М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О разрушении решения одного нового стационарного уравнения соболевского типа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2010, том 50, номер 5, 876–893

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2010, том 50, № 5, с. 876–893

УДК 519.63

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НОВОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА[1)]

© 2010 г. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ ВМК, физ. ф-т)

e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2009 г.

Получено новое нелинейное стационарное уравнение соболевского типа, которое зависит от параметра $\eta \in \mathbb{R}^1$. При этом в случае $\eta > 0$ доказана глобальная разрешимость во всем волноводе $\mathbb{S} \otimes \mathbb{R}^1_+$ в слабом обобщенном смысле, а в случае $\eta < 0$ показано разрушение сильного обобщенного решения в некотором сечении волновода $z = R_0 > 0$. При этом получена оценка сверху на величину R_0 через исходные параметры задачи. Библ. 8.

Ключевые слова: новые стационарные уравнения соболевского типа, условия существования и разрушения сильного обобщенного решения, теория волноводов.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе используется стандартный набор инструментов нелинейного функционального анализа – это метод Галеркина в сочетании с методами компактности и монотонности (см., например, [4], [7]). При этом исходная физическая задача понимается и в слабом обобщенном, и в сильном обобщенном смыслах (см. [6]). Важный для нас результат заключается в том, что в зависимости от знака величины $\eta \in \mathbb{R}^1$ имеет место либо глобальное существование решения во всем волноводе $\mathbb{S} \otimes \mathbb{R}^1_+$, либо разрушение решения в некотором сечении $z = R_0 \in (0, R_1]$, где выписывается явное выражение для величины $R_1 > 0$. Метод доказательства разрушения – это один из двух самых мощных методов (см. [5], [8], [6] и [2]), а именно метод энергетических оценок (см. [8]).

Рассмотрим следующую физическую задачу. Пусть у нас имеется волновод $\mathbb{S} \otimes \mathbb{R}^1_+$, причем $(x, y) \in \mathbb{S}$, $z \in \mathbb{R}^1_+$ и сечение $\mathbb{S}$ волновода для каждого $z \in \mathbb{R}^1_+$ является постоянным. Предположим, кроме того, что $\mathbb{S}$ – ограниченная область из $\mathbb{R}^2$ и $\partial\mathbb{S}$ – граница этой области, причем $\partial\mathbb{S} \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$. Пусть в волноводе с некоторым нелинейным заполнением (о котором скажем ниже) имеется установившаяся волна, в которой магнитное поле волны **B** параллельно оси волновода, а электрическое поле **D** перпендикулярно оси волновода. Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси волновода. Тогда $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$ и $\mathbf{D} = \{D_x, D_y, 0\}$.

Предположим теперь, что волновод заполнен диэлектриком со следующим оператором диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\varepsilon} \equiv (1 + \eta[|E_x|^2 + |E_y|^2])I + a\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.1}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00376-а), а также президентской программы поддержки молодых докторов наук МД-99.2009.1.

где I – единичный оператор. Обсудим каждое слагаемое в формуле (1.1). Первые два слагаемых отвечают керровской зависимости оператора диэлектрической проницаемости от поля. Причем если $\eta > 0$, то такая среда называется *фокусирующей*, а в случае $\eta < 0$ называется *дефокусирующей* (см., например, [3]). Обсудим третье слагаемое в формуле (1.1). Как известно из [3], в случае слабой пространственной дисперсии оператор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \hat{\varepsilon}_{0ij} + \gamma_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{1.2}$$

причем в (1.2) вещественный тензор третьего порядка γ_{ijk} непроизволен. Во-первых, в силу наличия магнитного поля, направленного по оси OZ, тензор γ_{ijk} удовлетворяет условию симметричности по первым двум индексам:

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{jik}.$$

Во-вторых, $\gamma_{ijk} = 0$ при условии $i = k$ либо $j = k$. С учетом этих общих соображений из [3] в простейшем случае приходим к формуле (1.1).

В квазистационарном приближении и в предположении, что волновод заполнен диэлектриком, приходим к следующим уравнениям:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad D_x = \hat{\varepsilon}E_x, \quad D_y = \hat{\varepsilon}E_y, \quad D_z = 0, \tag{1.3}$$

поскольку нами рассматривается волна, в которой $\mathbf{D} = \{D_x, D_y, 0\}$.

Замечание 1. Отметим, что из условия $D_z = 0$ вовсе не вытекает, что $E_z = 0$. Рассмотрим следующий пример. Пусть связь D_z с E_z выражается формулой

$$D_z = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_z + E_z + \eta E_z^3,$$

которая учитывает пространственную дисперсию и "керровскую" нелинейность и кроме того, например, выполнены однородные граничные условия $E_z = 0$ при $z = a$ и $z = b$ $(b > a)$. Но у этой задачи $D_z = 0$ и существует нетривиальное решение при $\eta < 0$. Более того, этих решений $(E_z, -\eta)$, лежащих на многообразии

$$\mathbb{M} \equiv \left\{E_z(z) \in \mathbb{H}_0^1(a, b) : \int_a^b |E_z|^4 dz = 1\right\},$$

счетное множество и они "геометрически" разные. С другой стороны, для известных нам зависимостей $D_z = D_z(E_z)$ из равенства $E_z = 0$ вытекает $D_z = 0$.

