М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003, том 43, номер 7, 987–1004

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2003, том 43, № 7, с. 987–1004

УДК 519.633.6

О РАЗРЕШИМОСТИ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1)]

© 2003 г. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т)
e-mail: korpusov@rsci.ru; agsveshn@math380b.phys.msu.su

Поступила в редакцию 10.07.2002 г.

Рассматривается первая начально-краевая задача для многомерного сильно нелинейного уравнения с двойной нелинейностью псевдопараболического типа в ограниченной области с достаточно гладкой границей. Доказана локальная разрешимость данной задачи в слабом обобщенном смысле. Причем в зависимости от рассматриваемых нелинейностей доказана разрешимость в любом конечном цилиндре $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ или разрушение за конечное время. Предложена физическая интерпретация полученных качественных результатов. Библ. 52.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прежде всего дадим вывод задачи, рассматриваемой в дальнейшем.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, – ограниченная область с гладкой границей класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$. Причем область Ω занимает полупроводник с тензором диэлектрической проницаемости ε_{ij}, нелинейной и анизотропной по полю $\mathbf{E}$:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{ij}|E_i|^{p-2}, \quad D_i = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{ij} E_j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad p > 2, \tag{1.1}$$

и, кроме того, с объемной плотностью тока свободных зарядов, зависящих от потенциала φ самосогласованного поля E по закону

$$|\varphi|^q \varphi, \quad q > 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим в области Ω систему уравнений квазистационарного электрического поля, которая с учетом (1.2) примет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = n, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \partial n/\partial t = |\varphi|^q \varphi. \tag{1.3}$$

Из (1.1) и (1.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\varphi + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right) + |\varphi|^q \varphi = 0, \quad p > 2, \quad q > 0. \tag{1.4}$$

Предположим, что на границе раздела полупроводник–идеальный проводник $\partial\Omega$ задано условие

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.5}$$

а в области Ω задано начальное распределение потенциала электрического поля

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x). \tag{1.6}$$

Для удобства введем обозначение $u(x, t) \equiv \varphi(x, t)$; тогда с учетом (1.4)–(1.6) приходим к следующей

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00253, 01-01-06002) и гранта от проекта "Молодые ученые России".

задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + |u|^q u = 0, \quad p > 2, \quad q > 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{1.7}$$

$$u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \tag{1.8}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{1.9}$$

По всей видимости, рассматриваемая задача является новой в теории уравнений псевдопараболического типа. Причем для задачи (1.7)–(1.9) нами будут рассмотрены вопросы глобальной разрешимости и разрушения за конечное время, поэтому мы сочли возможным привести ссылки как на работы, посвященные исследованию псевдопараболических уравнений, так и на работы по исследованию вопросов глобальной неразрешимости и разрушения решений.

Применение полугруппового подхода к общей теории вырождающихся псевдопараболических уравнений получило глубокое и широкое развитие в [1]–[3] с приложениями к полулинейным уравнениям псевдопараболического типа [4]–[6]. Исследованию псевдопараболических уравнений с незнакоопределенным или необратимым оператором при старшей производной во времени посвящена работа [7]. Кроме того, в абстрактной постановке вырождающиеся уравнения псевдопараболического типа рассматриваются в [8]. Широкий спектр результатов для уравнений и систем уравнений, неразрешенных относительно старшей производной, рассмотрен в [9]. Отметим также работу [10], где рассматриваются вопросы локальной разрешимости для уравнений псевдопараболического типа. Исследованию псевдопараболических включений с двойной нелинейностью посвящена работа [11]. Псевдопараболические уравнения с монотонной нелинейностью рассматривались в [12]. Задачи оптимального управления линейных задач для уравнений псевдопараболического типа исследовались в [13] (см. также библиографию к этой работе). Разрушение за конечное время и существование глобального во времени ограниченного решения нелинейного уравнения Буссинеска с источником

$$u_t - \Delta\psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0$$

исследовалось в [14] и [15]. В [16] были предложены физические модели, приводящие к нелинейным уравнениям псевдопараболического типа. В [17]–[22] были рассмотрены начально-краевые задачи псевдопараболического типа и изучены вопросы о существовании глобальных во времени решений и разрушения решений за конечное время. Наконец, в [23] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа: $u_t = c\Delta u_t + \varphi(u)$.

