М. О. Корпусов, О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с сильной пространственно-временной дисперсией, *Алгебра и анализ*, 2011, том 23, выпуск 6, 96–130

Алгебра и анализ
Том 23 (2011), №6

О РАЗРУШЕНИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С СИЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

© М. О. КОРПУСОВ

В этой работе мы рассмотрели одно модельное уравнение, описывающее ионно-звуковые волны в плазме при учете сильной нелинейной диссипации и нелинейных источников общего вида и сильной пространственно-временной дисперсии. Для соответствующей начально-краевой задачи в ограниченной трехмерной области с однородными условиями Дирихле–Неймана на границе этой области нами получены достаточные условия разрушения решения этой задачи. При этом мы получили оценку на время существования решения. Наконец, нами доказано, что для любых начальных данных из $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ существует локальное во времени сильное обобщенное решение рассматриваемой задачи, т. е. доказано, что время разрушения решения задачи всегда больше нуля.

§1. Введение

В данной работе мы продолжаем исследование нелинейных соболевских уравнений с производной по времени второго порядка и с нелинейным оператором при первой производной по времени. Рассмотрим следующее модельное уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\triangle^2 u+\triangle u\right)+\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u)+\triangle u-\operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u)=0.$$

Для этого уравнения широко известный метод Х. А. Левина (см. [13, 14, 3]) уже не работает, по крайней мере в том виде, в котором он предложен в работах [14] и [3], из-за наличия слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u).$$

Отметим, что существуют три основных метода исследования возникновения разрушения. Первый метод — это метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [8], второй — это энергетический

Ключевые слова: разрушение, уравнения соболевского типа, нелинейный анализ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 11-01-12018-офи-м-2011, и президентской программы поддержки молодых докторов наук МД-99.2009.1.

метод Х. А. Левина [13, 14, 3, 10] и, наконец, третий метод — это метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [9] (см. также [2]).

§2. Постановка задачи

При рассмотрении квазистационарных процессов в плазме мы встречаемся со следующей зависимостью тензора диэлектрической проницаемости от частоты колебаний $\omega \in \mathbb{R}^1$ и волнового вектора $k \in \mathbb{R}^3$ (см., например, [6] и [7]):

$$\varepsilon(k,\omega) = |k|^2 + 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \tag{2.1}$$

где этот вид тензора диэлектрической проницаемости учитывает сильную пространственную дисперсию среды — это зависимость от волнового вектора $k \in \mathbb{R}^3$, и временную дисперсию — это зависимость от частоты $\omega \in \mathbb{R}^1$. Отметим, что уравнение (2.1) записано в смысле преобразования Фурье, и собственно оператор диэлектрической проницаемости имеет следующий вид:

$$\hat{\varepsilon}\cdot = -\triangle\cdot + \mathrm{I}\cdot + \omega_0^2 \int\limits_0^t ds (t-s)\cdot, \tag{2.2}$$

причем связь вектора индукции электрического поля $\mathbb{D}$ и напряженности электрического поля $\mathbb{E}$ следующая:

$$\mathbb{D} = \hat{\varepsilon}\,\mathbb{E}. \tag{2.3}$$

Однако оператор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, определенный формулой (2.2), не учитывает нелинейные свойства среды. Поэтому наша задача обобщить выражение (2.2) для оператора диэлектрической проницаемости среды на нелинейный случай. Действительно, общий вид уравнения, связывающего индукцию электрического поля в среде $\mathbb{D}$ с напряженностью электрического поля $\mathbb{E}$ следующий:

$$\mathbb{D} = \mathbb{E} + 4\pi\mathbb{P}, \tag{2.4}$$

где $\mathbb{P}$ — это вектор поляризации среды. При учете временной и пространственной дисперсии среды связь вектора поляризации среды $\mathbb{P}$ от вектора напряженности электрического поля $\mathbb{E}$ следующая:

$$\mathbb{P} = -\triangle\mathbb{E} + \omega_0^2 \int\limits_0^t d\tau (t-\tau)\left[\mathbb{E}(\tau) - \varkappa(x, |\mathbb{E}|(\tau))\mathbb{E}(\tau)\right]. \tag{2.5}$$

Здесь функция $\varkappa(x, |\mathbb{E}|)$ учитывает, в частности, керровскую зависимость вектора поляризации среды от поля

$$\varkappa(x, |\mathbb{E}|) = \varkappa_0 |\mathbb{E}|^2, \quad \varkappa_0 > 0.$$

Причем эта функция входит в уравнение (2.5) с отрицательным знаком, что соответствует так называемой *дефокусирующей* среде (см., например, [6]). В квазистационарном приближении система уравнений Максвелла для электрического поля примет следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbb{D} = -4\pi n, \quad \operatorname{rot} \mathbb{E} = 0, \tag{2.6}$$

где n — это концентрация свободных зарядов, для которой имеет место следующее уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbb{J}, \quad \mathbb{J} = \sigma(x, |\mathbb{E}|)\mathbb{E}, \tag{2.7}$$

где функция $\sigma(x, |\mathbb{E}|)$ имеет физический смысл проводимости среды, которая, вообще говоря, является функцией как от $x \in \Omega$, так и от $|\mathbb{E}|$ — модуля напряженности электрического поля. Теперь оговорим свойства области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, в которой рассматривается система материальных и полевых уравнений (2.4)–(2.7). Действительно, предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной, поверхностно-односвязной областью с границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Поскольку область Ω является поверхностно-односвязной, то из уравнения $\operatorname{rot} \mathbb{E} = 0$ вытекает существование электрического потенциала:

$$\mathbb{E}(x) = -\nabla u(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega.$$

Но тогда из уравнений (2.4)–(2.6) получим следующее равенство:

$$-4\pi \triangle^2 u + \triangle u + 4\pi\omega_0^2 \int\limits_0^t (t - \tau) \left[\triangle u(\tau) + \operatorname{div} \left(\varkappa(x, |\nabla u|)\nabla u\right)(\tau)\right] = 4\pi n, \tag{2.8}$$

а из уравнения (2.7) получим, что

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\sigma(x, |\nabla u|)\nabla u\right). \tag{2.9}$$

Из последних двух уравнений вытекает следующее одно уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-4\pi\triangle^2 u + \triangle u\right) + 4\pi \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\sigma(x, |\nabla u|)\nabla u) \\ + 4\pi\omega_0^2 \triangle u - 4\pi\omega_0^2 \operatorname{div}(\varkappa(x, |\nabla u|)\nabla u) = 0,\end{gathered} \tag{2.10}$$

которое в безразмерных переменных примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\triangle^2 u + \triangle u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u) + \triangle u - \operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u) = 0, \tag{2.11}$$

где

$$\triangle^2 \equiv \triangle\triangle, \quad \triangle = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad |\nabla u| = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2}, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

По своему физическому смыслу функция $u = u(x,t)$ есть потенциал электрического поля, поэтому если предположить, что граница $\partial\Omega$ области Ω представляет собой „заземленный“, „идеально проводящий“ проводник, то справедливы следующие граничные условия Дирихле–Неймана:

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.12}$$

Кроме того, дополним уравнение (2.11) еще начальными условиями:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{2.13}$$

где символом v' здесь и далее будем обозначать частную производную по времени.

§3. Разрушение сильного обобщенного решения

Прежде всего введем некоторые условия на функции

$$\varphi_1(x,s), \varphi_2(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1.$$

Напомним определение *каратеодориевой* функции.

Определение 1. Каратеодориевой функцией или функцией Каратеодори называется функция $f(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$, которая для почти всех $x \in \Omega$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}^1_+$ и для всех $s \in \mathbb{R}^1_+$ измерима по $x \in \Omega$.

Пусть функция $\varphi_1(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ удовлетворяет следующим условиям.

Условия для функции $\varphi_1(x,s)$.

$(\mathrm{i})_1$ функция $\varphi_1(x,s)$ каратеодориева;

$(\mathrm{ii})_1$ функция $\varphi_1(x,s)$ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет следующим условиям роста:

$$|\varphi_1(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{p_1-2} \quad \text{при} \quad p_1 \in (2,4], \tag{3.1}$$

для почти всех $x \in \Omega$ функция $\varphi_1(x,s) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty))$ по переменной s и имеет место неравенство

$$|s\varphi'_{1s}(x,s)| \leqslant c_1 + c_2|s|^{p_1-2} \quad \text{при} \quad p_1 \in (2,4], \tag{3.2}$$

$$\varphi(x,s) \geqslant 0, \quad \varphi'_{1s}(x,s) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{R}^1_+ \quad \text{и почти всех} \quad x \in \Omega; \tag{3.3}$$

(iii)$_1$ оператор $\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v|)\nabla v)$ для всех $v \in \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega)$ является локально липшиц-непрерывным и дифференцируемым по Фреше:

$$\|\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v_1|)\nabla v_1) - \operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v_2|)\nabla v_2)\|_{-1,p'_1} \leqslant \mu_1(\mathrm{R}_1)\|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_{p_1} \tag{3.4}$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega)$, где $p'_1 = p_1/(p_1-1)$, $\|\cdot\|_{-1,p'_1}$ — это норма банахова пространства $\mathbb{W}^{-1,p'_1}(\Omega)$, а $\|\cdot\|_{p_1}$ — это норма банахова пространства $\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)$,

$$\mathrm{R}_1 = \max\{\|\nabla v_1\|_{p_1}, \|\nabla v_2\|_{p_1}\},$$

$\mu_1(\cdot)$ — это неотрицательная и неубывающая функция своего аргумента.

Замечание 1. То, что в условиях (3.1) и (3.2) фигурируют одни и те же постоянные $c_1, c_2 > 0$, не является сильным ограничением. И мы их взяли одинаковыми только из–за сокращения совсем ненужных громоздких выражений. Отметим, кроме того, что примером функции $\varphi_1(x,s)$ является, например, следующая функция: $\varphi_1(x,s) = s^{p_1-2}$ при $p_1 \in [3,4]$. Отметим, что для этой функции оператор

$$\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) \quad \text{при} \quad p_1 \in [3,4]$$

— это классический оператор псевдо-лапласиана.

