М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О "разрушении" за конечное время решений начально-краевых задач для уравнений псевдопараболического типа с псевдолапласианом, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2005, том 45, номер 2, 272–286

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2005, том 45, № 2, с. 272–286

УДК 519.633.8

О "РАЗРУШЕНИИ" ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПСЕВДОЛАПЛАСИАНОМ[1)]

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. фак-т)
e-mail: korpusov@rsci.ru; agsveshn@math380b.phys.msu.su

Поступила в редакцию 26.02.2004 г.

Рассматриваются начально-краевые задачи для уравнений псевдопараболического типа с псевдолапласианом. Для рассматриваемых задач доказана локальная и глобальная однозначная разрешимость в "ослабленном" смысле. Причем получены достаточные условия разрушения решений за конечное время. Для некоторых задач получены оценки сверху на время разрушения решений. Приведена физическая интерпретация полученных результатов. Библ. 25.

Ключевые слова: начально-краевая задача для псевдопараболических уравнений, разрушение решения за некоторое время.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Целью настоящего исследования является получение достаточных условий "разрушения" решений следующих первых начально-краевых задач:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = \Delta_p u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad p \ge 3, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \Delta u = \Delta_p u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad p \ge 3, \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) = \Delta_p u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad p \ge 3, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + uu_{x_1} = \Delta_4 u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + uu_{x_1} = \Delta_4 u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega, \tag{1.5}$$

где поверхностно-односвязная ограниченная область $\Omega \in \mathbb{R}^N$ имеет гладкую границу класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, $x \in \Omega$, $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 2$.

Заметим, что при $p = 2$ задачи (1.1)–(1.3) оказываются линейными. Все указанные задачи имеют физический смысл. Причем вывод уравнений (1.1)–(1.5) приведен в [1]. Все рассматриваемые задачи описывают квазистационарные процессы в полупроводниках в том важном для технических приложений случае, когда полупроводниковая среда обладает отрицательной дифференциальной проводимостью [2]. Большинство генераторов электромагнитной энергии на основе полупроводников используют эффект отрицательности дифференциальной проводимости. Поэтому теоретическое обоснование условий наиболее эффективной генерации электромагнитной энергии чрезвычайно важно. Насколько нам известно, наши теоретические результаты, полученные в [1] и в настоящей работе, являются первыми в рамках модели "квазистационарного" поля.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00253, 02-01-06038) и гранта от проекта "Молодые ученые России".

Ниже будет доказано, что "ослабленные" решения задач (1.1) и (1.3) разрушаются за конечное время, и получена оценка сверху на время разрушения ослабленного решения. В случае задач (1.2), (1.4), (1.5) докажем глобальную во времени разрешимость в ослабленном смысле и разрушение за конечное время для достаточно большого в некотором смысле начального распределения $u_0(x)$.

Приведем краткий обзор результатов по исследованию псевдопараболических уравнений и вопросов разрушения решений уравнений математической физики.

В последнее время в математической физике повысился интерес к сильно нелинейным уравнениям типа Соболева третьего порядка с производной во времени первого порядка. В этой связи отметим работу авторов [1]. Кроме того, математическому моделированию нестационарных процессов в сплошных средах, приводящему к разнообразным уравнениям типа Соболева, посвящены работы [3]–[11]. С другой стороны, исследованию уравнений типа Соболева посвящено большое колличество работ. При этом существует определенное разделение интересов различных исследователей: одни занимаются волновыми уравнениями типа Соболева, другие занимаются диссипативными уравнениями типа Соболева.

Вопрос о разрушении за конечное время решений уравнений псевдопараболического типа рассматривался в [12]. Условия глобальной во времени разрешимости близких начально-краевых задач изучались в [13], [14]. Отметим, что в [14] были получены оптимальные двусторонние оценки на скорость разрушения рассматриваемой абстрактной задачи Коши для класса нелинейных псевдопараболических уравнений.

Однозначная разрешимость абстрактной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами изучалась в [15], [16]. Разрушение за конечное время и существование глобального во времени ограниченного решения нелинейного уравнения Буссинеска с источником

$$u_t - \Delta\psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0$$

исследовались в [17]. В [1] были предложены физические модели, приводящие к нелинейным уравнениям псевдопараболического типа. В [18], [19] рассмотрены начально-краевые задачи псевдопараболического типа и изучены вопросы о существовании глобальных во времени решений и разрушения решений за конечное время. Наконец, в [20] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа

$$u_t = c\Delta u_t + \varphi(u).$$

Отметим, что при исследовании задач для уравнений псевдопараболического типа широко используется методика, развитая для нелинейных уравнений параболического типа. В этой связи отметим [21] (см. также библиографию к этой работе).

Широкий спектр результатов об "опрокидывании" решений волновых уравнений типа Уизема получен в [6], [22]. Одни из первых результатов по получению достаточных условий опрокидывания решений волновых уравнений типа Уизема см. в [23], [24].

2. РАЗРУШЕНИЕ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ ОСЛАБЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1)

Докажем однозначную локальную во времени разрешимость и разрушение за конечное время ослабленного решения задачи (1.1). При этом получим оценку сверху на время разрушения решения данной задачи.

Введем некоторые определения.

Определение 1. *Ослабленным* решением задачи (1.1) назовем решение задачи (1.1) класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$.

