_1}. \end{aligned}$$

Поскольку по определению $q_3 > 2q_1$, при достаточно большом $r > 0$ неравенство (3.44) будет выполнено. Наконец, рассмотрим условие (3.28), которое мы для удобства выпишем:

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx.$$

В качестве функции $f(x, u)$ возьмем $|u|^{q_2}u$; тогда после интегрирования получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx = \frac{1}{q_2 + 2} \int_{\Omega} |u_0|^{q_2+2} dx.$$

Значит, получим неравенство

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \leq \frac{1}{q_2 + 2} \int_{\Omega} |u_0|^{q_2+2} dx.$$

В это неравенство подставим $u_1(x) = |u_0|^{q_3/2}u_0$ и сделаем замену $u_0 \rightarrow ru_0$; тогда получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q_3}{2} \right)^2 r^{2+q_3} \int_{\Omega} |u_0|^{q_3} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{1}{2} r^{2+q_3} \int_{\Omega} |u_0|^{2+q_3} dx + \frac{1}{2} r^2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \\ & \leq r^{q_2+2} \frac{1}{q_2 + 2} \int_{\Omega} |u_0|^{q_2+2} dx, \end{aligned}$$

которое, очевидно, будет выполнено при достаточно большом $r > 0$, поскольку $q_3 < q_2$.

Таким образом, условия (3.27), (3.34) и (3.44) являются совместными.

Продолжим исследование неравенства (3.40), из которого вытекает, что

$$|\Psi'| \geq A > 0 \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.45)$$

Значит,

$$-\Psi' \geq A > 0 \implies \Psi' \leq -A < 0 \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Теперь напомним, что

$$\Psi'(t) = (1 - \alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi'(t).$$

Стало быть,

$$(1 - \alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi'(t) \leq -A \implies \Phi' \geq \frac{A}{\alpha - 1}\Phi^\alpha > 0,$$

но отсюда вытекает, что при начальном условии (3.34) величина $\Phi'(t)$ остается больше нуля на всем интервале существования решения исходной задачи. Таким образом, из (3.45) получим

$$\Psi'(t) \leq -A < 0 \quad \forall t \in [0, T_0),$$

где T_0 – время существования решения. Интегрируя последнее неравенство, получим

$$\Psi(t) \leq \Psi_0 - At,$$

значит, за конечное время $T_0 \in [0, T_1]$ функция $\Psi(t)$ обратиться в нуль, где

$$T_1 = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A} > 0.$$

Стало быть,

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty.$$

Теперь наша задача – выбрать параметр

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{\theta - 2q_1 - 2}{3}\right)$$

оптимальным образом. Действительно, выберем $\varepsilon_0 \in (0, (\theta - 2q_1 - 2)/3)$ как такое значение, при котором величина

$$Q_0 = Q_0(\varepsilon) \equiv \frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2}\Phi_0^{q_1}$$

принимает минимальное значение. Ясно, что это число ε_0 является функцией от Φ_0 .

Таким образом, в этом параграфе мы получили следующий результат: при условиях (3.27), (3.34), (3.39) и (3.44) сильное обобщенное решение $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ задачи (2.10), (2.12) в смысле определения 2 не существует глобально во времени. Теперь наша задача – доказать, что $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, т.е. доказать локальную во времени разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле для любых $u_0, u_1 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. И это мы докажем в следующем параграфе.

§ 4. Локальная разрешимость

Прежде всего, введем оператор

$$\mathbb{A} \equiv -\Delta + \mathbf{I}. \quad (4.1)$$

Тогда с учетом этого оператора исходную задачу (2.10), (2.12), понимаемую в сильном обобщенном смысле, можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbb{A}(u)}{dt^2} + \frac{d\mathbb{A}(u)}{dt} + \mathbb{A}(u) &= \frac{d}{dt}(u - N_g(u)) + u + N_f(u), \\ u(0) = u_0 &\in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где через $N_h(\cdot)$ мы обозначаем оператор Немыцкого, порожденный каратеодориевой функцией $h(x, u)$. Для дальнейшего нам необходимо доказать, что введенный оператор $\mathbb{A}$, который, очевидно, действует из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, обладает обратным оператором

$$\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

который является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной 1.

