М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О разрушении решения уравнения типа Соболева с нелокальным источником, *Сиб. матем. журн.*, 2005, том 46, номер 3, 567–578

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.957

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

Аннотация: Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного волнового диссипативного уравнения типа Соболева с нелокальным кубическим источником. Для данной задачи получены достаточные условия разрушения сильного обобщенного решения. Кроме того, получены двусторонние оценки на время разрушения решения.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, разрушение, двойная нелинейность, нелокальная нелинейность.

1. Введение. Постановка задачи

Целью настоящего исследования является получение достаточных условий разрушения решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \Delta u \int\limits_{\Omega} dx |\nabla u|^2 = 0, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, причем Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $q > 0$.

Данная задача является математической моделью волновых процессов в полупроводниках во внешнем электрическом поле при учете диссипации и нелокальной связи плотности тока с напряженностью электрического поля [1, 2].

В последнее время в математической физике стали интенсивно рассматриваться новые сильно нелинейные волновые диссипативные уравнения псевдопараболического типа [1, 2]. При этом модельные уравнения оказываются либо третьего, либо пятого порядка с производной по времени первого порядка. Ранее нами в работах [3–5] изучены разнообразные классы сильно нелинейных уравнений типа Соболева. Однако случай нелокального источника в волновом диссипативном уравнении псевдопараболического типа рассмотрен не был.

Уравнениям псевдопараболического типа и типа Соболева посвящено большое количество работ. Прежде всего отметим классическую работу С. Л. Соболева [6]. По поводу дальнейших результатов по исследованию линейных уравнений типа Соболева см. работы [7, 8] и библиографию в них. Отметим также работу [9], где предложен операторный метод исследования линейных уравнений типа Соболева высокого порядка. В работе [10] предложен метод полугрупп

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00253, 02–01–06038) и гранта от проекта «Молодые ученые России».

с нетривиальными ядрами, который был успешно применен в изучении разнообразных задач для нелинейных псевдопараболических уравнений.

Вопросам разрушения решений квазилинейных диссипативных «не волновых» уравнений с источниками посвящена классическая работа [8]. В ней предложен оригинальный энергетический метод исследования разрушения решений уравнений формально параболического вида

$$\mathbb{P}u_t = -\mathbb{A}u + \mathbb{F}(u), \tag{1.2}$$

в котором существенно использовались линейность и позитивность операторов $\mathbb{P}$ и $\mathbb{A}$, определенных на некотором гильбертовом пространстве. В дальнейшем в работе [11] данный подход был развит в направлении рассмотрения, к примеру, такого нелинейного уравнения, как

$$|u'|^q u' + \mathbb{A}u = \mathbb{F}(u,t). \tag{1.3}$$

Однако случай нелинейного эллиптического оператора при производной по времени остался вне рамок предлагаемой техники. Кроме того, техника работы [12] прямо не применима к уравнениям с конвективной нелинейностью, на что указывал сам Левин в своей работе [8].

В работе [13] методом нижних и верхних решений исследован вопрос о разрушении решения и о глобальной разрешимости для обобщенного уравнения Буссинеска с источником.

В нашей работе [3] предложена некоторая модификация энергетического метода Левина [11, 12], с помощью которого удалось рассмотреть случай сильно нелинейных псевдопараболических уравнений с источниками. В работах [4, 5] нами были рассмотрены следующие операторно-дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{A}_j(u)\right) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{A}_j(u)\right) + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{A}_j(u)\right) + \mathbb{DP}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \mathbb{L}u\right) + \mathbb{L}u + \mathbb{DP}(u) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.7}$$

где $\mathbb{A}_0 u + \sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{A}_j(u)$ — нелинейный эллиптический оператор, $\mathbb{L}u$ — линейный диссипативный эллиптический оператор, $\mathbb{DP}(u)$ — «конвективная» нелинейность, $\mathbb{F}(u)$ — источник.

Принципиально новый подход, называемый *методом пробных функций* и предложенный в развернутом виде в работе [14], может быть применен для исследования дифференциальных неравенств псевдопараболического типа в неограниченных областях.