Определение 2. *Сильным* обобщенным решением задачи (1.1) назовем решение задачи (1.1) класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$.

Проведем редукцию задачи (1.1), решение которой понимается в сильном обобщенном смысле. Заметим, что оператор $-\Delta : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ является непрерывным ограниченным оператором с липшиц-непрерывным обратным $(-\Delta)^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Введем обозначение

$$v \equiv -\Delta u \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Тогда

$$u = (-\Delta)^{-1}v, \quad \nabla u = \nabla(-\Delta)^{-1}v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$$

и задача (1.1) в сильном обобщенном смысле эквивалентна следующей:

$$\partial v/\partial t = (p-1)v\left|\nabla(-\Delta)^{-1}v\right|^{p-2}, \quad v(0) = v_0 = -\Delta u_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \tag{2.1}$$

при условии $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Пусть теперь $v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T] \times \overline{\Omega})$. Тогда сужение области определения оператора $(-\Delta)^{-1}$ на множество $\mathbb{C}(\overline{\Omega})$ совпадает с интегральным оператором

$$\mathbb{G}\bullet \equiv \int_{\Omega} dy \mathrm{G}(x, y)\bullet,$$

где $\mathrm{G}(x, y)$ – функция Грина оператора Лапласа первой краевой задачи в Ω. Значит, в классе $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ задача (2.1) эквивалентна следующей:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (p-1)v\left|\int_{\Omega} dy \nabla_x G(x, y)v(y, t)\right|^{p-2}, \quad p \geq 3, \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}), \tag{2.2}$$

при условии, что найдется такое $v_0 \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, что

$$u_0 = \int_{\Omega} dy \mathrm{G}(x, y)v_0(y). \tag{2.3}$$

Справедлива

Теорема 1. *Для любого u_0, удовлетворяющего условию* (2.3) *при некотором $v_0 \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, существует единственное максимальное решение задачи* (2.2) *класса $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$, $T \in (0, T_0)$. Причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup_{x \in \Omega} |v(x, t)| = +\infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. В классе $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ задача (2.2) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x, t) = v_0(x) + (p-1)\int_0^t ds\, v(x, s)\left|\int_{\Omega} dy \nabla_x G(x, y)v(y, s)\right|^{p-2}, \quad p \geq 3. \tag{2.5}$$

Введем банахово пространство

$$\mathbb{B} \equiv \{v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T] \times \overline{\Omega}) : \|v\|_T \equiv \sup_{(x, t) \in [0, T] \times \Omega} |v(x, t)|\},$$

а также замкнутое выпуклое ограниченное подмножество $\mathbb{B}_R$ банахова пространства $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B}_R \equiv \{v \in \mathbb{B} : \|v\|_T \leq R\}.$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$\mathbb{U}(v) \equiv v_0 + (p-1)\int_0^t ds\, v(x, s)\left|\int_{\Omega} dy \nabla_x \mathrm{G}(x, y)v(y, s)\right|^{p-2}, \quad p \geq 3. \tag{2.6}$$

Докажем, что интегральный оператор (2.6) действует из $\mathbb{B}_R$ в $\mathbb{B}_R$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_R$. Действительно,

$$\|\mathbb{U}(v)\|_T \le \|v_0\|_T + (p-1)TC_1\|v\|_T^{p-1},$$

$$C_1 \equiv \sup_{x \in \Omega}\left|\int_\Omega dy|\nabla_x G(x, y)|\right|^{p-2}, \quad p \ge 3.$$

Поэтому при $\|v_0\|_T \le R/2$ и $T \le 1/[2(p-1)C_1R^{p-2}]$ получим

$$\|\mathbb{U}(v)\|_T \le R.$$

Докажем теперь, что оператор $\mathbb{U}$ сжимающий на $\mathbb{B}_R$. Действительно,

$$\|\mathbb{U}(v_1) - \mathbb{U}(v_2)\|_T \le (p-1)TC_1R^{p-2}\|v_1 - v_2\|_T + (p-1)(p-2)TC_2R^{p-2}\|v_1 - v_2\|_T, \quad p \ge 3,$$

$$C_2 \equiv \sup_{x \in \Omega}\left|\int_\Omega dy|\nabla_x G(x, y)|\right|^{p-3}, \quad p \ge 3.$$

Стало быть, найдется такое T

$$0 < T < \frac{1}{2[(p-1)C_1R^{p-2} + (p-1)(p-2)TC_2R^{p-2}]}, \quad p \ge 3,$$

при достаточно большом $R > 0$, что оператор $\mathbb{U}$ является сжимающим на $\mathbb{B}_R$. Таким образом, при достаточно малом $T > 0$ существует единственное решение интегрального уравнения (2.5) в классе $\mathbb{C}([0, T] \times \overline{\Omega})$. Из вида интегрального уравнения (2.5) следует, что

$$v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$$

при условии $v_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. С другой стороны,

$$u(x, t) = \int_\Omega dy \mathrm{G}(x, y)v(y, t).$$

Поэтому из свойств интегралов типа потенциалов (см. [25]) вытекает, что

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Теперь, используя стандартный алгоритм продолжения во времени решения интегрального уравнения (2.5), получаем существование такого максимального $T_0 > 0$, что

$$v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T] \times \overline{\Omega}) \quad \forall T \in (0, T_0).$$

Причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и тогда выполнено предельное равенство (2.4). А значит, $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$ для любого $T \in (0, T_0)$. Теорема доказана.