Для этого мы воспользуемся теоремой Браудера–Минти (см. [16]).

ТЕОРЕМА БРАУДЕРА–МИНТИ. Пусть оператор $\mathbb{A}$, действующий из банахова пространства $\mathbb{W}$ в сильно сопряженное пространство $\mathbb{W}^*$, является радиально-непрерывным, сильно монотонным и коэрцитивным. Тогда существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{W}^* \rightarrow \mathbb{W}$, который является липшиц-непрерывным.

В формулировке теоремы участвуют три понятия, приведем их определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Оператор $\mathbb{A}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^*$ радиально-непрерывен, если

$$\varphi(s) = \langle \mathbb{A}(u + sv), v \rangle \in \mathbb{C}[0, 1] \quad (4.3)$$

для всех $u, v \in \mathbb{W}$, где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ мы обозначили скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Оператор $\mathbb{A}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^*$ называется сильно монотонным, если существует такая постоянная $m > 0$, что имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle \geq m \|u - v\|^2, \quad (4.4)$$

где $\|\cdot\|$ – норма банахова пространства $\mathbb{W}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Оператор $\mathbb{A}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^*$ называется коэрцитивным, если существует такая функция

$$\gamma(s): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

что имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle \geq \gamma(\|u\|) \|u\| \quad \forall u \in \mathbb{W}. \quad (4.5)$$

Теперь нужно проверить, что оператор $\mathbb{A}$, определенный формулой (4.2), является радиально-непрерывным, сильно монотонным и коэрцитивным как оператор, действующий из $\mathbb{W} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{W}^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, т.е. что он удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера–Минити.

(I) Докажем, что оператор $\mathbb{A}$ является радиально-непрерывным. Действительно,

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \langle \mathbb{A}(u + sv), v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla(u + sv), \nabla v) dx + \int_{\Omega} (u + sv)v dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + s \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} uv dx + s \int_{\Omega} v^2 dx.\end{aligned}$$

Ясно, что для любых $u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ функция $\varphi(s)$ принадлежит $\mathbb{C}[0, 1]$. Следовательно, оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является радиально-непрерывным.

(II) Докажем теперь, что оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является сильно монотонным. Действительно, имеет место цепочка выражений

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |u - v|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx = \|u - v\|^2,$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена норма банахова пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Таким образом, оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является сильно монотонным с постоянной $m = 1$.

(III) Докажем коэрцитивность оператора $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$. Действительно, имеет место цепочка выражений

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным с функцией $\gamma(s) = s$.

Поэтому в силу теоремы Браудера–Минити оператор $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, определенный формулой (4.2), является обратимым, причем обратный оператор

$$\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

является липшиц-непрерывным. Докажем, что при этом постоянная Липшица равна 1. Действительно, в силу доказанного свойства (II) сильной монотонности оператора $\mathbb{A}$ имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle \geq \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (4.6)$$

из которого в силу стандартного определения нормы $\|\cdot\|_*$ сильно сопряженного банахова пространства $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ к банахову пространству $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$

$$\|f\|_* \equiv \sup_{v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|v\| \leq 1} |\langle f, v \rangle| \quad (4.7)$$

имеет место неравенство

$$\|\mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v)\|_* \|u - v\| \geq \langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle. \quad (4.8)$$

Действительно, неравенство (4.8) есть простейшее следствие формулы (4.7). Именно, справедлива общая формула

$$|\langle f, w \rangle| \leq \|f\|_* \|w\|. \quad (4.9)$$

Докажем это неравенство. Действительно, если w равно θ – нулевому элементу банахова пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то это неравенство выполнено. Пусть теперь $w \neq \theta$; тогда из (4.7) вытекает неравенство

$$|\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_* \quad \forall \|v\| \leq 1.$$

В частности, для

$$v = \frac{w}{\|w\|}$$

получим выражение

$$|\langle f, w \rangle| \leq \|f\|_* \|w\|.$$

Поэтому неравенство (4.8) есть следствие неравенства (4.9), в котором надо положить

$$f = \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), \quad w = u - v.$$

