

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О достаточных условиях, близких к необходимым, разрушения решения сильно нелинейного обобщенного уравнения Буссинеска, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2008, том 48, номер 9, 1629–1637

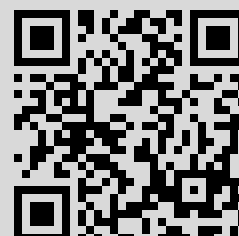
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 14:54:50



УДК 519.63

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ, БЛИЗКИХ К НЕОБХОДИМЫМ, РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА¹⁾

© 2008 г. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т)

e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 01.11.2007 г.

Рассматривается начально-краевая задача для модельного обобщенного уравнения Буссинеска при учете линейной диссипации и источников свободных электронов. Доказана ее локальная во времени разрешимость в сильном обобщенном смысле. Получены достаточные условия разрушения решения, а также достаточные условия глобальной во времени разрешимости. Кроме того, получены двусторонние оценки на время разрушения решения задачи. Библ. 4.

Ключевые слова: нелинейное обобщенное уравнение Буссинеска, условия разрушения решения, условия разрешимости во времени.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается начально-краевая задача для обобщенного уравнения Буссинеска, вывод которого содержится в [1]. Данная задача описывает возникновение электрического пробоя в кристаллических полупроводниках при учете линейной диссипации источников связанных зарядов и источников свободных зарядов. По поводу физической интерпретации задачи см. [2] и [3].

2. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В СИЛЬНООБОБЩЕННОМ СМЫСЛЕ И РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Рассмотрим вопрос о достаточных условиях, близких к необходимым, разрушения решения первой начально-краевой задачи в ограниченной области для сильно нелинейного обобщенного уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + u(u + \alpha)(u - \beta) = 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (2.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (2.2)$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$.

Определение 1. Сильным обобщенным решением задачи (2.1), (2.2) называется решение из класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + u(u + \alpha)(u - \beta), v \right\rangle = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

$\forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \forall t \in [0, T]$, где производная по времени понимается в классическом смысле.

Справедлива следующая

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00376-а), а также президентской программы поддержки молодых докторов наук МД-1006.2007.1.

Теорема 1. Для любого $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ при условии $q \in (0, 4]$ найдется такое $0 < T_0$, что существует единственное сильное обобщенное решение задачи (2.1), (2.2) из $\mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеем

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_2 = +\infty. \quad (2.3)$$

Доказательство. Рассмотрим следующие операторы:

$$\mathbb{A}_0 u \equiv -\Delta u + u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{L} u \equiv -\Delta u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{A}_1(u) = |u|^q u : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{F}_m(u) = u^m : \mathbb{L}^{m+1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{L}^{(m+1)/m}(\Omega), \quad m = 1, 3.$$

Изучим свойства операторов $\mathbb{F}_m(u)$:

$$\|\mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2)\|_{-1} \leq C \|\mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2)\|_{4/3} \leq \mu_3(\bar{R}) \|u_1 - u_2\|_4,$$

$$\mu_3(\bar{R}) = C \bar{R}^2, \quad \bar{R} = \max\{\|u_1\|_4, \|u_2\|_4\}.$$

Поэтому

$$\|\mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2)\|_{-1} \leq \mu_3(R) \|u_1 - u_2\|_{+1}, \quad R = \max\{\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}\}.$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\|\mathbb{F}_2(u_1) - \mathbb{F}_2(u_2)\|_{-1} \leq \mu_2(R) \|u_1 - u_2\|_{+1}, \quad \|\mathbb{F}_1(u_1) - \mathbb{F}_1(u_2)\|_{-1} \leq C \|u_1 - u_2\|_{+1},$$

где $R = \max\{\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}\}$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_1$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2 \rangle &= \|u_1 - u_2\|_2^2 + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2 + \\ &+ \int_{\Omega} dx (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2)(u_1 - u_2) \geq \|u_1 - u_2\|_{+1}^2. \end{aligned}$$

Существует липшиц-непрерывный обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ с постоянной Липшица, равной 1. Аналогичным образом устанавливается, что для оператора $\mathbb{L} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ существует липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1.