Докажем теперь, что для любых $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ сильное обобщенное решение (а значит, и ослабленное) разрушается за конечное время.

Справедлива

Теорема 2. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *локально существующее сильное обобщенное решение класса* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ *разрушается за конечное время* $T_{00} \in (0, T_1]$:

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup_{x \in \Omega}|\nabla_x u(x, t)| = +\infty.$$

Причем

$$T_1 = \frac{1}{p-2}\frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_p^p}.$$

Кроме того, $T_0 \in (0, T_{00}]$, *где* T_0 *– время существования ослабленного решения задачи* (1.1).

Доказательство. Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ – сильное обобщенное решение задачи (1.1). Отметим, что оно действительно локально существует в силу результата теоремы 1. Умножим обе части уравнения (1.1) скалярно относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = p(p-1)^{-1}$, на $u(x, t)$ и на $u'(x, t)$; тогда после интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla u\|_p^p, \tag{2.7}$$

$$\|\nabla u'\|_2^2 = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_p^p. \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) и неравенства Коши–Шварца получим обыкновенное дифференциальное неравенство первого порядка для функции $\Phi(t) \equiv \|\nabla u\|_2^2(t)$:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 \ge 0, \quad \alpha = p/2, \quad p \ge 3. \tag{2.9}$$

Интегрируя (2.9), получаем

$$\Phi(t) \ge \frac{1}{[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)E_0 t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad E_0 \equiv \frac{2\|\nabla u_0\|_p^p}{\|\nabla u_0\|_2^p}. \tag{2.10}$$

Из (2.10) вытекает утверждение теоремы. С другой стороны, поскольку ослабленное решение задачи (1.1) является сильным обобщенным, то, стало быть, время существования ослабленного решения не больше времени существования сильного обобщенного. Теорема доказана.

3. РАЗРУШЕНИЕ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ ВО ВРЕМЕНИ РАЗРЕШИМОСТЬ ОСЛАБЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.2)

Ниже получено достаточное условие разрушения ослабленного решения задачи (1.2) и достаточное условие его глобальной во времени разрешимости.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть для данного* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ *найдется такое* v_0, *что*

$$u_0(x) = \int_\Omega dy \mathrm{G}(x, y) v_0(y),$$

где $\mathrm{G}(x, y)$ *– функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\Delta$, *причем предположим, что при достаточно малом* $\delta > 0$ *имеет место неравенство*

$$\|v_0(x)\| \equiv \sup_{x \in \Omega}|v_0| \le \delta.$$

Тогда при достаточно малом $\delta > 0$ *существует единственное ослабленное решение задачи* (1.2) *класса*

$$u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega})).$$

Доказательство. Как и в разд. 2, можно доказать, что в классе ослабленных решений задачи (1.2) она эквивалентна следующей задаче Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = (p-1)v\left|\int_\Omega \nabla_x \mathrm{G}(x, y) v(y, t)\right|^{p-2}, \quad v(x, 0) = v_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}), \quad p \ge 3. \tag{3.1}$$

Причем

$$u(x, t) = \int_{\Omega} dy \mathrm{G}(x, y) v(y, t).$$

Задача (3.1), в свою очередь, эквивалентна в рассматриваемом классе интегральному уравнению

$$v(x, t) = v_0 e^{-t} + (p-1)\int_0^t ds e^{-s} v(x, t-s)\left|\int_{\Omega} dy \nabla_x \mathrm{G}(x, y) v(y, t-s)\right|^{p-2}, \quad p \geq 3. \tag{3.2}$$

Рассмотрим следующее банахово пространство:

$$\mathbb{B} \equiv \{ v(x, t) \in \mathbb{C}([0, +\infty] \times \overline{\Omega}) : \|v\| \equiv \sup_{x \in \overline{\Omega}, t \geq 0} |v(x, t)| < +\infty \}.$$

Для доказательства глобальной во времени разрешимости задачи (3.2) воспользуемся методом последовательных приближений. С этой целью рассмотрим следующую итерационную схему:

$$v_{n+1} = v_0 e^{-t} + \mathbb{U}(v_n), \quad v_1 = v_0 e^{-t}, \tag{3.3}$$

где

$$\mathbb{U}(v) = (p-1)\int_0^t ds e^{-s} v(x, t-s)\left|\int_{\Omega} dy \nabla_x \mathrm{G}(x, y) v(y, t-s)\right|^{p-2}, \quad p \geq 3. \tag{3.4}$$

Совершенно понятно, что $\mathbb{U}$ действует из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}$. Кроме того, справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbb{U}(v)\| \leq (p-1) C_1 \|v\|^{p-1}, \quad C_1 \equiv \sup_{x \in \Omega}\left|\int_{\Omega} dy |\nabla_x \mathrm{G}(x, y)|\right|^{p-2}. \tag{3.5}$$