Отметим также, что исследованием задач для родственных к (1.7) линейных и квазилинейных уравнений составного типа посвящены работы [24]–[28].

Перейдем к обзору результатов и методов доказательства теорем о несуществовании и разрушении решений, применимых и для уравнений псевдопараболического типа.

Прежде всего отметим классическую работу Фуджиты о несуществовании положительного решения для полулинейного уравнения параболического типа [29]. В [30] был предложен энергетический подход к исследованию вопроса о разрушения сильного и слабого обобщенного решений для достаточно больших начальных данных задачи. В [31] была предложена новая задача, для которой удалось получить оптимальный результат Фуджиты. Широкий спектр результатов по исследованию неограниченных решений был получен в [32]. Кроме того, результаты по получению оценок сверху и снизу для скорости разрушения решения были получены в [17], [19] и [33]. Метод доказательства несуществования решения некоторых классов краевых задач, основанный на использовании принципа максимума, развит в [34]. Принципиально новый подход, называемый методом пробных функций, предложен в [35] (см. также работу [36]).

В связи с тем, что уравнение (1.7) является сильно нелинейным с двойной нелинейностью, причем одна из нелинейностей является псевдолапласианом, отметим, что подходы к исследованию подобных задач можно найти в [37] и [38].

2. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ В СЛАБОМ ОБОБЩЕННОМ СМЫСЛЕ

Пусть $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, – граница ограниченной области Ω и $s \geq 2$ таково, что $(s-1)/N \geq 1/2 - 1/p$. Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\langle w_j, v\rangle_s = \lambda_j(w_j, v) \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^s(\Omega), \quad j = \overline{1, +\infty}, \tag{2.1}$$

где введены следующие обозначения: $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$– скобки двойственности (см., например, [39]) между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-s}(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. В силу определения s справедлива следующая цепочка вложений: $\mathbb{H}_0^s(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$, $p > 2$. Поскольку собственные функции задачи (2.1) образуют галеркинский базис одновременно в $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ и в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (см., например, [37, с. 172], [40, с. 4]), то, в силу указанных включений, собственные функции задачи (2.1) образуют галеркинский базис в $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ и в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *и если* $N \leq p$, *то* $q > 0$, *если* $N > p$, *то* $0 < q < [N(p-2) + 2p]/[2(N-p)]$; *тогда найдется такое* $T_0 = T_0(u_0, q, p) > 0$ *и существует функция* $u(x, t) : (0, T_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *такая, что для любого* $T \in (0, T_0)$ *имеют место включения*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}, \quad Q \equiv (0, T)\times\Omega, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}, \quad p' = p/(p-1);$$

кроме того, $u(0) = u_0$ *почти всюду в* Ω, *причем*

$$\partial/\partial t(\Delta u + \Delta_p u) + |u|^q u = 0 \ \text{в} \ \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)), \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1,$$
$$\Delta_p u \equiv \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right). \tag{2.3}$$

При дополнительных условиях $0 < q < p/(N-p)$ при $N > p$ и $q > 0$ при $N \leq p$ функция $u(x, t)$ единственная.

Доказательство.

Замечание 1. Поскольку, в условиях теоремы 1, $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то в силу результата работы [37, с. 20] имеем $u(t) : [0, T] \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, где $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ – непрерывная функция.

Для доказательства локальной разрешимости воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами монотонности и компактности [37].