Отметим, что исследованию волновых квазилинейных волновых диссипативных уравнений с источниками и без источников посвящены работы [15–23]. В этих работах рассматривались вопросы асимптотического поведения решений псевдопараболических уравнений при больших временах, а также вопросы существования решений типа уединенных волн и их устойчивость.

2. Локальная разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле

Определение. Под *сильным обобщенным решением* задачи (1.1) мы подразумеваем решение класса $\mathbb{C}^{(1)}\big([0,T];\mathbb{H}_0^1(\Omega)\big)$ следующей задачи:

$$\langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0 \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \forall t \in [0,T],$$
$$\mathbb{D}(u) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u\frac{\partial u}{\partial x_1} - \Delta u \int\limits_\Omega dx |\nabla u|^2, \tag{2.1}$$

где посредством $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, а производная по времени понимается в сильном смысле.

Теорема 1. *Пусть* $q \in (0,4]$ *и* $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. *Тогда найдется такое* $T_0 > 0$, *что существует единственное сильное обобщенное решение задачи* (1.1) *класса* $\mathbb{C}^{(1)}\big([0,T_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega)\big)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеет место предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|\nabla u\|_2 = +\infty.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\|\cdot\|_{+1}$ — норма в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_{-1}$ — норма в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь операторы

$$\begin{gathered}\mathbb{A}(u) = -\Delta u + u + |u|^q u, \quad \mathbb{L}u = -\Delta u,\\ \mathbb{F}_1 u = u_{x_1}, \quad \mathbb{F}_2(u) = u u_{x_1}, \quad \mathbb{F}_3(u) = \|\nabla u\|_2^2(-\Delta u).\end{gathered} \tag{2.2}$$

В сильном обобщенном смысле задача (2.1) с учетом введенных обозначений (2.2) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}(u)\right) + \mathbb{L}u = \mathbb{F}_1 u + \mathbb{F}_2(u) + \mathbb{F}_3(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Рассмотрим свойства оператора $\mathbb{A}$. Имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2\rangle &= \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2 + \|u_1 - u_2\|_2^2\\ &+ \int\limits_\Omega (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2)(u_1 - u_2) \geq \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2.\end{aligned}$$

Значит, оператор $\mathbb{A}$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1. Оператор $\mathbb{L} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1. Далее,

$$\mathbb{F}_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

причем оператор $\mathbb{F}_1$ является липшиц-непрерывным. Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_2(u) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\|\mathbb{F}_2(u_1) - \mathbb{F}_2(u_2)\|_{-1} \leq C\big\|u_1^2 - u_2^2\big\|_2 \leq C\mu_1(R)\|u_1 - u_2\|_{+1}, \tag{2.4}$$
$$\mu_1(R) = R, \ \ R = \max\{\|u_1\|_+, \|u_2\|_+\}.$$

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}_3(u) = \|\nabla u\|_2^2(-\Delta u) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$:

$$\|\mathbb{F}_3(u_1) - \mathbb{F}_3(u_2)\|_{-1} \leq \|\nabla u_1\|_2^2 \|u_1 - u_2\|_{+1} + \left|\|\nabla u_1\|_2^2 - \|\nabla u_2\|_2^2\right| \|u_1\|_+ \\ \leq C\mu_2(R)\|u_1 - u_2\|_{+1}, R = \max\{\|u_1\|_+, \|u_2\|_+\}, \mu_2(R) = R^2. \quad (2.5)$$

Найдем производную Фреше оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}'_u = \mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u), \quad (2.6)$$

где

$$\mathbb{A}_0 = -\Delta u + u, \quad \mathbb{B}(u) = (q+1)|u|^q I.$$

Справедливо неравенство

$$\langle \mathbb{A}'(u)h_1 - \mathbb{A}'(u)h_2, h_1 - h_2 \rangle \geq \|\nabla h_1 - \nabla h_2\|_2^2.$$

Значит, оператор $\mathbb{A}'(u)$ имеет липшиц-непрерывный обратный с постоянной Липшица, равной 1.