Из неравенств (4.6) и (4.8) вытекает неравенство

$$\|u - v\| \leq \|\mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v)\|_* \quad \forall u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (4.10)$$

Теперь положим

$$w_1 = \mathbb{A}(u), \quad w_2 = \mathbb{A}(v),$$

откуда в силу (4.10) и доказанной обратимости оператора $\mathbb{A}: \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ приходим к неравенству

$$\|\mathbb{A}^{-1}(w_1) - \mathbb{A}^{-1}(w_2)\| \leq \|w_1 - w_2\|_* \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \quad (4.11)$$

Таким образом, нами доказано, что оператор $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной 1.

Таким образом, задачу (4.2) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + v = \frac{d}{dt}(\mathbb{A}^{-1}(v) - N_g(\mathbb{A}^{-1}(v))) + \mathbb{A}^{-1}(v) + N_f(\mathbb{A}^{-1}(v)), \quad v = \mathbb{A}(u), \quad (4.12)$$

причем

$$v(0) = \mathbb{A}(u_0) = v_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \quad v'(0) = \mathbb{A}(u_1) = v_1 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

В классе $v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ задача (4.12) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(t) = w_1 + \int_0^t G(v)(s) ds, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned}
 G(v)(s) &\equiv v_0 - v(s) + \mathbb{A}^{-1}(v)(s) - N_g(\mathbb{A}^{-1}(v))(s) \\
 &\quad + \int_0^s [-v(\sigma) + \mathbb{A}^{-1}v(\sigma) + N_f(\mathbb{A}^{-1}(v)(\sigma))] d\sigma, \\
 w_1 &= v_0 + v_1 t + N_g(\mathbb{A}^{-1}(v_0))(t) - \mathbb{A}^{-1}(v_0)(t).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь мы воспользовались сильной непрерывностью оператора $N_g(\mathbb{A}^{-1}(v))$, которая следует из того факта, что $v(t) \in C^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, а также липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и сильной непрерывности оператора Немыцкого

$$N_g(\cdot): \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega).$$

Теперь наша задача – изучить свойства операторов Немыцкого $N_g(\cdot)$ и $N_f(\cdot)$. Действительно, в силу условий (i)₁, (iii)₁ и (i)₂, (iv)₂ для этих операторов Немыцкого справедливы следующие свойства:

$$\|N_g(v_1) - N_g(v_2)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leq \mu_1(R_1) \|v_1 - v_2\|_{q_1+2} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega), \tag{4.15}$$

$$\|N_f(v_1) - N_f(v_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leq \mu_2(R_2) \|v_1 - v_2\|_{q_2+2} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega), \tag{4.16}$$

где $R_1 = \max\{\|v_1\|_{q_1+2}, \|v_2\|_{q_1+2}\}$, $R_2 = \max\{\|v_1\|_{q_2+2}, \|v_2\|_{q_2+2}\}$, а $\mu_1(\cdot)$ и $\mu_2(\cdot)$ – неубывающие функции своих аргументов.

В силу свойств (ii)₁ и (ii)₂ $q_1 \in (0, 2]$ и $q_2 \in (0, 4]$, поэтому, поскольку $N = 3$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей, имеют место две цепочки плотных и непрерывных вложений

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \tag{4.17}$$

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{4.18}$$

В силу цепочки (4.18) имеют место следующие неравенства для оператора Немыцкого $N_g(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
 \|N_g(v_1) - N_g(v_2)\|_* &\leq c_8 \|N_g(v_1) - N_g(v_2)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leq c_8 \mu_1(R_1) \|v_1 - v_2\|_{q_1+2} \\
 &\leq c_8 c_9 \mu_1(c_9 R_1^*) \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

где $R_1^* = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$, c_8 – наилучшая постоянная вложения банахова пространства $\mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega)$ в гильбертово пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, т.е.

$$\|w\|_* \leq c_8 \|w\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \quad \forall w \in \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega),$$

а c_9 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$, т.е.