Будем искать "приближенное" решение нашей задачи (1.7)–(1.9) в виде

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)w_k, \quad u_{0m} \equiv u_m(0) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0)w_k \to u_0 \ \text{сильно в} \ \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$
$$(\nabla u_m', \nabla w_j) + (p-1)\sum_{i=1}^N\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) = (|u_m|^q u_m, w_j), \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) сразу же получаем

$$\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^N\left(\left[1 + (p-1)\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\right]\frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)c_{mk}' = (|u_m|^q u_m, w_j), \quad j = \overline{1, m}.$$

Теперь в качестве галеркинского базиса в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ выберем собственные функции задачи (2.1). Введем обозначение

$$a_{kj} \equiv \sum_{i=1}^{N}\left(\left[1+(p-1)\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\right]\frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right).$$

Имеем

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj}\xi_k\xi_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k,j=1}^{m,m}\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)\xi_k\xi_j + (p-1)\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}, \eta_i^2\right), \quad \eta_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\xi_k.$$

Поскольку $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – галеркинский базис в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то $\det\{(\nabla w_k, \nabla w_j)\}_{k,j=1,1}^{m,m} > 0$, поэтому, в силу критерия Сильвестра (см., например, [41]), $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1,1}^{m,m} > 0$. Общие результаты о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [42]) гарантируют существование решения задачи (2.4) на некотором интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$, в смысле $c_{km} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, t_m]$. Ниже получены априорные оценки, из которых следует $t_m = T$, где T не зависит от m. Значит, $c_{km} \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T]$, $u_m \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T], \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$.

Займемся выводом априорных оценок. Умножим обе части равенства (2.4) на c_{mj} и просуммируем по $i = \overline{1, m}$; тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \|u_m\|_{q+2}^{q+2}. \tag{2.5}$$

Отметим, что нормы

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}, \left(\|v\|_p^p + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}$$

эквивалентны на пространстве $v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ (см., например, [37, с. 169]). Поэтому сразу же будем рассматривать пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ с нормой

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Из (2.5) следует

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i}\right\|_p^p + \int_0^t ds\|u_m\|_{q+2}^{q+2}(s). \tag{2.6}$$

В силу условий, сформулированных в теореме относительно p, q, N, и теорем вложения Соболева (см., например, [43, с. 100]) выполнено вложение $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q+2}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Теперь имеем

$$\|u_m\|_{q+2} \le B_1\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \le \frac{1}{2}\|\nabla u_{0m}\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_{0m}}{\partial x_i}\right\|_p^p + B_1^{q+2}\int_0^t ds\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{(q+2)/p}(s).$$

Итак, имеем

$$E_m(t) \le E_{0m} + B_2 \int_0^t ds E_m^{\alpha}(s), \quad \alpha = \frac{q+2}{p}, \quad B_2 \equiv B_1^{q+2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(q+2)/p},$$
$$E_m(t) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p, \quad E_{0m} \equiv E_m(0). \tag{2.7}$$

Используя леммы Гронуолла–Беллмана и Бихари (см., например, [44, с. 108–112]), получаем

$$E_m(t) \le [E_{0m}^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t]^{1/(1-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2.8}$$

$$E_m(t) \le E_{0m}\exp\{B_2 t\}, \quad \alpha = 1, \tag{2.9}$$

$$E_m(t) \le E_{0m}[1 - (\alpha - 1)B_2 E_{0m}^{(\alpha-1)} t]^{-1/(\alpha-1)}, \quad \alpha > 1. \tag{2.10}$$

Умножим теперь уравнение (2.4) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$; тогда после интегрирования по времени $s \in [0, t]$ получим

$$\int_0^t ds\left[\|\nabla u'_m\|_2^2(s) + \frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} dx\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2} = \frac{1}{q+2}\|u_m\|_{q+2}^{q+2}. \tag{2.11}$$

В силу условий теоремы относительно параметров q, p, N и в силу теорем вложения Соболева (см., например, [43, с. 100]), из (2.11) получим

$$\int_0^t ds\left[\|\nabla u'_m\|_2^2(s) + \frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} dx\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right)^2\right] \le \frac{1}{q+2}B_1^{q+2}\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{(q+2)/p}. \tag{2.12}$$

В силу того, что $u_{0m} \longrightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, справедливо следующее неравенство: $E_{0m} \le A$, где A не зависит от m (см., например, [45, с. 173]). В результате из (2.8)–(2.10) приходим к выводу, что найдется такое максимальное $T_0 > 0$, что справедливо неравенство $E_m(t) \le C$, $t \in [0, T]$ $\forall T \in (0, T_0)$, где C не зависит ни от m, ни от t.