Рассмотрим оператор $\mathbb{B}(u) = (q+1)|u|^q I$. Докажем, что операторы $\mathbb{B}(\cdot)$ являются ограниченными и непрерывными по $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в равномерной топологии пространства $\mathscr{L}\big(\mathbb{H}_0^1(\Omega); \mathbb{H}^{-1}(\Omega)\big)$. Действительно,

$$\|\mathbb{B}(u)h\|_{-1} \leq C\|\mathbb{B}(u)h\|_{\frac{q+2}{q+1}} \leq C\left(\int\limits_\Omega dx |u|^{q\frac{q+2}{q+1}} |h|^{\frac{q+2}{q+1}}\right)^{\frac{q+1}{q+2}} \\ \leq C\left(\int\limits_\Omega dx |u|^{q+2}\right)^{\frac{q}{q+2}} \left(\int\limits_\Omega dx |h|^{q+2}\right)^{\frac{1}{q+2}} \leq C\|\nabla u\|_2^q \|\nabla h\|_2. \quad (2.7)$$

Пусть теперь $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, тогда в силу того, что $f = |u|^q$, $q > 0$, — оператор Немыцкого, действующий из $\mathbb{L}^{q+1}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{(1+q)/q}(\Omega)$, данный оператор является ограниченным и сильно непрерывным из $\mathbb{L}^{1+q}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{(1+q)/q}$. Справедливы соотношения

$$\|\mathbb{B}(u_n) - \mathbb{B}(u)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\nabla h\|_2 = 1} \|\mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h\|_{-1},$$

$$\|\mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h\|_{-1} \leq C\|\mathbb{B}(u_n)h - \mathbb{B}(u)h\|_{\frac{q+2}{q+1}} \leq C\left(\int\limits_\Omega dx |h(|u_n|^q - |u|^q)|^{\frac{q+2}{q+1}}\right)^{\frac{q+1}{q+2}} \\ \leq C\|h\|_{q+2}\left(\int\limits_\Omega dx ||u_n|^q - |u|^q|^{\frac{q+2}{q}}\right)^{\frac{q}{q+2}} \leq C < +\infty,$$

где C не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Введем оператор $f(x,u) = |h||u|^q : \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \to \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$. По теореме Вайнберга — Немыцкого (см., например, [24, с. 39]) приходим к выводу, что

$$\|\mathbb{B}(u_n) - \mathbb{B}(u)\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega)} \to +0$$

при $n \to +\infty$.

Введем обозначение

$$v = \mathbb{A}(u). \quad (2.8)$$

Тогда в классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ задача (2.3) эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered}\frac{dv}{dt} = -\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_1\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(v)) + \mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(v)),\\ v(0) = v_0 = \mathbb{A}(u_0) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega).\end{gathered} \tag{2.9}$$

Задача (2.9) эквивалентна интегральному уравнению

$$v(t) = \mathbb{H}(v),\ \mathbb{H}(v) = v_0 + \int\limits_0^t ds[-\mathbb{L}\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_1\mathbb{A}^{-1}(v) + \mathbb{F}_2(\mathbb{A}^{-1}(v)) + \mathbb{F}_3(\mathbb{A}^{-1}(v))]. \tag{2.10}$$

Рассмотрим замкнутое выпуклое ограниченное подмножество пространства $\mathbb{B}_M \subset \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_M \equiv \{v \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^{-1}(\Omega)) : \|v\|_T = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|v\|_{-1} \le M\}.$$

Нетрудно доказать, что в силу свойств (2.4) и (2.5) найдется такое $T > 0$, что оператор $\mathbb{H}$ действует из $\mathbb{B}_M$ в $\mathbb{B}_M$ при достаточно большом M. В силу теоремы о сжимающих отображениях существует единственное решение интегрального уравнения (2.10) класса $\mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений вида (2.10), получим, что найдется такое $\mathbb{T}_0 > 0$, что либо $\mathbb{T}_0 = +\infty$, либо $\mathbb{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow\mathbb{T}_0} \|v\|_{-1} = +\infty.$$

Из свойств сглаживания по времени оператора $\mathbb{H}(v)$ вытекает, что $v(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ — сильное обобщенное решение задачи (2.9).