$$\|w\|_{q_1+2} \leq c_9 \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Кроме того, имеет место следующая цепочка неравенств для оператора $N_f(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \|N_f(v_1) - N_f(v_2)\|_* &\leq c_{10} \|N_f(v_1) - N_f(v_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leq c_{10} \mu_2(R_2) \|v_1 - v_2\|_{q_2+2} \\ &\leq c_{10} c_{11} \mu_2(c_{11} R_2^*) \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $R_2^* = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$, c_{10} – наилучшая постоянная вложения банахова пространства $\mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega)$ в гильбертово пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, т.е.

$$\|w\|_* \leq c_{10} \|w\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \quad \forall w \in \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega),$$

а c_{11} – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$, т.е.

$$\|w\|_{q_2+2} \leq c_{11} \|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Таким образом, из неравенств (4.19) и (4.20) вытекают следующие неравенства:

$$\|N_g(v_1) - N_g(v_2)\|_* \leq \bar{\mu}_1(R^*) \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (4.21)$$

$$\|N_f(v_1) - N_f(v_2)\|_* \leq \bar{\mu}_2(R^*) \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (4.22)$$

где $R^* = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$, а функции $\bar{\mu}_1(\cdot)$ и $\bar{\mu}_2(\cdot)$ являются неубывающими функциями своих аргументов.

Теперь перепишем интегральное уравнение (4.13) в следующем операторном виде:

$$v = \mathbb{H}(v), \quad \mathbb{H}(v) \equiv w_1 + \int_0^t G(v)(s) ds, \quad (4.23)$$

где оператор $G(v)(s)$ и w_1 определены в формуле (4.14).

Будем искать решение операторного уравнения (4.23) в банаховом пространстве

$$\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

при некотором $T > 0$. Для этого введем в рассмотрение замкнутое, ограниченное и выпуклое его подмножество

$$\mathbb{V}_r \equiv \left\{ v \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) : \|v\| \equiv \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|v\|_* \leq r \right\} \quad (4.24)$$

при некотором $r > 0$. Докажем, что при достаточно малом $T > 0$ и при достаточно большом $r > 0$ оператор $\mathbb{H}(\cdot)$ действует из $\mathbb{V}_r$ в $\mathbb{V}_r$. Прежде всего заметим, что из условий роста (ii)₁ и (ii)₂ функций $g(x, u)$ и $f(x, u)$ вытекают следующие оценки для соответствующих операторов Немыцкого:

$$\begin{aligned} \|N_g(\mathbb{A}^{-1}(v))\|_* &\leq c_8 \|N_g(\mathbb{A}^{-1}(v))\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \\ &\leq c_8 \left[\left(\int_\Omega |a_1(x)|^{(q_1+2)/(q_1+1)} dx \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)} \right. \\ &\quad \left. + c_1 \left(\int_\Omega |\mathbb{A}^{-1}(v)|^{q_1+2} dx \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)} \right] \\ &\leq c_{12} + c_{13} \|\mathbb{A}^{-1}(v)\|^{q_1+1} \leq c_{12} + c_{13} \|v\|_*^{q_1+1}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Аналогичным образом доказывается оценка

$$\|N_f(\mathbb{A}^{-1}(v))\|_* \leq c_{14} + c_{15}\|v\|_*^{q_2+1}. \quad (4.26)$$

Теперь выберем $r > 0$ настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\|w_1\|_* \leq \frac{r}{2}, \quad (4.27)$$

где величина w_1 определена формулой (4.14). Действительно, это можно сделать, поскольку справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|w_1\|_* &\leq \|v_0\|_* + T\|v_1\|_* + T\|N_g(\mathbb{A}^{-1}(v_0))\|_* + T\|\mathbb{A}^{-1}(v_0)\|_* \\ &\leq \|v_0\|_* + T\|v_1\|_* + Tc_{12} + Tc_{13}\|v_0\|_*^{q_1+1} + Tc_{16}\|\mathbb{A}^{-1}(v_0)\| \\ &\leq \|v_0\|_* + T\|v_1\|_* + Tc_{12} + Tc_{13}\|v_0\|_*^{q_1+1} + Tc_{16}\|v_0\|_* \\ &= Tc_{12} + [1 + Tc_{16}]\|v_0\|_* + Tc_{13}\|v_0\|_*^{q_1+1} + T\|v_1\|_*, \end{aligned}$$

где мы воспользовались следующим непрерывным вложением $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ с наилучшей постоянной вложения c_{16} :

$$\|w\|_* \leq c_{16}\|w\| \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

а также воспользовались липшиц-непрерывностью оператора $\mathbb{A}^{-1}$ с постоянной Липшица, равной 1.