Сделаем замену функций $w = \mathbb{A}(v)$, тогда в сильном обобщенном смысле с учетом свойств входящих в уравнение операторов в классе $w \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ получим

$$\frac{dw}{dt} = -\mathbb{L} \mathbb{A}^{-1}(w) + \mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(w)) + (\alpha - \beta) \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(w)) - \alpha \beta \mathbb{A}^{-1}(w).$$

В классе $w \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ получим интегральное уравнение

$$w = w_0 + \int_0^t ds [-\mathbb{L} \mathbb{A}^{-1}(w) + \mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(w)) + (\alpha - \beta) \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(w)) - \alpha \beta \mathbb{A}^{-1}(w)] \equiv \mathbb{H}(w).$$

Рассмотрим теперь банахово пространство

$$\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

и его замкнутое выпуклое и ограниченное подмножество

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \equiv \left\{ w \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) : \|w\| = \operatorname{ess. sup}_{t \in (0, T)} \|w\|_{-1} \leq R \right\}.$$

Докажем, что оператор $\mathbb{H}(w)$ действует из $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$\|\mathbb{H}(w)\| \leq \|w_0\|_{-1} + CT\{\|w\| + \|w\|^2 + \|w\|^3\} \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

при условии

$$\|w_0\|_{-1} \leq \frac{R}{2}, \quad T \leq \frac{1}{2C} \frac{1}{1 + R + R^2}.$$

Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}(w)$ на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}(w_1) - \mathbb{H}(w_2)\| &\leq CT(1 + R + R^2)\|w_1 - w_2\|, \\ R &= \max\{\|w_1\|, \|w_2\|\}, \end{aligned}$$

причем при

$$T \leq \frac{1}{2C} \frac{1}{1 + R + R^2}$$

имеем

$$\|\mathbb{H}(w_1) - \mathbb{H}(w_2)\| \leq \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|.$$

Значит, оператор $\mathbb{H}(w)$ сжимающий на $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Стало быть, существует единственное решение интегрального уравнения класса $\mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегральных уравнений с переменным верхним пределом во времени, получаем, что $u \in \mathbb{L}^{\infty}(0, T_0; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|w\|_{-1} = +\infty.$$

Используя сглаживающие по времени свойства оператора $\mathbb{H}(w)$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(w) : \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) &\longrightarrow \mathbb{AC}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \\ \mathbb{H}(w) : \mathbb{AC}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) &\longrightarrow \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

$\forall T \in (0, T_0)$. Так что приходим к следующему нелинейному уравнению с известной правой частью:

$$\mathbb{A}(v) = w \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad \mathbb{A}(v) = -\Delta v + v + |v|^q v.$$

В силу установленных ранее свойств операторов $\mathbb{A}_0$ и $\mathbb{A}_1(v)$ имеем $v = \mathbb{A}^{-1}(w)$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\|v(t) - v(t_0)\|_{+1} = \|\mathbb{A}^{-1}(w)(t) - \mathbb{A}^{-1}(w)(t_0)\|_{+1} \leq \|w(t) - w(t_0)\|_{-1} \longrightarrow +0,$$

как только $t \longrightarrow t_0$. Значит, $v(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ для любого $T \in (0, T_0)$ и, кроме того, имеет место предельное равенство (2.3).

Рассмотрим производную Фреше оператора $\mathbb{A}_1(v) = |v|^q v$:

$$\mathbb{A}'_{1,v}(v)h = (q+1)|v|^{q-1}h.$$

Теперь изучим свойства оператора

$$\mathbb{A}'_{1,v}(v) : \mathcal{L}(\mathbb{L}^{q+2}(\Omega); \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

при фиксированном $v \in \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Заметим, что каратеодориева функция $|z|^q$ порождает оператор Немыцкого, действующий из $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{(q+2)/q}(\Omega)$. Значит, в силу свойств операторов Немыцкого (см. [3]), получим, что как только $z_n \rightarrow z$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$, то $|z_n|^q \rightarrow |z|^q$ сильно в $\mathbb{L}^{(q+2)/q}(\Omega)$, т.е.

$$\int_{\Omega} dx |z_n(x)|^q - |z(x)|^q \xrightarrow{(q+2)/q} +0$$

при $n \rightarrow +\infty$. С учетом этого докажем, что

$$\|\mathbb{A}'_{1,v}(v) - \mathbb{A}'_{1,v}(v_n)\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}^{-1}} \xrightarrow{} +0$$