Таким образом, из (2.8)–(2.12) следует, что найдется такое $T_0 \equiv T_0(u_0, q, p)$, что для любого $T \in (0, T_0)$ выполнены следующие включения:

$$u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \; u'_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N},$$
$$|u_m|^q u_m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^{\infty}([0, T]; \mathbb{L}^{q'}(\Omega)), \quad q' = (q+2)/(q+1). \tag{2.13}$$

Наконец, понятно, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ ограничено в } \mathbb{L}^{\infty}([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.14}$$

В силу (2.13), (2.14) получаем, что $t_m = T$, где T не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Значит,

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{km}(t) w_k \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Из включений (2.13), (2.14) и результатов [37, с. 24] и [45, с. 180] приходим к выводу, что из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность (которую снова обозначим через u_m), что

$$u_m \rightharpoonup u \; *\text{-слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'_m \rightharpoonup u' \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

$$\Delta u_m \rightharpoonup \Delta u \ \ast\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad -\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi \ \ast\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{-1, p'}(\Omega)),$$

$$|u_m|^q u_m \rightharpoonup w \ \ast\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega)), \quad q' = (q+2)/(q+1).$$

Отсюда имеем $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = [0, T] \times \Omega$; тогда в силу компактного вложения $\mathbb{H}^1(Q) \subset\subset \mathbb{L}^2(Q)$ приходим к выводу, что $u_m \to u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, а значит, почти всюду (см., например, [10, с. 39]). Тогда в силу леммы 1.3 из работы [37, с. 25] получим $|u_m|^q u_m \rightharpoonup |u|^q u$ $\ast$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, $q' = (q + 2)/(q + 1)$. Таким образом, $w = |u|^q u$. Из (2.13) и (2.14) следует, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad u_m \in \mathbb{H}^1([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.15}$$

Имея в виду, что предел последовательности $-\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi$ $\ast$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1, p'}(\Omega))$, докажем, что $\chi = -\Delta_p u$.

Запишем систему уравнений (2.4) в эквивалентном виде:

$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta u_m + \Delta_p u_m), w_j\rangle + \langle|u_m|^q u_m, w_j\rangle = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.16}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобки двойственности между пространствами $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1, p'}(\Omega)$. Причем в силу второго включения в (2.15) получаем, что $\langle|u_m|^q u_m, w_j\rangle \in \mathbb{H}^1[0, T]$. Поэтому и $\langle(\Delta u_m + \Delta_p u_m), w_j\rangle \in \mathbb{H}^1[0, T]$. Тогда, интегрируя уравнение (2.16) по времени, получаем

$$\langle\Delta u_m + \Delta_p u_m, w_j\rangle + \left\langle\int_0^t ds |u_m|^q u_m(s), w_j\right\rangle = \langle\Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, w_j\rangle, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.17}$$

Поскольку $\Delta u_m \rightharpoonup \Delta u$ $\ast$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, то $\langle\Delta u_m, w_j\rangle \rightharpoonup \langle\Delta u, w_j\rangle$ $\ast$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T)$, $j = \overline{1, m}$. Кроме того, $-\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi$ $\ast$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1, p'}(\Omega))$, $p' = p/(p - 1)$, поэтому $-\langle\Delta_p u_m, w_j\rangle \rightharpoonup \langle\chi, w_j\rangle$ $\ast$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T)$, $j = \overline{1, m}$. Наконец,

$$\int_0^t ds\langle|u_m|^q u_m, w_j\rangle = \int_0^t ds\langle|u_m|^q u_m - |u|^q u, w_j\rangle + \int_0^t ds\langle|u|^q(u, w_j)\rangle, \quad j = \overline{1, m}.$$

С другой стороны, $|u_m|^q u_m$, $|u|^q u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, где $q' = (q + 2)/(q + 1)$. Кроме того, если $|u_m|^q u_m \rightharpoonup |u|^q u$ $\ast$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, то

$$\left|\int_0^t ds\langle|u_m|^q u_m - |u|^q u, w_j\rangle\right| \le T \sup_{t \in [0, T]}\left|\langle|u_m|^q u_m - |u|^q u, w_j\rangle\right|.$$

В силу условия $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ получим, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$.

