

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Об одной начально-краевой задаче для сильно нелинейного диссипативного уравнения соболевского типа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2008, том 48, номер 10, 1860–1877

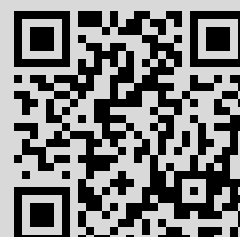
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 14:56:10



УДК 519.63

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО ДИССИПАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА¹⁾

© 2008 г. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т)

e-mail: korpusov@nm.ru

Поступила в редакцию 01.11.2007 г.

Рассматривается начально-краевая задача для модельного уравнения, описывающего волны в кристаллических полупроводниках при учете сильной пространственной дисперсии, линейной диссипации и источников свободных зарядов. Для данной задачи доказана локальная во времени разрешимость в слабом обобщенном смысле. Получены достаточные условия разрушения решения, а также достаточные условия глобальной во времени разрешимости. Кроме того, получены двусторонние оценки на время разрушения решения задачи. Библ. 4.

Ключевые слова: нелинейные диссипативные уравнения типа Соболева, волны в кристаллических полупроводниках, условия локальной разрешимости задачи, достаточные условия разрушения решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего раздела является получение достаточных условий разрушения решения следующей начально-краевой задачи для сильно нелинейного волнового диссипативного уравнения псевдопараболического типа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta u + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) - u + u_{x_1} + uu_{x_1} + u^3 = 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.3)$$

где $p > 2$, $(x, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$.

2. ЛОКАЛЬНАЯ ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В СЛАБОМ ОБОБЩЕННОМ СМЫСЛЕ ЗАДАЧИ

Пусть $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2, \delta)}$ – граница ограниченной области Ω , $\delta \in (0, 1]$ и натуральное число $s \geq 2$ таково, что $(s-1)/N \geq 1/2 - 1/p$. Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$(-1)^s \Delta^s w_k - \lambda_k w_k = 0, \quad \frac{\partial^n w_k}{\partial x_i^n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad n = \overline{1, s-1}. \quad (2.1)$$

В силу определения s справедлива следующая цепочка вложений:

$$\mathbb{H}_0^s(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega), \quad p > 2.$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00376-а), а также президентской программы поддержки молодых докторов наук МД-1006.2007.1.

Поскольку собственные функции задачи (2.1) образуют “галеркинский” базис в $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$, то, в силу указанных включений, собственные функции задачи (2.1) образуют галеркинский базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Определение 1. Слабым обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) назовем решение следующей задачи:

$$\int_0^T dt \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} (\langle \Delta u, w \rangle_0 + \langle \Delta_p u, w \rangle) + (u^3, w) - (u, w) + \langle u_{x_1}, w \rangle_0 + \langle uu_{x_1}, w \rangle_0 \right] = 0,$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad \forall w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ обозначена скобка двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Наконец, символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Решение данной задачи будем искать в следующем классе функций:

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$\Delta_p u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$

$$\Delta u + \Delta_p u \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

В рассматриваемом классе гладкости наша задача эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^T dt \varphi(t) \left\langle \frac{d}{dt} (\Delta u + \Delta_p u) - u + u_{x_1} + uu_{x_1} + u^3, w \right\rangle = 0$$

$$\forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad \forall w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

которая, в свою очередь, эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^T dt \left\langle \frac{d}{dt} (\Delta u + \Delta_p u) - u + u_{x_1} + uu_{x_1} + u^3, v \right\rangle = 0$$

$$\forall v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Замечание 1. В качестве $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ можно взять элементы $w_j \in \mathbb{H}_0^s(\Omega)$, $j = \overline{1, +\infty}$, поскольку их линейные комбинации плотны в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Справедлива

Теорема 1. Пусть $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Тогда если $N \leq p$ либо если $N > p$ при $p \geq 4N/(N+4)$, то найдется такое $T_0 = T_0(u_0, q, p) > 0$ и существует единственная функция $u(x, t) : (0, T_0) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого $T \in (0, T_0)$ имеют место включения

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)),$$

$$\Delta u + \Delta_p u \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)), \quad p' = p/(p-1),$$

u , кроме того, $u(0) = u_0$ почти всюду в Ω , причем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u + \Delta_p u) - u + u_{x_1} + uu_{x_1} + u^3 = 0 \quad \text{в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$

$$\Delta_p u \equiv \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1.$$

Замечание 2. Поскольку, в условиях теоремы 1, $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то, в силу результата работы [2], $u(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — сильно непрерывная функция.

Доказательство. Для доказательства локальной разрешимости воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности (см. [2]).