при $v_n \rightarrow v$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}'_{1,v}(v) - \mathbb{A}'_{1,v}(v_n)\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}^{-1}} &= \sup_{\|h\|_2=1} \|\mathbb{A}'_{1,v}(v)h - \mathbb{A}'_{1,v}(v_n)h\|_{-1} \leq \\ &\leq (q+1) \sup_{\|h\|_{q+2}=1} \left(\int_{\Omega} dx |v|^q - |v_n|^q \right)^{q/(q+2)} \left(\int_{\Omega} dx |h|^{q+2} \right)^{1/(q+2)} \leq \\ &\leq C \| |v|^q - |v_n|^q \|_{(q+2)/q} \xrightarrow{} +0 \end{aligned}$$

при $v_n \rightarrow v$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Рассмотрим сначала производную Фреше оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}'_v(v) = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_{1,v}(v).$$

В силу условий теоремы имеем

$$\langle \mathbb{A}'_v(v)v_1 - \mathbb{A}'_v(v)v_2, v_1 - v_2 \rangle \geq \|v_1 - v_2\|_{+1}^2$$

для любых $v, v_1, v_2 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Значит, при любом фиксированном $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ существует липшиц-непрерывный обратный оператор $[\mathbb{A}'_v]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{-1}(\Omega); \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Теперь рассмотрим следующее уравнение:

$$\mathbb{A}_0 v + \mathbb{A}_1(v) = w(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется доказать, что оператор

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \hat{\mathbb{B}}, \quad \hat{\mathbb{B}} = \mathbb{A}_0^{-1} \mathbb{A}'_{1,v}(v)$$

имеет ограниченный обратный, $\mathbb{A}'_{1,v}(v)$ – производная Фреше на фиксированном элементе $v \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ оператора $\mathbb{A}_1$. Действительно, рассмотрим уравнение

$$[\mathbb{I} + \hat{\mathbb{B}}]w = 0.$$

Докажем, что это уравнение имеет только тривиальное решение. С этой целью подействуем оператором $\mathbb{A}_0$ на обе части этого уравнения, тогда получим

$$\mathbb{A}'_u w = \mathbb{A}_0 w + \mathbb{A}_{1,v}(v)w = 0 \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Но мы ранее доказали, что для оператора $\mathbb{A}'_v$ определен липшиц-непрерывный обратный $[\mathbb{A}'_v]^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Теперь подействуем этим оператором на обе части последнего равенства. Все операции были эквивалентными, и поэтому приходим к выводу, что $w = 0$.

В классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ уравнение

$$\mathbb{A}(v) = w$$

эквивалентно следующей задаче:

$$[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_{1,v}(v)]v' = w' \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad v = \mathbb{A}^{-1}(w).$$

Подействуем оператором $\mathbb{A}_0^{-1}$ на последнее уравнение, тогда получим

$$[\mathbb{I} + \hat{\mathbb{B}}]v' = \mathbb{A}_0^{-1}w'.$$

Введем оператор

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{I} + \hat{\mathbb{B}} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

для которого, как мы уже доказали, существует линейный ограниченный обратный. Поэтому получим

$$v' = \hat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}w'.$$

Нам осталось доказать, что $v' = \hat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}w' \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|v'(t) - v'(t_0)\|_0 &\leq \|\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\mathbb{A}_0^{-1}[w'(t) - w'(t_0)]\|_0 + \|(\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t))\mathbb{A}_0^{-1}w'(t_0)\|_0 \leq \\ &\leq C\|w'(t) - w'(t_0)\|_0^* + C\|\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t)\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1}. \end{aligned}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $v \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ оператор $\hat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении, оператор $\hat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, следовательно, в силу линейности, ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\hat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\hat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}) = (\lambda\mathbb{I} - \hat{\mathbb{C}})^{-1}.$$

Пусть Γ – окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим, чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|\hat{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, T_0]$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \|u\|_{+1} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$, $\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ :

$$\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t)), \quad \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-1} \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, верно равенство

$$\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \lambda^{-1} [\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0))].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов:

$$\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0)) \sum_{n=1}^{+\infty} [(\hat{\mathbb{C}}(t) - \hat{\mathbb{C}}(t_0)) \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0))]^n$$

