М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О разрушении решения системы уравнений Осколкова, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 4, 83–108

УДК 517.957

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

О разрушении решения системы уравнений Осколкова

В работе рассматривается система уравнений Осколкова с кубическим источником, описывающая динамику вязко-упругой жидкости. Доказана локальная во времени разрешимость задачи в слабом обобщенном смысле. Получены некоторые условия на начальную функцию, при которых имеет место разрушение решения за конечное время, а также двусторонние оценки на время существования решения. Кроме того, найдены достаточные условия глобальной во времени разрешимости задачи.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: разрушение системы уравнений Осколкова, обобщенное решение, уравнения гидродинамического типа.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о достаточных условиях возникновения разрушения решения следующей начально-краевой задачи для трехмерной системы уравнений Осколкова [1] с кубическим источником:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} = \nabla p, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, \mathrm{T}), \tag{1.2}$$

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \tag{1.3}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, Ω – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega\in\mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta\in(0,1]$, область Ω локально расположена по одну сторону от границы $\partial\Omega$,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

p – давление в жидкости, $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ – вектор скорости в жидкости.

Система уравнений (1.1)–(1.3) описывает динамику вязко-упругой жидкости Кельвина–Фойгта при учете кубического источника. Для системы уравнений без кубического источника (т.е. без слагаемого $|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}$) ранее в [2] была доказана ее глобальная во времени однозначная разрешимость в слабом и в классическом смыслах. При этом на начальные данные не накладывались какие-либо условия малости. Представляется интересным рассмотреть указанную выше систему уравнений с учетом кубического источника и получить достаточные

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00376-а) и в рамках Президентской программы поддержки молодых докторов наук (грант № МД-1006.2007.1).

условия на начальные данные, при которых нет глобальной во времени разрешимости в том классе, в котором в [2] была доказана глобальная разрешимость этой системы уравнений без кубического источника.

Система уравнений (1.1)–(1.3), с одной стороны, является системой уравнений гидродинамического типа, поскольку содержит конвективную нелинейность $(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}$ и слагаемое ∇p – градиент давления. С другой стороны, система уравнений (1.1)–(1.3) представляет собой систему уравнений третьего порядка, не разрешенную относительно старшей производной по времени. Такие системы уравнений называют *псевдопараболическими*.

Как было предсказано О. А. Ладыженской в 1966 г. на Международном математическом конгрессе [3] и затем доказано в работах А. П. Осколкова [4]–[6], уравнения жидкостей Кельвина–Фойгта регуляризуют трехмерные нестационарные уравнения Навье–Стокса при больших градиентах скоростей. Отметим также, что разнообразным задачам для систем уравнений, обобщающих систему Осколкова, посвящены работы Г. А. Свиридюка [7], [8] и работа Г. В. Демиденко и С. В. Успенского [9].

В классической работе Г. А. Левайна [10] был предложен энергетический подход к исследованию вопроса о разрушении сильного и слабого обобщенных решений при достаточно больших начальных данных задачи. В работе [10] изучалась глобальная во времени неразрешимость задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения вида

$$\mathbb{A}\frac{du}{dt} + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \qquad u(0) = u_0,$$

при этом существенно использовалось то, что операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{L}$ – линейные, положительно определенные и самосопряженные, а $\mathbb{F}(u)$ имеет симметричную производную Фреше.

Много результатов по исследованию неограниченных решений было получено в работе А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [11], в которой исследованы вопросы разрушения решений квазилинейных параболических уравнений. При этом использовалась самая разнообразная техника. Для одних задач применялись признаки сравнения, с помощью которых при использовании верхних и нижних решений доказывались теоремы существования (или несуществования). Для других задач применялся метод неограниченных коэффициентов Фурье. В [11] получены достаточные условия разрушения решений классов квазилинейных уравнений параболического типа. Заметим, что методика, развитая в [11] для доказательства разрушения решений параболических уравнений, может быть применена и при исследовании вопросов разрушения для псевдопараболических уравнений.

В монографии С. И. Похожаева и Е. Митидьери [12] был развит оригинальный метод исследования вопросов разрушения решений дифференциальных неравенств эллиптического, параболического и гиперболического типов. Для всех трех типов уравнений авторами было предложено обобщение понятия "емкости" – "нелинейная емкость". С помощью этого понятия изучение вопросов разрушения проводится по одной и той же схеме, вне зависимости от типа дифференциального неравенства. Указанный выше подход, по всей видимости, может быть применен к исследованию дифференциальных неравенств псевдопараболического типа в неограниченных областях.

Отметим, что в работе В. К. Калантарова и О. А. Ладыженской [13] впервые рассмотрены дифференциальные неравенства вида

$$\Phi\Phi'' - (1+\alpha)(\Phi')^2 + \mathrm{C}_1\Phi\Phi' + \mathrm{C}_2\Phi^2 \geqslant 0, \qquad \mathrm{C}_1 \geqslant 0, \quad \mathrm{C}_2 \geqslant 0, \quad \alpha > 0,$$

из которых получаются достаточные условия возникновения разрыва второго рода у функции $\Phi(t)$, имеющей смысл энергии. Мы (см. [14]) многократно используем это обыкновенное дифференциальное неравенство для получения достаточных условий разрушения решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений псевдопараболического типа.

Отметим, что развитый в работе Н. Хайяши, И. А. Шишмарева, П. И. Наумкина, Е. И. Кайкиной [15] метод построения асимптотики при больших временах для широкого класса нелинейных эволюционных уравнений может быть применен к исследованию асимптотики при больших временах для уравнений псевдопараболического типа. В частности, в [15] было изучено асимптотическое поведение решения задачи Коши для следующего диссипативного уравнения псевдопараболического типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + \alpha u^3 = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

§ 2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы введем некоторые обозначения и сформулируем ряд вспомогательных результатов, используемых в дальнейшем. Эти результаты опубликованы в [16].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная липшицева область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$. Обозначим через $\mathbb{L}^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, (соответственно через $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$) пространство вещественных функций, определенных на Ω, абсолютно интегрируемых с p-й степенью (соответственно существенно ограниченных) по лебеговой мере $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$. Это пространство с нормой

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

(соответственно с нормой $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u(x)|$) является банаховым пространством. Введем банаховы пространства векторнозначных функций

$$\mathbf{L}^q(\Omega) = \mathbb{L}^q(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega), \qquad q \in [1, +\infty],$$

где для $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ по определению

$$|\mathbf{u}| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}, \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Кроме того, через $(\mathbf{u},\mathbf{v})_2$ обозначим скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Пусть $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ – пространство векторнозначных функций $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ таких, что $u_k\in\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $k=1,2,3$. Можно доказать, что $\mathbf{H}_0^1(\Omega)=\mathbb{H}_0^1(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Таким образом, $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$((\mathbf{u},\mathbf{v}))=\sum_{i=1}^{3}(D_i\mathbf{u},D_i\mathbf{v})_2,\qquad D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{+1}=\left(\sum_{j=1}^{3}\|D_j\mathbf{u}\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Двойственное к гильбертовому пространству $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, т.е. $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)'=\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, а норму в нем обозначим через $\|\mathbf{u}\|_{-1}$. Кроме того, нам потребуется пространство $\mathbf{D}(\Omega)=\mathscr{D}(\Omega)\times\mathscr{D}(\Omega)\times\mathscr{D}(\Omega)$, где $\mathscr{D}(\Omega)$ – пространство основных функций с компактным носителем, $\mathbf{u}\in\mathbf{D}(\Omega)$, когда $u_k\in\mathscr{D}(\Omega)$, $k=1,2,3$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$. Теперь введем пространство

$$\mathbf{V}(\Omega)=(\mathbf{u}\in\mathbf{D}(\Omega):\operatorname{div}\mathbf{u}=0).\tag{2.1}$$

Замыкание $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}(\Omega)$, а замыкание $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$ – через $\mathbf{X}(\Omega)$. Пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ вложено в $\mathbf{X}(\Omega)$ и плотно в нем, причем это вложение непрерывно.

Пространство, двойственное к гильбертовому пространству $\mathbf{H}(\Omega)$, обозначим через $\mathbf{H}'(\Omega)$.