Будем искать приближенное решение нашей задачи (1.1)–(1.3) в виде

$$\int_0^T dt \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} (\langle \Delta u_m, w \rangle_0 + \langle \Delta_p u_m, w \rangle) + (u_m^3, w) - (u_m, w) + \langle u_{mx_1}, w \rangle_0 + \langle u_m u_{mx_1}, w \rangle_0 \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$\forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad j = \overline{1, m},$$

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k, \quad (2.3)$$

$$u_{0m} \equiv u_m(0) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) w_k \longrightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Как и ранее в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T_m]$, из задачи (2.2) вытекает поточечное равенство

$$(\nabla u'_m, \nabla w_j) + (p-1) \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) + (u_m, w_j) - \left(u_m, \frac{\partial w_j}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{2} \left(u_m^2, \frac{\partial w_j}{\partial x_1} \right) = (u_m^2 u_m, w_j), \quad (2.4)$$

$j = \overline{1, m}$. Из (2.4) сразу же получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \left(\left[1 + (p-1) \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \right] \frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) c'_{mk} + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N w_k w_j c_{mk} - \sum_{k=1}^m w_k \frac{\partial w_j}{\partial x_1} \left(c_{mk} + \frac{1}{2} c_{mk}^2 \right) = (|u_m|^q u_m, w_j), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Теперь в качестве галеркинских базиса в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ выберем собственные функции задачи (2.1). Введем обозначение

$$a_{kj} \equiv \sum_{i=1}^N \left(\left[1 + (p-1) \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \right] \frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right).$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj} \xi_k \xi_j = \|\nabla \eta\|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2}, \eta_i^2 \right) \geq \|\nabla \eta\|_2^2,$$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \xi_k, \quad \eta = \sum_{k=1}^m \xi_k w_k.$$

Норма $\|\nabla \eta\|_2^2$ обращается в нуль в классе $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\eta = \sum_{k=1}^m \xi_k w_k = 0.$$

Поскольку $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – галеркинский базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, то

$$\eta = \sum_{k=1}^m \xi_k w_k = 0$$

тогда и только тогда, когда $\{\xi_k\}_{k=1}^m = \mathbf{0}$, поэтому в силу критерия Сильвестра получаем $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1}^{m,m} > 0$. Общие результаты о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют существование решения задачи (2.4) на некотором интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$, в смысле $c_{km} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, t_m]$. В дальнейшем получим априорные оценки, из которых следует $t_m = T$, где T не зависит от m . Значит, $c_{km} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T]$, $u_m \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$.

Займемся выводом априорных оценок.

Умножим обе части равенства (2.4) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p + \|u_m\|_2^2 = \|u_m\|_4^4. \quad (2.5)$$

Отметим, что нормы

$$\left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \left(\|v\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

эквивалентны на пространстве $v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому сразу же будем рассматривать банахово пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ с нормой

$$\left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Из (2.5) следует, что

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \right\|_p^p + \int_0^t ds \|u_m\|_4^4(s). \quad (2.6)$$

В силу условий, сформулированных в доказываемой теореме относительно p , N , и теорем вложения Соболева выполнено вложение $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$. Теперь имеем

$$\|u_m\|_4 \leq B_1 \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \right\|_p^p + B_1^4 \int_0^t ds \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{4/p}(s).$$

Итак, имеем

$$E_m(t) \leq E_{0m} + B_2 \int_0^t ds E_m^\alpha(s), \quad \alpha = \frac{4}{p}, \quad B_2 \equiv B_1^{q+2} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{4/p}, \quad (2.7)$$

$$E_m(t) \equiv \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad E_{0m} \equiv E_m(0).$$

С использованием леммы Гронуолла–Беллмана и Бихари из (2.7) получим

$$E_m(t) \leq [E_{0m}^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t]^{1/(1-\alpha)} \quad \text{при } 0 < \alpha < 1, \quad (2.8)$$

$$E_m(t) \leq E_{0m} \exp\{B_2 t\} \quad \text{при } \alpha = 1, \quad (2.9)$$

$$E_m(t) \leq E_{0m} [1 - (\alpha - 1)B_2 E_{0m}^{(\alpha-1)} t]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при } \alpha > 1. \quad (2.10)$$

Умножим теперь уравнение (2.4) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда после интегрирования по времени $s \in [0, t]$ получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t ds \left[\|\nabla u'_m\|_2^2(s) + \frac{4(p-1)}{p^2} \sum_{i=1}^N \int_\Omega dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \frac{1}{4} \|u_{0m}\|_4^4 + \int_0^t ds \left(u_m + \frac{1}{2} u_m^2 \right) \frac{\partial u'_m}{\partial x_1} = \frac{1}{4} \|u_m\|_4^4 + \frac{1}{2} \|u_{m0}\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Справедливы вспомогательные оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega ds u_m \frac{\partial u'_m}{\partial x_1} \right| & \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u_m\|_2^2, \\ \left| \int_\Omega ds u_m^2 \frac{\partial u'_m}{\partial x_1} \right| & \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|u_m\|_4^4, \\ \|u_m\|_2 & \leq B_2 \|u_m\|_4 \leq B_3 \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

В силу условий доказываемой теоремы относительно параметров p, N и в силу теорем вложения Соболева, из (2.11) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t ds \left[\left[1 - \frac{3\varepsilon}{4} \right] \|\nabla u'_m\|_2^2(s) + \frac{4(p-1)}{p^2} \sum_{i=1}^N \int_\Omega dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right)^2 \right] \leq \frac{1}{4} B_1^4 \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{4/p} + \\ & + \int_0^t ds \left[\frac{\varepsilon}{4} \|u_m\|_4^4 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_m\|_2^2 \right] + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2, \quad \varepsilon \in (0, 4/3). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В силу (2.3), $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и справедливо неравенство $E_{0m} \leq A$, где A не зависит от m . Отсюда и согласно (2.8)–(2.10) приходим к выводу, что найдется такое $T_0 > 0$ и справедливо неравенство $E_m(t) \leq C$, $t \in [0, T] \forall T \in (0, T_0)$, где C не зависит ни от m , ни от t .