В силу поверхностной односвязности волновода, существует такая функция $u(x, y, z) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{S} \otimes \mathbb{R}_+^1)$, что

$$\mathbf{E} = -\nabla u, \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{1.4}$$

Тогда из формул (1.1), (1.3) и (1.4) получим одно скалярное уравнение

$$a\frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u + \Delta_\perp u + \eta\Delta_4 u = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\Delta_\perp \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_4 u = \operatorname{div}_\perp(|\nabla_\perp u|^2 \nabla_\perp u),$$

$$\operatorname{div}_{\perp}\mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \nabla_{\perp} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Уравнение (1.5) можно “обезразмерить” и получить в итоге следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Delta_{\perp}u + \Delta_{\perp}u + \eta\Delta_4 u = 0. \tag{1.6}$$

Обсудим теперь граничные условия на границе $\partial\mathbb{S}\otimes\mathbb{R}^1_+$ волновода. Естественным условием будет условие

$$u|_{\partial\mathbb{S}\otimes\mathbb{R}^1_+} = 0. \tag{1.7}$$

Но получившееся у нас уравнение (1.6) третьего порядка, поэтому одного условия (1.7) для корректной постановки задачи недостаточно – нужно добавить еще одно условие. Естественно предположить, что в начале волновода находится источник излучения и нам известно распределение потенциала электрического поля в сечении $z = 0$:

$$u(x, y, z)|_{z=0} = u_0(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{S}. \tag{1.8}$$

Таким образом, мы пришли к постановке задачи: необходимо решить уравнение (1.6) при граничных условиях Дирихле (1.7) и (1.8).

Замечание 2. Отметим, что сформулированное условие (1.8) при получении результата о потери гладкости электрического поля в некотором сечении $z = a \in \mathbb{R}^1_+$ будет ослаблено. В действительности нам потребуется знать только интегральную характеристику в сечении $z = 0$. Отметим, кроме того, что мы рассматриваем полуограниченный волновод $\mathbb{S}\otimes\mathbb{R}^1_+$, все результаты будут в дальнейшем распространены на неограниченный волновод $\mathbb{S}\otimes\mathbb{R}^1$.

2. ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ В ВОЛНОВОДЕ $\mathbb{S}\otimes\mathbb{R}^1_+$ В СЛУЧАЕ $\eta > 0$

Дадим определение слабого локального решения краевой задачи (1.6)–(1.8).

Определение 1. Функция $u(x, y)(z)$ класса

$$u(x, y)(z) \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}^{1,4}_0(\mathbb{S})) \cap \mathbb{L}^{\infty}(0, R; \mathbb{W}^{1,4}_0(\mathbb{S})),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y)(z) \in \mathbb{L}^2(0, R; \mathbb{H}^1_0(\mathbb{S}))$$

при некотором $R > 0$, называется *слабым обобщенным решением задачи* (1.6)–(1.8), если выполнено равенство

$$\int_0^R dz\langle D(u), w\rangle = 0 \quad \forall w \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}^{1,4}_0(\mathbb{S})), \tag{2.1}$$

где

$$D(u) \equiv \frac{\partial}{\partial z}\Delta_{\perp}u + \Delta_{\perp}u + \eta\Delta_4 u, \tag{2.2}$$

$\langle\cdot, \cdot\rangle$ – *скобки двойственности между банаховыми пространствами* $\mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}^{1,4}_0(\mathbb{S}))$ и $\mathbb{L}^{4/3}(0, R; \mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S}))$. Пусть, кроме того,

$$u|_{z=0} = u_0(x, y) \in \mathbb{W}^{1,4}_0(\mathbb{S}).$$

Заметим, что в слабом смысле определения 1 равенство (2.1) эквивалентно равенству

$$\int_0^R dz\varphi(z)\langle D(u), v\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}), \quad \varphi(z) \in \mathbb{L}^4(0, R). \tag{2.3}$$

Перейдем к доказательству глобальной по $z \in \mathbb{R}^1_+$ разрешимости поставленной задачи в слабом смысле определения 1 при условии, что $\eta > 0$. Последнее условие, как будет показано ниже, является близким к необходимому для глобальной разрешимости. Схема дальнейшего исследования задачи следующая: сначала докажем локальную разрешимость задачи при некотором конечном $R > 0$, а затем, воспользовавшись априорными оценками, докажем, что это решение является глобальным. Для доказательства локальной по $z \in \mathbb{R}^1_+$ разрешимости воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методом монотонности и компактности. Итак, будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u_m(x, y)(z) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(z)w_k(x, y), \tag{2.4}$$

удовлетворяющее условию

$$\int_0^{R_m} dz\varphi(z)\langle D(u_m), w_j\rangle = 0 \quad \forall\varphi(z) \in \mathbb{L}^4(0, R_m), \quad R_m > 0, \tag{2.5}$$

где $j = \overline{1, m}$. Ниже докажем, что $R_m = R > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$. В качестве системы функций

$$\{w_k(x, y)\} \subset \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$$

возьмем "галеркинский" базис. Относительно функций $c_{mk} = c_{mk}(z)$ предположим, что они из пространства $\mathbb{C}^{(1)}[0, R_m]$. В этом случае, исходя из явного вида оператора $D(u_m)$:

$$D(u_m) \equiv \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u_m + \Delta_\perp u_m + \eta\Delta_4 u_m,$$

приходим к выводу, что

$$\langle D(u_m), w_j\rangle \in \mathbb{C}[0, R_m].$$

Поэтому из равенства (2.5) и основной леммы вариационного исчисления получаем

$$\langle D(u_m), w_j\rangle = 0 \quad \forall j = \overline{1, m}. \tag{2.6}$$

С учетом определения (2.4) функции u_m, из (2.6) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^m a_{jk}\frac{dc_{mk}(z)}{dz} + \sum_{k=1}^m a_{jk}c_{mk}(z) = \\ = \eta\sum_{k=1}^m c_{mk}\int_{\mathbb{S}}\left(\left(\left|\sum_{k=1}^m c_{mk}(z)\nabla_\perp w_k\right|^2\sum_{k=1}^m c_{mk}(z)\nabla_\perp w_k\right)\nabla_\perp w_k, \nabla_\perp w_j\right)dxdy,\end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$a_{kj} \equiv \langle -\Delta w_k, w_j\rangle = \int_{\mathbb{S}}(\nabla_\perp w_k, \nabla_\perp w_j)dxdy. \tag{2.8}$$