Лемма 1. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $u_i\in\mathscr{D}'(\Omega)$, $i=1,2,3$. Для того чтобы для некоторого $p\in\mathscr{D}'(\Omega)$ выполнялось равенство*

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}p,\tag{2.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle\!\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\!\rangle=0,\qquad \mathbf{v}\in\mathbf{V}(\Omega),$$

где $\langle\!\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\!\rangle$ – скобка двойственности между пространствами $\mathbf{D}(\Omega)$ и $\mathbf{D}'(\Omega)$, а $\mathbf{D}'(\Omega)$ – это пространство, двойственное к $\mathbf{D}(\Omega)$.

Лемма доказана в [16].

Лемма 2. *Если у распределения p все первые слабые производные D_ip, $1\leqslant i\leqslant 3$, принадлежат $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, то $p\in\mathbb{L}^2(\Omega)$ и*

$$\|p\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}}\leqslant c(\Omega)\|\operatorname{grad}p\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)},\tag{2.3}$$

где

$$\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}=\left(p\in\mathbb{L}^2(\Omega),\int_\Omega p(x)\,dx=0\right),$$

которое является гильбертовым. Кроме того, $p\in\mathbb{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Лемма доказана в [16].

Лемма 3. *Предположим, что* Ω *– липшицева открытая ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ *и* $\langle\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle\rangle = 0$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$. *Тогда* $\mathbf{f} = \operatorname{grad} p$, *где* $p \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Лемма доказана в [16].

Лемма 4. *Пусть* Ω *– открытое ограниченное липшицево множество. Тогда*

$$\mathbf{H}(\Omega) = (\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{u} = 0).$$

Лемма доказана в [16].

Воспользуемся теперь некоторыми результатами из работы Ладыженской [3]. Для векторного пространства $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ справедливо разложение в прямую сумму

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbb{J}(\Omega) \oplus \mathbb{G}(\Omega),$$

где $\mathbb{J}(\Omega)$ – замыкание по норме пространства $\mathbf{L}^2(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в Q_{T} соленоидальных векторов. Совокупность элементов из $\mathbf{L}^2(\Omega)$, ортогональных $\mathbb{J}(\Omega)$, образует подпространство, которое мы обозначим через $\mathbb{G}(\Omega)$.

Лемма 5. *Подпространство* $\mathbb{G}(\Omega)$ *состоит из* $\operatorname{grad} p(x)$, *где* $p(x)$ *– однозначная в* Ω *функция, имеющая первые слабые производные из* $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Лемма доказана в [3].

§ 3. Однозначная локальная разрешимость в слабом обобщенном смысле

Прежде всего поясним, в каком смысле мы понимаем слабую обобщенную разрешимость задачи (1.1)–(1.3).

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.3) называется решение $\mathbf{u}(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}(\Omega))$ $(\mathbf{u}'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}(\Omega)))$ следующей задачи

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{w} \rangle = 0, \qquad \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \tag{3.2}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – скобки двойственности между пространствами $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, т.е.

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbb{D}_1(\mathbf{u}), w_1 \rangle_1 + \langle \mathbb{D}_2(\mathbf{u}), w_2 \rangle_1 + \langle \mathbb{D}_3(\mathbf{u}), w_3 \rangle_1,$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \bigl(\mathbb{D}_1(\mathbf{u}), \mathbb{D}_2(\mathbf{u}), \mathbb{D}_3(\mathbf{u})\bigr), \qquad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3),$$

$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_1$ – скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Определение 2. *Слабой производной функции* $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ в смысле скобок двойственности $\langle \cdot , \cdot \rangle_1$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ называется следующая величина:

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle_1 \equiv \left\langle v, -\frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_1 = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx, \qquad w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega), \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее мы будем пользоваться этим определением слабой производной и говорить об интегрировании “по частям” в указанном выше смысле. В частности,

$$\langle \Delta v, w \rangle_1 \equiv -\langle \nabla v, \nabla w \rangle = -\sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_1 = -\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega dx\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i}, \\ v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega), \qquad w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

В силу определения 2 слабой производной задачу (3.1)–(3.2) можно переписать в следующем виде:

$$\int_0^{\mathrm{T}} \int_\Omega dt\, dx\, \phi(t) \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) + (\mathbf{u}', \mathbf{w}) + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{3} u_i \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) - \left(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \mathbf{w} \right) \right] = 0, \qquad \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega).$$

Прежде всего докажем, что задача (3.1)–(3.2) эквивалентна следующей задаче (3.3)–(3.4):

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \tag{3.3}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}. \tag{3.4}$$

Пусть $\mathbb{B}$ – сепарабельное банахово пространство с сопряженным пространством $\mathbb{B}^*$ и со скобкой двойственности $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$. Обозначим через $\| \cdot \|_{\mathbb{B}}$ норму в $\mathbb{B}$, а через $\| \cdot \|^*_{\mathbb{B}}$ – норму в $\mathbb{B}^*$. Кроме того, пусть $\mathbb{B}_1$ – сепарабельное банахово пространство, вложенное в $\mathbb{B}$.

Пусть $\mathscr{L}[u]$ – некоторый дифференциальный оператор в частных производных такой, что для любого $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \|\mathscr{L}[u]\|^{*2}_{\mathbb{B}}(t) \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T}) < +\infty, \qquad \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{3.5}$$

Рассмотрим следующие два определения слабого обобщенного решения оператора $\mathscr{L}[u]$:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathscr{L}[u], w \rangle_{\mathbb{B}} \phi(t) = 0, \qquad w \in \mathbb{B}_1, \quad \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}), \quad \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0), \tag{3.6}$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathscr{L}[u], v \rangle_{\mathbb{B}} = 0, \qquad v \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{B}_1), \quad \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_0), \tag{3.7}$$

где символом $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$. В силу (3.5) левые части выражений (3.6) и (3.7) определены.

Докажем теперь, что произвольную фиксированную функцию из $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B}_1)$ можно приблизить в смысле $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B}_1)$ функциями из $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B}_1)$ с любой наперед заданной точностью. Действительно, введем финитную в $\mathbb{R}^1$ бесконечно дифференцируемую функцию

$$\rho(t) = \begin{cases} \mathrm{C}\exp\left(\dfrac{1}{t^2-1}\right), & |t|<1, \\ 0, & |t|\geqslant 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

где постоянная $\mathrm{C}>0$ определяется условием

$$\int_{\mathbb{R}^1} dt\, \rho(t) = 1.$$

Зафиксируем произвольную функцию $v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B}_1)$ и через $\overline{v}$ обозначим продолжение функции v нулем вне интервала $(0,\mathrm{T})$. Используя функцию (3.8), введем срезку функции $\overline{v}$:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^1} ds\, \rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\overline{v}(s), \tag{3.9}$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера. Заметим, что на основании теоремы 3.8.4. из [17] из (3.9) заключаем, что $v^\varepsilon \in \mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B}_1)$. Справедливо следующее равенство:

$$v^\varepsilon(t) - v(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^1} ds\, \rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)[\overline{v}(s)-v(t)].$$

Из него получаем, что

$$\|v^\varepsilon(t)-v(t)\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^1} ds\, \rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right)\|\overline{v}(s)-v(t)\|_{\mathbb{B}_1}, \qquad t\in(0,\mathrm{T}), \tag{3.10}$$

а из (3.10) имеем

$$\|v^\varepsilon(t)-v(t)\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} ds\, \|v(s)-v(t)\|_{\mathbb{B}_1}. \tag{3.11}$$

В силу теоремы 3.8.5 из [17] получаем, что для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} ds\, \|v(s)-v(t)\|_{\mathbb{B}_1} = 0.$$

Следовательно, для почти всех $t\in(0,\mathrm{T})$ в силу (3.11) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|v(t)-v^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{B}_1} = 0.$$

Используя теорему Лебега, приходим к выводу, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\|v(t)-v^{\varepsilon}(t)\|^2_{\mathbb{B}_1}=0.$$

Итак, доказано, что любую функцию из $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B}_1)$ сколь угодно точно можно приблизить функциями из $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B}_1)$.

Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B}_1)$. В силу сепарабельности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ в этом пространстве найдется счетная всюду плотная система элементов $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$. В силу теоремы 1.3 главы IV работы [18] система функций $\{w_{k_1}t^{k_2}\}_{k_1,k_2=1}^{+\infty}$, $t\in[0,\mathrm{T}]$, всюду плотна в $\mathbb{C}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B}_1)$.