Таким образом, из (2.8)–(2.12) следует, что найдется такое $T_0 \equiv T_0(u_0, q, p)$, что для любого $T \in (0, T_0)$ выполнены следующие включения:

$$\begin{aligned} u_m & \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u'_m & \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) & \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \\ u_m^3 & \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Наконец, понятно, что

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)). \quad (2.14)$$

В силу (2.13), (2.14), $t_m = T$, где T не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Значит,

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_{km}(t) w_k \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Из включений (2.13), (2.14) и результатов работы [2] приходим к выводу, что из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность (которую снова обозначим через u_m), что

$$\begin{aligned} u_m & \rightharpoonup u \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u'_m & \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \Delta u_m & \rightharpoonup \Delta u \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \\ -\Delta_p u_m & \rightharpoonup \chi \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)), \\ u_m^3 & \rightharpoonup w \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega)), \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_i} & \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^p(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь следует заметить, что из первого соотношения (2.15) вытекает, что

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

поэтому в силу слабой сходимости в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ имеем

$$u'_m \rightharpoonup \eta.$$

Стало быть, приходим к выводу, что $\eta(t) = u'(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$. Отсюда имеем $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = (0, T) \times \Omega$ и в силу компактного вложения $\mathbb{H}^1(Q) \subset \mathbb{L}^2(Q)$ приходим к выводу, что $u_m \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$ и, значит, почти всюду. Тогда в силу леммы 1.3 из [2] получим, что $u_m^3 \rightharpoonup u^3$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$. Таким образом, $w = u^3$. Из (2.13), (2.14) следует, что

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad u_m \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Имея в виду, что предел последовательности $-\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p'}(\Omega))$, докажем, что

$$\chi = -\Delta_p u. \quad (2.16)$$

Возьмем в (2.2) функцию $\varphi(t) = 1$, тогда получим

$$\langle \Delta u_m + \Delta_p u_m, w_j \rangle + \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), w_j \right\rangle - \left\langle \int_0^t ds u_m(s), w_j \right\rangle + \left\langle \int_0^t ds \frac{\partial \left(u_m + \frac{1}{2} u_m^2 \right)}{\partial x_1}, w_j \right\rangle = \langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, w_j \rangle. \quad (2.17)$$

Поскольку $\Delta u_m \rightharpoonup \Delta u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, то $\langle \Delta u_m, w_j \rangle \rightharpoonup \langle \Delta u, w_j \rangle$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T)$, $j = \overline{1, m}$. Кроме того, $-\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1, p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$, поэтому $\langle \Delta_p u_m, w_j \rangle \rightharpoonup \langle \chi, w_j \rangle$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T)$, $j = \overline{1, m}$. Наконец,

$$\int_0^t ds \langle u_m^3, w_j \rangle = \int_0^t ds \langle u_m^3 - u^3, w_j \rangle + \int_0^t ds \langle u^3, w_j \rangle, \quad j = \overline{1, m}.$$

С другой стороны, $u_m^3, u^3 \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$. И, кроме того, $u_m^3 \rightharpoonup u^3$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$, поэтому в силу теоремы Лебега получим

$$\left| \int_0^t ds \langle u_m^3 - u^3, w_j \rangle \right| \rightarrow +0$$

при $m \rightarrow +\infty$ для всех $t \in (0, T)$. В силу условия $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$ получим, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow +\infty$.

Поскольку $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то имеем $\langle \Delta u_{0m}, w_j \rangle \rightarrow \langle \Delta u_0, w_j \rangle$, $\langle \Delta_p u_{0m}, w_j \rangle \rightarrow \langle \Delta_p u_0, w_j \rangle$, $j = \overline{1, m}$.

Значит, переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в равенстве (2.17), получаем

$$\Delta u - \chi = \Delta u_0 + \Delta_p u_0 + \int_0^t ds u - \int_0^t ds (u_{x_1} + u u_{x_1}) - \int_0^t ds u^3(s). \quad (2.18)$$

Введем обозначение $\mathbb{A}(v) = -\Delta_p v$. Из (2.17) следует равенство

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle &= \langle \Delta u_m, u_m \rangle + \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u_m(t) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \int_0^t ds (u_m - u_{mx_1} - u_m u_{mx_1})(s), u_m(t) \right\rangle - \langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m \rangle = \\ &= -\|\nabla u_m\|_2^2 + \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u_m(t) \right\rangle - \langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m \rangle + \\ &+ \left\langle \int_0^t ds u_m(s), u_m(t) \right\rangle + \left\langle \int_0^t ds (u_{mx_1}(s) + u_m u_{mx_1}(s)), u_m(t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В силу того что $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \|\nabla u_m\|_2^2(t) \geq \|\nabla u\|_2^2(t).$$