Предположим, что

$$u_{m0} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} w_k \longrightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}) \quad \text{при} \quad m \longrightarrow +\infty,$$

$$\alpha_{mk} = c_{mk}(0).$$

Докажем, что определитель $m \times m$-матрицы (a_{jk}) обратим для произвольного $m \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть

$$\{\xi_k\}_{k=1}^{m} \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда справедливо выражение

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj}\xi_k\xi_j = \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp \eta|^2 dxdy, \quad \eta = \sum_{k=1}^{m} \xi_k w_k. \tag{2.9}$$

Очевидно, что $\eta \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$. Поэтому имеем

$$\int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp \eta|^2 dxdy \Leftrightarrow \eta = \vartheta.$$

Но отсюда в силу линейной независимости системы $\{w_k\}$ в $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$ сразу же приходим к выводу, что квадратичная форма (2.9) равна нулю тогда и только тогда, когда

$$\{\xi_k\}_{k=1}^{m} = \{0\}_{k=1}^{m}.$$

В силу критерия Сильвестра отсюда заключаем, что определитель матрицы (a_{jk}) больше нуля для всех $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7) является системой уравнений типа Коши–Ковалевской, а значит, при дополнительном условии

$$c_{mk}(0) = \alpha_{mk}, \quad k = \overline{1, m},$$

имеет решение

$$c_{mk}(z) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, R_m].$$

Для получения априорных оценок для функции $u_m = u_m(x, y)(z)$ умножим обе части равенства (2.6) на $c_{mj}(z)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим равенство

$$\langle D(u_m), u_m \rangle = 0. \tag{2.10}$$

Теперь умножим обе части равенства (2.6) на $c'_{mj}(z)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим равенство

$$\langle D(u_m), u'_m \rangle = 0. \tag{2.11}$$

Замечание 3. В дальнейшем все подпоследовательности будем обозначать так же, как и исходные последовательности. Кроме того, будем пользоваться следующими обозначениями:

$$v'(x, y)(z) \equiv \frac{\partial}{\partial z} v(x, y)(z),$$

$$\|\nabla v\|_2^2 \equiv \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp v|^2 dxdy, \quad \|\nabla v\|_4^4 \equiv \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp v|^4 dxdy.$$

Тогда после интегрирований по “частям” из (2.10) получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\|\nabla u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 + \eta\|\nabla u_m\|_4^4 = 0, \tag{2.12}$$

а из (2.11) получим второе энергетическое равенство

$$\|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{\eta}{4}\frac{d}{dz}\|\nabla u_m\|_4^4 = 0. \tag{2.13}$$

Проинтегрируем обе части равенств (2.12) и (2.13) и получим следующие равенства:

$$\|\nabla u_m\|_2^2(z) + 2\int_0^z d\sigma\|\nabla u_m\|_2^2(\sigma) + 2\eta\int_0^z d\sigma\|\nabla u_m\|_4^4(\sigma) = \|\nabla u_{m0}\|_2^2, \tag{2.14}$$

$$\int_0^z \|\nabla u'_m\|_2^2 d\sigma + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2(z) + \frac{\eta}{4}\|\nabla u_m\|_4^4(z) = \frac{1}{2}\|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \frac{\eta}{4}\|\nabla u_{m0}\|_4^4. \tag{2.15}$$

Поскольку мы рассматриваем случай $\eta > 0$, то из формул (2.14) и (2.15) получаем, что последовательность $\{u_m\}$ ограничена в банаховом пространстве

$$\mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})) \cap \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})),$$

а последовательность $\{u'_m\}$ ограничена в пространстве

$$\mathbb{L}^2(0, R; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})).$$

Значит, из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_n\}$, что

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} v_1 \quad *\text{-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})), \tag{2.16}$$

$$u_n \rightharpoonup v_2 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})), \tag{2.17}$$

$$u'_n \rightharpoonup v_3 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0, R; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})). \tag{2.18}$$

Докажем, что существует такая подпоследовательность $\{u_n\}$ исходной последовательности $\{u_n\}$, что

$$v_1 = v_2 = u, \quad v_3 = u'.$$

Действительно, из предельных формул (2.16) и (2.17) вытекает, что подпоследовательность $\{u_n\}$ $*$-слабо в $\mathcal{D}'(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$. Следовательно, в силу отделимости $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$ приходим к выводу, что $v_1 = v_2 = u$. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$u'_n \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad *\text{-слабо в} \quad \mathcal{D}'(0, R; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})).$$

С другой стороны, из (2.18) вытекает, что

$$u'_n \overset{*}{\rightharpoonup} v_3 \quad *\text{-слабо в} \quad \mathcal{D}'(0, R; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})).$$

Опять в силу отделимости $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(0, R; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S}))$ получаем, что $v_3 = u'$.

Теперь мы в состоянии доказать, что из полученных априорных оценок вытекает независимость R_m от $m \in \mathbb{N}$. Действительно, для доказательства этого утверждения воспользуемся найденной априорной оценкой

$$\|\nabla u_m\|_2^2 \leqslant a_1 < +\infty, \tag{2.19}$$

причем постоянная не зависит от $m \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{R}^1_+$. Справедливо следующее равенство:

$$\|\nabla u_m\|_2^2 = \sum_{j,\,k\,=\,1,\,1}^{m,\,m} a_{kj} c_{mk}(z) c_{mj}(z), \tag{2.20}$$

где

$$a_{kj} \equiv \int_{\mathbb{S}} (\nabla w_k, \nabla w_j) dx dy.$$

По доказанному ранее, матрица (a_{kj}) является матрицей положительно-определенной квадратичной формы, причем эта матрица не зависит от $z \in \mathbb{R}^1_+$, поэтому существует такая ортогональная матрица

$$\mathbb{Q} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

которая не зависит от $z \in \mathbb{R}^1_+$, и имеет место равенство

$$c_m = \mathbb{Q} \cdot d_m, \quad c_m = (c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mm})^t, \quad d_m = (d_{m1}, d_{m2}, \ldots, d_{mm})^t,$$