Рассмотрим теперь уравнение (2.8):

$$\mathbb{A}(u) = -\Delta u + u + |u|^q u = v. \tag{2.11}$$

Из свойств оператора $\mathbb{A}$ вытекает, что

$$u = \mathbb{A}^{-1}(v). \tag{2.12}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{+1} \le \|\mathbb{A}^{-1}(v(t)) - \mathbb{A}^{-1}(v(t_0))\|_{+1} \le \|v(t) - v(t_0)\|_{-1} \to +0$$

при $t \to t_0$. Таким образом, $u \in \mathbb{C}\big([0,T_0);\mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$.

В классе $u \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0,T_0);\mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$ задача (2.11) эквивалентна следующей:

$$\mathbb{A}'_u u' = v', \quad u = \mathbb{A}^{-1}(v). \tag{2.13}$$

Из (2.13) вытекает, что

$$[\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)]\, u' = v', \quad \mathbb{A}_0 = -\Delta + I. \tag{2.14}$$

Подействуем на обе части равенства (2.14) оператором $\mathbb{A}_0^{-1}$, тогда получим

$$[I + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}(u)]u' = \mathbb{A}_0^{-1}v'. \tag{2.15}$$

Докажем теперь, что оператор

$$\widehat{\mathbb{C}} = I + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{B}(u) \tag{2.16}$$

при фиксированном $u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ обратим. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\widehat{\mathbb{C}}w = 0.$$

Подействуем на обе части последнего уравнения оператором $\mathbb{A}_0$, тогда получим

$$[\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)]w = 0,$$

откуда в силу обратимости оператора $\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}(u)$ приходим к выводу, что $w = 0$ в классе $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. С другой стороны, операторы $\mathbb{A}_0^{-1}$ и $\mathbb{B}(u)$ являются ограниченными в соответствующих пространствах. Поэтому оператор $\widehat{\mathbb{C}} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ линеен и ограничен, значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении приходим к выводу, что оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ ограниченный. Тем самым из (2.15) получим

$$u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v'. \tag{2.17}$$

Нам осталось доказать, что $u' = \widehat{\mathbb{C}}^{-1}\mathbb{A}_0^{-1}v' \in \mathbb{C}\big([0, T_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}\big([0, T_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|u'(t) - u'(t_0)\|_{+1} &\le \big\|\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)\mathbb{A}_0^{-1}[v'(t) - v'(t_0)]\big\|_{+1} \\ &\quad + \big\|(\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t))\mathbb{A}_0^{-1}v'(t_0)\big\|_{+1} \\ &\le C\|v'(t) - v'(t_0)\|_{-1} + C\|\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}\big([0, T_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$ оператор $\widehat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит, в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}$ линейный непрерывный и ввиду линейности ограниченный. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\widehat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}) = (\lambda\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{C}})^{-1}.$$

Пусть Γ — окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]} \|\widehat{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)}.$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (0, T_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]} \|u\|_{+1} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma d\lambda\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)), \quad \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma d\lambda\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)).$$

Очевидно, имеем

$$\widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t) - \widehat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma d\lambda\lambda^{-1}[\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))].$$

Воспользуемся известным представлением

$$\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) = \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)) \sum_{n=1}^{+\infty} [(\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0)]^n$$

для резольвент операторов при условии

$$\|\widehat{\mathbb{C}}(t_0) - \widehat{\mathbb{C}}(t)\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \leq \delta < 1.$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} &\leq \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \\ &\times \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|^n_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \|\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)\|^n_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0) = \mathbb{A}_0^{-1} \left[\mathbb{B}_u(t) - \mathbb{B}_u(t_0)\right].$$

Из непрерывности производных Фреше $\mathbb{B}_u$ по $u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и уже доказанных утверждений следует, что $u \in \mathbb{C}\big([0, T_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$. Значит,

$$\|\widehat{\mathbb{C}}(t) - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \|\mathbb{B}_u(t) - \mathbb{B}_u(t_0)\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^{-1}(\Omega)} \to +0,$$

$$\|\mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t)) - \mathbb{R}(\lambda, \widehat{\mathbb{C}}(t_0))\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \to 0,$$

$$\|\widehat{\mathbb{C}}(t)^{-1} - \widehat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1}\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)\to\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \to +0$$

при $t \to t_0$.

Итак, $u \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0, T_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$.

Теорема доказана.

3. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (1.1)

В предыдущем разделе мы доказали локальную во времени разрешимость задачи (1.1) в сильном обобщенном смысле $u \in \mathbb{C}^{(1)}\big([0, T_0); \mathbb{H}^1_0(\Omega)\big)$. Здесь мы докажем, что при некоторых достаточных условиях на параметры задачи будет $T_0 < +\infty$ и тем самым выполнено следующее предельное равенство:

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|\nabla u\|_2 = +\infty. \tag{3.1}$$

Пусть

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\|u\|_{q+2}^{q+2}, \quad \Phi_0 = \Phi(0).$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при условиях* $q \in (0, 2)$,

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1}\Phi(0), \quad \Phi'(0) > \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha - 1}}\Phi(0)$$

имеет место соотношение $T_0 \in [T_1, T_2]$ *и выполнено предельное равенство* (3.1), *где*

$$\alpha = \frac{6+q}{2q+4}, \quad \beta = \frac{8B^4}{2-q}, \quad \gamma = \frac{16}{2-q}[3 + B^4],$$

$$\Phi'(0) = \|\nabla u_0\|_2^4 - \|\nabla u_0\|_2^2, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\|u_0\|_{q+2}^{q+2},$$

$$T_2 = \Phi_0^{1-\alpha}A^{-1}, \ \ T_1 = \frac{1}{4\Phi_0}, \quad \mathrm{A}^2 \equiv (1-\alpha)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma}{\alpha-1}(\Phi(0))^2\right],$$

B — наилучшая константа вложения $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$, $\|z\|_4 \le B\|\nabla z\|_2$.

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (1.1) относительно скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство

$$\frac{d\Phi}{dt} + \|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^4, \tag{3.2}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2}\|u\|_{q+2}^{q+2}. \tag{3.3}$$

Умножая на $u' \in \mathbb{C}\big([0,T_0);\mathbb{H}_0^1(\Omega)\big)$, получим второе энергетическое равенство

$$\|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1)\int_\Omega dx\,|u|^q(u')^2 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^4 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 + \int_\Omega dx\,u'u_{x_1} + \int_\Omega dx\,uu_{x_1}u'. \tag{3.4}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\int_\Omega dx(\nabla u', \nabla u)\right| \le \|\nabla u'\|_2\|\nabla u\|_2, \left|\int_\Omega dxu'u\right| \le \|u'\|_2\|u\|_2, \tag{3.5}$$

$$\left|\int_\Omega dx|u|^q uu'\right| \le \left(\int_\Omega dx|u|^q(u')^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega dx|u|^{q+2}\right)^{1/2}. \tag{3.6}$$

С учетом (3.3), (3.5) и (3.6) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}(\Phi')^2 = \bigg(\int_\Omega dx(\nabla u', \nabla u) + \int_\Omega dxu'u + (q+1)\int_\Omega dx|u|^q uu'\bigg)^2 \\ \le \|\nabla u'\|_2^2\|\nabla u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\|u\|_2^2 \\ + (q+1)\int_\Omega dx|u|^q(u')^2(q+1)\int_\Omega dx|u|^{q+2} + 2\|\nabla u'\|_2\|\nabla u\|_2\|u'\|_2\|u\|_2 \\ + 2\|\nabla u'\|_2\|\nabla u\|_2(q+1)\bigg(\int_\Omega dx|u|^q(u')^2\bigg)^{1/2}(q+1)\bigg(\int_\Omega dx|u|^{q+2}\bigg)^{1/2} \\ + 2\|u'\|_2\|u\|_2(q+1)\bigg(\int_\Omega dx|u|^q(u')^2\bigg)^{1/2}(q+1)\bigg(\int_\Omega dx|u|^{q+2}\bigg)^{1/2} \\ \bigg(\|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1)\int_\Omega dx|u|^q(u')^2\bigg)\big(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + q+1\|u\|_{q+2}^{q+2}\big) \\ \le (q+2)\bigg(\|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1)\int_\Omega dx|u|^q(u')^2\bigg)\Phi(t).\end{aligned}$$