Поэтому если выбрать $r > 0$ настолько большим, чтобы выполнялось

$$Tc_{12} + [1 + Tc_{16}]\|v_0\|_* + Tc_{13}\|v_0\|_*^{q_1+1} + T\|v_1\|_* \leq \frac{r}{2},$$

то неравенство (4.27) будет выполнено.

Теперь воспользуемся полученными оценками (4.25) и (4.26) для получения оценки оператора $G(v)(s)$, определенного формулой (4.14):

$$\begin{aligned} \|G(v)\|_*(s) &\leq \|v_0\|_* + \|v\|_*(s) + c_{16}\|v\|_*(s) + c_{12} + c_{13}\|v\|_*^{q_1+1}(s) \\ &\quad + \int_0^s [\|v\|_*(\sigma) + c_{16}\|v\|_*(\sigma) + c_{14} + c_{15}\|v\|_*^{q_2+1}(\sigma)] d\sigma. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Теперь воспользуемся неравенствами (4.27) и (4.28) для получения оценки оператора $\mathbb{H}(\cdot)$, определенного формулой (4.23):

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}(v)\| &\leq \|w_1\|_* + T[\|v_0\|_* + \|v\|] + c_{16}\|v\| + c_{12} + c_{13}\|v\|^{q_1+1} \\ &\quad + T^2[\|v\| + c_{16}\|v\| + c_{14} + c_{15}\|v\|^{q_2+1}] \\ &\leq \frac{r}{2} + T[\|v_0\|_* + r + c_{16}r + c_{12} + c_{13}r^{q_1+1}] \\ &\quad + T^2[r + c_{16}r + c_{14} + c_{15}r^{q_2+1}] \leq r \end{aligned}$$

при достаточно малом $T > 0$. Следовательно, при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом $r > 0$

$$\mathbb{H}(v): \mathbb{V}_r \rightarrow \mathbb{V}_r.$$

Теперь докажем сжимаемость оператора $\mathbb{H}(\cdot)$. Действительно, в силу оценок (4.21) и (4.22) для соответствующих операторов Немыцкого имеет место оценка

$$\begin{aligned} | \|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\| | &\leq T \left[\|v_1 - v_2\| + \| \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2) \| \right] \\ &\quad + \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \bar{\mu}_1(R^*) \| \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2) \| \\ &+ T^2 \left[\|v_1 - v_2\| + \| \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2) \| \right] \\ &\quad + \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \bar{\mu}_2(R^*) \| \mathbb{A}^{-1}(v_1) - \mathbb{A}^{-1}(v_2) \|, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где

$$R^* \equiv \max \{ \| \mathbb{A}^{-1}(v_1) \|, \| \mathbb{A}^{-1}(v_2) \| \}.$$

Из (4.29) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} | \|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\| | &\leq T \left[\|v_1 - v_2\| + c_{16} \|v_1 - v_2\| + c_{16} \bar{\mu}_1(c_{16}R) \|v_1 - v_2\| \right] \\ &+ T^2 \left[\|v_1 - v_2\| + c_{16} \|v_1 - v_2\| + c_{16} \bar{\mu}_2(c_{16}R) \|v_1 - v_2\| \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

где

$$R \equiv \max \{ \|v_1\|, \|v_2\| \} \leq r.$$

Таким образом, из (4.30) получаем оценку

$$\begin{aligned} | \|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\| | &\leq T \left[1 + c_{16} + c_{16} \bar{\mu}_1(c_{16}r) \right] \|v_1 - v_2\| + T^2 \left[1 + c_{16} + c_{16} \bar{\mu}_2(c_{16}r) \right] \|v_1 - v_2\|, \end{aligned} \quad (4.31)$$