при условии

$$\|\hat{\mathbb{C}}(t_0) - \hat{\mathbb{C}}(t)\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1} \|\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1} \leq \delta < 1.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\|\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1} \leq \|\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1} \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1}^n \|\hat{\mathbb{C}}(t) - \hat{\mathbb{C}}(t_0)\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1}^n.$$

Теперь заметим, что

$$\hat{\mathbb{C}}(t) - \hat{\mathbb{C}}(t_0) = \mathbb{A}_0^{-1} [\mathbb{A}'_{1,u}(u(t)) - \mathbb{A}'_{1,u}(u(t_0))].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}_{j,u}$ по $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и того факта, что $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, имеем

$$\|\hat{\mathbb{C}}(t) - \hat{\mathbb{C}}(t_0)\|_{\mathbb{V}_0 \rightarrow \mathbb{V}_0} \leq \|\mathbb{A}'_{1,u}(u(t)) - \mathbb{A}'_{1,u}(u(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}^{-1}} \longrightarrow +0,$$

$$\|\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1} \longrightarrow 0,$$

$$\|\hat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \hat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1}\|_{\mathbb{H}_0^1 \rightarrow \mathbb{H}_0^1} \longrightarrow +0$$

при $t \longrightarrow t_0$. Значит, $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Теорема доказана.

Введем функционал, имеющий смысл энергии:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{q+2}^{q+2}. \quad (2.4)$$

Перейдем к доказательству основного результата данного раздела.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $q > 2$, то $T_0 = +\infty$ и выполнено неравенство

$$\Phi(t) \leq \left[\Phi_0^{(q-2)/(q+2)} + \frac{q-2}{q+2} Dt \right]^{(q+2)/(q-2)};$$

2) если $q = 2$, то $T_0 = +\infty$ и выполнено неравенство

$$\Phi(t) \leq \Phi_0 \exp(Dt);$$

3) если $0 < q < 2$ и выполнены условия

$$\frac{1}{4} \|u_0\|_4^4 > \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{\alpha\beta}{2} \|u_0\|_2^2 - \frac{\alpha-\beta}{3} \int_{\Omega} dx u_0^3,$$

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1} \Phi_0^2 + \frac{2\gamma}{2\alpha_1 - 3 + q/2} \Phi_0^{1+(4-q)/2},$$

то $T_0 \in [T_1, T_2]$ и выполнено предельное равенство (2.3),

$$T_1 = B_3^{-1} \Phi_0^{-1}, \quad T_2 = \Phi_0^{1-\alpha_1} A^{-1},$$

$$A^2 = (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1} \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1} \Phi_0^2 - \frac{2\gamma}{2\alpha_1 - 3 + q/2} \Phi_0^{1+(4-q)/2} \right],$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{q+2} \left[1 - \frac{(2-q)^2}{32} \right], \quad \beta_1 = \frac{40(1+\alpha^2\beta^2)}{(2-q)^2}, \quad \gamma = \frac{20B_2}{(2-q)^2}, \quad q \in (0, 2),$$

$$B_2 = \frac{|\alpha-\beta|^2 B_1^{4-q} 2^{(4-q)/2}}{2(q+1)}, \quad B_3 = \left(1 + \frac{|\alpha-\beta|^2}{2\alpha\beta} \right) 4B_4^4,$$

$$D = \left(1 + \frac{|\alpha-\beta|^2}{2\alpha\beta} \right) \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{4/(q+2)} B_5^4,$$

$$\Phi_0 = \Phi(0), \quad \Phi'(0) = \|u_0\|_4^4 - \|\nabla u_0\|_2^2 + (\alpha - \beta) \int_{\Omega} dx u_0^3 - \alpha \beta \|u_0\|_2^2,$$

B_1 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{4-q}(\Omega)$ при условии $q \in (0, 2)$, B_4 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$, B_5 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$ при $q \geq 2$.