Теперь введем условия на функцию $\varphi_2(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$.

Условия для функции $\varphi_2(x,s)$.

(i)$_2$ функция $\varphi_2(x,s)$ каратеодориева;

(ii)$_2$ функция $\varphi_2(x,s)$ удовлетворяет условию роста:

$$|\varphi_2(x,s)| \leqslant c_3 + c_4|s|^{p_2-2} \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega \quad \text{при} \quad p_2 \in (2,6]; \tag{3.5}$$

(iii)$_2$ существует такое $\vartheta > 2$, что для всех $v(x) \in \mathbb{W}^{1,p_2}_0(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 \varphi_2(x,|\nabla v|)\,dx \geqslant \vartheta \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{|\nabla v|} s\varphi_2(x,s)\,ds; \tag{3.6}$$

$(\mathrm{iv})_2$ оператор $\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v|)\nabla v)$ для всех $v \in \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega)$ является локально липшиц-непрерывным:

$$\|\operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla v_1|)\nabla v_1) - \operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla v_2|)\nabla v_2)\|_{-1,p_2'} \leqslant \mu_2(\mathrm{R}_2)\|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_{p_2} \quad (3.7)$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{W}^{1,p_2}_0(\Omega)$, где $p_2' = p_2/(p_2-1)$, $\|\cdot\|_{-1,p_2'}$ — это норма банахова пространства $\mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega)$, а $\|\cdot\|_{p_2}$ — это норма банахова пространства $\mathbb{L}^{p_2}(\Omega)$,

$$\mathrm{R}_2 = \max\{\|\nabla v_1\|_{p_2}, \|\nabla v_2\|_{p_2}\},$$

$\mu_2(\cdot)$ — это неотрицательная и неубывающая функция своего аргумента.

Постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$.

Прежде чем давать определение сильного обобщенного решения задачи, нам необходимо обсудить свойства операторов

$$\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v|)\nabla v) \quad \text{и} \quad \operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla v|)\nabla v).$$

С этой целью напомним определение оператора Немыцкого.

Определение 2. Оператор $N_f(u) \equiv f(x,u)$, порожденный каратеодориевой функцией $f(x,u)$, называется оператором Немыцкого.

Докажем, что при условиях $(\mathrm{i})_1$–$(\mathrm{ii})_1$ и $(\mathrm{i})_2$–$(\mathrm{ii})_2$ эти операторы действуют соответственно:

$$\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v|)\nabla v) : \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega),$$

$$\operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla v|)\nabla v) : \mathbb{W}^{1,p_2}_0(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega),$$

где $p_1' = p_1/(p_1-1)$ и $p_2' = p_2/(p_2-1)$. Действительно, рассмотрим случай оператора $\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v|)\nabla v)$, поскольку оператор $\operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla v|)\nabla v)$ рассматривается аналогичным образом.

Итак, пусть $v \in \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega)$ при $p_1 \in (2,4]$, тогда оператор

$$\eta = \nabla v : \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \otimes \mathbb{L}^{p_1}(\Omega). \quad (3.8)$$

Рассмотрим следующую вектор-функцию:

$$f(x,\eta) \equiv \varphi_1(x,|\eta|)\eta. \quad (3.9)$$

В силу условия $(i)_1$ функция $\varphi_1(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой. Поэтому функция $\varphi_1(x,|\eta|)$ является каратеодориевой как функция

$$\varphi_1(x,|\eta|) : \Omega \otimes \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1.$$

Значит, произведение $\varphi_1(x,|\eta|)\eta$ является также каратеодориевой как функция от $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$. Таким образом, доказано, что функция

$$f(x,\eta)\equiv\varphi_1(x,|\eta|)\eta:\Omega\otimes\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

является каратеодориевой. Получим теперь оценку на рост функции $f(x,\eta)$. Действительно,

$$\begin{aligned}|f(x,\eta)|&\leqslant|\varphi_1(x,|\eta|)||\eta|\leqslant c_1|\eta|+c_2|\eta|^{p_1-1}\\&\leqslant\frac{|\eta|^{p_1-1}}{p_1-1}+\frac{p_1-2}{p_1-1}c_1^{(p_1-1)/(p_1-2)}+c_2|\eta|^{p_1-1}=\overline{c}_1+\overline{c}_2|\eta|^{p_1-1},\end{aligned}\tag{3.10}$$

где

$$\overline{c}_1=\frac{p_1-2}{p_1-1}c_1^{(p_1-1)/(p_1-2)},\quad \overline{c}_2=c_2+\frac{1}{p_1-1}.$$

Следовательно, функция $f(x,\eta)$ является каратеодориевой и удовлетворяет условию роста (3.10). Это означает, что соответствующий оператор Немыцкого $N_f(\eta)$ действует

$$\xi=N_f(\eta):\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)\to\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega),\ \ p_1'=\frac{p_1}{p_1-1},\tag{3.11}$$

и в силу теоремы М. А. Красносельского [4] является непрерывным отображением относительно сильных топологий соответствующих банаховых пространств

$$\mathbb{B}\equiv\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)\quad\text{и}\quad\mathbb{B}^*\equiv\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega).$$

Осталось заметить, что оператор $\operatorname{div}\cdot$, понимаемый в слабом смысле, действует следующим образом:

$$\operatorname{div}\xi:\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega)\otimes\mathbb{L}^{p_1'}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega).\tag{3.12}$$

Поскольку

$$\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v|)\nabla v)=\operatorname{div}(N_f(\nabla v)),$$

то приходим к выводу, что

$$\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla v|)\nabla v):\mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)\to\mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega).$$

Теперь заметим, что в силу условий $(\mathrm{ii})_1$ и $(\mathrm{ii})_2$ показатели $p_1\in(2,4]$ и $p_2\in(2,6]$, поэтому в силу ограниченности области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ и рефлексивности банахова пространства $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ имеют место следующие две цепочки плотных и непрерывных вложений:

$$\mathbb{H}_0^2(\Omega)\overset{ds}{\subset}\mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)\overset{ds}{\subset}\mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega)\overset{ds}{\subset}\mathbb{H}^{-2}(\Omega),\tag{3.13}$$

$$\mathbb{H}_0^2(\Omega)\overset{ds}{\subset}\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)\overset{ds}{\subset}\mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega)\overset{ds}{\subset}\mathbb{H}^{-2}(\Omega).\tag{3.14}$$

Введем скобки двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между банаховыми пространствами $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$, скобки двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega)$ и, наконец, скобки двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega)$. Введем, кроме того, операторы вложения $\mathbb{J}_1$ и $\mathbb{J}_2$ следующим образом:

$$\mathbb{J}_1 : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega), \quad \mathbb{J}_2 : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega).$$

Тогда с учетом (3.13) и (3.14) соответствующие транспонированные операторы

$$\mathbb{J}_1^t : \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad \mathbb{J}_2^t : \mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

определенные равенствами

$$\left\langle \mathbb{J}_1^t f_1, w\right\rangle = \langle f_1, \mathbb{J}_1 w\rangle_1 \quad \text{для всех} \quad f_1 \in \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega) \quad \text{и всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{3.15}$$

$$\left\langle \mathbb{J}_2^t f_2, w\right\rangle = \langle f_2, \mathbb{J}_2 w\rangle_2 \quad \text{для всех} \quad f_2 \in \mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega) \quad \text{и всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{3.16}$$

являются также операторами вложения. Поэтому если мы отождествим $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ с $\mathbb{J}_1\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_1'}(\Omega)$ и $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ с $\mathbb{J}_2\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_2'}(\Omega)$, то $\mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega)$ можно отождествить с $\mathbb{J}_1^t\mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$, а $\mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega)$ можно отождествить с $\mathbb{J}_2^t\mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$. И тогда после указанного отождествления мы получим из (3.15) и (3.16) следующие равенства скобок двойственности:

$$\langle f_1, w\rangle = \langle f_1, w\rangle_1 \quad \text{для всех} \quad f_1 \in \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega) \quad \text{и всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{3.17}$$

$$\langle f_2, w\rangle = \langle f_2, w\rangle_2 \quad \text{для всех} \quad f_2 \in \mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega) \quad \text{и всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{3.18}$$

Теперь мы можем дать определение сильного обобщенного решения задачи (2.11)–(2.13).

Определение 3. Функция класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ при некотором $\mathrm{T} > 0$ называется сильным обобщенным решением задачи (2.11)–(2.13), если выполнено следующее равенство:

$$\langle \mathrm{D}(u), w\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,\mathrm{T}] \quad \text{и всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{3.19}$$

где

$$\mathrm{D}(u) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\Delta^2 u + \Delta u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u) + \Delta u - \operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u),$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{H}^2_0(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

Замечание 2. Здесь нам необходимо пояснить, что оператор $\triangle^2$ нами понимается в следующем смысле:

$$\left\langle \triangle^2 u, w\right\rangle \equiv \int\limits_\Omega \triangle u \triangle w\, dx \quad \text{для всех} \quad u, w \in \mathbb{H}^2_0(\Omega).$$

И мы будем использовать термин интегрирования по „частям“ для распределения $\triangle^2 u$ в смысле указанного равенства.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) \equiv \Phi[u](t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\triangle u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \tag{3.20}$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \mathrm{J}[u](t) \equiv \int\limits_\Omega |\triangle u^{'}|^2\, dx + \int\limits_\Omega |\nabla u^{'}|^2\, dx. \tag{3.21}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^1_0(\Omega))$ *при некотором* $\mathrm{T} > 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$(\Phi^{'})^2(t) \leqslant 2\Phi(t)\mathrm{J}(t) \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,\mathrm{T}]. \tag{3.22}$$