из которой, если потребовать выполнение неравенства

$$T \left[1 + c_{16} + c_{16} \bar{\mu}_1(c_{16}r) \right] + T^2 \left[1 + c_{16} + c_{16} \bar{\mu}_2(c_{16}r) \right] \leq \frac{1}{2},$$

получим искомую оценку

$$| \|\mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2)\| | \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}_r.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{H}(\cdot)$ является сжимающим на $\mathbb{V}_r$ при достаточно большом $r > 0$ и достаточно малом $T > 0$. Следовательно, в силу теоремы о сжимающих отображениях существует единственное решение операторного уравнения (4.23) в классе $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ при достаточно малом $T > 0$.

Докажем теперь, что решение $v(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ интегрального уравнения (4.13) может быть продолжено на такой максимальный интервал $[0, T_0)$, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|v\|_*(t) = +\infty.$$

Действительно, рассмотрим норму

$$\psi(T) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_*(t).$$

Как функция T функция $\psi(T)$ является монотонно неубывающей. Стало быть, при $T \uparrow T_0$ функция $\psi(T)$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что $\psi(T)$ имеет конечный предел при $T \uparrow T_0$. Пусть $T' \in (0, T_0)$. Рассмотрим следующие интегральные уравнения:

$$v(T') = v_0 + \int_0^{T'} \overline{G}(v)(s) ds, \quad \overline{G}(v)(s) = G(v)(s) + v_1 + N_g(\mathbb{A}^{-1}(v_0)) - \mathbb{A}^{-1}(v_0), \quad (4.32)$$

где $G(v)(s)$ определено формулой (4.14),

$$v(T' + t) = v(T') + \int_{T'}^{T' + t} \overline{G}(v)(s) ds, \quad t > 0. \quad (4.33)$$

Введем функцию $w(t) = v(T' + t)$ и сделаем замену переменных $\sigma = s - T'$ в последнем интеграле. Тогда получим уравнение

$$w(t) = v(T') + \int_0^t \overline{G}(w)(\sigma) d\sigma, \quad t > 0. \quad (4.34)$$

Заметим, что

$$\|v\|_*(T') \leq C < +\infty, \quad T' \in (0, T_0). \quad (4.35)$$

А уравнение (4.34) имеет вид (4.13). Поэтому найдется такой момент времени $T^* = T^*(T')$, что существует решение уравнения (4.34) на интервале $t \in (0, T^*)$. В силу (4.35) функция $T^* = T^*(T')$ имеет минимум, больший нуля, который мы снова обозначим через T^* . Теперь в качестве T' возьмем величину $T' = T_0 - T^*/2$. Таким образом, получаем, что существует решение задачи (4.34) на интервале $t \in (0, T^*)$. Теперь подставим выражение для $v(T')$ из уравнения (4.32) в уравнение (4.33); тогда получим

$$v(t_0) = v_0 + \int_0^{t_0} \overline{G}(v)(s) ds, \quad t_0 = T' + t, \quad t \in (0, T^*). \quad (4.36)$$

Стало быть, в силу локальной разрешимости интегрального уравнения (4.23) существует единственное решение задачи (4.36) на интервале $t_0 \in (0, T' + T^*)$. В силу выбора $T' = T_0 - T^*/2$ имеем $t_0 \in (0, T_0 + T^*/2)$. Таким образом, используя указанный алгоритм продолжения во времени, мы приходим к выводу, что $T_0 = +\infty$. Полученное противоречие с условием, что $T_0 < +\infty$, доказывает следующее предельное равенство:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \psi(T) = +\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|v\|_*(t) = +\infty.$$