Стало быть, имеет место неравенство

$$(\Phi')^2 \leq (q+2)\Phi\left(\|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1)\int\limits_{\Omega} dx|u|^q(u')^2\right). \tag{3.7}$$

Введем обозначение

$$J = \|\nabla u'\|_2^2 + \|u'\|_2^2 + (q+1)\int\limits_{\Omega} dx|u|^q(u')^2. \tag{3.8}$$

Теперь нам необходимо получить оценки сверху для функции $J(t)$. Из (3.2)–(3.4) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} J \leq \frac{1}{4}\left|\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right| + \frac{1}{4}\Phi'' + \left|\int\limits_{\Omega} dx u'_{x_1} u\right| + \frac{1}{2}\left|\int\limits_{\Omega} dx u^2 u'_{x_1}\right| \\ \leq \frac{\varepsilon}{4}J + \frac{1}{2\varepsilon}\Phi + \frac{1}{4}\Phi'' + \frac{1}{\varepsilon}\Phi + \frac{\varepsilon}{2}J + \frac{\varepsilon}{4}J + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_4^4, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где мы воспользовались неравенствами

$$\left|\int\limits_{\Omega} dx(\nabla u', \nabla u)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\nabla u\|_2^2, \quad \left|\int\limits_{\Omega} dx u' u\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|u\|_2^2,$$

$$\left|\int\limits_{\Omega} dx u u'_{x_1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|u\|_2^2, \quad \left|\int\limits_{\Omega} dx u^2 u'_{x_1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon 2}\|u\|_4^4, \quad \varepsilon > 0.$$

В итоге из (3.9) получим

$$[1-\varepsilon]J \leq \frac{1}{2\varepsilon}[3+B^4]\Phi + \frac{B^4}{4\varepsilon}\Phi' + \frac{1}{4}\Phi'', \tag{3.10}$$

где B — константа наилучшего вложения $\|u\|_4 \leq B\|\nabla u\|_2$. Из (3.7) и (3.10) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному неравенству второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi'\Phi + \gamma\Phi^2 \geq 0, \tag{3.11}$$

где

$$\alpha = \frac{4}{q+2}\left(1-\varepsilon\right), \quad \beta = \frac{B^4}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{2}{\varepsilon}[3+B^4], \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{2-q}{4}\right) \quad \text{при } 0 < q < 2.$$

Отметим, что при условии $q \in (0,2)$ имеем $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Данное неравенство нетрудно привести к следующему линейному дифференциальному неравенству:

$$\mathbb{Z}'' + \beta\mathbb{Z}' - \delta\mathbb{Z} \leq 0, \quad \delta = \gamma(\alpha - 1), \tag{3.12}$$

относительно новой функции

$$\mathbb{Z} = \Phi^{1-\alpha}. \tag{3.13}$$

Перейдем теперь к новой функции

$$\mathbb{Y} \equiv \mathbb{Z}e^{\beta t} \tag{3.14}$$

в уравнении (3.12), тогда получим неравенство

$$\mathbb{Y}'' - \beta\mathbb{Y}' - \delta\mathbb{Y} \leq 0. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{Y}' = e^{\beta t}(\alpha-1)\Phi^{-\alpha}\left(-\Phi' + \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi\right). \tag{3.16}$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha-1}\Phi(0). \tag{3.17}$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathbb{Y}$ из условия (3.17) с учетом (3.16) приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, T_3)$, принадлежащий области определения $\Phi(t)$, что $\mathbb{Y}' < 0$, причем если $T_3 \leq T_0$, то $\mathbb{Y}' = 0$ при $t = T_3$. Следовательно, $-\beta\mathbb{Y}'(t) > 0$ при $t \in [0, T_3)$. Отсюда и из неравенства (3.15) получим следующее дифференциальное неравенство:

$$\mathbb{Y}'' - \delta\mathbb{Y} \leq 0 \quad \forall t \in [0, T_3]. \tag{3.18}$$

Потребуем выполнения неравенства

$$\Phi'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha-1}}\Phi(0). \tag{3.19}$$

Из (3.18) вытекает неравенство

$$(\mathbb{Y}')^2 \geq \delta\mathbb{Y}^2 + \mathbb{A}^2, \tag{3.20}$$

где

$$A^2 \equiv (1-\alpha)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\delta}{(1-\alpha)^2}(\Phi(0))^2\right] > 0. \tag{3.21}$$