Пусть $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ – какой-либо базис в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\|v-\sum_{k_1,k_3=1}^{m_1,m_3}\mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3}\phi_{k_3}(t)w_{k_1}\right\|^2_{\mathbb{B}_1}\\
&\quad\leqslant\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\|v-v_\varepsilon\|^2_{\mathbb{B}_1}+\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\|v_\varepsilon-\sum_{k_1,k_2=1}^{m_1,m_2}d_{m_1m_2k_1k_2}w_{k_1}t^{k_2}\right\|^2_{\mathbb{B}_1}\\
&\qquad+\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\|\sum_{k_1,k_2=1}^{m_1,m_2}d_{m_1m_2k_1k_2}w_{k_1}\left(t^{k_2}-\sum_{k_3=1}^{m_3}\gamma_{k_2k_3}\phi_{k_3}(t)\right)\right\|^2_{\mathbb{B}_1}\\
&\quad=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3,
\end{aligned}\tag{3.12}$$

где

$$\mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3}=\sum_{k_2=1}^{m_2}d_{m_1m_2k_1k_2}\gamma_{k_2k_3}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ найдутся такая функция v_ε, что $\mathrm{I}_1\leqslant\varepsilon/3$, такие $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ и такие $d_{m_1m_2k_1k_2}$, что $\mathrm{I}_2\leqslant\varepsilon/3$. Наконец, найдутся такие $\gamma_{k_2k_3}$, что $\mathrm{I}_3\leqslant\varepsilon/3$. Следовательно, из (3.12) получаем, что

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\|v-\sum_{k_1,k_3=1}^{m_1,m_3}\mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3}\phi_{k_3}(t)w_{k_1}\right\|^2_{\mathbb{B}_1}\leqslant\varepsilon.\tag{3.13}$$

Рассмотрим задачи (3.6) и (3.7). Очевидно, что из (3.7) следует (3.6). Теперь докажем, что из (3.6) следует (3.7). Действительно, для всех $v\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{B}_1)$ справедливо равенство

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\langle\mathscr{L}[u],v\rangle_{\mathbb{B}}=\int_0^{\mathrm{T}} dt\left\langle\mathscr{L}[u],\,v-\sum_{k_1,k_3=1}^{m_1,m_3}\mathrm{c}_{m_1m_3k_1k_3}\phi_{k_3}(t)w_{k_1}t\right\rangle_{\mathbb{B}}.\tag{3.14}$$

В силу (3.5) и (3.13) из него получаем, что правая часть (3.14) для любого $\varepsilon>0$ может быть сделана меньше $\delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)\to+0$ при $\varepsilon\to+0$. Так как левая часть (3.14) не зависит от $\varepsilon>0$, то приходим к (3.7). Таким образом, задачи (3.6) и (3.7) эквивалентны.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. *Тогда для того чтобы имело место равенство*

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = 0, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega)),$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая функция $p(t,x)$, $p(t,x) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R})$, *что* $\mathbf{f} = \mathrm{grad}_x\, p$, *где* $\langle \,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ *– скобки двойственности между* $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ *и* $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что существует такая функция $p(x,t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что $\mathbf{f} = \mathrm{grad}_x\, p \in \mathbf{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда имеет место следующая цепочка равенств для всех $\mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H})$:

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathrm{grad}\, p, \mathbf{v}\rangle = -\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle p, \mathrm{div}\, \mathbf{v}\rangle = 0, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega)).$$

Необходимость. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ и справедливо равенство

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\, \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = 0, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega)).$$

Пусть, кроме того, $\mathbf{v} = \phi(t)\mathbf{w}$, $\phi(t) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T})$ и $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega)$. Тогда в силу основной леммы вариационного исчисления получим, что

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{w}\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega) \ \text{ и почти всех } t \in [0,\mathrm{T}].$$

В частности, отсюда следует, что

$$\langle\!\langle \mathbf{f}, \mathbf{h}\rangle\!\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{h} \in \mathbf{V}(\Omega) \ \text{ и почти всех } t \in [0,\mathrm{T}].$$

Отсюда и в силу лемм 2 и 3 получаем, что найдется такая функция $p(t,x) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что

$$\mathbf{f} = \mathrm{grad}_x\, p(t,x) \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}^{-1}(\Omega)).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что классическое решение является слабым обобщенным решением в смысле определения 1.

Докажем теперь единственность решения задачи (3.1)–(3.2). Сначала покажем, что справедлива

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{u} \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega))$, $\mathbf{u}' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega))$. *Тогда имеет место следующее равенство для почти всех* $t \in (0,\mathrm{T})$:

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 + ((\mathbf{u},\mathbf{u})) - \|\mathbf{u}_0\|_2^2 - ((\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_0)) = 2\int_0^t ds\, \big[(\mathbf{u}',\mathbf{u})_2 + ((\mathbf{u}',\mathbf{u}))\big]. \tag{3.15}$$

Доказательство. Регуляризуя функцию $\widehat{\mathbf{u}}$, действующую из $\mathbb{R}$ в $\mathbf{H}(\Omega)$ и равную $\mathbf{u}$ на $[0, \mathrm{T}]$ и нулю вне этого интервала, получаем последовательность функций $\mathbf{u}_m$, удовлетворяющую условиям

$$\mathbf{u}_m \in \mathbb{C}^\infty([0, \mathrm{T}]; \mathbf{H}(\Omega)), \tag{3.16}$$

$$\mathbf{u}_m \to \mathbf{u} \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2_{\mathrm{loc}}(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}(\Omega)), \tag{3.17}$$

$$\mathbf{u}'_m \to \mathbf{u}' \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2_{\mathrm{loc}}(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}(\Omega)). \tag{3.18}$$

Очевидно, что для функций $\mathbf{u}_m$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}\big[(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2 + ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))\big] = 2(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2 + 2((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)). \tag{3.19}$$

Из (3.17)–(3.19) следует, что

$$\|\mathbf{u}_m\|_2^2 \to \|\mathbf{u}\|_2^2, \qquad ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)) \to ((\mathbf{u}', \mathbf{u})),$$
$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)_2 \to (\mathbf{u}', \mathbf{u})_2 \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(0, \mathrm{T}).$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в смысле $\mathscr{D}'(0, \mathrm{T})$ в равенстве (3.19), получим такое равенство в смысле $\mathscr{D}'(0, \mathrm{T})$:

$$\frac{d}{dt}\big[(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2 + ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))\big] = 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}')_2 + 2((\mathbf{u}, \mathbf{u}')). \tag{3.20}$$

Теперь заметим, что

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2, ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) \in \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T}), \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{u}')_2, ((\mathbf{u}, \mathbf{u}')) \in \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T}).$$

Таким образом, интегрируя (3.20) по $t \in (0, \mathrm{T})$, приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Наконец, мы можем доказать единственность задачи (3.3)–(3.4), которая, как было показано, эквивалентна задаче (3.1)–(3.2).

Лемма 7. *В классах функций*

$$\mathbf{u} \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}(\Omega)), \qquad \mathbf{u}' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}(\Omega))$$

при $\mathrm{T} > 0$ *решение задачи* (3.3)–(3.4) *единственное.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ – два решения задачи (3.3)–(3.4), соответствующие одной и той же начальной функции $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$. Обозначим

$$\mathbf{w}(s) = \begin{cases} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, & s \in [0, t], \\ \mathbf{0}, & s \in [t, \mathrm{T}]. \end{cases}$$

Возьмем в (3.3) $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ и вычтем уравнение (3.3) для решения $\mathbf{u}_2$ из уравнения (3.3) для решения $\mathbf{u}_1$. Тогда после интегрирования по частям, что законно в рассматриваемых классах, получим следующее равенство:

$$\int_0^t ds \left[(\mathbf{w}', \mathbf{w})_2 + ((\mathbf{w}', \mathbf{w})) + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) - \int_\Omega dx\, (|\mathbf{u}_1|^2\mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^3 \int_\Omega dx\, (w_k \mathbf{u}_2 + u_{1k}\mathbf{w})\mathbf{w}_{x_k}\right] = 0. \tag{3.21}$$