Теперь докажем, что на самом деле решение интегрального уравнения (4.13) есть

$$v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Действительно, для доказательства этого утверждения применим так называемый бутстэп-метод. Прежде всего докажем, что

$$v(t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Имеет место следующая оценка:

$$\|\mathbb{H}(v)(t_1) - \mathbb{H}(v)(t_2)\|_* \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\overline{G}(v)\|_*(s) ds \leq |t_2 - t_1| \|\overline{G}(v)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t_1 \rightarrow t_2$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$. Следовательно, $\mathbb{H}(v) \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, а значит, в силу операторного равенства (4.23) получим, что $v(t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Теперь заметим, что из неравенств (4.21) и (4.22) для соответствующих операторов Немыцкого, а также в силу липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{A}^{-1}$ получаем, что

$$N_g(\mathbb{A}^{-1}(v)), N_f(\mathbb{A}^{-1}(v)) \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\mathbb{H}(v) = w_1 + \int_0^t G(v)(s) ds, \quad G(v)(t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Следовательно,

$$\mathbb{H}(v)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Но тогда снова в силу операторного равенства (4.23) получим, что

$$v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Докажем теперь, что отсюда вытекает

$$\mathbb{A}^{-1}(v)(t), N_g(\mathbb{A}^{-1}(v)) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Заметим, что оператор $\mathbb{A}^{-1}: \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в силу его линейности дифференцируем по Фреше, и поэтому в силу теоремы 1 о цепном правиле дифференцирования композиции операторов получим, что

$$\mathbb{A}^{-1}(v)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Теперь в силу дифференцируемости функции $g(x, u)$ по $u \in \mathbb{R}$ для почти всех $x \in \Omega$ мы приходим к выводу, что опять в силу теоремы 1

$$N_g(\mathbb{A}^{-1}(v))(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Но тогда опять из явного вида оператора $\mathbb{H}(\cdot)$ получаем, что

$$\mathbb{H}(v) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)),$$

а в силу операторного равенства (4.23)

$$v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Причем решения задач (4.2) и (4.12) связаны соотношением

$$v = \mathbb{A}(u) \quad \text{при} \quad v \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)).$$

Следовательно,

$$u(t) = \mathbb{A}^{-1}(v)(t),$$

откуда в силу цепного правила снова получим, что $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для функций $g(x, u)$ и $f(x, u)$ выполнены условия (i)₁, (i)₂, (ii)₂, (iii)₁, (iv)₂, а также (3.1). Тогда для любых $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что существует единственное сильное обобщенное решение $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ задачи (2.10), (2.12), понимаемой в смысле определения 2, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\mathbb{A}(u)\|_*(t) = +\infty, \quad \mathbb{A} \equiv -\Delta + I. \quad (4.37)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Обсудим выражение (4.37). Заметим, что справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}(u)\|_*(t) &= \sup_{w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|w\| \leq 1} |\langle \mathbb{A}(u), w \rangle| \\ &\leq \sup_{w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|w\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla w) dx + \int_{\Omega} uw dx \right| \\ &\leq 2 \sup_{w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \|w\| \leq 1} \Phi^{1/2}[u](t) \Phi^{1/2}[w] \leq c_{17} \Phi^{1/2}[u](t), \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $\Phi^{1/2}[u](t)$ определено формулой (3.9). Теперь заметим, что справедлива следующая оценка снизу:

$$\|\mathbb{A}(u)\|_*(t) \|u\|(t) \geq \langle \mathbb{A}(u)(t), u(t) \rangle = 2\Phi(t). \quad (4.39)$$

С другой стороны,

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla u) dx,$$

поэтому в силу определения (3.9) получаем оценку сверху

$$\|u\|^2(t) \leq 2\Phi(t).$$

Отсюда в силу (4.39) получим неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t) \|\mathbb{A}(u)\|_*(t) \geq 2\Phi(t) \implies \|\mathbb{A}(u)\|_*(t) \geq \sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t). \quad (4.40)$$

Тем самым, из неравенств (4.38) и (4.40) получим двухстороннее неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t) \leq \|\mathbb{A}(u)\|_*(t) \leq c_{17}\Phi^{1/2}[u](t).$$

Таким образом, выражение (4.37) эквивалентно выражению

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi[u](t) = +\infty, \quad (4.41)$$

где функционал $\Phi[u](t)$ определен формулой (3.9).