Поскольку $u_{0m} \to u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то $\langle\Delta u_{0m}, w_j\rangle \to \langle\Delta u_0, w_j\rangle$, $\langle\Delta_p u_{0m}, w_j\rangle \to \langle\Delta_p u_0, w_j\rangle$, $j = \overline{1, m}$.

Значит, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (2.17), получаем

$$\Delta u - \chi = \Delta u_0 + \Delta_p u_0 - \int_0^t ds |u|^q u(s). \tag{2.18}$$

Введем обозначение $A(v) = -\Delta_p v$. Из (2.17) следует равенство

$$\begin{aligned}\langle A(u_m), u_m\rangle &= \langle \Delta u_m, u_m\rangle + \left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u_m(t)\right\rangle - \langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m\rangle = \\ &= -\|\nabla u_m\|_2^2 + \left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u_m(t)\right\rangle - \langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m\rangle.\end{aligned} \tag{2.19}$$

В силу того, что $u_m \longrightarrow u$ $*$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, и из результата работы [45, с. 173] имеем

$$\liminf_{m\to+\infty}\|\nabla u_m\|_2^2 \ge \|\nabla u\|_2^2.$$

Кроме того,

$$\int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u_m(t)\right\rangle = \int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u_m(t) - u(t)\right\rangle + \int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q (u_m(s), u(t))\right\rangle.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\left|\int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u_m(t) - u(t)\right\rangle\right| \le \left(\int_0^T dt\int_\Omega dx\left[\int_0^t ds|u_m|^{q+1}\right]^2\right)^{1/2}\left(\int_Q dxdt[u_m(t) - u(t)]^2\right)^{1/2}, \quad Q \equiv [0, T]\times\Omega.$$

В силу условий теоремы относительно параметров q, p, N и теорем вложения Соболева (см., например, [43, с. 100]) имеем $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q+2}(\Omega)$. В этом случае получаем

$$\left|\int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u_m(t) - u(t)\right\rangle\right| \le C(T, q, p)\left(\int_Q dxdt[u_m(t) - u(t)]^2\right)^{1/2}.$$

Причем в силу того, что $u_m \longrightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m \longrightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь

$$\int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u(t)\right\rangle.$$

Поскольку $u(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q+2}(\Omega))$, а $\int_0^t ds\,|u_m|^q u_m(s) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, $q' = (q+2)/(q+1)$, $|u_m|^q u_m \longrightarrow |u|^q u$ $*$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega))$, то отсюда следует

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u(t)\right\rangle = \int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u|^q u(s), u(t)\right\rangle.$$

Пусть

$$X_m = \int_0^T dt\langle A(u_m) - A(v), u_m - v\rangle \quad \forall v \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad A(v) \in \mathbb{L}^{r'}(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)),$$

$$r \in (1, \infty), \quad r' = r/(r-1).$$

В силу (2.19) получим

$$
\begin{aligned}
X_m = & -\int_0^T dt\|\nabla u_m\|_2^2 + \int_0^T dt\left\langle \int_0^t ds|u_m|^q u_m(s), u_m(t)\right\rangle - \int_0^T dt\langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m\rangle - \\
& -\int_0^T dt\langle A(u_m), v\rangle - \int_0^T dt\langle A(v), u_m - v\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Из выписанных здесь слагаемых для X_m нам осталось рассмотреть

$$
\int_0^T dt\langle \Delta u_{0m} + \Delta_p u_{0m}, u_m\rangle = \int_0^T dt\langle \Delta u_{0m}, u_m\rangle + \int_0^T dt\langle \Delta_p u_{0m}, u_m\rangle. \tag{2.21}
$$