Из (3.21) в силу (3.15) получим

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) + 2\int_0^t ds \left[((\mathbf{w}, \mathbf{w})) - \int_\Omega dx\, (|\mathbf{u}_1|^2\mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \right.$$
$$\left. - \int_\Omega dx\, \sum_{k=1}^3 (w_k \mathbf{u}_2 + u_{1k}\mathbf{w})\mathbf{w}_{x_k}\right] = 0.$$

Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = 0$, то из последнего равенства получим

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) + 2\int_0^t ds \left[((\mathbf{w}, \mathbf{w})) - \int_\Omega dx\, (|\mathbf{u}_1|^2\mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \right.$$
$$\left. - \int_\Omega dx\, \sum_{k=1}^3 (w_k \mathbf{u}_2)\mathbf{w}_{x_k}\right] = 0. \tag{3.22}$$

Рассмотрим сначала последнее слагаемое в равенстве (3.22). Заметим, что оно в точности совпадает с тем слагаемым, которое было рассмотрено в работе [3]. Из теорем вложения Соболева при $N = 3$ имеем $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$, поэтому $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbf{L}^4(\Omega))$. В силу условий леммы для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$ имеем

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^3 (u_{2k})^4\, dx \leqslant C(\mathrm{T}).$$

Тогда из [3] следует, что

$$\left|\int_\Omega dx\, \sum_{k=1}^3 (w_k \mathbf{u}_2)\mathbf{w}_{x_k}\right| \leqslant \mathrm{C}_1(\mathrm{T})((\mathbf{w}, \mathbf{w})) + \mathrm{C}_2(\mathrm{T})\|\mathbf{w}\|_2^2.$$

Кроме того,

$$\left|\int_\Omega dx\, \big(|\mathbf{u}_1|^2\mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2\mathbf{u}_2\big)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\right| \leqslant \mathrm{C}_3(\mathrm{T})((\mathbf{w}, \mathbf{w})).$$

Таким образом, из (3.22) получаем неравенство

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) \leqslant \mathrm{C}_4(\mathrm{T}) \int_0^t ds \left[\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w}))\right](s), \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \tag{3.23}$$

из которого в силу леммы Гроноулла–Белмана $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ для почти всех $(x, t) \in \Omega \times (0, \mathrm{T})$.

Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству основного результата этого параграфа. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ *существует единственное слабое обобщенное решение задачи* (3.3)–(3.4) *такое, что*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}_0; \mathbf{H}(\Omega)), \qquad u' \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_0; \mathbf{H}(\Omega)),$$

причем момент времени $\mathrm{T}_0 > 0$ *максимален в том смысле, что либо* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *либо* $\mathrm{T}_0 < +\infty$ *и имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим конечномерную аппроксимацию задачи (3.1)–(3.2). Так как пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ сепарабельно, то существует последовательность линейно-независимых элементов $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n, \ldots$, тотальная в $\mathbf{H}(\Omega)$. Для каждого m определим приближенное решение $\mathbf{u}_m$ уравнения(3.1) следующим образом:

$$\int_0^{\mathrm{T}_m} dt\, \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle = 0, \qquad k = \overline{1, m} \quad \forall\, \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_m),$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{m0} \in \mathbf{H}(\Omega), \tag{3.24}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}_m) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m) + \Delta \mathbf{u}_m + (\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m + |\mathbf{u}_m|^2 \mathbf{u}_m, \tag{3.25}$$

где

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) \mathbf{w}_k, \qquad \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{m0} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{w}_k \to \mathbf{u}_0 \quad \text{сильно в } \mathbf{H}(\Omega). \tag{3.26}$$

Относительно функций $c_{mk}(t)$ мы предполагаем, что они являются решениями системы уравнений (3.24) класса $\mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}_m]$ при некотором $\mathrm{T}_m > 0$. В указанном классе имеет место вложение

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle \in \mathbb{C}[0, \mathrm{T}_m],$$

поэтому в силу вложения $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(\infty)}[0, \mathrm{T}_m] \subset \mathbb{L}^2(0, \mathrm{T}_m)$ и, следовательно, в силу основной леммы вариационного исчисления имеем

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle = 0. \tag{3.27}$$

Отсюда в силу (3.26) получим для $c_{mk}(t)$ следующую систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m \big[(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)_2 + ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j))\big] c'_{mi} + \sum_{i=1}^m ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) c_{mi} + \sum_{i,l=1}^{m,m} b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j) c_{mi}(t) c_{ml}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^m \bigg(\Big| \sum_{k=1}^m c_{mk} \mathbf{w}_k \Big|^2 \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \bigg)_2 c_{mi}, \tag{3.28}$$

где

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i (D_i v_j) w_j \, dx, \tag{3.29}$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \qquad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3).$$

Поскольку по построению система $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N, \ldots$ линейно независима в $\mathbf{H}(\Omega)$, то матрица

$$((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) + (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)_2$$

невырождена, поэтому, обращая ее, приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} c'_{mi} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} c_{mj}(t) + \sum_{j,k=1,1}^{m,m} \alpha_{ijk} c_{mj}(t) c_{mk}(t) \\ = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \sum_{l=1}^{m} \left(\left| \sum_{k=1}^{m} c_{mk} \mathbf{w}_k \right|^2 \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j \right)_2 c_{ml} \end{aligned} \tag{3.30}$$

с начальными условиями $c_{mi}(0) = \gamma_{mi}$. В силу общих результатов система уравнений (3.30) с соответствующими начальными условиями действительно имеет решение в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, \mathrm{T}_m]$.

Теперь приступим к выводу априорных оценок. Умножим уравнение (3.27) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$. Тогда получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bigl[((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2 \bigr] + ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \tag{3.31}$$

Теперь умножим обе части уравнения (3.27) на $c'_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$. Тогда получим второе энергетическое равенство

$$((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 + ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2. \tag{3.32}$$

Рассмотрим первое энергетическое равенство. Прежде всего отметим, что поскольку мы рассматриваем трехмерное пространство, то имеет место вложение $\mathbb{H}^1_0(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$. Отсюда сразу получаем вложение

$$\mathbf{H}^1_0(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega).$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\|\mathbf{u}_m\|_4 \leqslant \mathrm{C} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^{1/2}.$$

Введем обозначение

$$\Phi_m = \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2, \qquad \Phi_{m0} = \Phi_m(0). \tag{3.33}$$

Из первого энергетического равенства следует, что

$$\Phi'_m \leqslant 4 \mathrm{C}^4 \Phi_m^2, \tag{3.34}$$

а из (3.34) получаем, что

$$\Phi_m(t) \leqslant \frac{\Phi_{m0}}{1 - 4\Phi_{m0}}\, \mathrm{C}^4 t\,. \tag{3.35}$$

Поскольку $u_{m0} \to u_0$ сильно в $\mathbf{H}(\Omega)$, то $\Phi_{m0} \leqslant \mathrm{C}_0$, где C_0 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ возможны два случая: либо $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$, либо $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Обозначим $\overline{\mathrm{B}} = 4\mathrm{C}^4$.

Рассмотрим сначала случай $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{gathered} 1 - \overline{\mathrm{B}}\Phi_{m0}t \geqslant 1 - \overline{\mathrm{B}}\Phi_0 t \quad \forall\, t \in (0, \mathrm{T}_1), \qquad \mathrm{T}_1 = \overline{\mathrm{B}}^{-1}\Phi_0^{-1}, \\ \Phi_m \leqslant \mathrm{C}_1 \quad \forall\, t \in (0, \mathrm{T}), \qquad \mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1), \qquad \mathrm{T}_1 = \overline{\mathrm{B}}^{-1}\Phi_0^{-1}, \end{gathered} \tag{3.36}$$

где C_1 не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Для любого $\overline{m} < m$ имеем

$$\Phi_{\overline{m}0} > \Phi_{m0}, \qquad 1 - \overline{\mathrm{B}}\Phi_{m0}t \geqslant 1 - \overline{\mathrm{B}}\Phi_{\overline{m}0}t.$$

Тогда для любого $t \in [0, \overline{\mathrm{B}}^{-1}\Phi_{\overline{m}0}^{-1})$ получим

$$\Phi_m \leqslant \frac{\mathrm{C}_0}{[1 - \Phi_{\overline{m}0}\overline{\mathrm{B}}t]}\,.$$

Итак, для любого фиксированного $\mathrm{T} \in (0, \mathrm{T}_1)$ найдется такое $\overline{m} \in \mathbb{N}$, что имеют место неравенства (3.36).