Доказательство. Поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^1_0(\Omega))$, то справедливо равенство

$$\Phi^{'} = \int\limits_\Omega \left(\nabla u^{'}, \nabla u\right)\, dx + \int\limits_\Omega \triangle u^{'} \triangle u\, dx.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\int\limits_\Omega \left(\nabla u^{'}, \nabla u\right)\, dx\right| \leqslant \|\nabla u^{'}\|_2 \|\nabla u\|_2,$$

$$\left|\int\limits_\Omega \triangle u^{'} \triangle u\, dx\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega |\triangle u^{'}|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |\triangle u|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Стало быть,

$$
\begin{aligned}
(\Phi')^2 &\leqslant \left(\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 + \left(\int\limits_\Omega |\triangle u'|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |\triangle u|^2 \, dx \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\leqslant \|\nabla u'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2 + \int\limits_\Omega |\triangle u'|^2 \, dx \int\limits_\Omega |\triangle u|^2 \, dx \\
&+ 2\|\nabla u'\|_2 \|\nabla u\|_2 \left(\int\limits_\Omega |\triangle u'|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |\triangle u|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leqslant \|\nabla u'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2 + \int\limits_\Omega |\triangle u'|^2 \, dx \int\limits_\Omega |\triangle u|^2 \, dx \\
&+ \|\nabla u'\|_2^2 \int\limits_\Omega |\triangle u|^2 \, dx + \|\nabla u\|_2^2 \int\limits_\Omega |\triangle u'|^2 \, dx \\
&= \left(\|\nabla u'\|_2^2 + \int\limits_\Omega |\triangle u'|^2 \, dx \right) \left(\|\nabla u\|_2^2 + \int\limits_\Omega |\triangle u|^2 \, dx \right) = 2\mathrm{J}(t)\Phi(t),
\end{aligned}
$$

где мы воспользовались неравенством $2ab \leqslant a^2 + b^2$ при

$$
a = \|\nabla u'\|_2 \left(\int\limits_\Omega |\triangle u|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad b = \|\nabla u\|_2 \left(\int\limits_\Omega |\triangle u'|^2 \, dx \right)^{1/2}.
$$

Лемма доказана. □

Теперь мы перейдем к выводу первого и второго энергетических равенств. Предположим, что при некотором $\mathrm{T} > 0$ существует сильное обобщенное решение задачи (2.11)–(2.13), понимаемой в смысле определения 3, класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^2(\Omega))$.

Возьмем в равенстве (3.19) в качестве функции w само решение u: $w = u$. Тогда после интегрирования по „частям“ мы получим следующее равенство:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \triangle u'' \triangle u \, dx + \int\limits_\Omega (\nabla u'', \nabla u) \, dx + \int\limits_\Omega \left(\nabla u, \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_1(x, |\nabla u|) \nabla u] \right) dx \\
&\quad + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int\limits_\Omega \varphi_2(x, |\nabla u|) |\nabla u|^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla u^{''}, \nabla u\right)\, dx = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \left(\nabla u^{'}, \nabla u\right)\, dx - \|\nabla u^{'}\|_2^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla u^{'}\|_2^2, \tag{3.24}$$

$$\int\limits_{\Omega} \triangle u^{''} \triangle u\, dx = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \triangle u^{'} \triangle u\, dx - \int\limits_{\Omega} |\triangle u^{'}|^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Omega} |\triangle u|^2\, dx - \int\limits_{\Omega} |\triangle u^{'}|^2\, dx. \tag{3.25}$$

Рассмотрим отдельно следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 \equiv \int\limits_{\Omega} \left(\nabla u, \frac{\partial}{\partial t}[\varphi_1(x, |\nabla u|)\nabla u]\right)\, dx = \int\limits_{\Omega} \varphi_1(x, |\nabla u|)(\nabla u^{'}, \nabla u)\, dx \\ + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \varphi_{1s}^{'}(x, s)\Big|_{s=|\nabla u|} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|\, dx = \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Преобразуем интеграл I_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_3 &= \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \varphi_{1s}^{'}(x, s)\Big|_{s=|\nabla u|} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} |\nabla u| \varphi_{1s}^{'}(x, s)\Big|_{s=|\nabla u|} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} |\nabla u| \varphi_{1s}^{'}(x, s)\Big|_{s=|\nabla u|} (\nabla u^{'}, \nabla u)\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} \left(\nabla u^{'}, |\nabla u| \varphi_{1s}^{'}(x, s)\Big|_{s=|\nabla u|} \nabla u\right)\, dx. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Для интеграла I_2 получим следующее равенство:

$$\mathrm{I}_2 = \int\limits_{\Omega} \left(\nabla u^{'}, \varphi_1(x, |\nabla u|)\nabla u\right)\, dx. \tag{3.28}$$

Теперь из равенства (3.23) с учетом обозначений (3.20), (3.21) и определения интегралов I_2 и I_3 получим следующее равенство:

$$\Phi^{''} - \mathrm{J} + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx = \int\limits_{\Omega} \varphi_2(x, |\nabla u|)|\nabla u|^2\, dx. \tag{3.29}$$

Теперь наша задача — получить оценки сверху на интегралы I_2 и I_3, определенные равенствами (3.28) и (3.27). Рассмотрим интеграл I_2. Воспользуемся условием роста (3.1). Итак, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}_2| &\leqslant \int\limits_\Omega |\nabla u'||\varphi_1(x,|\nabla u|)||\nabla u|\,dx \leqslant \|\nabla u'\|_2\biggl(\int\limits_\Omega |\varphi_1(x,|\nabla u|)|^2|\nabla u|^2\,dx\biggr)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_\Omega |\varphi_1(x,|\nabla u|)|^2|\nabla u|^2\,dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{J} + \frac{2c_1^2}{2\varepsilon}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{2c_2^2}{2\varepsilon}\int\limits_\Omega |\nabla u|^{2(1+q_1)}\,dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{J} + \frac{2c_1^2}{\varepsilon}\Phi + \frac{c_2^2}{\varepsilon}\int\limits_\Omega |\nabla u|^{2(1+q_1)}\,dx,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где мы ввели обозначение $q_1 = p_1 - 2$, а величина $\varepsilon > 0$. Теперь отдельно рассмотрим интеграл

$$\mathrm{I}_4 = \int\limits_\Omega |\nabla u|^{2(1+q_1)}\,dx. \tag{3.31}$$

Заметим, что в силу условия $(\mathrm{ii})_1$ величина $p_1 \in (2,4]$ и, значит, в силу определения $q_1 = p_1 - 2 \in (0,2]$. Поэтому имеет место непрерывное вложение:

$$\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad q = 2(1+q_1).$$

Поэтому найдется такая наилучшая постоянная $c_5 > 0$, что

$$\|\nabla w\|_q \leqslant c_5\|\triangle w\|_2 \quad \text{для всех} \quad w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Значит, имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_4 &= \int\limits_\Omega |\nabla u|^{2(1+q_1)}\,dx \leqslant c_5^q\biggl(\int\limits_\Omega |\triangle u|^2\,dx\biggr)^{q/2} \\
&= c_5^q 2^{q/2}\biggl(\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\triangle u|^2\,dx\biggr)^{q/2} \leqslant c_5^q 2^{q/2}\Phi^{1+q_1}, \quad q_1 = p_1 - 2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Таким образом, для интеграла I_2 с учетом цепочки неравенств (3.30) и полученной оценки (3.32) вытекает следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{J} + \frac{2c_1^2}{\varepsilon}\Phi + \frac{c_2^2 c_5^q 2^{q/2}}{\varepsilon}\Phi^{1+q_1}, \quad q_1 = p_1 - 2, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.33}$$

Получим теперь оценку для интеграла I_3, определенного равенством (3.27). Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\mathrm{I}_3| &\leqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla u'||\varphi'_{1s}(x,|\nabla u|)||\nabla u|^2\,dx \\ &\leqslant \|\nabla u'\|_2 \biggl(\int\limits_{\Omega} |\varphi'_{1s}(x,|\nabla u|)|^2|\nabla u|^4\,dx\biggr)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |\varphi'_{1s}(x,|\nabla u|)|^2|\nabla u|^2|\nabla u|^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Заметим, что для функции $\varphi'_{1s}(x,s)s$ и функции $\varphi_1(x,s)$ справедливы такие же условия роста с теми же постоянными (см. условие $(\mathrm{ii})_1$). Поэтому дальше мы получим для интеграла I_3 ту же оценку, что и для интеграла I_2. Итак, получили оценку

$$|\mathrm{I}_3| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{J} + \frac{2c_1^2}{\varepsilon}\Phi + \frac{c_2^2c_5^q2^{q/2}}{\varepsilon}\Phi^{1+q_1}, \quad q_1 = p_1 - 2, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.35}$$

Таким образом, из оценок (3.33) и (3.35) и равенства (3.29) получим выражение

$$\Phi'' - \mathrm{J} + \varepsilon\mathrm{J} + \frac{4c_1^2}{\varepsilon}\Phi + \frac{c_2^2c_5^q2^{q/2+1}}{\varepsilon}\Phi^{1+q_1} + \int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega}\varphi_2(x,|\nabla u|)|\nabla u|^2\,dx, \tag{3.36}$$

где $q = 2(1+q_1)$, $q_1 = p_1 - 2$.

Теперь нам надо получить второе энергетическое равенство. Предварительно введем следующий функционал:

$$\psi(v) \equiv \int\limits_{\Omega} dx\,\mathcal{F}(x,|\nabla v|), \quad \mathcal{F}(x,|\nabla v|) = \int\limits_0^{|\nabla v|} s\varphi_2(x,s)\,ds \ \text{ для всех } \ v \in \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega). \tag{3.37}$$

Заметим, что этот функционал можно переписать в виде

$$\psi(h) = \int\limits_{\Omega} dx\,\mathcal{F}(x,h), \ \text{ где } \ h = |\nabla v| \in \mathbb{L}^{p_2}(\Omega). \tag{3.38}$$

Справедлива следующая известная лемма.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi_2(x,s)$ удовлетворяет условиям $(\mathrm{i})_2$–$(\mathrm{ii})_2$, тогда функционал $\psi(h)$, определенный формулой (3.38), действующий*

$$\psi(h) : \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \to \mathbb{R}^1, \quad q_2 = p_2 - 2,$$

является дифференцируемым по Фреше, и его производная Фреше

$$\psi_f^{'}(h) : \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega)$$

равна

$$\psi_f^{'}(h) = N_{s\varphi_2(x,s)}(h) \quad \textit{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \quad \textit{и почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Для дальнейшего нам потребуется следующий результат (см., например, [12]).