Пусть w_1 и w_2 – элементы пространства $\mathbb{B}$ и, кроме того, $\|w_i\| \leq M$, тогда

$$\|\mathbb{U}(v_1) - \mathbb{U}(v_2)\| \leq [(p-1) C_1 M^{p-2} + (p-1)(p-2) C_2 M^{p-2}]\|v_1 - v_2\|,$$
$$C_2 \equiv \sup_{x \in \Omega}\left|\int_{\Omega} dy |\nabla_x \mathrm{G}(x, y)|\right|^{p-3}, \quad p \geq 3. \tag{3.6}$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает, что

$$\|v_{n+1}\| \leq \|v_0\| + (p-1) C_1 \|v_n\|^{p-1}. \tag{3.7}$$

При условии, что $\|v_0\| \leq \delta$, получим из (3.7) при достаточно малом $\delta > 0$ следующее: найдется такое $M(\delta)$, что

$$\|v_n\| \leq M(\delta),$$

причем $M(\delta) \longrightarrow 0$ при $\delta \longrightarrow 0$. Тогда из (3.6) при достаточно малом $\delta > 0$ вытекает, что

$$\|\mathbb{U}(v_1) - \mathbb{U}(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2\|/2.$$

Значит, последовательность $\{v_n\}$ сходится к решению интегрального уравнения (3.2) класса $v(x, t) \in \mathbb{C}([0, +\infty] \times \overline{\Omega})$. А из явного вида интегрального уравнения (3.2) следует, что $v(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$. Отсюда в силу свойств интегралов типа потенциала [25] вытекает, что $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}))$. Единственность решения задачи (3.1) доказывается стандартным образом с помощью сведения к интегральному неравенству с последующим применением теоремы Гронуолла–Беллмана. Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству разрушения сильного обобщенного решения задачи (1.2).

Справедлива

Теорема 4. *При любом* $u_0(x) \in \mathbb{C}_0(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega})$ *найдется такое* $T_0 > 0$, *что существует единственное максимальное ослабленное решение задачи* (1.2) *класса* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega}))$ *для любого* $T \in (0, T_0)$, *причем при условии*

$$\|\nabla u_0\|_2^2 < \frac{p-2}{p}\|\nabla u_0\|_p^p, \quad p \geq 3, \tag{3.8}$$

справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla_x u(x, t)| = +\infty$$

и справедлива оценка сверху $T_0 \in (0, T_2]$, *где*

$$T_2 = -\frac{1}{p}\ln\left(1 - \frac{p}{p-2}\frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_p^p}\right). \tag{3.9}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, методом сжимающих отображений нетрудно доказать, что при любом $u_0 \in \mathbb{C}_0(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega})$ при условии истокообразной представимости $u_0(x)$

$$u_0(x) = \int_{\Omega} dy G(x, y) v_0(y), \quad v_0(x) \in \mathbb{C}(\bar{\Omega}),$$

найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что существует единственное максимальное ослабленное решение задачи (1.2) класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega}))$ для любого $T \in (0, T_0)$.

Докажем, что любое локально во времени существующее сильное обобщенное решение задачи (1.2) разрушается за конечное время. Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ $\forall T \in (0, T_0)$ – максимальное сильное обобщенное решение задачи (1.2), которое действительно существует в силу первой части теоремы. Тогда, умножив обе части уравнения (1.2) скалярно на $u(x, t)$ и на $u'(x, t)$ относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, получим следующие равенства для функции $w(x, t) = \exp(t)u(x, t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|_2^2 = \exp(-pt)\|\nabla w\|_p^p, \tag{3.10}$$

$$\|\nabla w'\|_2^2 = \exp(-pt)\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|_p^p. \tag{3.11}$$

Введем функцию $\Phi(t) \equiv \|\nabla w\|_2^2$, для которой из (3.10) и (3.11), а также из неравенства Коши–Шварца вытекает обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\frac{1}{4}(\Phi')^2 \leq \Phi\exp(-pt)\frac{1}{2p}\frac{d}{dt}\left(\exp(pt)\frac{d}{dt}\Phi\right).$$

Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\Phi\Phi'' - \frac{p}{2}(\Phi')^2 + p\Phi\Phi' \geq 0, \quad p \geq 3. \tag{3.12}$$

Введем обозначение

$$\Gamma(t) \equiv \Phi'/\Phi^{\alpha}, \quad \alpha \equiv p/2.$$

С учетом данного обозначения из (3.12) получим

$$\Gamma' + p\Gamma \geq 0, \quad \Gamma(t) \geq \Gamma(0)e^{-pt}, \quad \Gamma(0) \equiv \frac{2\|\nabla u_0\|_p^p}{\|\nabla u_0\|_2^p}. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует

$$\Phi(t) \geq \left\{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha - 1)\frac{1}{p}\Gamma(0)[1 - e^{-pt}]\right]^{1/(\alpha - 1)}\right\}^{-1}, \quad \alpha = p/2. \tag{3.14}$$

Потребуем теперь выполнения условия

$$\Phi_0^{1-\alpha} < \frac{\alpha - 1}{p}\Gamma(0);$$

тогда из (3.14) вытекает, что сильное обобщенное решение разрушается за конечное время T_{00}, для которого справедлива оценка сверху $T_{00} \in (0, T_2]$, где для времени T_2 справедливо равенство (3.9). Тем самым доказано разрушение за конечное время сильного обобщенного решения задачи (1.2). Стало быть, разрушается и ослабленное решение задачи (1.2). Теорема доказана.