Теперь из (3.32) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^t ds\, \bigl[((\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')) + (\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')_2\bigr] \leqslant \frac{1}{4}\|\mathbf{u}_m\|_4^4 + \frac{1}{2}((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0})) \\ + \left|\int_0^t ds\, ((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m')_2\right|. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Рассмотрим слагаемое $((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m')_2$. Обозначим $\mathbf{h} = \mathbf{u}_m'$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m')_2 &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} h_i(\mathbf{u}_m, \nabla)u_{mi} = \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_\Omega h_i(u_{mj}, \partial_j)u_{mi} \\ &= -\sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = -\sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\frac{\partial u_{mi}'}{\partial x_j} = \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Для I имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |\mathrm{I}| &\leqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \left| u_{mi}u_{mj}\frac{\partial u_{mi}'}{\partial x_j}\right| \leqslant \int_\Omega |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \left|\frac{\partial u_{mi}'}{\partial x_j}\right| \\ &\leqslant \sqrt{3}\int_\Omega |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\left|\frac{\partial u_i'}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_i'}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_i'}{\partial x_3}\right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant 3\int_\Omega |\mathbf{u}_m|^2 \left(\sum_{i=1}^{3} \left[\left|\frac{\partial u_i'}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_i'}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_i'}{\partial x_3}\right|^2 \right] \right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{3\varepsilon}{2}((\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')) + \frac{3}{2\varepsilon}\|\mathbf{u}_m\|_4^4. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Из (3.37) и (3.38) получаем оценку

$$\left(1-\frac{3\varepsilon}{2}\right)\int_0^t ds\,\bigl[((\mathbf{u}'_m,\mathbf{u}'_m))+(\mathbf{u}'_m,\mathbf{u}'_m)_2\bigr] \leqslant \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2\varepsilon}\right)\|\mathbf{u}_m\|_4^4+\frac{1}{2}((\mathbf{u}_{m0},\mathbf{u}_{m0})), \qquad \varepsilon=\frac{1}{3}\,. \tag{3.39}$$

Из (3.36) и (3.39) следует, что

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_m \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega)),\\ \mathbf{u}'_m \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega)).\end{gathered} \tag{3.40}$$

Из (3.40) заключаем, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\mathbf{u}_m$, для которой

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \quad *\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega)), \tag{3.41}$$

$$\mathbf{u}'_m \rightharpoonup \mathbf{v}^* \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega)). \tag{3.42}$$

Докажем, что $\mathbf{v}^*=\mathbf{u}'$. Действительно, из (3.41) следует, что в смысле распределений $\mathscr{D}'(0,\mathrm{T};\mathbf{H}(\Omega))$ справедливо предельное равенство $\mathbf{u}'_m\to\mathbf{u}'$, а в силу единственности предела имеем $\mathbf{v}^*=\mathbf{u}'$.

Лемма 8. *Для некоторой подпоследовательности последовательности* $\mathbf{u}_m=(u_{1m},u_{2m},u_{3m})$ *имеем*: $u_{im}u_{jm}\rightharpoonup u_iu_j$ *слабо в* $\mathbb{L}^2(Q_\mathrm{T})$, $Q_\mathrm{T}=(0,\mathrm{T})\times\Omega$ *для всех* $i,j=\overline{1,3}$.

Доказательство. В силу (3.40) имеем

$$u_{mi}\in\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1_0(\Omega)), \qquad u'_{mi}\in\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1_0(\Omega)), \quad i=\overline{1,3},$$

равномерно по $m\in\mathbb{N}$. Значит,

$$u_{mi}\in\mathbb{H}^1(Q_\mathrm{T})\subset\subset\mathbb{L}^4(Q_\mathrm{T})\subset\mathbb{L}^2(Q_\mathrm{T}).$$

Следовательно, $u_{mi}\to u_i$ сильно в $\mathbb{L}^4(Q_\mathrm{T})$. Докажем теперь утверждение леммы. Действительно, для всех $w\in\mathbb{L}^2(Q_\mathrm{T})$ имеем

$$\int_0^\mathrm{T}\int_\Omega dx\,dt\,u_{mi}u_{mj}w=\int_0^\mathrm{T}\int_\Omega dx\,dt\,[u_{mi}-u_i]u_{mj}w + \int_0^\mathrm{T}\int_\Omega dx\,dt\,u_i[u_{mj}-u_j]w+\int_0^\mathrm{T}\int_\Omega dx\,dt\,u_iu_jw.$$

При $m\to+\infty$ справедливы следующие оценки:

$$\left|\int_0^\mathrm{T}\int_\Omega dx\,dt\,[u_{mi}-u_i]u_{mj}w\right|\leqslant\|u_{mi}-u_i\|_4\,\|u_{mj}\|_4\,\|w\|_2\to+0,$$

$$\left|\int_0^\mathrm{T}\int_\Omega dx\,dt\,[u_{mj}-u_j]u_iw\right|\leqslant\|u_{mj}-u_j\|_4\,\|u_i\|_4\,\|w\|_2\to+0.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть последовательность* $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *равномерно по* $m \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leqslant C, \qquad \int_0^{\mathrm{T}} dt\, \|\mathbf{u}'_m\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leqslant C, \quad t \in (0,\mathrm{T}), \tag{3.43}$$

где $0 < \mathrm{T} < +\infty$ *и постоянная* C *зависит от* T. *Тогда существует функция* $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ *для почти всех* $s \in [0,\mathrm{T}]$ *и* $\mathbf{u}_{m_k}(s) \to \mathbf{u}(s)$ *сильно в* $\mathbf{L}^4(\Omega)$ *для почти всех* $s \in [0,\mathrm{T}]$, *где* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с достаточно гладкой границей.*

Доказательство. Имеет место компактное вложение $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset\subset \mathbf{L}^4(\Omega)$. Рассмотрим рефлексивное банахово пространство

$$\mathbf{R} = \bigl\{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}_0^1(\Omega)),\ \mathbf{u}' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}_0^1(\Omega))\bigr\}. \tag{3.44}$$

Заметим, что для функции $\mathbf{u}_m(t)$ после возможного изменения переменной t на множестве нулевой меры Лебега на $(0,\mathrm{T})$ имеем

$$\mathbf{u}_m(t) \in \mathbb{C}\bigl([0,\mathrm{T}];\mathbf{H}_0^1(\Omega)\bigr) \subset \mathbb{C}\bigl([0,\mathrm{T}];\mathbf{L}^4(\Omega)\bigr).$$

В силу (3.43) последовательность $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ ограничена в $\mathbf{R}$. Поскольку $\mathbf{R}$ – рефлексивное банахово пространство, то из последовательности $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{u}_{m_k}\}_{m_k=1}^{+\infty}$. В частности,

$$\mathbf{u}_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}_0^1(\Omega)). \tag{3.45}$$

Докажем, что

$$\mathbf{u}_{m_k}(s) \to \mathbf{u}(s) \quad \text{сильно в } \mathbf{L}^4(\Omega) \text{ для почти всех } s \in [0,\mathrm{T}]. \tag{3.46}$$

Воспользуемся техникой работы [19]. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Кроме того, s не играет никакой особой роли и нам остается только показать, что

$$\mathbf{u}_{m_k}(0) \to 0 \quad \text{сильно в } \mathbf{L}^4(\Omega). \tag{3.47}$$

Определим теперь $\mathbf{v}_k$ равенством

$$\mathbf{v}_k(t) = \mathbf{u}_{m_k}(\lambda t), \tag{3.48}$$

где $\lambda > 0$ фиксировано, причем

$$\mathbf{u}_{m_k}(0) = \mathbf{v}_k(0), \qquad \|\mathbf{v}_k\|_{\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}_0^1(\Omega))} \leqslant c_1\lambda^{-1/2}, \quad \|\mathbf{v}'_k\|_{\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{L}^4(\Omega))} \leqslant c_2\lambda^{1/2}. \tag{3.49}$$

Если функция $\varphi \in \mathbb{C}^1[0,\mathrm{T}]$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi(\mathrm{T}) = 0$, то

$$\mathbf{v}_k(0) = \int_0^{\mathrm{T}} (\varphi(t)\mathbf{v}_k)'\, dt = \beta_k + \gamma_k, \qquad \beta_k = \int_0^{\mathrm{T}} \varphi\mathbf{v}'_k\, dt, \quad \gamma_k = \int_0^{\mathrm{T}} \varphi'\mathbf{v}_k\, dt.$$

Значит,

$$\|u_{m_k}(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leqslant \|\beta_k\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\gamma_k\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leqslant c_3\lambda^{1/2} + \|\gamma_k\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $c_3\lambda^{1/2} \leqslant \varepsilon/2$. Поскольку $\mathbf{v}_k \rightharpoonup 0$ слабо в $\mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbf{H}^1_0(\Omega))$, то $\gamma_k \rightharpoonup 0$ слабо в $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$. Но вложение $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$ компактно, поэтому имеет место сильная сходимость $\gamma_k \to 0$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$. Следовательно, для произвольного ε найдется такое N, что для всех $m_k > N$ имеет место неравенство

$$\|u_{m_k}(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Итак, (3.47) установлено. Лемма доказана.