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *и* $\mathbb{G} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, *причем оператор* $\mathbb{F}$ *дифференцируем по Фреше в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *а оператор* $\mathbb{G}$ *дифференцируем по Фреше в точке* $\mathbb{F}(u)$. *Тогда их композиция*

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, *причем имеет место следующее равенство*:

$$\mathbb{K}_f^{'}(u) = \mathbb{G}_f^{'}(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}_f^{'}(u). \tag{3.39}$$

Тогда для функционала $\psi(u)$, определенного формулой (3.37), с учетом результата леммы 2 получим, что для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ имеет место следующее равенство:

$$\frac{d}{dt}\psi(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|\varphi_2(x,|\nabla u|)\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|\,dx. \tag{3.40}$$

Проведем следующие элементарные преобразования в равенстве (3.40):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} |\nabla u|\varphi_2(x,|\nabla u|)\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \varphi_2(x,|\nabla u|)\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2\,dx \\
&\quad = \int\limits_{\Omega} \varphi_2(x,|\nabla u|)(\nabla u^{'},\nabla u)\,dx = \int\limits_{\Omega} (\nabla u^{'},\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u)\,dx \\
&\quad = -\left\langle \operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u), u^{'} \right\rangle_2 = -\left\langle \operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u), u^{'} \right\rangle,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

где напомним $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p_2^{'}}(\Omega)$. Последнее равенство имеет место в силу равенства скобок двойственности (3.18).

Теперь мы можем перейти к выводу второго энергетического равенства. Действительно, возьмем теперь в качестве w в равенстве (3.19) производную по времени от самого решения: $w = u^{'}$. Тогда после интегрирования по „частям“ с учетом определения (3.21) функционала J и цепочки равенств (3.41) получим следующее равенство:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{J}+\int\limits_{\Omega}\left(\nabla u',\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u\right]\right)dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\\=-\left\langle\operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u),u'\right\rangle=\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,|\nabla u|)\,dx.\end{gathered}\tag{3.42}$$

Рассмотрим теперь отдельно интеграл

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_5&\equiv\int\limits_{\Omega}\left(\nabla u',\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u\right]\right)dx=\int\limits_{\Omega}(\nabla u',\nabla u')\varphi_1(x,|\nabla u|)\,dx\\&+\int\limits_{\Omega}(\nabla u',\nabla u)\varphi'_{1s}(x,s)\Big|_{s=|\nabla u|}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|\,dx=\int\limits_{\Omega}\varphi_1(x,|\nabla u|)|\nabla u'|^2\,dx\\&+\int\limits_{\Omega}\varphi'_{1s}(x,s)\Big|_{s=|\nabla u|}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2\,dx\\&=\int\limits_{\Omega}\varphi_1(x,|\nabla u|)|\nabla u'|^2\,dx+\int\limits_{\Omega}\varphi'_{1s}(x,s)\Big|_{s=|\nabla u|}|\nabla u|\left[\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|\right]^2dx\geqslant 0,\end{aligned}$$

где последнее неравенство выполнено в силу условий (3.3). Таким образом, из этого неравенства и равенства (3.42) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{J}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\leqslant\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,|\nabla u|)\,dx,\quad\mathcal{F}(x,|\nabla u|)=\int\limits_{0}^{|\nabla u|}s\varphi_2(x,s)\,ds.\tag{3.43}$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathrm{E}(t)\equiv\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,|\nabla u|)\,dx-\frac{1}{2}\mathrm{J}(t)-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx,\tag{3.44}$$

из которого и из (3.43) вытекает неравенство

$$\mathrm{E}(t)\geqslant\mathrm{E}(0).\tag{3.45}$$

Теперь потребуем выполнения первого условия на начальные данные:

$$\mathrm{E}(0)=\int\limits_{\Omega}\mathcal{F}(x,|\nabla u_0|)\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\triangle u_1|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u_1|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u_0|^2\,dx\geqslant 0.\tag{3.46}$$

Тогда из этого условия и из неравенства (3.45) получим, что

$$\mathrm{E}(t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, \mathrm{T}]. \tag{3.47}$$

Теперь воспользуемся свойством $(\mathrm{iii})_2$ для функции $\varphi_2(x, s)$ и из (3.47) получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \varphi_2(x, |\nabla u|)\, dx \geqslant \frac{\vartheta}{2} \mathrm{J}(t) + \frac{\vartheta}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx. \tag{3.48}$$

Из этого неравенства и неравенства (3.36) получим следующую цепочку неравенства:

$$\Phi'' - \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right) \mathrm{J} + \varepsilon \mathrm{J} + \frac{4c_1^2}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_2^2 c_5^q 2^{q/2+1}}{\varepsilon} \Phi^{1+q_1} + \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right) \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx$$
$$\geqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \varphi_2(x, |\nabla u|)\, dx - \frac{\vartheta}{2} \mathrm{J}(t) - \frac{\vartheta}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \geqslant 0.$$

Поскольку $\vartheta > 2$, то из этого неравенства получаем следующую оценку:

$$\begin{gathered} \left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right) \mathrm{J} \leqslant \Phi'' + \frac{c_7}{\varepsilon} \Phi + \frac{c_6}{\varepsilon} \Phi^{1+q_1}, \quad q_1 = p_1 - 2, \\ c_7 = 4c_1^2, \quad c_6 = c_2^2 c_5^q 2^{q/2+1}, \quad q = 2(q_1 + 1), \end{gathered} \tag{3.49}$$

при дополнительном условии, что

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right) > 1 \Rightarrow \varepsilon \in \left(0, \frac{\vartheta - 2}{2}\right).$$

Из неравенств (3.49) и (3.22) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному неравенству второго порядка:

$$\Phi \Phi'' - \alpha \bigl(\Phi'\bigr)^2 + \beta \Phi^2 + \gamma \Phi^{2+q_1} \geqslant 0, \quad q_1 = p_1 - 2, \tag{3.50}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon\right), \quad \beta = \frac{c_7}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{c_6}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{\vartheta - 2}{2}\right), \quad \vartheta > 2.$$

Введем новую функцию

$$\Psi = \Phi^{1-\alpha}. \tag{3.51}$$

Разделим обе части неравенства (3.50) на $\Phi^{1+\alpha} \geqslant 0$ (по определению (3.20)), тогда получим неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \frac{\alpha(\Phi')^2}{\Phi^{1+\alpha}} + \beta\Phi^{1-\alpha} + \gamma\Phi^{1+q_1-\alpha} \geqslant 0 \\ &\quad\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right] + \beta\Phi^{1-\alpha} + \gamma\Phi^{1+q_1-\alpha} \geqslant 0 \\ &\quad\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{d^2}{dt^2}\Phi^{1-\alpha} + \beta\Phi^{1-\alpha} + \gamma\Phi^{1+q_1-\alpha} \geqslant 0, \end{aligned}$$

откуда с учетом введенного обозначения (3.51) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{1-\alpha}\Psi'' + \beta\Psi + \gamma\Psi^{(1+q_1-\alpha)/(1-\alpha)} \geqslant 0. \tag{3.52}$$

Теперь сделаем еще одно предположение относительно начальных данных

$$\Phi'(0) = \int\limits_\Omega (\nabla u_1, \nabla u_0)\, dx + \int\limits_\Omega \triangle u_1 \triangle u_0\, dx > 0. \tag{3.53}$$

Поскольку по предположению $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, то $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}])$. Значит, найдется такой момент времени $t_1 > 0$, что

$$\Phi'(t) > 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1]. \tag{3.54}$$

Теперь заметим, что в силу определения (3.51) функции $\Psi(t)$ имеет место выражение

$$\Psi' = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi', \tag{3.55}$$

из которого в силу (3.54), поскольку $\alpha > 1$, получим, что

$$\Psi'(t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1]. \tag{3.56}$$

Тогда, умножая (3.52) на Ψ', получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{1-\alpha}\Psi'\Psi'' + \beta\Psi'\Psi + \gamma\Psi'\Psi^{(1+q_1-\alpha)/(1-\alpha)} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1],$$

из которого получим неравенство

$$\Psi'\Psi'' \geqslant \beta(\alpha-1)\Psi'\Psi + \gamma(\alpha-1)\Psi'\Psi^{(1+q_1-\alpha)/(1-\alpha)} \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1].$$

Отсюда получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Psi')^2 \geqslant \frac{\beta(\alpha-1)}{2}\frac{d}{dt}\Psi^2 + \frac{\gamma(\alpha-1)}{\delta}\frac{d}{dt}\Psi^\delta, \tag{3.57}$$

где

$$\delta = 1 + \frac{1+q_1-\alpha}{1-\alpha}.$$

Рассмотрим условие, что $\delta > 0$. Действительно, имеют место следующие выкладки:

$$\delta > 0 \Rightarrow \frac{1-\alpha+1+q_1-\alpha}{1-\alpha} > 0 \Rightarrow \frac{2\alpha-2-q_1}{\alpha-1} > 0 \Rightarrow 2\alpha > q_1 + 2$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon > q_1 + 2 \Rightarrow \varepsilon \in \left(0, \frac{\vartheta - 2q_1 - 2}{2}\right).$$

Таким образом, с необходимостью получим еще условие на величину $\vartheta > 2$ из условия $(\mathrm{iii})_2$. Действительно,

$$\vartheta > 2 + 2q_1, \quad q_1 = p_1 - 2. \tag{3.58}$$

Замечание 3. Отметим, что существуют такие функции $\varphi_2(x, |\nabla u|)$, для которых условие (3.58) выполняется. Действительно, пусть

$$\varphi_2(x, |\nabla u|) = |\nabla u|^{p_2-2} \quad \text{при} \quad q_2 > 2q_1,$$

где $q_1 = p_1 - 2$ и $q_2 = p_2 - 2$. Для этой функции $\vartheta = q_2 + 2$, и поэтому при условии $q_2 > 2q_1$ имеет место условие (3.58).