причем

$$\sum_{j,\,k\,=\,1,\,1}^{m,\,m} a_{kj} c_{mj}(z) c_{mk}(z) = \sum_{l\,=\,1}^{m} \lambda_l d_{ml}^2(z),$$

где все $\lambda_l > 0$ при $l \in \overline{1, m}$. Но тогда из (2.19) и (2.20) вытекает, что

$$|d_{ml}(z)| \leqslant a_2, \tag{2.21}$$

где $a_2 > 0$ и не зависит от $m,\, l \in \mathbb{N}$ и от $z \in \mathbb{R}^1_+$. Осталось доказать, что из (2.21) вытекает ограниченность c_{ml}:

$$|c_{mk}(z)| \leqslant a_3(m). \tag{2.22}$$

Действительно, поскольку всякая собственная матрица $\mathbb{Q} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ имеет всегда конечную норму

$$\|\mathbb{Q}\|_{m \otimes m} \equiv \sup_{\|\eta\|_m = 1} \|\mathbb{Q}\eta\|_m < +\infty,$$

то имеет место неравенство

$$\|c_m(z)\|_m \leqslant \|\mathbb{Q}\|_{m \otimes m} \|d_m(z)\|_m \leqslant a_3(m) < +\infty,$$

где постоянная $a_3(m)$ зависит, вообще говоря, от $m \in \mathbb{N}$, но совершенно точно не зависит от $z \in [0, R_m]$. Таким образом, приходим к выводу, что имеют место оценки

$$|c_{mk}(z)| \leqslant a_3(m) < +\infty \quad \text{при} \quad k = \overline{1, m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем, что каждое решение системы дифференциальных уравнений (2.7) при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ может быть продолжено на всю полуось $z \in \mathbb{R}^1_+$ и при этом будет иметь место оценка (2.22), т.е. в качестве числа $R_m > 0$ можно взять число $R > 0$, не зависящее от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь займемся изучением оператора

$$\Delta_4 : \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}) \longrightarrow \mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S}).$$

Пусть $\langle\cdot, \cdot\rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S})$. Для дальнейшего нам потребуется доказать следующую оценку:

$$\|\Delta_4 v\|_* \leqslant \|\nabla v\|_4^3 \quad \forall v \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}). \tag{2.23}$$

Действительно, согласно определению нормы $\|\cdot\|_*$ банахова пространства $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S})$, имеет место следующее равенство:

$$\|\Delta_4 v\|_* = \sup_{w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})\|w\| \leqslant 1} |\langle \Delta_4 v, w\rangle|.$$

Заметим, что

$$\langle -\Delta_4 v, w\rangle = \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp v|^2 (\nabla_\perp v, \nabla_\perp w) dxdy.$$

Поэтому, применяя неравенства Гёльдера, получаем следующую цепочку неравенств:

$$|\langle -\Delta_4 v, w\rangle| \leqslant \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp v|^3 |\nabla_\perp w| dxdy \leqslant \left(\int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp v|^4 dxdy\right)^{3/4} \left(\int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp v|^4 dxdy\right)^{1/4} \leqslant \|\nabla v\|_4^3$$

при условии, что $\|\nabla w\|_4 \leqslant 1$. Тем самым неравенство (2.23) доказано.

Из неравенства (2.23) вытекает еще одна априорная оценка. Действительно, имеет место следующее неравенство:

$$\|\Delta_4 u_m\|_* \leqslant \|\nabla u_m\|_4^3 \leqslant c_1 < +\infty,$$

где $c_1 > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность

$$\{\Delta_4 u_m\}$$

является ограниченной в $\mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S}))$. Тем самым из этой последовательности можно выделить такую подпоследовательность, что

$$-\Delta_4 u_m \xrightarrow{*} \chi \quad \text{*-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S})). \tag{2.24}$$

Теперь нужно доказать, что

$$\chi = -\Delta_4 u,$$

для этого воспользуемся методом монотонности. Для удобства введем обозначение

$$\mathbb{A}(v) \equiv -\Delta_4 v.$$

Тогда рассмотрим выражение

$$I \equiv \int_0^R dz \langle \mathbb{A}(v) - \mathbb{A}(u_m), v - u_m\rangle, \tag{2.25}$$

которое можно преобразовать к виду

$$\int_0^R dz\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle + \int_0^R dz\langle \mathbb{A}(v), v-u_m\rangle - \int_0^R dz\langle \mathbb{A}(u_m), v\rangle = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.26}$$

Для функции $u_m(x, y)(z)$ справедливо равенство (2.10), из которого интегрированием по $z \in (0, R)$ получим равенство

$$\int_0^R dz\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle = -\eta^{-1}\int_0^R dz\|\nabla u_m\|_2^2(z) - \frac{1}{2}\eta^{-1}\|\nabla u_m\|_2^2(R) + \frac{1}{2}\eta^{-1}\|\nabla u_{m0}\|_2^2. \tag{2.27}$$

Теперь воспользуемся свойством полунепрерывности снизу нормы рефлексивного банахова пространства, чтобы получить результат о существовании такой подпоследовательности $\{u_m\}$, что

$$\liminf_{m\to+\infty}\int_0^R dz\|\nabla u_m\|_2^2(z) \geqslant \int_0^R dz\|\nabla u\|_2^2(z),$$

$$\liminf_{m\to+\infty}\|\nabla u_m\|_2^2(R) \geqslant \|\nabla u\|_2^2(R).$$

Таким образом, отсюда и из (2.27) следует, что

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^R dz\langle \mathbb{A}(u_m), u_m\rangle = -\eta^{-1}\liminf_{m\to+\infty}\int_0^R dz\|\nabla u_m\|_2^2(z) -$$

$$-\frac{1}{2}\eta^{-1}\liminf_{m\to+\infty}\|\nabla u_m\|_2^2(R) + \frac{1}{2}\eta^{-1}\limsup_{m\to+\infty}\|\nabla u_{m0}\|_2^2 \leqslant -\eta^{-1}\int_0^R dz\|\nabla u\|_2^2(z) - \frac{1}{2}\eta^{-1}\|\nabla u\|_2^2(R) + \frac{1}{2}\eta^{-1}\|\nabla u_0\|_2^2.$$