Кроме того, поскольку $u_m \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, имеем

$$\left\langle \int_0^t ds u_m(s), u_m(t) \right\rangle \rightarrow \left\langle \int_0^t ds u(s), u(t) \right\rangle \quad \text{при } m \rightarrow +\infty,$$

$$\left\langle \int_0^t ds (u_{mx_1}(s) + u_m u_{mx_1}(s)), u_m(t) \right\rangle \rightarrow \left\langle \int_0^t ds (u_{x_1}(s) + uu_{x_1}(s)), u(t) \right\rangle$$

при $m \rightarrow +\infty$. Кроме того,

$$\int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u_m(t) \right\rangle = \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u_m(t) - u(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u(t) \right\rangle.$$

Выше было доказано, что последовательность $\{u_m\}$ сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, поэтому некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ сходится сильно в $\mathbb{L}^4(Q)$. Кроме того, последовательность ограничена в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^4(\Omega))$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left| \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u_m(t) - u(t) \right\rangle \right| \rightarrow +0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

Действительно, имеем

$$|\langle u_m^3(s), u_m(t) - u(t) \rangle| \leq \left(\int_\Omega dx |u_m(s)|^4 \right)^{3/4} \left(\int_\Omega dx |u_m(t) - u(t)|^4 \right)^{1/4},$$

$$\left| \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u_m(t) - u(t) \right\rangle \right| \leq C(T) \left(\int_0^T dt \|u_m(t) - u(t)\|_4^4 \right)^{1/4}.$$

Рассмотрим теперь

$$\int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u(t) \right\rangle.$$

Поскольку $u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^4(\Omega))$, а

$$\int_0^t ds |u_m|^q u_m(s) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega)),$$

$u_m^3 \rightharpoonup u^3$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{4/3}(\Omega))$, то отсюда следует, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^3(s), u(t) \right\rangle = \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u^3(s), u(t) \right\rangle.$$

Пусть

$$\mathbb{X}_m = \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(u_m) - \mathbb{A}(v), u_m - v \rangle$$

$$\forall v \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \quad \forall (v) \in \mathbb{L}^{r'}(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$

$$r \in (1, \infty), \quad r' = \frac{r}{r-1}.$$

В силу (2.19) получим

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_m = & -\int_0^T dt \|\nabla u_m\|_2^2 + \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m^2(s), u_m(t) \right\rangle - \int_0^T dt \langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m \rangle - \\ & - \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u_m(s), u_m(t) \right\rangle - \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds (u_{mx_1}(s) + u_m u_{mx_1}(s)), u_m(t) \right\rangle - \\ & - \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(u_m), v \rangle - \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(v), u_m - v \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из выписанных слагаемых в выражении (2.20) для $\mathbb{X}_m$ нам осталось рассмотреть

$$\int_0^T dt \langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m \rangle = \int_0^T dt \langle \Delta u_{0m}, u_m \rangle + \int_0^T dt \langle \Delta_p u_{0m}, u_m \rangle. \quad (2.21)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (2.21). Функции u_m равномерно по m ограничены в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и в силу того, что $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ (см. [3]) – множество линейных непрерывных (ограниченных в силу линейности Δ) операторов, действующих из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, последовательность $\Delta u_{0m} \rightarrow \Delta u_0$ сильно в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и справедливо следующее неравенство:

$$|\langle \Delta u_{0m} - \Delta u_0, u_m \rangle| \leq C \|\Delta u_{0m} - \Delta u_0\|_{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

Поскольку $u_m \rightarrow u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а $\Delta u_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, то имеем

$$\int_0^T dt \langle \Delta u_0, u_m \rangle \rightarrow \int_0^T dt \langle \Delta u_0, u \rangle \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

И в этом случае

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \Delta u_{0m}, u_m \rangle = \int_0^T dt \langle \Delta u_0, u \rangle.$$

Рассмотрим второе слагаемое в (2.21). Функции u_m равномерно по m ограничены в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В силу того что $\partial/\partial x_i \in \mathcal{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega); \mathbb{L}^p(\Omega))$, $i = \overline{1, N}$, последовательность $\partial u_{0m}/\partial x_i \rightarrow \partial u_0/\partial x_i$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ для всех $i = \overline{1, N}$. Справедливо следующее неравенство:

$$\| |w|^{p-2} w - |v|^{p-2} v \|_{p/(p-1)} \leq (p-1) \|f(w-v)\|_{p/(p-1)},$$

где $f = \max(|w|^{p-2}, |v|^{p-2})$,

$$\|f(w-v)\|_{p_1} \leq \|f\|_{q_1 p_1} \|w-v\|_{q_2 p_1}, \quad p_1 = p/(p-2), \quad q_2 p_1 = p,$$

$$q_2 = p-1, \quad q_1 = (p-1)/p-2, \quad q_1 p_1 = p/(p-2),$$

$$\| |w|^{p-2} w - |v|^{p-2} v \|_{p/(p-1)} \leq (p-1) \|f\|_{p/(p-2)} \|w-v\|_p,$$

$$\|f\|_{p/(p-2)} \leq 2(\max\{\|w\|_p, \|v\|_p\})^{p-2}.$$

Возьмем $v = \partial u_{0m}/\partial x_i$ и $w = \partial u_0/\partial x_i$, тогда сразу же получим, что

$$\left| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i} \longrightarrow \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Так как $\partial/\partial x_i \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^{p'}(\Omega), \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, то последовательность $\Delta_p u_{0m} \longrightarrow \Delta_p u_0$ сильно в $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ и справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|\langle \Delta_p u_{0m} - \Delta_p u_0, u_m \rangle| \leq C \|\Delta_p u_{0m} - \Delta_p u_0\|_{-1,p'} \longrightarrow 0 \quad \text{при } m \longrightarrow +\infty.$$