Пусть выполнено условие (3.58), и продолжим рассмотрение неравенства (3.57). После его интегрирования получим неравенство

$$\left(\Psi'\right)^2 \geqslant A^2 + \beta(\alpha-1)\Psi^2 + \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\delta}\Psi^\delta \geqslant A^2, \tag{3.59}$$

где

$$A^2 \equiv \left(\Psi'(0)\right)^2 - \beta(\alpha-1)\Psi^2(0) - \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\delta}\Psi^\delta(0). \tag{3.60}$$

Теперь потребуем выполнения еще одного условия на начальные данные

$$A^2 > 0. \tag{3.61}$$

С учетом определения (3.51) функции $\Psi(t)$ из условия (3.61) получим следующее эквивалентное неравенство:

$$(\alpha-1)^2\Phi_0^{-2\alpha}\left(\Phi'(0)\right)^2 - \beta(\alpha-1)\Phi_0^{-2\alpha}\Phi_0^2 - \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\delta}\Phi_0^{-\delta\alpha}\Phi_0^\delta > 0,$$

из которого получим следующее неравенство:

$$\left(\Phi'(0)\right)^2 > \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{(\alpha-1)\delta}\Phi_0^{\alpha(2-\delta)+\delta}. \tag{3.62}$$

Проведем следующие алгебраические преобразования:

$$\alpha(2-\delta) + \delta = 2\alpha + (1-\alpha)\delta = 2\alpha + 1 - \alpha + 1 + q_1 - \alpha = 2 + q_1,$$
$$\delta(\alpha-1) = \alpha - 1 - 1 - q_1 + \alpha = 2\alpha - q_1 - 2.$$

Таким образом, из (3.62) приходим к следующему неравенству:

$$\left(\Phi^{'}(0)\right)^2 > \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha-q_1-2}\Phi_0^{2+q_1}, \quad q_1 = p_1 - 2, \tag{3.63}$$

причем $2\alpha - q_1 - 2 > 0$ при условии $\vartheta > 2 + 2q_1$ и

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{\vartheta - 2q_1 - 2}{2}\right).$$

Замечание 4. Теперь наша задача доказать, что множество функций $\varphi_1(x,s)$ и $\varphi_2(x,s)$, а также множество начальных условий $u_0(x), u_1(x)$, удовлетворяющих одновременно условиям (3.46), (3.53) и (3.63), непусто. Действительно, пусть $2q_1 < q_2$ ($q_1 = p_1 - 2$ и $q_2 = p_2 - 2$) и, кроме того, $q_3 \in (2q_1, q_2)$ и при фиксированной функции $u_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ (напомним, что $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$), для которой $\|\triangle u_0\|_2 > 0$, пусть $u_1(x)$ — это классическое решение $u_1(x) \in \mathbb{C}^{4+\mu}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0^{(2)}(\overline{\Omega})$ следующей задачи:

$$\begin{gathered}\triangle^2 u_1(x) - \triangle u_1(x) = (|u_0|^{q_3/2}u_0)(x) \in \mathbb{C}^\mu(\overline{\Omega}), \quad \mu = \mu(q_3) \in (0,1], \\ u_1\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_1}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0.\end{gathered} \tag{3.64}$$

Тогда условие (3.53) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi^{'}(0) &= \int\limits_\Omega \triangle u_1 \triangle u_0\,dx + \int\limits_\Omega (\nabla u_1, \nabla u_0)\,dx \\ &= \int\limits_\Omega \left[\triangle^2 u_1 - \triangle u_1\right] u_0\,dx = \int\limits_\Omega |u_0|^{2+q_3/2} dx > 0,\end{aligned}$$

которое, очевидно, выполнено. Проверим теперь условие (3.63). Действительно, после подстановки получим неравенство

$$\left(\int\limits_\Omega |u_0|^{2+q_3/2}\,dx\right)^2 > \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha-q_1-2}\Phi_0^{2+q_1}.$$

Пусть теперь вместо $u_0(x)$ мы возьмем $ru_0(x)$, где $r > 0$. Тогда условие (3.53) не изменится, а после подстановки последнее неравенство получим следующее выражение:

$$r^{4+q_3}\left(\int\limits_\Omega |u_0|^{2+q_3/2}\,dx\right)^2 > r^4\frac{\beta}{\alpha-1}\Phi_0^2 + r^{4+2q_1}\frac{2\gamma}{2\alpha-q_1-2}\Phi_0^{2+q_1}.$$

Тогда, поскольку по определению $q_3 > 2q_1$, при достаточно большом $r > 0$ неравенство (3.44) будет выполнено. Наконец, рассмотрим условие (3.47), которое мы для удобства выпишем

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, |\nabla u_0|)\, dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_1|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\triangle u_1|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^2\, dx.$$

Возьмем в качестве функции $\varphi_2(x, |\nabla u|) = |\nabla u|^{q_2}$ при $q_2 = p_2 - 2$, тогда после интегрирования получим, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(x, |\nabla u_0|)\, dx = \frac{1}{q_2+2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^{q_2+2}\, dx.$$

Значит, получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_1|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\triangle u_1|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^2\, dx \leqslant \frac{1}{q_2+2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^{q_2+2}\, dx. \tag{3.65}$$

Теперь введем функцию Грина $\mathrm{K}(x,y)$ линейной неоднородной задачи (3.64), которая в силу результатов работы [5] существует (соответствующий оператор Грина $\mathbb{K} : \mathbb{C}^{\mu}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{C}^{4+\mu}(\overline{\Omega})$), с помощью которой можно выразить решение $u_1(x)$ этой задачи через правую часть следующим образом:

$$u_1(x) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{K}(x,y)(|u_0|^{q_3/2}u_0)(y)\, dy.$$

Подставим эту функцию в неравенство (3.65) и одновременно сделаем замену $u_0 \to ru_0$ и получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} r^{2+q_3}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{\Omega} \nabla_x \mathrm{K}(x,y)(|u_0|^{q_3/2}u_0)(y)\, dy\right|^2 dx \\ + r^{2+q_3}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{\Omega} \triangle_x \mathrm{K}(x,y)(|u_0|^{q_3/2}u_0)(y)\, dy\right|^2 dx \\ + r^2\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^2\, dx \leqslant r^{q_2+2}\frac{1}{q_2+2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^{q_2+2}\, dx, \end{aligned}$$

которое, очевидно, будет выполнено при достаточно большом $r > 0$, поскольку $q_3 < q_2$. Таким образом, условия (3.46), (3.53) и (3.63) являются совместными.

Продолжим исследование неравенства (3.59), из которого вытекает, что
$$\left|\Psi^{'}\right| \geqslant A > 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1]. \tag{3.66}$$
Значит,
$$-\Psi^{'} \geqslant A > 0 \Rightarrow \Psi^{'} \leqslant -A < 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1].$$
Теперь напомним, что
$$\Psi^{'}(t) = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi^{'}(t).$$
Стало быть,
$$(1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi^{'}(t) \leqslant -A \Rightarrow \Phi^{'} \geqslant \frac{A}{\alpha-1}\Phi^{\alpha} > 0,$$
но отсюда вытекает, что при начальном условии (3.53) величина $\Phi^{'}(t)$ остается больше нуля для всего интервала существования решения исходной задачи. Таким образом, из (3.66) получим
$$\Psi^{'}(t) \leqslant -A < 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, \mathrm{T}_0),$$
где T_0 — это время существования решения. Интегрируя последнее неравенство, получим, что
$$\Psi(t) \leqslant \Psi_0 - At,$$
значит, за конечное время $\mathrm{T}_0 \in [0, \mathrm{T}_1]$ функция $\Psi(t)$ обратится в нуль, где
$$\mathrm{T}_1 = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A} > 0.$$
Стало быть,
$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty.$$
Теперь наша задача выбрать параметр
$$\varepsilon \in \left(0, \frac{\vartheta - 2q_1 - 2}{2}\right)$$
оптимальным образом. Действительно, выберем
$$\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{\vartheta - 2q_1 - 2}{2}\right)$$
как такое значение, при котором величина
$$Q_0 = Q_0(\varepsilon) \equiv \frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2}\Phi_0^{q_1}, \quad q_1 = p_1 - 2,$$
принимает минимальное значение. Ясно, что это число ε_0 является функцией от Φ_0.

Таким образом, в этом параграфе мы получили следующий результат — при условиях (3.46), (3.53), (3.58) и (3.63) сильное обобщенное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$ задачи (2.11)–(2.13) в смысле определения 3 не существует глобально во времени. Теперь наша задача доказать, что $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0,u_1) > 0$, т.е. доказать локальную во времени разрешимость задачи в сильном обобщенном смысле для любых $u_0, u_1 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. И это мы докажем в следующем параграфе.

§4. Локальная разрешимость

Задачу (2.11)–(2.13) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbb{A}u+\frac{d}{dt}\mathbb{B}_1(u)+\mathbb{L}u = \mathbb{B}_2(u), \;\; u(0)=u_0, \;\; u'(0)=u_1, \;\; u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbb{A} \equiv \triangle^2 - \triangle, \quad \mathbb{B}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(\varphi_1(x,|\nabla u|)\nabla u), \\ &\mathbb{B}_2(u) \equiv -\operatorname{div}(\varphi_2(x,|\nabla u|)\nabla u), \quad \mathbb{L} \equiv -\triangle. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для дальнейшего нам необходимо доказать обратимость оператора

$$\mathbb{A} \equiv \triangle^2 - \triangle : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$$

и липшиц-непрерывность обратного оператора

$$\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

С этой целью мы воспользуемся следующим вариантом теоремы Браудера–Минти (см., например, [1]).

Теорема Браудера–Минти. *Пусть оператор $\mathbb{A}$, действующий из банахова пространства $\mathbb{W}$ в сильно сопряженное $\mathbb{W}^*$, является радиально-непрерывным, сильно монотонным и коэрцитивным. Тогда существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{W}^* \to \mathbb{W}$, который является липшиц-непрерывным.*

В формулировке теоремы участвуют три понятия, для которых мы для полноты изложения приведем следующие определения.

Определение 4. Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}^*$ называется радиально-непрерывным, если функция

$$\varphi(s) = \langle \mathbb{A}(u+sv), v\rangle \in \mathbb{C}[0,1] \tag{4.3}$$

для всех $u, v \in \mathbb{W}$, где символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ мы обозначили скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}^*$.