4. РАЗРУШЕНИЕ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ ОСЛАБЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.3)

Докажем, что существует максимальное единственное ослабленное решение задачи (1.3), которое разрушается за конечное время для любых начальных функций $u_0(x)$ из некоторого класса.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Справедлива

Теорема 5. *Для любого* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, 1]) \cap \mathbb{C}_0([0, 1])$ *найдется такое максимальное* $T_0 > 0$, *что существует единственное максимальное ослабленное решение задачи* (1.3) *класса* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0([0, 1]) \cap \mathbb{C}^{(1)}([0, 1]))$ *для любого* $T \in (0, T_0)$ *причем* $T_0 < +\infty$ *и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup_{x \in (0, 1)} |u_x(x, t)| = +\infty; \tag{4.1}$$

оценка сверху на время разрушения решения имеет вид

$$T_0 \in (0, T_2], \quad T_2 = \frac{1}{p-2}\frac{\|u_{0x}\|_2^2 + \|u_0\|_2^2}{\|u_{0x}\|_p^p}.$$

Доказательство. Так же как в разд. 2, можно доказать, что в ослабленном смысле задача (1.3) редуцируется к интегродифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\int_0^1 dy G_y(x, y)|u_y|^{p-2}u_y, \tag{4.2}$$

где

$$G(x, y) \equiv \frac{1}{\operatorname{sh}1}\begin{Bmatrix} \operatorname{sh}(1-y)\operatorname{sh}x, & 0 \leq x \leq y \\ \operatorname{sh}y\operatorname{sh}((1-x), & y \leq x \leq 1) \end{Bmatrix}.$$

Из (4.2) вытекает следующее интегродифференциальное уравнение:

$$u_{x,t} = K_2(x)|u_x|^{p-2}u_x + \int_0^1 dy K_1(x, y)|u_y|^{p-2}u_y, \tag{4.3}$$

где

$$K_1(x, y) \equiv \frac{1}{\operatorname{sh}1}\begin{Bmatrix} \operatorname{ch}y\operatorname{ch}((1-x) & 0 \leq y \leq x) \\ \operatorname{ch}(1-y)\operatorname{ch}(x & x \leq y \leq 1) \end{Bmatrix},$$

$$K_2(x) \equiv -\frac{1}{\operatorname{sh}1}[\operatorname{ch}(1-x)\operatorname{sh}x + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}(1-x)].$$

Введем обозначение $v \equiv u_x$. Тогда из (4.3) вытекает следующее интегральное уравнение:

$$v = v_0 + \mathbb{U}_1(v) + \mathbb{U}_2(v), \tag{4.4}$$

где

$$\mathbb{U}_1(v) \equiv \int_0^t ds K_2(x)|v|^{p-2}v, \quad \mathbb{U}_2(v) \equiv \int_0^t ds \int_0^1 dy K_1(x, y)|v|^{p-2}v. \tag{4.5}$$

Введем банахово пространство

$$\mathbb{B} \equiv \{ v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T] \times [0, 1]) : \|v\|_T \equiv \sup_{(x, t) \in Q_T} |v(x, t)| \}, \quad Q_T \equiv (0, T) \times (0, 1).$$

Для доказательства локальной во времени разрешимости интегрального уравнения (4.4) воспользуемся методом сжимающих отображений.

Нетрудно доказать, что в силу явного вида функций $K_1(x, y)$ и $K_2(x)$ вытекает, что операторы, определенные формулой (4.5), действуют из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}$. Введем теперь замкнутое выпуклое ограниченное подмножество пространства $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B}_R \equiv \{ v \in \mathbb{B} : \|v\|_T \le R \}.$$

Докажем теперь, что операторы, определенные формулой (4.5), действуют из $\mathbb{B}_R$ в $\mathbb{B}_R$ и являются сжимающими на $\mathbb{B}_R$ при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом $R > 0$. Действительно,

$$\|\mathbb{U}_1(v)\|_T \le TC_1\|v\|_T^{p-1}, \quad C_1 \equiv \sup_{x \in (0, 1)} |K_2(x)|,$$

$$\|\mathbb{U}_2(v)\|_T \le TC_2\|v\|_T^{p-1}, \quad C_2 \equiv \sup_{x \in (0, 1)} \int_\Omega dy |K_1(x, y)|.$$

Отсюда вытекает, что при

$$0 < T \le \frac{1}{2}\min\{C_1^{-1}, C_2^{-1}\}\frac{1}{p-1}\frac{1}{R^{p-2}}, \quad R \equiv \|v\|_T,$$

операторы $\mathbb{U}_i$ действуют из $\mathbb{B}_R$ в $\mathbb{B}_R$. Докажем теперь, что операторы $\mathbb{U}_i$ являются сжимающими на $\mathbb{B}_R$. Действительно, справедливы следующие оценки:

$$\|\mathbb{U}_i(v_1) - \mathbb{U}_i(v_2)\|_T \le C_i T(p-1)R^{p-2}\|v_1 - v_2\|_T;$$

поэтому при условии

$$0 < T \le \frac{1}{2}\min\{C_1, C_2\}\frac{1}{p-1}\frac{1}{R^{p-2}}, \quad p > 2,$$