Доказательство. Введем обозначение

$$J = \|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u'|^2 |u|^q. \quad (2.5)$$

Нетрудно убедиться, что имеет место следующее неравенство:

$$(\Phi'(t))^2 \leq (q+2)J\Phi(t). \quad (2.6)$$

Умножением обеих частей уравнения (2.1) на u относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d\Phi}{dt} = \|u\|_4^4 - \|\nabla u\|_2^2 + (\alpha - \beta) \int_{\Omega} dx u^3 - \alpha \beta \|u\|_2^2. \quad (2.7)$$

Теперь умножением обеих частей уравнения (2.1) на u' относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство

$$J = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_4^4 + \frac{\alpha - \beta}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx u^3 - \frac{\alpha \beta}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_2^2. \quad (2.8)$$

Из (2.8) получим

$$J = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\|u\|_4^4 + (\alpha - \beta) \int_{\Omega} dx u^3 - \alpha \beta \|u\|_2^2 \right) + \frac{\alpha - \beta}{12} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx u^3 - \frac{\alpha \beta}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_2^2. \quad (2.9)$$

Справедливы следующие вспомогательные оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4} \|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{4} J + \frac{1}{2\varepsilon} \Phi, \\ \left| \frac{\alpha \beta}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_2^2 \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4} \|u'\|_2^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{4\varepsilon} \|u\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{4} J + \frac{\alpha^2 \beta^2}{2\varepsilon} \Phi, \\ \left| \frac{\alpha - \beta}{12} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dx u^3 \right| &\leq \frac{|\alpha - \beta|}{4} \int_{\Omega} dx |u'| |u|^2 \leq \frac{|\alpha - \beta|}{4} \left(\int_{\Omega} dx |u'|^2 |u|^q \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |u|^{4-q} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8} (q+1) \int_{\Omega} dx |u'|^2 |u|^q + \frac{|\alpha - \beta|^2}{8\varepsilon(q+1)} \int_{\Omega} dx |u|^{4-q} \leq \frac{\varepsilon}{8} J + \frac{|\alpha - \beta|^2 B_1^{4-q} 2^{(4-q)/2}}{8\varepsilon(q+1)} \Phi^{(4-q)/2}, \\ &q \in (0, 2). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.9) с учетом (2.7), (2.8) вытекает следующее неравенство:

$$\left[1 - \frac{5}{8} \varepsilon \right] J \leq \frac{1}{4} \Phi'' + \frac{1 + \alpha^2 \beta^2}{2\varepsilon} \Phi + \frac{|\alpha - \beta|^2 B_1^{4-q} 2^{(4-q)/2}}{8\varepsilon(q+1)} \Phi^{(4-q)/2}. \quad (2.10)$$

Из (2.4)–(2.6) и (2.10) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\Phi\Phi'' - \alpha_1(\Phi')^2 + \beta_1\Phi^2 + \gamma\Phi^{1+(4-q)/2} \geq 0, \quad (2.11)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4}{q+2} \left[1 - \frac{5}{8}\varepsilon \right], \quad \beta_1 = 2 \frac{1 + \alpha^2 \beta^2}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{|\alpha - \beta|^2 B_1^{4-q} 2^{(4-q)/2}}{2(q+1)\varepsilon}.$$

Потребуем, чтобы $\alpha_1 > 1$, тогда $\varepsilon \in (0, (4-2q)/5)$, $q \in (0, 2)$.

Введем новую функцию

$$Z(t) = \Phi^{1-\alpha_1}. \quad (2.12)$$

Тогда из (2.11), (2.12) получим

$$\frac{1}{1-\alpha_1} Z'' + \beta_1 Z + \gamma Z^{[(4-q)/2 - \alpha_1]/(1-\alpha_1)} \geq 0. \quad (2.13)$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялось условие

$$\frac{(4-q)/2 - \alpha_1}{1-\alpha_1} > -1,$$

тогда получим, что $\varepsilon \in (0, (2-q)^2/10)$, $0 < q < 2$. Отметим, что $(2-q)^2/10 < (4-2q)/5$ при $q \in (0, 2)$.