Определение 5. Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}^*$ называется сильно монотонным, если существует такая постоянная $m > 0$, что имеет место следующее неравенство:

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle \geqslant m\|u - v\|^2, \tag{4.4}$$

где $\|\cdot\|$ — это норма банахова пространства $\mathbb{W}$.

Определение 6. Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}^*$ называется коэрцитивным, если существует такая функция

$$\gamma(s) : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+ \quad \lim_{s\to+\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

что имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{W}. \tag{4.5}$$

Теперь нам надо проверить, что оператор $\mathbb{A}$, определенный формулой (4.2), является радиально-непрерывным, сильно монотонным и коэрцитивным как оператор действующий из $\mathbb{W} = \mathbb{H}^2_0(\Omega)$ в $\mathbb{W}^* = \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$, т. е. что он удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера–Минити.

(I) Докажем, что оператор $\mathbb{A}$ является радиально-непрерывным. Действительно, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\varphi(s) = \langle \mathbb{A}(u + sv), v \rangle &= \int\limits_\Omega (\nabla(u + sv), \nabla v)\; dx + \int\limits_\Omega (\triangle u + s\triangle v)\triangle v\, dx \\ &= \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)\, dx + s\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \int\limits_\Omega \triangle u \triangle v\, dx + s\int\limits_\Omega |\triangle v|^2\, dx.\end{aligned}$$

Ясно, что для любых $u, v \in \mathbb{H}^2_0(\Omega)$ функция $\varphi(s) \in \mathbb{C}[0, 1]$. Следовательно, оператор $\mathbb{A} : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ является радиально-непрерывным.

(II) Докажем теперь, что оператор $\mathbb{A} : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ является сильно монотонным. Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle &= \int\limits_\Omega |\nabla u - \nabla v|^2\, dx + \int\limits_\Omega |\triangle u - \triangle v|^2\, dx \\ &\geqslant \int\limits_\Omega |\triangle u - \triangle v|^2\, dx = \|u - v\|^2,\end{aligned}$$

где символом $\|\cdot\|$ мы обозначили норму банахова пространства $\mathbb{H}^2_0(\Omega)$. Таким образом, оператор $\mathbb{A} : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ является сильно монотонным с постоянной $m = 1$.

(III) Докажем коэрцитивность оператора $\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$. Действительно, имеет место цепочка выражений

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int\limits_\Omega |\triangle u|^2\, dx \geqslant \int\limits_\Omega |\triangle u|^2\, dx = \|u\|^2.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ является коэрцитивным с функцией $\gamma(s) = s$. Поэтому в силу теоремы Браудера–Минти оператор $\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$, определенный формулой (4.2), является обратимым, причем обратный оператор

$$\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^2(\Omega)$$

является липшиц-непрерывным. Давайте докажем, что при этом постоянная Липшица равна 1. Действительно, в силу доказанного свойства (II) сильной монотонности оператора $\mathbb{A}$ имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle \geqslant \|u - v\|^2 \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{4.6}$$

из которого в силу стандартного определения нормы $\|\cdot\|_*$ сильно сопряженного банахова пространства $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ к банахову пространству $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$

$$\|f\|_* \equiv \sup_{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega),\ \|v\| \leqslant 1} |\langle f, v \rangle| \tag{4.7}$$

имеет место неравенство

$$\|\mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v)\|_* \|u - v\| \geqslant \langle \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), u - v \rangle\,. \tag{4.8}$$

Действительно, неравенство (4.8) есть простейшее следствие формулы (4.7). Именно справедлива общая формула

$$|\langle f, w \rangle| \leqslant \|f\|_* \|w\|. \tag{4.9}$$

Докажем это неравенство. Действительно, если $w = \vartheta$ — нулевому элементу банахова пространства $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$, то это неравенство выполнено. Пусть теперь $w \neq \vartheta$, тогда из (4.7) вытекает следующее неравенство:

$$|\langle f, v \rangle| \leqslant \|f\|_* \quad \text{для всех} \quad \|v\| \leqslant 1.$$

В частности, для

$$v = \frac{w}{\|w\|}$$

получим выражение

$$|\langle f, w \rangle| \leqslant \|f\|_* \|w\|.$$

Поэтому неравенство (4.8) есть следствие неравенства (4.9), в котором надо положить

$$f = \mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v), \quad w = u - v.$$

Из неравенств (4.6) и (4.8) вытекает неравенство

$$\|u - v\| \leqslant \|\mathbb{A}(u) - \mathbb{A}(v)\|_* \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{4.10}$$

Теперь положим
$$w_1 = \mathbb{A}(u), \quad w_2 = \mathbb{A}(v),$$
откуда из (4.10) в силу доказанной обратимости оператора $\mathbb{A} : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ приходим к неравенству
$$\|\mathbb{A}^{-1}(w_1) - \mathbb{A}^{-1}(w_2)\| \leqslant \|w_1 - w_2\|_* \quad \text{для всех} \quad w_1, w_2 \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \qquad (4.11)$$
Таким образом, нами доказано, что оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ является липшиц-непрерывным с постоянной Липшица, равной 1.

В классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}_0^2(\Omega))$ с учетом обратимости оператора $\mathbb{A}$ можно ввести новую функцию $v = \mathbb{A}u$ и переписать задачу (4.1) в следующем эквивалентном виде:
$$\begin{gathered}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d}{dt}\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v) + \mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}v = \mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}v), \\ v_0 = v(0) = \mathbb{A}u_0 \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \quad v_1 = v'(0) = \mathbb{A}u_1 \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega).\end{gathered} \qquad (4.12)$$
В классе $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$ при некотором $\mathrm{T} > 0$ задача (4.12) эквивалентна следующему интегральному уравнению:
$$v(t) = w_1 + \int\limits_0^t ds\, G(v)(s), \quad w_1 = v_0 + \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v_0)t, \qquad (4.13)$$
$$G(v)(s) \equiv v_1 - \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v(s)) + \int\limits_0^s d\sigma \left[-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}v(\sigma) + \mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}v(\sigma))\right]. \qquad (4.14)$$

Замечание 5. При выводе интегрального уравнения (4.13) мы воспользовались тем, что оператор $\mathbb{B}_1(w)$ является непрерывным оператором, но это действительно так — это, как мы покажем ниже, вытекает из свойства $(\mathrm{iii})_1$.

Будем искать решение интегрального уравнения (4.13) в банаховом пространстве
$$\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$
С этой целью введем следующее замкнутое, ограниченное и выпуклое подмножество этого банахова пространства:
$$\mathbb{V}_r \equiv \left\{ v \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) : \ |||v||| = \operatorname*{ess.sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]} \|v\|_* \leqslant r \right\} \text{при некотором } r > 0, \qquad (4.15)$$
где $\|\cdot\|_*$ — это норма банахова пространства $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

Прежде всего нам нужно получить оценки сверху для операторов
$$\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v) \quad \text{и} \quad \mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}v)$$

при $v \in \mathbb{V}_r$ по норме $\|\cdot\|_*$. Действительно, рассмотрим первый оператор. В силу условия роста $(\mathrm{ii})_1$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{B}_1(w)\|_* &\leqslant c_8\||\nabla w|\varphi_1(x,|\nabla w|)\|_{p_1'} \leqslant c_8\left[c_1\|\nabla w\|_{p_1'} + c_2\||\nabla w|^{p_1-1}\|_{p_1'}\right]\\ &\leqslant c_9\|\nabla w\|_{p_1} + c_{10}\|\nabla w\|_{p_1}^{p_1-1}\\ &\leqslant \frac{p_1-2}{p_1-1}c_9^{(p_1-1)/(p_1-2)} + \frac{1}{p_1-1}\|\nabla w\|_{p_1}^{p_1-1} + c_{10}\|\nabla w\|_{p_1}^{p_1-1}\\ &= c_{11} + c_{12}\|\nabla w\|_{p_1}^{p_1-1},\end{aligned} \tag{4.16}$$

где символом $\|\cdot\|_r$ мы обозначаем норму банахова пространства $\mathbb{L}^r(\Omega)$. Причем при выводе последнего неравенства мы воспользовались тем, что по условию $(\mathrm{ii})_1$ величина $p_1 > 2$. Возьмем в последнем неравенстве $w = \mathbb{A}^{-1}v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, тогда из неравенства (4.16) получим следующую искомую оценку:

$$\|\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v)\|_* \leqslant c_{11}+c_{12}\|\nabla\mathbb{A}^{-1}v\|_{p_1}^{p_1-1} \leqslant c_{11}+c_{13}\|\mathbb{A}^{-1}v\|^{p_1-1} \leqslant c_{11}+c_{13}\|v\|_*^{p_1-1}, \tag{4.17}$$

где мы воспользовались липшиц-непрерывностью оператора $\mathbb{A}^{-1}$ с постоянной Липшица, равной 1, и цепочкой непрерывных и плотных вложений (3.13). Итак, мы пришли к следующей оценке:

$$\|\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v)\|_* \leqslant c_{11} + c_{13}\|v\|_*^{p_1-1} \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \tag{4.18}$$

Аналогичным образом доказывается следующая оценка:

$$\|\mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}v)\|_* \leqslant c_{14} + c_{15}\|v\|_*^{p_2-1} \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{4.19}$$

где мы воспользовались также липшиц-непрерывностью с постоянной Липшица, равной 1, и цепочкой непрерывных вложений (3.14).

Тогда для величины w_1, определенной в формуле (4.13), справедлива следующая оценка:

$$\|w_1\|_* \leqslant \|v_0\|_* + \mathrm{T}\|\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v_0)\|_* \leqslant \|v_0\|_* + \mathrm{T}c_{11} + \mathrm{T}c_{13}\|v_0\|_*^{p_1-1}.$$

Поэтому если выбрать $r > 0$ настолько большим, чтобы имело место следующее неравенство:

$$\|v_0\|_* + \mathrm{T}c_{11} + \mathrm{T}c_{13}\|v_0\|_*^{p_1-1} \leqslant \frac{r}{2},$$

то получим неравенство

$$\|w_1\|_* \leqslant \frac{r}{2}. \tag{4.20}$$

Введем теперь оператор

$$\mathbb{H}(v) \equiv w_1 + \int\limits_0^t ds G(v)(s), \tag{4.21}$$

где $G(v)(s)$ определена формулой (4.14). Тогда интегральное уравнение (4.13) можно переписать в операторной форме

$$v = \mathbb{H}(v). \tag{4.22}$$

Докажем, что оператор $\mathbb{H}(v)$, определенный формулой (4.21), действует из $\mathbb{V}_r$ в $\mathbb{V}_r$, является сжимающим на $\mathbb{V}_r$ при достаточно большом $r > 0$ и достаточно малом $\mathrm{T} > 0$.