Теперь докажем следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть последовательность* $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *равномерно по* $m \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} \leqslant C, \qquad \int_0^{\mathrm{T}} dt\, \|\mathbf{u}'_m\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)} \leqslant C, \quad t \in (0,\mathrm{T}), \tag{3.50}$$

где $0 < \mathrm{T} < +\infty$ *и постоянная* C *зависит от* T. *Тогда существует функция* $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ *для почти всех* $s \in [0,\mathrm{T}]$ *и*

$$|\mathbf{u}_{m_k}|^2\mathbf{u}_{m_k} \to |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}$$

сильно в $\mathbb{L}^{4/3}(\Omega)$ *для почти всех* $t \in [0,\mathrm{T}]$.

Доказательство. Из леммы 9 получаем, что для некоторой подпоследовательности $\mathbf{u}_{m_k}$ последовательности $\mathbf{u}_m$ имеем: $\mathbf{u}_{m_k} \to \mathbf{u}$ сильно в $\mathbb{L}^4(\Omega)$ для почти всех $t \in [0,\mathrm{T}]$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\big|\,|\mathbf{u}_{m_k}|^2\mathbf{u}_{m_k} - |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\big| \leqslant \mathrm{C}\max\big\{|\mathbf{u}|^2, |\mathbf{u}_{m_k}|^2\big\}|\mathbf{u}_{m_k} - \mathbf{u}|.$$

На основе этого неравенства, используя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\big\|\,|\mathbf{u}_{m_k}|^2\mathbf{u}_{m_k} - |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\big\|_{4/3} \leqslant \mathrm{C}\max\big\{\|\mathbf{u}\|^2_4, \|\mathbf{u}_{m_k}\|^2_4\big\}\|\mathbf{u}_{m_k} - \mathbf{u}\|_4,$$

из которой сразу же следует к утверждение леммы. Лемма доказана.

Теперь перейдем к пределу при $m \to +\infty$ в уравнении (3.24). Действительно, в силу (3.41) и (3.42) имеем

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\phi(t)\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m) + \Delta\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k\Big\rangle \to \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\phi(t)\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta\mathbf{u}, \mathbf{w}_k\Big\rangle.$$

Рассмотрим теперь нелинейные слагаемые в уравнении (3.24). В силу лемм 8 и 10 получаем

$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\phi(t)\langle(\mathbf{u}_m,\nabla)\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_k\rangle = -\sum_{l,j=1}^{3,3}\int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega dx\,dt\,\phi(t)u_{jm}u_{lm}\,\frac{\partial w_{lk}}{\partial x_j}$$
$$\to -\sum_{l,j=1}^{3,3}\int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega dx\,dt\,\phi(t)u_j u_l\,\frac{\partial w_{lk}}{\partial x_j} = \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\phi(t)\langle(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u},\mathbf{w}_k\rangle,$$
$$\int_0^{\mathrm{T}} dt\,\phi(t)\langle|\mathbf{u}_m|^2\mathbf{u}_m,\mathbf{w}_k\rangle \to \int_0^{\mathrm{T}} dt\,\phi(t)\langle|\mathbf{u}|^2\mathbf{u},\mathbf{w}_k\rangle.$$

Пусть $\mathrm{T}=\mathrm{T}_0>0$, причем T_0 – максимальный момент времени, т.е. либо $\mathrm{T}_0=+\infty$, либо $\mathrm{T}_0<\infty$ и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow\mathrm{T}_0}((\mathbf{u},\mathbf{u}))=+\infty.$$

Предположим что выполнено условие $\mathrm{T}_0<+\infty$, но

$$((\mathbf{u},\mathbf{u}))(t)\leqslant \mathrm{C}<+\infty,\qquad t\in[0,\mathrm{T}_0].$$

Заметим теперь, что после изменения переменной t на множестве меры Лебега нуль имеем $u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbf{H}(\Omega))$. Пусть $\mathrm{T}'\in(0,\mathrm{T}_0)$. Тогда

$$\int_0^{\mathrm{T}'} ds\,\langle\mathbf{D}(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle=0\quad\forall\,\mathbf{v}\in\mathbb{L}^2\bigl([0,\mathrm{T}');\mathbf{H}(\Omega)\bigr),\qquad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0\in\mathbf{H}(\Omega).\tag{3.51}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\int_{\mathrm{T}'}^{\mathrm{T}'+t} ds\,\langle\mathbf{D}(\mathbf{u}),\mathbf{v}\rangle=0\quad\forall\,\mathbf{v}\in\mathbb{L}^2\bigl([\mathrm{T}',\mathrm{T}'+t);\mathbf{H}(\Omega)\bigr),\qquad \mathbf{u}(\mathrm{T}')=\mathbf{u}_{\mathrm{T}'}\in\mathbf{H}(\Omega).\tag{3.52}$$

Сделаем замену переменных $\sigma=s-\mathrm{T}'$, $\mathbf{w}(\sigma)=\mathbf{u}(\sigma+\mathrm{T}')$. Тогда придем к следующей задаче:

$$\int_0^t d\sigma\,\bigl\langle\mathbf{D}(\mathbf{w})(\sigma),\mathbf{v}(\sigma+\mathrm{T}')\bigr\rangle=0\quad\forall\,\mathbf{v}(\sigma+\mathrm{T}')\in\mathbb{L}^2\bigl([0,t);\mathbf{H}(\Omega)\bigr),$$
$$\mathbf{w}(0)=\mathbf{u}_{\mathrm{T}'}\in\mathbf{H}(\Omega).\tag{3.53}$$

Сравним эту задачу с (3.1). Поэтому в силу локальной разрешимости задачи (3.1) найдется такое $t=\mathrm{T}^*=\mathrm{T}^*(\mathrm{T}')>0$, что существует единственное решение задачи (3.53). Поскольку

$$\sup_{\mathrm{T}'\in[0,\mathrm{T}_0]}((\mathbf{u},\mathbf{u}))<+\infty,$$

то существует точная нижняя грань функции $\mathrm{T}^*=\mathrm{T}^*(\mathrm{T}')>0$, которую обозначим через $\mathrm{T}^*>0$. Возьмем $\mathrm{T}'=\mathrm{T}_0-\mathrm{T}^*/2$. Теперь имеем

$$\widehat{\mathbf{u}}=\bigl\{\mathbf{u}(t),\,t\in[0,\mathrm{T}'];\ \mathbf{w}(t-\mathrm{T}'),\,t\in[\mathrm{T}',\mathrm{T}'+\mathrm{T}^*]\bigr\}.$$

Так как $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}^*/2$, то

$$\widehat{\mathbf{u}} = \bigl\{\mathbf{u}(t), \in [0, \mathrm{T}']; \ \mathbf{w}(t - \mathrm{T}'), \ t \in [\mathrm{T}', \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}^*/2]\bigr\}.$$

Мы приходим к выводу, что решение задачи (3.1) можно продолжить на интервал $(\mathrm{T}_0, +\infty)$. Это противоречит условию $0 < \mathrm{T}_0 < +\infty$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Разрушение решения и глобальная во времени разрешимость

Введем обозначения

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2, \tag{4.1}$$

$$\Phi_m(t) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2, \qquad \mathrm{J}_m(t) = ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и неравенство*

$$\|\mathbf{u}_0\|_4^4 > 50((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + 49(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2.$$