С другой стороны, нам уже хватает априорных оценок, чтобы получить предельное выражение

$$0 = \int_0^R dz\varphi(z)\langle D(u_m), w_j\rangle \longrightarrow \int_0^R dz\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u + \Delta_\perp u - \eta\chi, w_j\right\rangle = 0$$

для всех $j \in \overline{1, +\infty}$ и всех $\varphi(z) \in \mathbb{L}^4(0, R)$. Поскольку система функций $\{w_j\}$ является "галеркинским" базисом в $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$, то приходим к выводу, что имеет место равенство

$$\int_0^R dz\varphi(z)\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u + \Delta_\perp u - \eta\chi, v\right\rangle = 0 \tag{2.28}$$

для всех $\varphi(z) \in \mathbb{L}^4(0, R)$ и всех $v \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$. Можно доказать, как и ранее, что равенство (2.28) эквивалентно равенству

$$\int_0^R dz\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u + \Delta_\perp u - \eta\chi, w\right\rangle = 0 \tag{2.29}$$

для любых $w \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$. Теперь в равенстве (2.29) возьмем в качестве $w(x, y)(z)$ решение $u(x, y)(z)$ и после интегрирования по частям получим равенство

$$\int_0^R \langle \chi, u \rangle dz = -\eta^{-1} \int_0^R dz \|\nabla u\|_2^2(z) - \frac{1}{2}\eta^{-1}\|\nabla u\|_2^2(R) + \frac{1}{2}\eta^{-1}\|\nabla u_0\|_2^2. \tag{2.30}$$

Из сравнения (2.27) и равенства (2.30) приходим к предельной формуле

$$\limsup_{m \to +\infty} \int_0^R \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle \leqslant \int_0^R \langle \chi, u \rangle dz. \tag{2.31}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\limsup_{m \to +\infty} I_1 \leqslant \int_0^R \langle \chi, u \rangle dz. \tag{2.32}$$

С другой стороны, в силу предельных формул (2.18) и (2.24) имеют место предельные равенства

$$\limsup_{m \to +\infty} I_2 = \int_0^R dz \langle \mathbb{A}(v), v - u \rangle, \quad \limsup_{m \to +\infty} I_3 = -\int_0^R dz \langle \chi, v \rangle. \tag{2.33}$$

Следовательно, из (2.25), (2.26), (2.32) и (2.33) вытекает неравенство

$$\limsup_{m \to +\infty} I \leqslant \int_0^R dz \langle \mathbb{A}(v) - \chi, v - u \rangle. \tag{2.34}$$

Теперь заметим, что, в силу свойства монотонности оператора $-\Delta_4$, выражение (2.34) всегда неотрицательно. Действительно, имеем

$$\int_0^R \langle \mathbb{A}(w_1) - \mathbb{A}(w_2), w_1 - w_2 \rangle dz =$$

$$= \int_0^R \int_{\mathbb{S}} (|\nabla_\perp w_1|^2 \nabla_\perp w_1 - |\nabla_\perp w_2|^2 \nabla_\perp w_2, \nabla_\perp w_1 - \nabla_\perp w_2) dx dy dz \geqslant c_1 \int_0^R \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp w_1 - \nabla_\perp w_2|^4 dx dy dz \geqslant 0$$

для всех $w_1, w_2 \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$. Поэтому из (2.25) и (2.34) следует неравенство

$$\int_0^R dz \langle \mathbb{A}(v) - \chi, v - u \rangle \geqslant 0 \tag{2.35}$$

для всех $v \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$. Возьмем в качестве v в неравенстве (2.35) функцию

$$v = u + \lambda w, \quad \lambda > 0, \quad w \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})),$$

и после деления обеих частей на $\lambda > 0$ получим неравенство

$$\int_0^R dz \langle \mathbb{A}(u + \lambda w) - \chi, w \rangle \geqslant 0 \tag{2.36}$$

для всех $w \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$ и всех $\lambda > 0$. Далее воспользуемся явным видом оператора $\mathbb{A}$. Рассмотрим отдельно следующий интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^R dz\langle\mathbb{A}(u+\lambda w), w\rangle &= \int_0^R dz\int_{\mathbb{S}} dxdy|\nabla_\perp(u+\lambda w)|^2(\nabla_\perp(u+\lambda w), \nabla_\perp w) = \\ &= \int_0^R dz\int_{\mathbb{S}} dxdy[|u_x+\lambda w_x|^2+|u_y+\lambda w_y|^2][u_xw_x+u_yw_y+\lambda(w_x)^2+\lambda(w_y)^2].\end{aligned} \tag{2.37}$$

Видно, что правая часть выражения (2.37) является непрерывной функцией по $\lambda \in [0, 1]$. Поэтому имеем

$$\lim_{\lambda \to 0}\int_0^R dz\langle\mathbb{A}(u+\lambda w), w\rangle = \int_0^R dz\langle\mathbb{A}(u), w\rangle \tag{2.38}$$

и можем перейти к пределу при $\lambda \longrightarrow 0$ в неравенстве (2.36) и получить неравенство

$$\int_0^R dz\langle\mathbb{A}(u)-\chi, w\rangle \geqslant 0.$$

Докажем, что отсюда вытекает равенство

$$\mathbb{A}(u) = \chi. \tag{2.39}$$

Действительно, пусть

$$\mathbb{A}(u) \neq \chi,$$

но тогда найдется такое $w \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$, что

$$\int_0^R dz\langle\mathbb{A}(u)-\chi, w\rangle > 0,$$

и для $-w \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$ будет выполнено обратное неравенство

$$\int_0^R dz\langle\mathbb{A}(u)-\chi, -w\rangle < 0.$$

Следовательно, полученное противоречие доказывает равенство (2.39).