Прежде всего получим оценку сверху для оператора $G(v)(s)$, определенного формулой (4.14). Действительно, заметим, что линейный оператор $\mathbb{L}$ является ограниченным как оператор

$$\mathbb{L} \equiv -\triangle : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

поэтому из оценок (4.18) и (4.19) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|G(v)\|_*(s) \leqslant \|v_1\|_* + c_{11} + c_{13}\|v\|_*^{p_1-1}(s) \\ + \int\limits_0^s d\sigma \left[c_{16}\|v\|_*(\sigma) + c_{14} + c_{15}\|v\|_*^{p_2-1}(\sigma)\right]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Теперь с учетом оценки (4.23) мы получим следующую оценку для оператора $\mathbb{H}(v)$:

$$\begin{aligned} |||\mathbb{H}(v)||| \leqslant \|w_1\|_* + \mathrm{T}\left[\|v_1\|_* + c_{11} + c_{13}|||v|||^{p_1-1}\right] \\ + \mathrm{T}^2\left[c_{16}|||v||| + c_{14} + c_{15}|||v|||^{p_2-1}\right] \leqslant \frac{r}{2} + \mathrm{T}\left[\|v_1\|_* + c_{11} + c_{13}r^{p_1-1}\right] \\ + \mathrm{T}^2\left[c_{16}r + c_{14} + c_{15}r^{p_2-1}\right] \leqslant \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $r > 0$. Таким образом,

$$\mathbb{H} : \mathbb{V}_r \to \mathbb{V}_r.$$

Теперь наша задача — доказать сжимаемость оператора $\mathbb{H}$ на $\mathbb{V}_r$ при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $r > 0$. Действительно, пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{V}_r$. Тогда в силу условий $(\mathrm{iii})_1$ и $(\mathrm{iv})_2$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
&|||\mathbb{H}(v_1)-\mathbb{H}(v_2)|||\leqslant \mathrm{T}|||G(v_1)-G(v_2)|||\leqslant \mathrm{T}|||\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v_1)-\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v_2)|||\\
&\quad+\mathrm{T}^2|||\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}v_1-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}v_2|||+\mathrm{T}^2|||\mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}v_1)-\mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}v_2)|||\\
&\quad\leqslant \mathrm{T}c_{17}\operatorname*{ess.sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mu_1(\mathrm{R}_1)\|\mathbb{A}^{-1}v_1-\mathbb{A}^{-1}v_2\|_{1,p_1}+\mathrm{T}^2c_{17}\operatorname*{ess.sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]}\|\mathbb{A}^{-1}v_1-\mathbb{A}^{-1}v_2\|\\
&\quad+\mathrm{T}^2c_{17}\operatorname*{ess.sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]}\mu_2(\mathrm{R}_2)\|\mathbb{A}^{-1}v_1-\mathbb{A}^{-1}v_2\|_{1,p_2},
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

где

$$\mathrm{R}_1=\max\{\|\mathbb{A}^{-1}v_1\|_{1,p_1},\|\mathbb{A}^{-1}v_2\|_{1,p_1}\},\quad \mathrm{R}_2=\max\{\|\mathbb{A}^{-1}v_1\|_{1,p_2},\|\mathbb{A}^{-1}v_2\|_{1,p_2}\},$$

а величина $\|\cdot\|_{1,p}$ — это норма банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ при $p>2$. Теперь воспользуемся непрерывным вложением

$$\mathbb{H}_0^2(\Omega)\subset\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\quad\text{при}\quad N=3\quad\text{и}\quad p=(2,6].$$

Поэтому можно продолжить оценку (4.24) и получить следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
|||\mathbb{H}(v_1)-\mathbb{H}(v_2)|||&\leqslant c_{17}c_{18}\mathrm{T}\mu_1(c_{18}\mathrm{R})|||v_1-v_2|||\\
&\quad+c_{17}\mathrm{T}^2|||v_1-v_2|||+c_{19}c_{17}\mathrm{T}^2\mu_2(c_{19}\mathrm{R})|||v_1-v_2|||,
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

где мы воспользовались липшиц-непрерывностью оператора $\mathbb{A}^{-1}$ с постоянной Липшица, равной 1, $\mathrm{R}=\max\{|||v_1|||,|||v_2|||\}$, c_{18} — это наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^2(\Omega)\subset\mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$:

$$\|w\|_{1,p_1}\leqslant c_{18}\|w\|\quad\text{для всех}\quad w\in\mathbb{H}_0^2(\Omega),$$

c_{19} — это наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^2(\Omega)\subset\mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega)$:

$$\|w\|_{1,p_2}\leqslant c_{19}\|w\|\quad\text{для всех}\quad w\in\mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Заметим, что поскольку $v_1,v_2\in\mathbb{V}_r$, то $R\leqslant r$. Потребуем теперь, чтобы

$$c_{18}c_{17}\mathrm{T}\mu_1(c_{18}r)+c_{17}\mathrm{T}^2+c_{17}c_{19}\mathrm{T}^2\mu_2(c_{19}r)\leqslant\frac{1}{2},\tag{4.26}$$

что может быть сделано за счет выбора достаточно малого $\mathrm{T}>0$. Так что в результате получим следующее неравенство:

$$|||\mathbb{H}(v_1)-\mathbb{H}(v_2)|||\leqslant\frac{1}{2}|||v_1-v_2|||.$$

Следовательно, из теоремы о сжимающем отображении вытекает, что операторное уравнение (4.22) имеет единственное решение класса $v(x,t)\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$.

Докажемп теперь, что решение $v(t) \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ интегрального уравнения (4.13) может быть продолжено на такой максимальный интервал $[0, \mathrm{T}_0)$, что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \|v\|_*(t) = +\infty.$$

Действительно, рассмотрим норму

$$\psi(\mathrm{T}) \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t \in [0, \mathrm{T}]} \| v(t) \|_* (t).$$

Как функция от T функция $\psi(\mathrm{T})$ является монотонно неубывающей. Стало быть, при $\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0$ функция $\psi(\mathrm{T})$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что $\psi(\mathrm{T})$ имеет конечный предел при $\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0$. Пусть $\mathrm{T}^{'} \in (0, \mathrm{T}_0)$ Рассмотрим следующие интегральные уравнения:

$$v(\mathrm{T}^{'}) = v_0 + \int\limits_0^{\mathrm{T}^{'}} ds\, \overline{G}(v)(s), \quad \overline{G}(v)(s) = G(v)(s) + \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1} v_0), \tag{4.27}$$

где $G(v)(s)$ определено формулой (4.14)

$$v(\mathrm{T}^{'} + t) = v(\mathrm{T}^{'}) + \int\limits_{\mathrm{T}^{'}}^{\mathrm{T}^{'}+t} ds\, \overline{G}(v)(s), \ t > 0. \tag{4.28}$$

Введем функцию $w(t) = v(\mathrm{T}^{'} + t)$ и сделаем замену переменных $\sigma = s - \mathrm{T}^{'}$ в последнем интеграле. Тогда получим уравнение

$$w(t) = v(\mathrm{T}^{'}) + \int\limits_0^t d\sigma\, \overline{G}(w)(\sigma), \ t > 0. \tag{4.29}$$

Заметим, что

$$\|v\|_*(\mathrm{T}^{'}) \leqslant C < +\infty, \quad \mathrm{T}^{'} \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{4.30}$$

А уравнение (4.29) имеет вид (4.13). Поэтому найдется такой момент времени $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*(\mathrm{T}^{'})$, что существует решение уравнения (4.29) на интервале $t \in (0, \mathrm{T}^*)$. В силу (4.30) функция $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*(\mathrm{T}^{'})$ имеет минимум, больший нуля, который мы снова обозначим через T^*. Теперь в качестве $\mathrm{T}^{'}$ возьмем величину $\mathrm{T}^{'} = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}^*/2$. Таким образом, получаем, что существует решение задачи (4.29) на интервале $t \in (0, \mathrm{T}^*)$. Теперь подставим выражение для $v(\mathrm{T}')$ из уравнения (4.27) в уравнение (4.29), тогда получим

$$v(t_0) = v_0 + \int\limits_0^{t_0} ds\, \overline{G}(v)(s), \; t_0 = \mathrm{T}' + t, \; t \in (0, \mathrm{T}^*). \tag{4.31}$$

Стало быть, в силу предыдущего существует единственное решение задачи (4.31) на интервале $t_0 \in (0, \mathrm{T}' + \mathrm{T}^*)$. В силу выбора $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}^*/2$ имеем $t_0 \in (0, \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}^*/2)$. Таким образом, используя указанный алгоритм продолжения во времени, мы приходим к выводу, что $\mathrm{T}_0 = +\infty$. Полученное противоречие с условием, что $\mathrm{T}_0 < +\infty$ доказывает следующее предельное равенство:

$$\lim_{\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0} \psi(\mathrm{T}) = +\infty.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| \, v \, \|_* \, (t) = +\infty.$$