Обозначим

$$\Phi_0 = \Phi(0), \qquad \mathrm{T}_2 = A^{-1}\Phi_0^{-1/2}, \qquad \mathrm{T}_1 = \frac{1}{4}\,\Phi_0^{-1}\mathrm{C}_2^{-4},$$

$$A = \left[\frac{1}{4}\,\Phi_0^{-3}[(\Phi'(0) - 84\Phi_0)^2 - 196\Phi_0^2]\right]^{1/2}, \qquad \mathrm{B}_1 = \frac{2\mathrm{C}_1^2}{1 + \mathrm{C}_1^2}\,, \qquad \mathrm{B}_2 = 4\mathrm{C}_2^4,$$

где C_1 *– наилучшая константа вложения* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *в* $\mathbf{L}^2(\Omega)$, *т.е.*

$$\mathrm{C}_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})_2^{1/2} \leqslant ((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

а C_2 *– наилучшая константа вложения* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *в* $\mathbf{L}^4(\Omega)$, *т.е.*

$$\|\mathbf{w}\|_4 \leqslant \mathrm{C}_2((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Тогда решение задачи (3.3)–(3.4) *разрушается за конечное время* $\mathrm{T}_0 > 0$, *т.е.*

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0}((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty,$$

причем $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$. *Если же*

$$\Phi_0 \leqslant \frac{\mathrm{C}_1^2}{2(1 + \mathrm{C}_1^2)\mathrm{C}_2^4}\,,$$

то решение задачи (3.3)–(3.4) *существует глобально во времени* $\mathrm{T}_0 = +\infty$, *причем*

$$\Phi(t) \leqslant \frac{e^{-\mathrm{B}_1 t}}{\Phi_0^{-1} - [1 - e^{-\mathrm{B}_1 t}]\mathrm{B}_2/\mathrm{B}_1}\,.$$

Доказательство. С учетом введенных обозначений перепишем первое и второе энергетические равенства (3.31) и (3.32) в следующем виде:

$$\frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \tag{4.2}$$

Умножив обе части уравнения (3.27) на $c'_{mk}(t)$ и просуммировав по $k = \overline{1, m}$, получим второе энергетическое равенство

$$\mathrm{J}_m(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_4^4 + ((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2. \tag{4.3}$$

В силу (3.38) справедлива следующая оценка для $\mathrm{J}_m(t)$:

$$\mathrm{J}_m(t) \leqslant -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|_4^4 + \frac{3\varepsilon}{2}\,\mathrm{J}_m(t) + \frac{3}{2\varepsilon}\|\mathbf{u}_m\|_4^4. \tag{4.4}$$

Из (4.4) с учетом (4.1) и (4.2) получаем неравенства

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right)\mathrm{J}_m(t) \leqslant -\frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{4}\,\Phi''_m(t) + \frac{3}{2\varepsilon}\,\Phi'_m(t) + \frac{3}{\varepsilon}\,\Phi_m(t), \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{\varepsilon}{4}((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)). \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\left(1 - \frac{7\varepsilon}{4}\right)\mathrm{J}_m(t) \leqslant \frac{1}{4}\,\Phi''_m(t) + \frac{3}{2\varepsilon}\,\Phi'_m(t) + \frac{7}{2\varepsilon}\,\Phi_m(t). \tag{4.7}$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 11. *Имеет место неравенство*

$$(\Phi'_m)^2 \leqslant 2\Phi_m \mathrm{J}_m. \tag{4.8}$$

Доказательство. В силу определения $\Phi_m(t)$ имеем

$$(\Phi'_m(t))^2 = \bigl(((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)_2\bigr)^2,$$

откуда в силу неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\begin{aligned}(\Phi'_m(t))^2 &\leqslant \bigl(((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m))^{1/2}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^{1/2} + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2^{1/2}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2^{1/2}\bigr)^2 \\ &\leqslant \bigl(((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2\bigr)\bigl(((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2\bigr) \leqslant 2\Phi_m \mathrm{J}_m.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из (4.7) и (4.8) получаем такое обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. работу [13]):

$$\Phi''_m \Phi_m - \alpha(\Phi'_m)^2 + \beta\Phi'_m\Phi_m + \gamma\Phi_m^2 \geqslant 0, \tag{4.9}$$

где

$$\alpha = 2\left[1 - \frac{7\varepsilon}{4}\right], \qquad \beta = \frac{6}{\varepsilon}\,, \qquad \gamma = \frac{14}{\varepsilon}\,, \qquad \varepsilon \in \left(0, \frac{2}{7}\right).$$

Так как $\varepsilon \in (0, 2/7)$, то $\alpha > 1$. Рассмотрим теперь неравенство (4.9) более подробно. Его нетрудно привести к линейному дифференциальному неравенству вида

$$\mathbb{Z}_m^{''} + \beta\mathbb{Z}_m' - \delta\mathbb{Z}_m \leqslant 0, \qquad \delta = \gamma(\alpha - 1), \tag{4.10}$$

относительно новой функции

$$\mathbb{Z}_m = \Phi_m^{1-\alpha}. \tag{4.11}$$

Перейдем теперь в уравнении (4.10) к функции

$$\mathbb{Y}_m \equiv \mathbb{Z}_m e^{\beta t}. \tag{4.12}$$

Тогда с учетом (4.11) получим неравенство

$$\mathbb{Y}_m^{''} - \beta\mathbb{Y}_m' - \delta\mathbb{Y}_m \leqslant 0. \tag{4.13}$$

Из (4.12) следует, что

$$\mathbb{Y}_m' = e^{\beta t}(\alpha - 1)\Phi_m^{-\alpha}\biggl(-\Phi_m' + \frac{\beta}{\alpha - 1}\,\Phi_m\biggr). \tag{4.14}$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1}\,\Phi(0). \tag{4.15}$$

Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим, что

$$\Phi_m'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1}\,\Phi_m(0). \tag{4.16}$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathbb{Y}_m$ из условия (4.16), учитывая (4.14), приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, \mathrm{T}_{3m})$, принадлежащий области определения $\Phi_m(t)$, что $\mathbb{Y}_m' \leqslant 0$. Следовательно, при $t \in [0, \mathrm{T}_{3m}]$ величина $-\beta\mathbb{Y}_m'(t) \geqslant 0$. Отсюда и из (4.13) получим

$$\mathbb{Y}_m^{''} - \delta\mathbb{Y}_m \leqslant 0, \qquad t \in [0, \mathrm{T}_{3m}]. \tag{4.17}$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha - 1}}\,\Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha - 1}\,\Phi(0). \tag{4.18}$$

Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим неравенство

$$\Phi_m'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha - 1}}\,\Phi_m(0) + \frac{\beta}{\alpha - 1}\,\Phi_m(0). \tag{4.19}$$

Из (4.17) следует, что

$$(\mathbb{Y}_m')^2 \geqslant \delta\mathbb{Y}_m^2 + \mathbb{A}_m^2, \tag{4.20}$$

причем в силу (4.19) имеем

$$\mathrm{A}_m \equiv \left[(1-\alpha)^2\Phi_m^{-2\alpha}(0)\left[\left(\Phi_m'(0) - \frac{\beta}{\alpha-1}\,\Phi_m(0)\right)^2 - \frac{\delta}{(\alpha-1)^2}(\Phi_m(0))^2\right]\right]^{1/2} > 0.$$

Из (4.20) получим, что

$$\mathbb{Y}_m'(t) \leqslant -\mathrm{A}_m \quad \forall\, t \in [0, \mathrm{T}_{3m}]. \tag{4.21}$$

Из (4.21) заключаем, что на области определения функции $\Phi_m(t)$ величина $\mathbb{Y}_m' < 0$, откуда и из (4.21) имеем

$$\mathbb{Y}_m(t) \leqslant \mathbb{Y}_{m0} - \mathrm{A}_m t.$$

Следовательно, найдется такой момент времени $\mathrm{T}_{m0} \in (0, \mathrm{T}_{2m})$, что

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_{m0}} \Phi_m(t) = +\infty,$$

где $\mathrm{T}_{2m} = \mathbb{Y}_m(0)\mathrm{A}_m^{-1}$.

Теперь получим оптимальные условия на коэффициенты α, β и γ, которые зависят от произвольного параметра $\varepsilon \in (0, 2/7)$.