Из (3.20) получим

$$\mathbb{Y}'(t) \leq -A \quad \forall t \in [0, T_3]. \tag{3.22}$$

Из (3.22) следует, что $\mathbb{Y}' < 0$ на области определения функции $\Phi(t)$, а отсюда и из (3.22) имеем

$$\mathbb{Y}(t) \leq \mathbb{Y}_0 - \mathrm{A}t.$$

Стало быть, найдется такой момент времени $T_0 \in (0, T_2)$ что

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty, \tag{3.23}$$

где $T_2 = \mathbb{Y}(0)\mathrm{A}^{-1}$.

Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения задачи (1.1). Действительно, из первого энергетического равенства (3.2) вытекает цепочка неравенств

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq \|\nabla u\|_2^4 \leq 4\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 \leq 4\Phi^2. \tag{3.24}$$

Из (3.24) следует неравенство

$$\Phi \leq \frac{\Phi_0}{1 - 4\Phi_0 t},$$

из которого приходим к оценке $T_1 \leq T_0$, где $T_1 = 4^{-1}\Phi_0^{-1}$.

Теорема доказана.

4. Физическая интерпретация

Из теоремы 2 вытекает, что при достаточно большой начальной электростатической энергии в полупроводнике возникает ее лавинный рост за конечное время, т. е. в полупроводнике возникает экспериментально наблюдаемое явление пробоя. Полученное нами качественное описание пробоя вполне согласуется с наблюдаемой картиной [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 12. С. 1835–1869.

2. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. Ч. 2 // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 2041–2048.

3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.

4. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.

5. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

6. *Плетнер Ю. Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 2. С. 1885–1899.

7. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.

8. *Levine H. A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational. Mech. Anal. 1973. V. 51. P. 371–386.

9. *Levine H. A., Park S. R., Serrin J.* Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Differential Equations. 1998. V. 142, N 1. P. 212–229.

10. *Кожанов А. И.* Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.

11. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* «Разрушение» решений абстрактных задач Коши для нелинейных дифференциально-операторных уравнений // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 1. С. 1–3.

12. *Корпусов М. О.* О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 4. С. 78–131.

13. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* О разрушении решений одного класса квазилинейных волновых диссипативных уравнений псевдопараболического типа с источниками // Докл. РАН. 2005 (в печати).

14. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных. Тр. МИАН. 2001. С. 1–383.

15. *Шишмарев И. А.* Об одном нелинейном уравнении типа Соболева // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 138–140.

16. *Karch G.* Asymptotic behavior of solutions to some pseudoparabolic equations // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 3. P. 271–189.

17. *Goldstein J. A., Kajikiya R., Oharu S.* On some nonlinear dispersive equations in several space variables // Differential Integral Equations. 1990. V. 3, N 4. P. 617–632.

18. *Zhang L.* Decay of solution of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations in n-space dimensions // Nonlinear Anal. 1995. V. 25, N 12. P. 1343–1369.

19. *Naumkin P. I.* Large-time asymptotic behaviour of a step for the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1996. V. 126, N 1. P. 1–18.

20. *Avrin J., Goldstein J. A.* Global existence for the Benjamin–Bona–Mahony equation in arbitrary dimensions // Nonlinear Anal. 1985. V. 9, N 8. P. 861–865.

21. *Albert J. P.* On the decay of solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 141, N 2. P. 527–537.

22. *Lee H. Y., Ohm M. R., Shin J. Y.* The convergence of fully discrete Galerkin approximations of the Rosenau equation // Korean J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 6, N 1. P. 1–13.

23. *Mei M.* Long-time behavior of solution for Rosenau–Burgers equation. II // J. Appl. Anal. 1998. V. 68, N 3–4. P. 333–356.

24. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.

25. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.

Статья поступила 29 октября 2004 г.

Корпусов Максим Олегович, Свешников Алексей Георгиевич
Московский гос. университет, физический факультет, кафедра математики
Воробьевы горы, Москва 119899
korpusov@rsci.ru, agsveshn@math380b.phys.msu.su