Докажем, что решение операторного уравнения (4.22) класса $v(x,t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$ является гладким класса $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. С этой целью воспользуемся так называемым „бутстэп“ методом. Прежде всего докажем, что

$$v(x,t) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Действительно, имеет место следующая оценка:

$$\|v(t_1) - v(t_2)\|_* \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} ds \|\overline{G}(v)\|_*(s) \leqslant |||\overline{G}(v)||| |t_1 - t_2| \to 0 \quad \text{при} \quad t_1 \to t_2$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, \mathrm{T}]$. Следовательно, $v(x,t) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Теперь наша задача — доказать, что $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Действительно, с этой целью нужно доказать, что

$$G(v)(s) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Поскольку $v(x,t) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$ и липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{A}^{-1}$ с постоянной Липшица, равной 1, имеет место следующая оценка:

$$\|\mathbb{A}^{-1} v(t_1) - \mathbb{A}^{-1} v(t_2)\| \leqslant \|v(t_1) - v(t_2)\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad t_1 \to t_2$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, \mathrm{T}]$. Следовательно, $\mathbb{A}^{-1} v \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^2_0(\Omega))$. С другой стороны, в силу условий $(\mathrm{iii})_1$ и $(\mathrm{iv})_2$ для операторов $\mathbb{B}_1(\cdot)$ и $\mathbb{B}_2(\cdot)$ имеют место следующие оценки:

$$\|\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1} v(t_1)) - \mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1} v(t_2))\|_* \leqslant c_{21} \mu_1(c_{20} \mathrm{R}) \|\mathbb{A}^{-1} v(t_1) - \mathbb{A}^{-1} v(t_2)\| \to 0$$

при $t_1 \to t_2$ для всех $t_1, t_2 \in [0, \mathrm{T}]$. Таким образом,

$$\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v(t)) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\mathbb{B}_2(\mathbb{A}^{-1}v(t)) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Наконец,

$$\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}v(t) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$$

в силу линейности и непрерывности оператора $\mathbb{L} \equiv -\triangle$, как действующего

$$\mathbb{L} \equiv -\triangle : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \subset \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega).$$

Стало быть,

$$G(v)(s) \in \mathbb{C}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Поэтому

$$\mathbb{H}(v) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)),$$

и в силу операторного равенства (4.22) получим, что

$$v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Докажем теперь, что отсюда и из определения (4.14) функции $G(v)(s)$ будет следовать, что

$$\mathbb{H}(v) \in \mathbb{C}^{(2)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Для этого нам нужно доказать, что

$$\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v(t)) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Прежде всего заметим, что в силу теоремы 1 о цепном правиле для производной Фреше имеет место включение

$$\mathbb{A}^{-1}v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^2_0(\Omega)),$$

поскольку $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \to \mathbb{H}^2_0(\Omega)$ — это линейный ограниченный оператор. Теперь в силу свойства $(\mathrm{iii})_1$ оператор

$$\mathbb{B}_1(w) \equiv -\operatorname{div}(\varphi_1(x, |\nabla w|)\nabla w) : \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega),$$

порожденный этой формулой, является дифференцируемым по Фреше. Теперь осталось применить теорему 1 и получить, что

$$\mathbb{B}_1(\mathbb{A}^{-1}v(t)) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Таким образом,

$$G(v)(s) \in \mathbb{C}^{(1)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)),$$

но тогда

$$\mathbb{H}(v) \in \mathbb{C}^{(2)}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Следовательно, в силу операторного равенства (4.22) получим, что

$$v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Теперь заметим, что

$$u = \mathbb{A}^{-1}v,$$

и в силу теоремы 1 о цепном правиле для производных Фреше получим, что

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^2_0(\Omega)).$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены свойства* $(\mathrm{i})_1-(\mathrm{iii})_1$ *и* $(\mathrm{i})_2,(\mathrm{ii})_2,(\mathrm{iv})_2$, *тогда для любых* $u_0(x),u_1(x)\in\mathbb{H}^2_0(\Omega)$ *найдется такое* $\mathrm{T}_0=\mathrm{T}_0(u_0,u_1)>0$, *что существует сильное обобщенное решение задачи* (2.11)–(2.13) *класса* $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^2_0(\Omega))$, *понимаемое в смысле определения* 3, *причем либо* $\mathrm{T}_0=+\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0<+\infty$, *и в последнем случае имеет место следующее предельное равенство*:

$$\limsup_{t\uparrow\mathrm{T}_0}\|\mathbb{A}u\|_*(t)=+\infty,\quad \mathbb{A}\equiv\triangle^2-\triangle. \tag{4.32}$$

Замечание 6. Давайте обсудим выражение (4.32). Заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}u\|_*(t) &= \sup_{w\in\mathbb{H}^2_0(\Omega),\ \|w\|\leqslant 1}|\langle\mathbb{A}u,w\rangle| \\ &\leqslant \sup_{w\in\mathbb{H}^2_0(\Omega),\ \|w\|\leqslant 1}\left|\int\limits_\Omega(\nabla u,\nabla w)\,dx+\int\limits_\Omega\triangle u\triangle w\,dx\right| \\ &\leqslant 2\sup_{w\in\mathbb{H}^2_0(\Omega),\ \|w\|\leqslant 1}\Phi^{1/2}[u](t)\Phi^{1/2}[w]\leqslant c_{22}\Phi^{1/2}[u](t),\end{aligned} \tag{4.33}$$

где $\Phi^{1/2}[u](t)$ определено формулой (3.20). Теперь заметим, что справедлива следующая оценка снизу:

$$\|\mathbb{A}u\|_*(t)\|u\|(t)\geqslant\langle\mathbb{A}u(t),u(t)\rangle=2\Phi(t). \tag{4.34}$$

С другой стороны,

$$\|u\|^2=\int\limits_\Omega|\triangle u|^2\,dx,$$

поэтому в силу определения (3.20) вытекает оценка сверху $\|u\|^2(t)\leqslant 2\Phi(t)$, откуда и из (4.34) получим неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t)\|\mathbb{A}u\|_*(t)\geqslant 2\Phi(t)\Rightarrow\|\mathbb{A}u\|_*(t)\geqslant\sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t). \tag{4.35}$$

Тем самым из неравенств (4.33) и (4.35) получим двусторонее неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[u](t) \leqslant \|\mathbb{A}u\|_*(t) \leqslant c_{22}\Phi^{1/2}[u](t).$$

Таким образом, выражение (4.32) эквивалентно выражению

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \Phi[u](t) = +\infty, \tag{4.36}$$

где функционал $\Phi[u](t)$ определен формулой (3.20).

Таким образом, из теоремы 2 и результатов §3 вытекает следующая основная теорема настоящей работы.

Теорема 3. *Пусть для функций $\varphi_1(x,s)$ и $\varphi_2(x,s)$ выполнены условия* $(\mathrm{i})_1$–$(\mathrm{iii})_1$ *и* $(\mathrm{i})_2$–$(\mathrm{iv})_2$, $u_0, u_1 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ *и, кроме того, выполнены следующие достаточные условия:*

$$\vartheta > 2 + 2q_1, \quad q_1 = p_1 - 2,$$
$$\int\limits_\Omega \mathcal{F}(x, |\nabla u_0|)\, dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u_1|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\triangle u_1|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u_0|^2\, dx,$$
$$\mathcal{F}(x,s) = \int\limits_0^s d\sigma \sigma \varphi_2(x,\sigma),$$
$$\Phi'(0) > \left(\frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2}\Phi_0^{2+q_1}\right)^{1/2},$$

тогда время существования T_0 *сильного обобщенного решения ограничено сверху и больше нуля*

$$\mathrm{T}_0 \in (0, \mathrm{T}_1], \quad \mathrm{T}_1 = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A} > 0,$$

и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\triangle u|^2\,dx,$$

$$\Phi_0 = \Phi(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\triangle u_0|^2\,dx,$$

$$\Phi^{'}(0) = \int\limits_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0)\;dx + \int\limits_{\Omega} \triangle u_1 \triangle u_0\,dx,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\vartheta}{2} - \varepsilon_0\right), \quad \beta = \frac{c_7}{\varepsilon_0}, \quad \gamma = \frac{c_6}{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 \in \left(0, \frac{\vartheta - 2 - 2q_1}{2}\right),$$

$$A^2 \equiv (\alpha-1)^2\Phi_0^{-2\alpha}\left(\Phi^{'}(0)\right)^2 - \beta(\alpha-1)\Phi_0^{-2\alpha}\Phi_0^2 - \frac{2\gamma(\alpha-1)}{\delta}\Phi_0^{-\delta\alpha}\Phi_0^{\delta} > 0,$$

$$\delta = 1 + \frac{1+q_1-\alpha}{1-\alpha}$$

и ε_0 *доставляет минимум функции*

$$Q_0 = Q_0(\varepsilon) \equiv \frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{2\gamma}{2\alpha - q_1 - 2}\Phi_0^{q_1}$$

при условии, что $\varepsilon_0 \in (0, (\vartheta - 2 - 2q_1)/2)$.

§5. Заключение

Отметим, что мы в данной работе рассмотрели пространственно локализованные „источники“, описываемые функцией $\varphi_2(x,s)$, и „стоки“, описываемые функцией $\varphi_1(x,s)$, в плазме и это важно с физической точки зрения, поскольку в реальной плазме источники и стоки, действительно, локализованы. Заметим, что аналогично выводу рассмотренного в данной работе уравнения можно вывести и уравнение нелинейных ионно-звуковых волн в „замагниченной“ плазме, однако это уравнение четвертого порядка по времени и с нелинейным эллиптическим оператором при второй производной по времени. Насколько нам известно, такие уравнения еще в принципе не исследовались.

Список литературы

[1] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.

[2] Галактионов В. А., Похожаев С. И., *Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. **48** (2008), №10, 1819–1846.

[3] Калантаров В. К., Ладыженская О. А., *О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **69** (1977), 77–102.

[4] Красносельский М. А., *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, М., 1956, 392 с.

[5] Крылов Н. В., *Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера*, Науч. кн., Новосибирск, 1998.

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика.* Т. 8. *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1992.

[7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика.* Т. 10. *Физическая кинетика*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001.

[8] Митидиери Э. Л., Похожаев С. И., *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. Мат. ин-та РАН **234** (2001), 383 с.

[9] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987, 480 с.

[10] Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2007, 734 с.

[11] Тамм И. Е., *Основы теории электричества*, Наука, М., 1989, 504 с.

[12] Gasinski L., Papageorgiou N. S., *Nonlinear analysis*, Ser. in Math. Anal. Appl., vol. 9, Chapman and Hall, Boca Raton, FL, 2006.

[13] Levine H. A., *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$, Arch. Rational Mech. Anal. **51** (1973), 371–386.

[14] Levine H. A., *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form* $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 1–21.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова
физический факультет
Москва
Россия
E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило 27 мая 2010 г.