Пусть выполнено условие

$$\frac{1}{4} \|u_0\|_4^4 > \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{\alpha\beta}{2} \|u_0\|_2^2 - \frac{\alpha-\beta}{3} \int_{\Omega} dx u^3.$$

Тогда из (2.7), (2.8) вытекает неравенство

$$\Phi'(t) \geq 0, \quad t \in [0, T_0).$$

Действительно, из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|\nabla u\|_4^4 &> \frac{1}{3} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\alpha\beta}{3} \|u\|_2^2 - \frac{\alpha-\beta}{3} \int_{\Omega} u^3 dx, \\ \|\nabla u\|_4^4 &> \frac{3}{4} \|\nabla u\|_4^4 > \|\nabla u\|_2^2 + \alpha\beta \|u\|_2^2 - (\alpha-\beta) \int_{\Omega} u^3 dx. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$Z' = (1-\alpha_1)\Phi^{-\alpha_1}\Phi' \leq 0, \quad t \in [0, T_0).$$

Умножим обе части (2.13) на Z' , в результате последующего интегрирования получим неравенство

$$\begin{aligned} (Z')^2 &\geq (\alpha_1 - 1)\beta_1 Z^2 + \frac{2(\alpha_1 - 1)\gamma}{1 + \gamma_1} Z^{1+\gamma_1} + A^2, \\ \gamma_1 &= \frac{(4-q)/2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$A^2 = (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1} \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1} \Phi_0^2 - \frac{2\gamma}{2\alpha_1 - 3 + q/2} \Phi_0^{1+(4-q)/2} \right] > 0,$$

причем в силу условия $\varepsilon \in (0, (2-q)^2/10)$, $q \in (0, 2)$, имеем $1 + \gamma_1 > 0$. Из (2.14) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$Z \leq Z_0 - At,$$

из которого вытекает, что $T_0 \leq T_2 = A^{-1} \Phi_0^{1-\alpha_1}$.

В силу произвольности $\varepsilon \in (0, (2-q)^2/10)$ получим оптимальные условия на начальную функцию. Тогда, используя те же рассуждения, что и ранее, получим

$$\varepsilon = \frac{(2-q)^2}{20}, \quad q \in (0, 2).$$

Выведем теперь оценку снизу на время разрушения решения задачи. Справедливы неравенства, вытекающие из первого энергетического равенства (2.7):

$$\Phi' + \alpha\beta\|u\|_2^2 \leq \|u\|_4^4 + |\alpha - \beta| \int_{\Omega} dx |u|^3 \leq \|u\|_4^4 + \frac{\alpha\beta}{2} \|u\|_2^2 + \frac{|\alpha - \beta|^2}{2\alpha\beta} \|u\|_4^4. \quad (2.15)$$

Из (2.15) получим

$$\Phi' \leq B_3 \Phi^2, \quad B_3 = \left(1 + \frac{|\alpha - \beta|^2}{2\alpha\beta}\right) 4B_4^4, \quad \Phi \leq \frac{1}{\Phi_0^{-1} - B_3 t}.$$

Значит, $T_1 = B_3^{-1} \Phi_0^{-1}$, $T_0 \geq T_1$.

Стало быть, утверждение 3) теоремы доказано.

Докажем теперь утверждения 1) и 2). Действительно, из первого энергетического равенства (2.7) получим

$$\begin{aligned} \Phi' + \alpha\beta\|u\|_2^2 &\leq \|u\|_4^4 + |\alpha - \beta| \int_{\Omega} dx |u|^3 \leq \|u\|_4^4 + |\alpha - \beta| \left(\int_{\Omega} dx |u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx u^4 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|u\|_4^4 + \alpha\beta \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{|\alpha - \beta|^2}{2\alpha\beta} \|u\|_4^4. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из (2.16) при условии $q \geq 2$ приходим к следующему неравенству:

$$\Phi' \leq D \Phi^{\vartheta}, \quad \vartheta = \frac{4}{q+2}, \quad D = \left(1 + \frac{|\alpha - \beta|^2}{2\alpha\beta}\right) \left(\frac{q+2}{q+1}\right)^{4/(q+2)} B_5^4,$$

где B_5 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$. Отсюда вытекают оставшиеся утверждения теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2006.
2. Бонч-Бруевич В.Л., Калашиников С.Г. Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
3. Бонч-Бруевич В.Л., Звягин И.П., Миронов А.Г. Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках. М.: Наука, 1972.
4. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехтеориздат, 1956.