операторы $\mathbb{U}_i$ являются сжимающими на $\mathbb{B}_R$. Отсюда сразу же получаем, что при $v_0 \in \mathbb{B}_R$ при достаточно большом $R > 0$ и малом $T > 0$ существует единственное максимальное решение интегрального уравнения (4.4) класса $v(x, t) \in \mathbb{C}([0, T] \times \overline{\Omega})$ для любого $T \in (0, T_0)$. Причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и тогда

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup_{x \in \Omega} |v(x, t)| = +\infty.$$

Из явного вида интегрального уравнения следует, что $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}([0, 1]))$ для любого

$T \in (0, T_0)$. Кроме того, в силу определения $v(x, t) = u_x(x, t)$ и условий $u(0, t) = u(1, t) = 0$ имеем, что

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_0^x dy\, v(y,t), \\ \int\limits_x^1 dy\, v(y,t), \end{cases}$$

а значит, существует единственное максимальное решение задачи (1.3) класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0([0, 1]) \cap \mathbb{C}^{(1)}([0, 1]))$ для любого $T \in (0, T_0)$. Причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и тогда выполнено предельное равенство (4.1).

Докажем теперь, что $T_0 < +\infty$.

С этой целью предположим, что $u(x, t)$ – максимальное сильное обобщенное решение задачи (1.3) класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(0, 1))$, которое действительно существует в силу первого результата теоремы. Умножим скалярно обе части уравнения (1.3) на u и на u' относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(0, 1)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(0, 1)$. Тогда получим следующие энергетические равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u_x\|_2^2 + \|u\|_2^2] = \|u_x\|_p^p, \tag{4.6}$$

$$\|u'_{x,t}\|_2^2 + \|u'_t\|_2^2 = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_x\|_p^p. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) и неравенства Коши–Шварца получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка для функции $\Phi(t) \equiv \|u_x\|_2^2 + \|u\|_2^2$:

$$\Phi\Phi'' - \frac{p}{2}(\Phi')^2 \ge 0. \tag{4.8}$$

Интегрируя (4.8), получаем

$$\Phi(t) \ge \{[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha-1)E_0 t]^{1/(\alpha-1)}\}^{-1}, \quad E_0 \equiv \frac{2\|\nabla u_0\|_p^p}{\|\nabla u_0\|_2^p}. \tag{4.9}$$

Из (4.9) вытекает утверждение теоремы. С другой стороны, поскольку ослабленное решение задачи (1.1) является сильным обобщенным, то и время существования ослабленного решения не больше времени существования сильного обобщенного. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь многомерный случай.

Теорема 6. *Для любого истокообразного представления* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}_0(\bar{\Omega})$

$$u_0(x) = \int\limits_\Omega dy\,\Gamma(x,y)v_0(y), \quad v_0 \in \mathbb{C}(\bar{\Omega}),$$

найдется такое максимальное $T_0 > 0$, *что существует единственное максимальное ослабленное решение задачи* (1.3) *класса* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega}))$ *для любого* $T \in (0, T_0)$, *причем* $T_0 < +\infty$ *и справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t\uparrow T_0}\sup_{x\in\Omega}|\nabla_x u(x,t)| = +\infty \tag{4.10}$$

и оценка сверху на время разрушения решения

$$T_0 \in (0, T_2], \quad T_2 = \frac{1}{p-2}\frac{\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_p^p}, \quad p \geq 3, \tag{4.11}$$

где $\Gamma(x, y)$ – *функция Грина первой краевой задачи для оператора* $-\Delta + I$ *в области* $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $p \geq 3$.

Доказательство. Проведем редукцию задачи (1.3) к эквивалентному в ослабленном смысле интегральному уравнению. Как и в разд. 1, можно показать, что в сильном обобщенном смысле задача (1.3) эквивалентна следующей задаче Коши для некоторого интегродифференциального уравнения. Перепишем уравнение (1.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta u + u) = (p-1)[-\Delta u + u]|\nabla u|^{p-2} - (p-1)u|\nabla u|^{p-2}. \tag{4.12}$$

Поскольку оператор $\mathbb{A} \equiv -\Delta + I$ действует из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, причем существует обратный липшиц-непрерывный оператор $\mathbb{A}^{-1}$, который действует из $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то в сильном обобщенном смысле уравнение (4.12) эквивалентно следующему операторно-дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (p-1)v\left|\nabla \mathbb{A}^{-1}v\right|^{p-2} - (p-1)\mathbb{A}^{-1}v(y, t)\left|\nabla \mathbb{A}^{-1}v\right|^{p-2}. \tag{4.13}$$

Теперь заметим, что сужение оператора $\mathbb{A}^{-1}$ на класс $v \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ совпадает с интегральным оператором с ядром вида функции Грина $\Gamma(x, y)$ первой краевой задачи для оператора $-\Delta + I$:

$$\mathbb{A}^{-1}v \equiv \int_\Omega dy \Gamma(x, y)v. \tag{4.14}$$

Теперь перепишем уравнение (4.13) с учетом (4.14):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (p-1)v\left|\int_\Omega dy \nabla_x \Gamma(x, y)v\right|^{p-2} - (p-1)\int_\Omega dy \Gamma(x, y)v(y, t)\left|\int_\Omega dy \nabla_x \Gamma(x, y)v\right|^{p-2}, \quad p \geq 3; \tag{4.15}$$

оно дополняется начальным условием и уравнением, связывающим функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$:

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad u(x, t) = \int_\Omega dy \Gamma(x, y)v(y, t). \tag{4.16}$$

Тем самым показано, что в ослабленном смысле задачи (1.3) и (4.15), (4.16) эквивалентны. Заметим, что интегродифференциальное уравнение (4.15) близко по своей структуре к интегродифференциальному уравнению (2.5). И, почти в точности повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, получаем, что существует единственное максимальное решение задачи (4.15), (4.16) класса $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ для любого $T \in (0, T_0)$. Причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и тогда справедливо предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \sup_{x \in \Omega}|v(x, t)| = +\infty. \tag{4.17}$$

Тем самым первая часть теоремы доказана.