Поскольку $u_m \longrightarrow u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^1(\Omega))$, а $\Delta_p u_0 \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, то имеем

$$\int_0^T dt \langle \Delta_p u_0, u_m \rangle \longrightarrow \int_0^T dt \langle \Delta_p u_0, u \rangle \quad \text{при } m \longrightarrow +\infty.$$

Значит,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \Delta_p u_{0m}, u_m \rangle = \int_0^T dt \langle \Delta_p u_0, u \rangle.$$

Таким образом, переходя к верхнему пределу в (2.20) при $m \longrightarrow +\infty$, получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{X}_m &\leq - \int_0^T dt \|\nabla u\|_2^2 + \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u^2(s), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \langle \Delta u_0 + \Delta_p u_0, u \rangle - \\ &- \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u(s), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds (u_{x_1}(s) + uu_{x_1}(s)), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \langle \chi, v \rangle - \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(v), u - v \rangle. \end{aligned}$$

С учетом (2.18) приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \langle \chi, u \rangle &= - \int_0^T dt \|\nabla u\|_2^2 + \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u^2(s), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \langle \Delta u_0 + \Delta_p u_0, u \rangle - \\ &- \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u(s), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds (u_{x_1}(s) + uu_{x_1}(s)), u(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^T dt \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v \rangle = 0$$

$$\forall v \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad v = u - \lambda w, \quad w \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad r > 1.$$

Стандартным образом приходим к выводу, что

$$\int_0^T dt \langle \chi - \mathbb{A}(u), w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$\chi, \mathbb{A}(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Значит, справедливо соотношение (2.16).

Докажем теперь, что

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Пусть

$$\mathbb{A}_i(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right), \quad \langle \mathbb{A}_i(v), v \rangle = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad i = \overline{1, N}.$$

В силу того что $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \mathbb{A}_i(u_m), u_m \rangle &\leq - \sum_{j=1, j \neq i}^N \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_p^p + \limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle, \\ \limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle &\leq - \int_0^T dt \|\nabla u\|_2^2 + \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u^2 u(s), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \langle \Delta u_0 + \Delta_p u_0, u \rangle - \\ &- \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds u(s), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \left\langle \int_0^t ds (u_{x_1}(s) + uu_{x_1}(s)), u(t) \right\rangle - \int_0^T dt \langle \Delta_p u, u \rangle = \int_0^T dt \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_p^p. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leq \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p. \quad (2.22)$$

С другой стороны, $\partial u_m / \partial x_i$ ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^p(\Omega)) \subset \mathbb{L}^p(Q)$, $Q = (0, T) \times \Omega$, поэтому, в силу рефлексивности $\mathbb{L}^p(Q)$, можно выделить подпоследовательность (которую снова обозначим через u_m) такую, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^p(Q), \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.23)$$

Значит, получим

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \geq \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.24)$$

Из (2.22) и (2.24) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p = \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.25)$$

Из (2.23), (2.25) следует, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^p(Q), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.26)$$

что, в свою очередь, означает, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{почти всюду в } Q \equiv (0, T) \times \Omega, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.27)$$

Переходом к подпоследовательности получим

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \chi_i \quad \text{*}-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}.$$

В силу (2.27) получим

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)).$$

Стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)).$$

В силу (2.13), можно выделить такую подпоследовательность, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \rightharpoonup \Psi \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = (0, T) \times \Omega.$$

А это значит, что

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = (0, T) \times \Omega, \quad i = \overline{1, N}.$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &\in \mathbb{L}^2(Q), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \\ \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u}{\partial x_i} &\in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Аналогичным образом при помощи (2.27) доказывается, что

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)).$$

Из (2.28) и теорем вложения следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &\in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \\ \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Докажем (2.29).

Введем обозначение $\Psi \equiv |\partial u / \partial x_i|^{(p-2)/2} \partial u / \partial x_i$, в этом случае $|\Psi|^\alpha \Psi = |\partial u / \partial x_i|^{p-2} \partial u / \partial x_i$ при $\alpha = (p-2)/p$, $i = \overline{1, N}$. Отметим, что $|\Psi|^\alpha \Psi \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega))$.