Таким образом, можно перейти к пределу при $m \longrightarrow +\infty$ в уравнении (2.5) и получить предельное равенство

$$\int_0^R dz\varphi(z)\left\langle\frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u+\Delta_\perp u+\eta\Delta_4 u, w\right\rangle = 0 \tag{2.40}$$

для всех $\varphi(z) \in \mathbb{L}^4(0, R)$ и всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$. Как и ранее, можно доказать, что (2.40) эквивалентно равенству

$$\int_0^R dz\left\langle\frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u+\Delta_\perp u+\eta\Delta_4 u, v\right\rangle = 0 \tag{2.41}$$

для всех $v(x, y)(z) \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$. Докажем, что слабое в смысле определения 1 решение задачи (1.6)–(1.8) единственное. Действительно, пусть существуют по меньшей мере два решения $u_1(x, y)(z)$ и $u_2(x, y)(z)$ класса

$$\mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})) \cap \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})).$$

Тогда, очевидно, их разность удовлетворяет уравнению

$$\int_0^R dz \left\langle \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp w + \Delta_\perp w + \eta[\Delta_4 u_1 - \Delta_4 u_2], v \right\rangle = 0 \tag{2.42}$$

для всех $v(x, y)(z) \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$, где $w = u_1 - u_2$. Напомним, что мы сейчас рассматриваем случай $\eta > 0$. В качестве $v(x, y)(z)$ возьмем выражение

$$v(x, y)(z) = \begin{cases} w(x, y)(z), & 0 \leqslant z \leqslant \sigma, \\ 0, & \sigma < z \leqslant R. \end{cases} \tag{2.43}$$

Тогда, поскольку

$$w(x, y)(z) \in \mathbb{L}^4(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})) \cap \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})),$$

после подстановки (2.43) в (2.42) получим равенство

$$\int_0^\sigma dz \left\langle \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp w + \Delta_\perp w + \eta[\Delta_4 u_1 - \Delta_4 u_2], w \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \sigma \in [0, R]. \tag{2.44}$$

Далее потребуется следующий важный результат.

Лемма 1. *Пусть* $v \in \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{H})$, $v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H})$, *тогда имеет место следующее равенство для почти всех* $\sigma \in (0, R)$:

$$\|v\|^2(\sigma) - \|v\|^2(0) = 2\int_0^\sigma dz \langle v', v\rangle, \tag{2.45}$$

где $\mathbb{H}$ *— гильбертово пространство со скалярным произведением* $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *и нормой* $\|\cdot\|$.

Доказательство. Регуляризуя функцию $\hat{v}$, действующую из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{H}$ и равную v на $[0, R]$ и 0 вне этого интервала, мы легко получаем последовательность функций v_m, удовлетворяющую условиям

$$v_m \in \mathbb{C}^\infty([0, R]; \mathbb{H}), \tag{2.46}$$

$$v_m \longrightarrow v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2_{\text{loc}}(0, R; \mathbb{H}), \quad v'_m \longrightarrow v' \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2_{\text{loc}}(0, R; \mathbb{H}). \tag{2.47}$$

Совершенно очевидно, что для функций v_m выполнено равенство

$$\frac{d}{dz}\langle v_m, v_m\rangle = 2\langle v_m, v'_m\rangle. \tag{2.48}$$

Из условий (2.46), (2.47) вытекает, что

$$\|v_m\|^2 \longrightarrow \|v\|^2.$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \longrightarrow +\infty$ в смысле *-слабой топологии пространства $\mathfrak{D}'(0, T)$ в равенстве (2.48), получаем равенство в смысле $\mathfrak{D}'(0, R)$:

$$\frac{d}{dz}\langle v, v\rangle = 2\langle v, v'\rangle. \tag{2.49}$$

Заметим, что

$$\langle v, v\rangle \in \mathbb{L}^1(0, R)$$

и

$$\langle v, v'\rangle, \in \mathbb{L}^1(0, R).$$

Таким образом, интегрируя (2.49) по $z \in (0, \sigma)$ при $\sigma \in (0, R)$, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

Для дальнейшего заметим, что имеет место следующее плотное вложение:

$$\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S}),$$

поэтому в силу рефлексивности банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$ имеет место плотное вложение соответствующих сильно сопряженных пространств:

$$\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{S}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S}).$$

Поэтому если

$$\mathbb{J} : \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}) \longrightarrow \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})$$

есть оператор вложения, то транспонированный к нему оператор

$$\mathbb{J}^t : \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{S}) \longrightarrow \mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S})$$

является тоже оператором вложения. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})$ и $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{S})$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобки двойственности между $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S})$; тогда с учетом введенного оператора вложения $\mathbb{J}$ имеет место равенство

$$\langle \mathbb{J}^t h^*, w\rangle = \langle h^*, \mathbb{J}w\rangle_1 \quad \forall w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}), \quad h^* \in \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{S}). \tag{2.50}$$

Поэтому если мы, как это всегда и делается, отождествим $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$ с $\mathbb{J}\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})$, а $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{S})$ с $\mathbb{J}^t\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S})$, то из равенства (2.50) получим равенство

$$\langle h^*, w\rangle = \langle h^*, w\rangle_1 \quad \forall w \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}), \quad h^* \in \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{S}). \tag{2.51}$$

В нашем случае мы возьмем в качестве гильбертова пространства $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})$. Тогда, поскольку $w \in \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})) \subset \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})) = \mathbb{L}^\infty(0, R; \mathbb{H})$, $w' \in \mathbb{L}^2(0, R; \mathbb{H})$, то в силу леммы 1 приходим к равенству

$$\|\nabla w\|_2^2(\sigma) - \|\nabla w_0\|_2^2 = 2\int_0^\sigma dz(\nabla w', \nabla w), \tag{2.52}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\mathbb{S})$. Но тогда в силу (2.51) и (2.52) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\|\nabla w\|_2^2(\sigma) - \|\nabla w_0\|_2^2 = 2\int_0^\sigma dz(\nabla w', \nabla w) = 2\int_0^\sigma dz\langle -\Delta w', w\rangle_1 = 2\int_0^\sigma dz\langle -\Delta w', w\rangle. \tag{2.53}$$