Вторая часть теоремы доказывается точно так же, как и вторая часть теоремы 5. Теорема доказана.

5. ОПРОКИДЫВАНИЕ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ ОСЛАБЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ (1.4) И (1.5)

Докажем, что задача (1.4) однозначно разрешима в ослабленном смысле и ослабленное решение опрокидывается за конечное время.

Справедлива

Теорема 7. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$, *истокообразно представимого через* $v_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *такого, что*

$$u_0(x) = \int_\Omega dy \mathrm{G}(x, y) v_0(y),$$

существует единственное максимальное ослабленное решение задачи (1.4) *класса* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ *для любого* $T \in (0, T_0)$, *причем если*

$$\|\nabla u_0\|_2^2 < C_1^4(\Omega)\|\nabla u_0\|_4^4, \tag{5.1}$$

то справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup_{x \in \Omega} |\nabla_x u| = +\infty, \tag{5.2}$$

оценка сверху $T_0 \in (0, T_1]$, *где*

$$T_1 = -\frac{1}{C_1^4} \ln\left(1 - C_1^4 \frac{\|\nabla u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_4^4}\right),$$

C_1 – *наилучшая константа вложения* $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ *в* $\mathbb{L}^4(\Omega)$.

Доказательство. Как и в разд. 1, можно доказать, что в ослабленном смысле задача (1.4) эквивалентна следующей задаче Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 3v(x, t)\left|\int_\Omega dy \nabla_x \mathrm{G}(x, y) v(y, t)\right|^2 + \int_\Omega dy G_{x_1}(x, y) v(y, t) \int_\Omega dy \mathrm{G}(x, y) v(y, t), \tag{5.3}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad u(x, t) = \int_\Omega dy \mathrm{G}(x, y) v(y, t). \tag{5.4}$$

Отметим, что задача (5.3) близка к уже рассмотренной задаче (2.2). Используя метод сжимающих отображений, как и в случае задачи (2.2), можно доказать, что существует единственное максимальное решение задачи (5.3) в классе $v(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\overline{\Omega}))$ для любого $T \in (0, T_{00})$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и тогда справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_{00}} \sup_{x \in \Omega} |v(x, t)| = +\infty. \tag{5.5}$$

Тогда из (5.4) получим, что существует максимальное $T_0 > 0$ такое, что существует единственное максимальное ослабленное решение задачи (1.4) класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}))$ для любого $T \in (0, T_0)$. Причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и тогда выполнено предельное равенство (5.2).

Теперь докажем, что при условии (5.1) ослабленное решение задачи (1.4) разрушается за конечное время.

Пусть $u(x, t)$ – локально существующее сильное обобщенное решение задачи (1.4) класса $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega))$. Умножим скалярно уравнение (1.4) на u и на u' относительно скобок двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega)$. Тогда после интегрирования по частям получим следующие энергетические равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 = \|\nabla u\|_4^4, \tag{5.6}$$

$$\|\nabla u'\|_2^2 = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_4^4 - \frac{1}{2}\int_\Omega dy u^2 u'_{x_1 t}. \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) вытекает цепочка неравенств

$$\|\nabla u'\|_2^2 \le \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_4^4 + \frac{\varepsilon}{4}\|\nabla u'\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|u\|_4^4 \le \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_4^4 + \frac{\varepsilon}{4}\|\nabla u'\|_2^2 + \frac{C_1^4}{4\varepsilon}\|\nabla u\|_4^4,$$
$$\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\|\nabla u'\|_2^2 \le \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_4^4 + \frac{C_1^4}{8\varepsilon}\|\nabla u\|_4^4. \tag{5.8}$$

Из (5.6)–(5.8) и неравенства Коши–Шварца для функции $\Phi(t) \equiv \|\nabla u\|_2^2$ вытекает следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\Phi\Phi'' - \alpha_1(\Phi')^2 + \beta_1\Phi\Phi' \ge 0, \tag{5.9}$$

где

$$\alpha_1 = 2\left[1-\frac{\varepsilon}{4}\right], \quad \beta_1 = \frac{C_1^4}{\varepsilon}.$$

Неравенство (5.9) имеет такой же вид, как и неравенство (3.12). Поэтому, интегрируя аналогичным образом, получаем

$$\Phi(t) \ge \left\{[\Phi_0^{1-\alpha_1} - (\alpha_1-1)\beta_1^{-1}\Gamma_0[1-\exp(-\beta_1 t)]]^{1/(\alpha_1-1)}\right\}^{-1}, \tag{5.10}$$