Таким образом, из теоремы 2 и результатов § 3 вытекает следующая основная теорема настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для функций $g(x, u)$ и $f(x, u)$ выполнены условия роста на функцию (i)₁–(iii)₁ и (i)₂–(iv)₂, $u_0, u_1 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и, кроме того, выполнены следующие дополнительные условия:

$$\begin{aligned} \theta &> 2 + 2q_1, \\ \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx, \\ \Phi'(0) &> \left(\frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2} \Phi_0^{2+q_1} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда время существования T_0 сильного обобщенного решения ограничено сверху и больше нуля:

$$T_0 \in (0, T_1], \quad T_1 = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A} > 0,$$

и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx, \\ \Phi_0 &= \Phi(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx, \\ \mathcal{F}(x, s) &= \int_0^s f(x, \sigma) d\sigma, \quad \Phi'(0) = \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) dx + \int_{\Omega} u_1 u_0 dx, \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta}{2} - \frac{3\varepsilon_0}{2} \right), \quad \beta = \frac{c_7}{\varepsilon_0}, \quad \gamma = \frac{c_6}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 \in \left(0, \frac{\theta - 2 - 2q_1}{3} \right), \\ A^2 &\equiv (\alpha - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha} (\Phi'(0))^2 - \beta(\alpha - 1) \Phi_0^{-2\alpha} \Phi_0^2 - \frac{2\gamma(\alpha - 1)}{\delta} \Phi_0^{-\delta\alpha} \Phi_0^\delta, \\ \delta &= 1 + \frac{1 + q_1 - \alpha}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

ε_0 доставляет минимум функции

$$Q_0 = Q_0(\varepsilon) \equiv \frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2} \Phi_0^{q_1}$$

при условии, что $\varepsilon_0 \in (0, (\theta - 2 - 2q_1)/3)$.

Отметим, что в настоящей работе мы рассмотрели пространственно локализованные “источники” и “стоки” в плазме, и это важно с физической точки зрения, поскольку в реальной плазме источники и стоки действительно локализованы. При этом нами найдены достаточные условия возникновения реально наблюдаемой в плазме так называемой взрывной неустойчивости, что очень важно с точки зрения исследования условий существования достаточно устойчивой плазмы.

Список литературы

- [1] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [2] H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
- [3] H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
- [4] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Записки науч. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
- [5] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
- [6] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [7] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “Third-order nonlinear dispersive equations: Shocks, rarefaction, and blowup waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:10 (2008), 1784–1810.
- [8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8: *Электродинамика сплошных сред*, 3-е изд., Наука, М., 1992; англ. пер. 2-го изд.: L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics*, v. 8: *Electrodynamics of continuous media*, Pergamon Internat. Library Sci. Tech. Engrg. Social Stud., Pergamon Press, Oxford, 1984.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 10: *Физическая кинетика*, 3-е изд., Физматлит, М., 2001; нем. пер. 2-го изд.: L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, v. 10: *Physikalische Kinetik*, H. Deutsch, Frankfurt am Main, 1992.

- [10] И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*, 10-е изд., Наука, М., 1989; англ. пер. 3-го изд.: I. E. Tamm, *Fundamentals of the theory of electricity*, Mir, Moscow, 1979.
- [11] С. А. Габов, *Новые задачи математической теории волн*, Физматлит, М., 1998.
- [12] М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников, “О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **39**:6 (1999), 1006–1022; англ. пер.: M. O. Korpusov, Yu. D. Pletner, A. G. Sveshnikov, “Unsteady waves in anisotropic dispersive media”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **39**:6 (1999), 968–984.
- [13] А. Б. Альшин, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников, “Однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения ионно-звуковых волн в плазме”, *Докл. АН СССР*, **361**:6 (1998), 749–751; англ. пер.: A. B. Al’shin, Yu. D. Pletner, A. G. Sveshnikov, “Unique solvability of the Dirichlet problem for the ion-sound wave equation in plasma”, *Dokl. Math.*, **58**:1 (1998), 148–150.
- [14] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, ГИТТЛ, М., 1956; англ. пер.: M. A. Krasnosel’skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [15] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonlinear analysis*, Ser. Math. Anal. Appl., **9**, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2006.
- [16] Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

М. О. Корпусов (М. О. Korpusov)

Физический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию

16.12.2009