Действительно, в выражении (4.19) фигурируют две функции параметра $\varepsilon \in (0, 2/7)$:

$$f_1 = \frac{\beta}{\alpha-1}\,, \qquad f_2 = \left(\frac{\gamma}{\alpha-1}\right)^{1/2}.$$

Из условия минимума этих функций, учитывая явные значения коэффициентов α, β и γ, приходим к выводу, что $\varepsilon = 1/7$. Следовательно,

$$f_1 = 84, \qquad f_2 = (196)^{1/2} = 14, \qquad \alpha = \frac{3}{2}\,, \qquad \beta = 42, \qquad \gamma = 98.$$

Учитывая это, приходим к оптимальному условию на начальную функцию

$$\Phi'(0) > 14\Phi(0) + 84\Phi(0) = 98\Phi(0), \tag{4.22}$$

где

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2, \qquad \Phi'(0) = -((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + \|\mathbf{u}_0\|_4^4.$$

Преобразуя полученное выражение, находим следующее условие на начальную функцию:

$$\|\mathbf{u}_0\|_4^4 > 50((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + 49(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2. \tag{4.23}$$

Заметим, что первое энергетическое равенство (4.2) можно переписать в таком эквивалентном виде:

$$\Phi_m(t) = \Phi_{m0} + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)}\big[(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2 + \|\mathbf{u}_m\|_4^4\big](s). \tag{4.24}$$

Как мы ранее доказали, $\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}$ слабо в $\mathbf{H}^1(Q_{\mathrm{T}})$, откуда в силу теорем вложения Соболева $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$ сильно в $\mathbf{L}^4(Q_{\mathrm{T}}) \subset \mathbf{L}^2(Q_{\mathrm{T}})$. Поэтому в силу (4.24) имеем

$$\Phi_m(t) \to \eta(t) = \Phi_0 + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \big[(\mathbf{u},\mathbf{u})_2 + \|\mathbf{u}\|_4^4\big](s), \tag{4.25}$$
$$\Phi(t) = \frac{1}{2}((\mathbf{u},\mathbf{u})) + \frac{1}{2}(\mathbf{u},\mathbf{u})_2, \qquad \Phi_0 = \Phi(0),$$

для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$, так как $\mathbf{u}_{m0} \to \mathbf{u}_0$ сильно в $\mathbf{H}(\Omega)$ при $m \to +\infty$. Возьмем в (3.3)

$$\mathbf{v}(s) = \begin{cases} \mathbf{u}(s), & s \in [0,t], \\ \mathbf{0}, & s \in [t, \mathrm{T}], \end{cases}$$

где $\mathbf{u}$ – решение задачи (3.3)–(3.4), существующее в силу теоремы 2. В результате получим

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)} \big[(\mathbf{u},\mathbf{u})_2 + \|\mathbf{u}\|_4^4\big](s).$$

Отсюда и из (4.25) приходим к выводу, что $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, \mathrm{T})$. Теперь заметим, что из (4.21) следует оценка

$$\Phi_m(t) \geqslant \frac{\Phi_{m0} e^{\beta t/(\alpha-1)}}{[1 - \Phi_{m0}^{\alpha-1} A_m t]^{1/(\alpha-1)}}\,,$$

где

$$\mathrm{A}_m \equiv \left[(1-\alpha)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'_m(0) - \frac{\beta}{\alpha-1}\,\Phi_m(0)\right)^2 - \frac{\delta}{(\alpha-1)^2}(\Phi_m(0))^2\right]\right]^{1/2} > 0.$$

Действуя точно так же как и в работе [14] и переходя к пределу при $m \to +\infty$, получим, что

$$\Phi(t) \geqslant \frac{\Phi_0 e^{\beta t/(\alpha-1)}}{[1 - \Phi_0^{\alpha-1} A t]^{1/(\alpha-1)}}$$

для почти всех $t \in (0, \mathrm{T}_2)$, где $\mathrm{T}_2 = A^{-1}\Phi_0^{1-\alpha}$ и

$$\mathrm{A} \equiv \left[(1-\alpha)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha-1}\,\Phi(0)\right)^2 - \frac{\delta}{(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2\right]\right]^{1/2} > 0.$$

Из (3.35) получаем оценку снизу на время разрушения решения исходной задачи.

Из первого энергетического равенства (3.31) следует что

$$\Phi'(t) + ((\mathbf{u},\mathbf{u})) \leqslant 4\mathrm{C}_2^4 \Phi^2(t), \tag{4.26}$$

где C_2 – константа наилучшего вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, т.е.

$$\|\mathbf{w}\|_4 \leqslant \mathrm{C}_2((\mathbf{w},\mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Из (4.26) следует, что

$$\Phi'(t) + \mathrm{C}_1^2(\mathbf{u},\mathbf{u})_2 \leqslant 4\mathrm{C}_2^4\Phi^2(t), \tag{4.27}$$

где C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, т.е.

$$\mathrm{C}_1(\mathbf{w},\mathbf{w})_2^{1/2} \leqslant ((\mathbf{w},\mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Из (4.26) и (4.27) получаем неравенство

$$\Phi'(t) + \mathrm{B}_1\Phi(t) \leqslant \mathrm{B}_2\Phi^2(t), \qquad \mathrm{B}_1 = \frac{2\mathrm{C}_1^2}{1+\mathrm{C}_1^2}\,, \quad \mathrm{B}_2 = 4\mathrm{C}_2^4.$$

Отсюда при условии

$$\Phi_0 \leqslant \frac{\mathrm{C}_1^2}{2(1+\mathrm{C}_1^2)\mathrm{C}_2^4}$$

получаем, что

$$\Phi(t) \leqslant \frac{e^{-\mathrm{B}_1 t}}{\Phi_0^{-1} - [1 - e^{-\mathrm{B}_1 t}]\mathrm{B}_2/\mathrm{B}_1} \quad \forall\, t \in [0, +\infty].$$

Теорема доказана.

В заключение мы выражаем искреннюю признательность И. А. Шишмареву за полезное обсуждение полученных в работе результатов и А. К. Гущину за весьма ценное замечание относительно теоремы 1.

Список литературы

[1] А. П. Осколков, “О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 9, Записки науч. сем. ЛОМИ, **59**, Наука, Л., 1976, 133–177; англ. пер.: A. P. Oskolkov, “Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids”, *J. Math. Sci.*, **10**:2 (1978), 299–335.

[2] А. П. Осколков, “Нелокальные проблемы для уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта и их ε-аппроксимаций”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 26, Записки науч. сем. ЛОМИ, **221**, Наука, Л., 1995, 185–207; англ. пер.: A. P. Oskolkov, “Nonlocal problems for the equations of Kelvin–Voight fluids and their ε-approximations”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **87**:2 (1997), 3393–3408.

[3] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1969.

[4] А. П. Осколков, “О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 6, Записки науч. сем. ЛОМИ, **27**, Наука, Л., 1972, 145–160.

[5] А. П. Осколков, “Об одной нестационарной системе с малым параметром, регуляризирующий систему уравнений Навье–Стокса”, *Проблемы матемематического анализа. Выпуск 4. Интегральные и дифференциальные операторы. Дифференциальные уравнения*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1973, 78–87.

[6] А. П. Осколков, “О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7*, Записки науч. сем. ЛОМИ, **38**, Наука, Л., 1973, 98–136.

[7] Г. А. Свиридюк, “Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости”, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, № 1, 74–79; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, “A model of dynamics of incompressible viscoelastic liquid”, *Soviet Math.* (*Iz. VUZ*), **32**:1 (1988), 94–100.

[8] Г. А. Свиридюк, “Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости”, *Изв. вузов. Матем.*, 1994, № 1, 62–70; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, “On a model for dynamics of weak-compressible viscous-elastic liquid”, *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), **38**:1 (1994), 59–68.

[9] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[10] H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.

[11] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.

[12] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001; англ. пер.: E. Mitidieri, S I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.

[13] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 10*, Записки науч. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.

[14] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

[15] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Berlin, 2006.

[16] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.

[17] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.

[18] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[19] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

М. О. Корпусов (M. O. Korpusov)
Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: korpusov@rsci.ru

Поступила в редакцию
21.05.2008 и 21.11.2008

А. Г. Свешников (A. G. Sveshnikov)
Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: agsveshn@math380b.phys.msu.su