где $\Gamma_0 \equiv \Phi'(0)/\Phi_0^{\alpha_1}$. Потребуем теперь выполнения условия

$$\Phi_0 < \frac{\alpha_1 - 1}{\beta_1}\Phi'(0),$$

что эквивалентно условию

$$\|\nabla u_0\|_2^2 < 2\frac{\alpha_1-1}{\beta_1}\|\nabla u_0\|_4^4. \tag{5.11}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\varepsilon) \equiv \frac{2\alpha_1 - 2}{\beta_1} = \frac{1}{C_1^4}\varepsilon[2-\varepsilon],$$

максимум которой достигается в точке $\varepsilon = 1$ и в этой точке равен

$$f(1) = C_1^{-4}.$$

Значит, условие (5.11) примет вид (5.1). Рассмотрим неравенство (5.10) при $\varepsilon = 1$. В силу условия (5.11) получим, что время разрушения сильного обобщенного решения ограничено сверху временем

$$T_1 = -\frac{1}{C_1^4}\ln\left(1 - C_1^4\frac{\|u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_4^4}\right).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу (1.5). Точно так же, как теоремы 5 и 6, доказывается

Теорема 8. *Для любого* $u_0 \in \mathbb{C}_0(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega})$ *существует единственное максимальное "ослабленное" решение задачи* (1.5) *класса* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}_0(\bar{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\bar{\Omega}))$ *для любого* $T \in (0, T_0)$, *причем если*

$$\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 < C_1^4(\Omega)\|\nabla u_0\|_4^4,$$

то справедливо предельное равенство

$$\limsup_{t\uparrow T_0\, x\in\Omega}|\nabla u| = +\infty,$$

оценка сверху $T_0 \in (0, T_1]$, *где*

$$T_1 = -\frac{1}{C_1^4}\ln\left(1 - C_1^4\frac{\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2}{\|\nabla u_0\|_4^4}\right),$$

C_1 – *наилучшая константа вложения* $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ *в* $\mathbb{L}^4(\Omega)$.

6. "ФИЗИЧЕСКАЯ" ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как говорилось во Введении, задачи (1.1)–(1.5) описывают чрезвычайно важные для технических приложений эффекты, связанные с отрицательностью дифференциальной проводимости среды. При этом физически важный случай $p = 4$ отражен в результатах теорем. Таким образом, из доказанной теоремы 4 вытекает, что в случае задачи (1.2) при достаточно малом в некотором смысле начальном возмущении потенциала электрического поля решение существует глобально во времени; с другой стороны, при достаточно большом в некотором смысле начальном распределении потенциала электрического поля в полупроводнике с отрицательной проводимостью происходит лавинный рост свободных электронов, что в конечном случае приводит к пробою в полупроводнике. Этот лавинный рост концентрации свободных электронов является необходимым условием работы генераторов электромагнитной энергии. Отметим, что при наличии внешнего электрического поля области "сильного" электрического поля ("домены") двигаются в направлении, противоположном электрическому полю. И если скорость распространения электрических доменов достаточно велика, то пробой "не успевает" произойти, а если скорость достаточно мала, а начальное распределение в некотором смысле велико, то в полупроводнике произойдет пробой; эти эффекты содержатся в задаче (1.4). К сожалению, наши результаты имеют нелокальный характер. И, как мы предполагаем, основываясь на одном рассмотренном в [1] примере, реально существуют переменные области сильного и слабого электрического поля такие, что области со слабым электрическим полем будут эволюционировать, оставаясь областью со слабым электрическим полем. С другой стороны, в области с сильным электрическом полем будет происходить его увеличение, что, возможно, приведет к пробою напряженности электрического поля.

В заключение мы хотим выразить признательность Ю.Д. Плетнеру за полезное обсуждение полученных в работе результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1825–1834.
2. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г.* Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
3. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. № 18. С. 3–50.
4. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. № 5. С. 58–73.
5. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
6. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматгиз, 1998.
7. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИ АН СССР. М., 1988. Т. 179. С. 126–164.
8. *Дзекцер Е.С.* Обобщение уравнений движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202. № 5. С. 1031–1033.
9. *Свиридюк Г.А.* Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1988. № 1. С. 74–79.
10. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1967.
11. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1207–1249.
12. *Levine H. A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.

13. *Корпусов М.О.* "Разрушение" решения псевдопараболического уравнения с производной по времени от нелинейного эллиптического оператора // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 12. С. 1788–1795.

14. *Корпусов М.О.* К вопросу о разрушении за конечное время решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения $Au_t = F(u)$ // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 12. С. 1–6.

15. *Гаевский X., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

16. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.

17. *Кожанов А. И.* Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. V. 65. № 1. С. 70.

18. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения составного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 11. С. 1716–1724.

19. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 7. С. 987–1004.

20. *Гладков А.Л.* Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Матем. заметки. 1996. V. 60. № 3. С. 356.

21. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

22. *Naumkin P.I., Shishmarev I.A.* Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves // Trans. of Math. Monographs 133. Providence, R.I.: American Math. Soc., 1994.

23. *Габов С.А.* Об уравнении Уизема // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 5. С. 993–996.

24. *Габов С.А.* О свойстве разрушения уединенных волн, описываемых уравнением Уизема // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. № 6. С. 1292–1295.

25. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.