Докажем, что $(|\Psi|^\alpha \Psi)_t \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega))$. Действительно,

$$\int_0^T dt \left(\int_\Omega dx |\Psi|^{\alpha p'} |\Psi_t|^{p'} \right)^{2/p'} \leq \int_0^T dt \left(\int_\Omega dx |\Psi|^{\alpha p' p_1} \right)^{2/(p' p_1)} \left(\int_\Omega dx |\Psi_t|^{p' p_2} \right)^{2/(p' p_2)},$$

где

$$\alpha p' p_1 = 2, \quad p' p_2 = 2, \quad p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1, \quad p_1 = \frac{2(p-1)}{p-2}, \quad p_2 = \frac{2(p-1)}{p}.$$

Поскольку $\Psi \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $\Psi_t \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, то имеем

$$\int_0^T dt \left(\int_\Omega dx |\Psi|^{\alpha p'} |\Psi_t|^{p'} \right)^{2/p'} \leq \sup_{t \in (0, T)} \|\Psi\|_2^{2\alpha} \int_Q dx dt |\Psi_t|^2 < +\infty.$$

Теперь мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в уравнении (2.2). Действительно, возьмем сначала в равенстве (2.2) функцию $\varphi(t) = 1$, тогда получим интегральное равенство

$$\Delta u_m + \Delta_p u_m = \Delta u_{m0} + \Delta_p u_{m0} - \int_0^t ds [u_{mx_1} + u_m u_{mx_1} + u_m^3 - u],$$

понимаемое в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, T)$. С учетом полученных ранее результатов можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и получить следующее равенство:

$$\Delta u + \Delta_p u = \Delta u_0 + \Delta_p u_0 - \int_0^t ds [u^3 + u_{x_1} + uu_{x_1} - u]$$

в смысле $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, T)$. Из этого равенства вытекает, что

$$\Delta u + \Delta_p u \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathbb{C}_w^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Заметим, что имеет место поточечное равенство

$$\frac{d}{dt} [\Delta u_m + \Delta_p u_m] = -u_m^3 - u_{mx_1} - u_m u_{mx_1} + u_m.$$

Поскольку

$$\Delta u_m + \Delta_p u_m \rightharpoonup \Delta u + \Delta_p u$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, то имеем

$$\frac{d}{dt} (\Delta u_m + \Delta_p u_m) \rightarrow \frac{d}{dt} (\Delta u + \Delta_p u)$$

в смысле $\mathcal{D}'(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$. С другой стороны,

$$u_m^3 \rightharpoonup u^3, \quad u_{mx_1} \rightharpoonup u_{x_1}, \quad u_m u_{mx_1} \rightharpoonup uu_{x_1}, \quad u_m \rightharpoonup u$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$ и, значит,

$$d/dt(\Delta u_m + \Delta_p u_m) \rightharpoonup \xi$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} (\Delta u_m + \Delta_p u_m) \rightarrow \frac{d}{dt} (\Delta u + \Delta_p u)$$

слабо в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$.

Теперь можно перейти к пределу в равенстве (2.2) и получить равенство

$$\int_0^T dt \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} \langle \Delta u + \Delta_p u, w_j \rangle + \langle -u + u_{x_1} + uu_{x_1} + u^3, w_j \rangle \right] = 0$$

$\forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), j = \overline{1, +\infty}$. Данное соотношение эквивалентно следующему равенству:

$$\int_0^T dt \left\langle \frac{d}{dt} [\Delta u + \Delta_p u] + u^3 - u + u_{x_1} + uu_{x_1}, v \right\rangle \quad \forall v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Докажем теперь единственность слабого обобщенного решения. Действительно, пусть u_i , $i = 1, 2$ – два слабых обобщенных решения следующей задачи:

$$\int_0^T dt \varphi(t) \left[\frac{d}{dt} (\langle \Delta u, w \rangle_0 + \langle \Delta_p u, w \rangle) + (u^3, w) - (u, w) + \langle u_{x_1}, w \rangle_0 + \langle uu_{x_1}, w \rangle_0 \right] = 0$$

$$\forall \varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad \forall w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

в классах, сформулированных в условиях теоремы, с одним и тем же начальным условием. Отсюда при $\varphi(t) = 1$ находим

$$\Delta u_i + \Delta_p u_i = \Delta u_0 + \Delta_p u_0 - \int_0^t ds u_i^3(s) + \int_0^t ds u_i - \int_0^t ds (u_{ix_1} + u_i u_{ix_1}).$$

Отсюда сразу же получим

$$\begin{aligned} -\langle \Delta u_1 - \Delta u_2, u_1 - u_2 \rangle - \langle \Delta_p u_1 - \Delta_p u_2, u_1 - u_2 \rangle &= \\ &= \int_0^t ds \int_{\Omega} dx (u_1^3(s) - u_2^3(s))(u_1(t) - u_2(t)) - \\ &- \int_0^t ds \int_{\Omega} dx (u_1(s) - u_2(s))(u_1(t) - u_2(t)) + \\ &+ \int_0^t ds \int_{\Omega} dx (u_{1x_1}(s) - u_{2x_1}(s))(u_1(t) - u_2(t)) + \\ &+ \int_0^t ds \int_{\Omega} dx \frac{1}{2} (u_1^2(s) - u_2^2(s))(u_{1x_1}(t) - u_{2x_1}(t)). \end{aligned}$$