После интегрирования по частям в выражении (2.44) с учетом (2.53) получим равенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla w\|_2^2(\sigma) - \frac{1}{2}\|\nabla w_0\|_2^2 + \int_0^\sigma dz\|\nabla w\|_2^2(z) - \eta\int_0^\sigma dz\langle \Delta_4 u_1 - \Delta_4 u_2, u_1 - u_2\rangle = 0. \tag{2.54}$$

Поскольку $w(x, y)(0) = u_1(x, y)(0) - u_2(x, y)(0) = u_0(x, y) - u_0(x, y) = 0$, то приходим к выводу, что $\|\nabla w_0\|_2 = 0$. Заметим, что имеет место следующая цепочка выражений:

$$\langle -\Delta_4 u_1 + \Delta_4 u_2, u_1 - u_2\rangle = \int_{\mathbb{S}}(|\nabla_\perp u_1|^2\nabla_\perp u_1 - |\nabla_\perp u_2|^2\nabla_\perp u_2, \nabla_\perp u_1 - \nabla_\perp u_2)dxdy \geqslant 0,$$

тогда отсюда и в силу условия $\eta > 0$ приходим из (2.54) к неравенству

$$\|\nabla w\|_2^2(\sigma) \leqslant 0 \quad \forall \sigma \in [0, R].$$

Значит, $w(x, y)(\sigma) = 0$ для почти всех $\sigma \in [0, R]$. Единственность слабого решения доказана.

Докажем, что существует максимальное число $R_0 \in \mathbb{R}_+^1 \cup \{+\infty\}$ такое, что либо построенное слабое решение существует глобально по $z \in \mathbb{R}_+^1$, т.е.

$$u(x, y)(z) \in \mathbb{L}^\infty(0, +\infty; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})) \cap \mathbb{L}^4(0, +\infty; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})),$$
$$u'(x, y)(z) \in \mathbb{L}^2(0, +\infty; \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})),$$

либо $R_0 < +\infty$ и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{R\uparrow\mathbb{R}_0}\|\nabla u\|_2^2(R) = +\infty.$$

Действительно, пусть имеет место противное: $R_0 < +\infty$, но

$$\|\nabla u\|_2(R) \leqslant C < +\infty \quad \forall R \in [0, R_0].$$

Заметим теперь, что после изменения на множестве меры нуль по Лебегу имеем $u \in \mathbb{C}([0, R_0); \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S}))$. Пусть $R' \in (0, R_0)$. Тогда имеем

$$\int_0^{R'} dz\langle D(u), v\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{L}^2([0, R'); \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})) \tag{2.55}$$

при

$$u(x, y)(0) = u_0(x, y) \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S}).$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\int_{R'}^{R'+z} ds\langle D(u), v\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{L}^2([R', R'+z); \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})),$$
$$u(x, y)(R') = u_{R'}(x, y) \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S}). \tag{2.56}$$

Сделаем замену переменных $\sigma = z - R'$ и $w(\sigma) = \mathbf{u}(\sigma + R')$. Придем к задаче

$$\int_0^z d\sigma \langle D(w)\sigma,\ v(\sigma + R')\rangle = 0 \quad \forall v(\sigma + R') \in \mathbb{L}^2([0, z); \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})),$$
$$u(x, y)(0) = u_{R'}(x, y) \in \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S}). \tag{2.57}$$

Сравним данную задачу с (2.1). Найдется такое $z = R^* = R^*(R') > 0$, что существует единственное решение задачи (2.57). Поскольку

$$\sup_{R' \in [0, R_0]} \|\nabla u\|_2^2(R') < +\infty,$$

то существует точная нижняя грань функции $R^* = R^*(R') > 0$, которую мы обозначим через $R^* > 0$. Возьмем

$$R' = R_0 - \frac{R^*}{2}.$$

Тогда имеем

$$\hat{u} = \{u(z), z \in [0, R']; w(z - R'), z \in [R', R' + R^*]\}.$$

Но $R' = R_0 - R^*/2$, поэтому

$$\hat{u} = \{u(z), z \in [0, R']; w(z - R'), z \in [R', R_0 + R^*/2]\}.$$

Мы пришли к выводу, что решение задачи (2.1) можно продолжить за точку $z = R_0 > 0$. Поэтому имеем противоречие с условием конечности величины $R_0 > 0$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Пусть* $\eta > 0$, *тогда найдется такое максимальное* $R_0 > 0$, *что существует единственное решение задачи* (1.6)–(1.8), *понимаемое в слабом смысле определения* 1, *в котором надо положить* $R = R_0$, *причем либо* $R_0 = +\infty$, *либо* $R_0 < +\infty$ *и в последнем случае выполнено предельное равенство*

$$\limsup_{R \uparrow R_0} \|\nabla u\|_2(R) = +\infty.$$

Докажем, что при $\eta > 0$ имеем $R_0 = +\infty$. Действительно, получим оценку величины

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2(z). \tag{2.58}$$

Из первого энергетического равенства (2.12) следует формула

$$\Phi'(z) + 2\Phi(z) + \eta\|\nabla u\|_4^4 = 0, \quad \Phi(0) = \Phi_0 \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2, \quad \eta > 0. \tag{2.59}$$

Заметим, что имеет место оценка, следующая из непрерывного вложения $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{H}_0^1(\mathbb{S})$:

$$c_1\|\nabla v\|_2 \leqslant \|\nabla v\|_4 \quad \forall v \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}). \tag{2.60}$$

Тогда из (2.59) и (2.60) вытекает неравенство

$$\Phi'(z) + 2\Phi(z) + c_2\Phi^2(z) \leqslant 0, \quad \Phi(0) = \Phi_0 = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2, \tag{2.61}$$

где $c_2 = 4c_1^4\eta$. Это дифференциальное неравенство легко интегрируется, и мы приходим к оценке

$$\Phi(z) \leqslant \Phi_0 \frac{\exp\{-2z\}}{1 + \Phi_0 2^{-1} c_2[1 - \exp\{-2z\}]} \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{R}_+^1. \tag{2.62}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в случае $\eta > 0$ решение задачи (1.6)–(1.8), понимаемое в слабом смысле определения 1, существует глобально по $z \in \mathbb{R}^1_+$, т.е. в определении 1 имеет место равенство $R = +\infty$ и, кроме того, имеет место оценка (2.62).

3. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ $\eta < 0$

Дадим определение сильного обобщенного решения, в котором без ограничения общности мы положили $\eta = -1$.

Определение 2. Функция $u(x, y)(z) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, R]; \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}))$ называется сильным обобщенным решением задачи (1.6)–(1.8), если имеет место равенство

$$\langle D(u), w\rangle = 0 \quad \forall z \in [0, R], \quad w(x, y) \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}), \tag{3.1}$$

где $D(u) \equiv \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u + \Delta_\perp u - \Delta_4 u$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S})$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\mathbb{S})$.

Введем новую функцию $v = e^z u$ и получим для нее новое уравнение, вытекающее из (3.1):

$$\langle M(v), w\rangle = 0 \quad \forall z \in [0, R], \quad w(x, y) \in \mathbb{W}_0^{1,4}(\mathbb{S}), \tag{3.2}$$

где

$$M(v) \equiv \frac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp v - e^{-2z}\Delta_4 v.$$

Из равенства (3.2) получим первое и второе энергетические равенства. Для этого сначала возьмем $w = v$, а затем $w = v'$. В итоге получим два равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\|\nabla v\|_2^2 = e^{-2z}\|\nabla v\|_4^4, \tag{3.3}$$

$$\|\nabla v\|_2^2 = \frac{e^{-2z}}{4}\frac{d}{dz}\|\nabla v\|_4^4. \tag{3.4}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2(z), \quad J(z) \equiv \|\nabla v'\|_2^2. \tag{3.5}$$

Справедлива

Лемма 2. *Имеет место следующее неравенство:*

$$(\Phi'(z))^2 \leqslant 2\Phi(z)J(z) \quad \forall z \in [0, R]. \tag{3.6}$$

Доказательство. В силу определения $\Phi(z)$ имеем

$$(\Phi'(z))^2 = \left(\int_{\mathbb{S}}(\nabla_\perp v', \nabla_\perp v)dxdy\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{S}}|\nabla_\perp v'||\nabla_\perp v|dxdy\right)^2 \leqslant \|\nabla v\|_2^2\|\nabla v'\|_2^2 = 2\Phi(z)J(z).$$

Лемма доказана.

Перепишем равенства (3.3) и (3.4) с учетом введенных обозначений (3.5):

$$\Phi'(z) = e^{-2z}\|\nabla v\|_4^4, \quad J(z) = \frac{e^{-2z}}{4}\frac{d}{dz}\|\nabla v\|_4^4.$$

Но тогда

$$J = \frac{e^{-2z}}{4}\frac{d}{dz}[e^{2z}\Phi'(z)] = \frac{1}{4}\Phi''(z) + \frac{1}{2}\Phi'(z).$$

Таким образом, отсюда и из (3.6) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. [1])

$$\Phi\Phi'' - 2(\Phi')^2 + 2\Phi\Phi' \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad z \in [0, R]. \tag{3.7}$$

Это неравенство легко интегрируется (см. [6]), и в результате приходим к неравенству

$$\Phi(z) \geqslant \frac{\Phi_0}{1 - \dfrac{\Phi_0\Psi_0}{2}[1 - e^{-2z}]} \quad \forall z \in [0, R], \tag{3.8}$$

где

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0) = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2, \quad \Psi_0 = 4\|\nabla u_0\|_4^4/\|\nabla u_0\|_2^4.$$

Поэтому если потребовать выполнения условия

$$\Phi_0\Psi_0 > 2,$$

которое эквивалентно условию

$$\|\nabla u_0\|_4^4 > \|\nabla u_0\|_2^2, \tag{3.9}$$

то существует такое сечение $z = R_0 \in (0, R_1]$ при

$$R_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_4^4}\right), \tag{3.10}$$

что в этом сечении $z = R_0$ имеем

$$\limsup_{z \uparrow R_0} \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp u|^2 dxdy = +\infty. \tag{3.11}$$

Поскольку $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp u$, то это означает, что в некотором сечении $z = R_0$ волновода $\mathbb{S} \otimes \mathbb{R}^1_+$ произойдет электрический “пробой”.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть* $\eta < 0$ *и, кроме того, выполнено неравенство*

$$\|\nabla u_0\|_4^4 > \|\nabla u_0\|_2^2,$$

тогда сильное обобщенное решение задачи (1.6)–(1.8), *понимаемое в смысле определения* 2, *не существует глобально по* $z \in \mathbb{R}^1_+$, т.е. *найдется такое сечение* $z = R_0 \in (0, R_1)$ *волновода* $\mathbb{S} \otimes \mathbb{R}^1_+$ *при*

$$R_1 = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_4^4}\right),$$

что будет иметь место предельное равенство

$$\limsup_{z \uparrow R_0} \int_{\mathbb{S}} |\nabla_\perp u|^2 dxdy = +\infty. \tag{3.12}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы начали исследовать новые задачи, относящиеся к рассмотрению диэлектриков при учете слабой частичной пространственной дисперсии, которые сводятся к нелинейным стационарным уравнениям в частных производных соболевского типа. И в качестве естественных приложений полученных нами результатов является теория волноводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калантаров В.К., Ладыженская О.А.* Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов // Зап. ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.
2. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрушении решения системы уравнений Осколкова // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 4. С. 83–108.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. М.: Наука, 1992.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
5. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234.
6. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
7. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. М.: Научн. мир, 2008.
8. *Levine H.A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.