В силу монотонности оператора Δ_p и теорем вложения нетрудно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2 &\leq 3 \int_0^t ds \int_{\Omega} dx \max\{|u_1|^2(s), |u_2|^2(s)\} |u_1(s) - u_2(s)| |u_1(t) - u_2(t)| + \\ &+ \int_0^t ds \int_{\Omega} dx |u_1(s) - u_2(s)| |u_1(t) - u_2(t)| + \int_0^t ds \int_{\Omega} dx |\nabla u_1(s) - \nabla u_2(s)| |u_1(t) - u_2(t)| + \\ &+ \int_0^t ds \int_{\Omega} dx \max\{|u_1(s)|, |u_2(s)|\} |u_1(s) - u_2(s)| |\nabla u_1(t) - \nabla u_2(t)| \leq \\ &\leq C(T) \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2(t) \int_0^t ds \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2(s), \end{aligned}$$

из которого вытекает, что $u_1 = u_2$ почти всюду в $(0, T) \times \Omega$. Теорема доказана.

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ В ЛЮБОМ КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ И РАЗРУШЕНИЕ ЕЕ РЕШЕНИЯ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Введем следующие обозначения:

$$E_m(t) \equiv \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad E_{0m} \equiv E_m(0), \quad \alpha = \frac{4}{p},$$

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p, \quad E_0 \equiv E(0),$$

$$B_2 \equiv B_1^4 \left(\frac{p}{p-1} \right)^{4/p},$$

где B_1 – наилучшая постоянная вложения пространств $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$.

Справедлива.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда верно следующее:

1) если $p > 4$, то $T_0 = +\infty$ и имеет место неравенство

$$E(t) \leq [E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t]^{1/(1-\alpha)}, \quad \alpha = 4/p;$$

2) если $p = 4$, то $T_0 = +\infty$ и имеет место неравенство

$$E(t) \leq E_0 \exp\{B_2 t\};$$

3) если $p \in (2, 4)$ и выполнено неравенство

$$E'(0) > \left(\frac{\gamma}{\alpha_1 - 1} \right)^{1/2} E_0 + \frac{\beta}{\alpha_1 - 1} E_0,$$

то $T_0 \in [T_1, T_2]$, где

$$E'(0) = \|u_0\|_4^4 - \|u_0\|_2^2, \quad E_0 = E(0) = \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p,$$

$$\alpha_1 = \frac{4+p}{2p}, \quad \beta = \frac{2(B_3^2 + 3)}{4-p}, \quad \gamma = \frac{16B_3^2(B_3^2 + 3)}{4-p}, \quad p \in (2, 4),$$

$$T_1 = \frac{1}{\alpha_1 - 1} B_2^{-1} E_0^{1-\alpha_1}, \quad B_2 \equiv B_1^{q+2} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{4/p},$$

$$T_2 = E_0^{1-\alpha_1} A^{-1},$$

$$A^2 \equiv (1 - \alpha_1)^2 E^{-2\alpha_1}(0) \left[\left(E'(0) - \frac{\beta}{\alpha_1 - 1} E_0 \right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha_1 - 1} (E(0))^2 \right],$$

B_3 – наилучшая постоянная вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть u_m – галеркинские приближения, определенные в (2.4). Поскольку $u_{0m} \rightharpoonup u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, а последовательность $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ для почти всех $t \in (0, T)$, то переходом в (2.8) и (2.9) к пределу при $m \rightarrow +\infty$ с учетом того, что $E(t) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} E_m(t)$, получим

$$E(t) \leq [E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{при } \alpha < 1,$$

$$E(t) \leq E_0 \exp\{B_2 t\} \quad \text{при } \alpha = 1.$$

Рассмотрим случай $\alpha > 1$.

Поскольку последовательность $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то имеем $E_{0m} \rightarrow E_0$. В этом случае из числовой последовательности E_{0m} можно выделить либо монотонно неубывающую, либо монотонно невозрастающую подпоследовательность. Будем искомую подпоследовательность последовательности E_{0m} и соответствующие подпоследовательности последовательностей u_{0m} и u_m обозначать так же. Рассмотрим неравенство (2.10). Предположим, что E_{0m} – монотонно невозрастающая последовательность. Введем обозначение $\{E_{0m}^{\{n\}}\}$ – последовательность, полученная из E_{0m} путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых. Тогда неравенство (2.10) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, T_1^{\{n\}}]$, где $T_1^{\{n\}} \equiv (\alpha - 1)^{-1} B_2^{-1} E_{0n}^{1-\alpha}$. Поскольку $u_m \rightharpoonup u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то для всех таких t можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в (2.10) и получить, что

$$E(t) \leq E_0 [1 - (\alpha - 1) B_2 E_0^{\alpha-1} t]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при } t \in [0, T_1^{\{n\}}]. \quad (3.1)$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и того, что $T_1^{\{n\}} \uparrow T_1$ при $n \rightarrow +\infty$, приходим к выводу, что (3.1) имеет место при $t \in [0, T_1]$ и, кроме того, $T_0 \geq T_1$. Пусть теперь E_{0m} – монотонно неубывающая последовательность. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что (3.1) имеет место для всех $t \in [0, T_1]$ и $T_0 \geq T_1$.

Для дальнейшего изложения нам необходимо доказать, что для почти всех $t \in [0, T] \forall T \in (0, T_0)$ имеем $E_m(t) \rightarrow E(t)$.

С этой целью заметим, что при доказательстве теоремы 1 получили (2.26), а значит, в силу вложения $\mathbb{L}^p(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(Q)$, $Q = (0, T) \times \Omega$, $\forall T \in [0, T_0]$, имеем

$$\int_0^t ds E_m(s) \rightarrow \int_0^t ds E(s) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0). \quad (3.2)$$

С другой стороны, при выполнении условий теоремы 1 имеет место компактное вложение $\mathbb{H}^1(Q) \subset \mathbb{L}^4(Q)$, а последовательность u_m сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$. Стало быть, последовательность $u_m \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^4(Q)$, $Q = (0, T) \times \Omega \forall T \in (0, T_0)$. Поскольку правая часть выражения для $E_m(t)$ сходится для любого $t \in [0, T]$, $T \in (0, T_0)$, к некоторой функции $\eta(t)$ и из доказательства теоремы 1 следует, что $E_m(t) \leq C + \infty$, где C не зависит ни от m , ни от t , то в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега имеем $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, T) \forall T \in (0, T_0)$ и

$$\int_0^t ds E_m(s) \rightarrow \int_0^t ds \eta(s) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0). \quad (3.3)$$

При сравнении (3.2) с (3.3) приходим к выводу, что

$$\int_0^t ds [E(s) - \eta(s)] = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0), \quad (3.4)$$

причем $E(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$, поэтому получаем

$$\eta(t) = E(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0).$$

Таким образом, в силу (3.4) приходим к выводу, что последовательность $E_m(t)$ при дополнительных условиях на $q > 0$ сходится почти всюду к $E(t)$ на множестве $t \in [0, T] \forall T \in (0, T_0)$.

В силу (2.6), (2.11), а также поскольку $u_m(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p + \|u_m\|_2^2 = \|u_m\|_4^4(s), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u'_m\|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_2^2 = \\ = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_m\|_4^4 + \int_{\Omega} dx u'_{mx_1} u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx u_m^2 u'_{mx_1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6) следует, что $E_m(t)$, $E'_m(t) \in \mathbb{AC}[0, T]$. Справедливы следующие неравенства:

$$\left| \int_{\Omega} dx (\nabla u'_m, \nabla u_m) \right|^2 \leq \|\nabla u'_m\|_2^2 \|\nabla u_m\|_2^2, \quad (3.7)$$

$$\left| \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right| \leq \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right| \leq \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^{p/2} \left(\int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

В силу неравенства Шварца имеем

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^{p/2} \left(\int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

В силу (3.5)–(3.9) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |\langle u_m, [-\Delta u_m - \Delta_p u_m]_t \rangle|^2 &\leq |\langle \nabla u'_m, \nabla u_m \rangle|^2 + (p-1)^2 \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 + \\ &+ 2(p-1) |\langle \nabla u'_m, \nabla u_m \rangle| \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right| \leq \\ &\leq \|\nabla u'_m\|_2^2 \|\nabla u_m\|_2^2 + (p-1)^2 \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 + \\ &+ 2(p-1) \|\nabla u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_2 \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\|\nabla u_m\|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right) \left(\|\nabla u'_m\|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 \right) \leq \\ &\leq p \left(\|\nabla u'_m\|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2 \right) \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$(E'_m)^2 \leq p E_m(t) J_m(t), \quad (3.10)$$

где

$$J_m(t) = \|\nabla u'_m\|_2^2 + (p-1) \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} dx \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \right|^2.$$

Воспользуемся теперь равенствами (3.5), (3.6) для получения оценки сверху не величину J_m . Действительно, справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} J_m &= \frac{1}{4}E_m'' + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 + \int_{\Omega} dx u_{mx_1}' u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dx u_{mx_1}' u^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4}E_m'' + \frac{\varepsilon}{4}B_3^2 J_m + \frac{1}{2\varepsilon}B_3^2 E_m + \frac{\varepsilon}{2}J_m + \frac{1}{\varepsilon}B_3^2 E_m + \frac{\varepsilon}{4}J_m + \frac{1}{4\varepsilon}\|u_m\|_4^4 \leq \\ &\leq \frac{1}{4}E_m'' + \frac{\varepsilon}{4}(B_3^2 + 3)J_m + \frac{2B_3^2}{\varepsilon}E_m + \frac{1}{4\varepsilon}E_m'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) получим (см. [1])

$$E_m E_m'' - \alpha_1 (E_m')^2 + \beta E_m' E_m + \gamma E_m^2 \geq 0,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4+p}{2p}, \quad \beta = \frac{2(B_3^2 + 3)}{4-p}, \quad \gamma = \frac{16B_3^2(B_3^2 + 3)}{4-p}$$

при $p < 4$. Тогда $\alpha_1 > 1$, $\beta, \gamma > 0$.

Рассуждая далее, как и в [4], приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов // Зап. ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи. М.: Мир, 1971.
4. Свеишников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2006.