Рассмотрим первое слагаемое в (2.21): u_m равномерно по m ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \subset \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m} \longrightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, а значит, в силу того что $\Delta \in \mathscr{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega)); \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ (см., например, [46, с. 106]) есть множество линейных непрерывных (ограниченных в силу линейности Δ) операторов, действующих из $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, последовательность $\Delta u_{0m} \longrightarrow \Delta u$ сильно в $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ и справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
|\langle \Delta u_{0m} - \Delta u_0, u_m\rangle| \le C\|\Delta u_{0m} - \Delta u_0\|_{-1} \longrightarrow 0, \quad m \longrightarrow +\infty.
$$

Наконец, поскольку $u_m \longrightarrow u$ $*$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, а $\Delta u_0 \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, то

$$
\int_0^T dt\langle \Delta u_0, u_m\rangle \longrightarrow \int_0^T dt\langle \Delta u_0, u\rangle, \quad m \longrightarrow +\infty.
$$

Поэтому

$$
\lim_{m \to +\infty} \int_0^T dt\langle \Delta u_{0m}, u_m\rangle = \int_0^T dt\langle \Delta u_0, u\rangle.
$$

Рассмотрим второе слагаемое в (2.21): u_m равномерно по m ограничено в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. С другой стороны, $u_{0m} \longrightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В силу того что $\partial/\partial x_i \in \mathscr{L}(\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega); \mathbb{L}^p(\Omega))$, $i = \overline{1, N}$ (см., например, [46, с. 106]), последовательность $\partial u_m/\partial x_i \longrightarrow \partial u/\partial x_i$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$ для всех $i = \overline{1, N}$. Наконец, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\||w|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\|_{p/(p-1)} \le (p-1)\|f(w-v)\|_{p/(p-1)}, \quad f = \max(|w|^{p-2}, |v|^{p-2}),
$$

$$
\|f(w-v)\|_{p_1} \le \|f\|_{q_1 p_1}\|w-v\|_{q_2 p_1}, \quad p_1 = p/(p-2), \quad q_2 p_1 = p,
$$

$$
q_2 = p-1, \quad q_1 = (p-1)/p-2, \quad q_1 p_1 = p/(p-2),
$$

$$
\||w|^{p-2}w - |v|^{p-2}v\|_{p/(p-1)} \le (p-1)\|f\|_{p/(p-2)}\|u-v\|_p,
$$

$$
\|f\|_{p/(p-2)} \le 2(\max\{\|w\|_p, \|v\|_p\})^{p-2}.
$$

Возьмем $v = \partial u_m/\partial x_i$ и $w = \partial u/\partial x_i$; тогда сразу же получим, что

$$
\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \longrightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ сильно в } \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}.
$$

Наконец, поскольку $\partial/\partial x_i \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^{p'}(\Omega), \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$(см., например, [46, с. 106]), то последовательность $\Delta_p u_{0m} \longrightarrow \Delta_p u$ сильно в $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ и справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|\langle \Delta_p u_{0m} - \Delta_p u_0, u_m\rangle| \le C\|\Delta_p u_{0m} - \Delta_p u_0\|_{-1,p'} \longrightarrow 0, \quad m \longrightarrow +\infty.$$

Наконец, поскольку $u_m \longrightarrow u$ $*$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^1(\Omega))$, а $\Delta_p u_0 \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, то

$$\int_0^T dt \langle \Delta_p u_0, u_m\rangle \longrightarrow \int_0^T dt \langle \Delta_p u_0, u\rangle, \quad m \longrightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T dt \langle \Delta_p u_{0m}, u_m\rangle = \int_0^T dt \langle \Delta_p u_0, u\rangle.$$

Таким образом, переходя к верхнему пределу в (2.20) при $m \longrightarrow= +\infty$, получаем

$$0 \le \limsup_{m\to+\infty} X_m \le -\int_0^T dt\|\nabla u\|_2^2 + \int_0^T dt\left\langle\int_0^t ds|u|^2 u(s), u(t)\right\rangle - \int_0^T dt\langle \Delta u_0 + \Delta_p u_0, u\rangle - \int_0^T dt\langle \chi, v\rangle - \int_0^T dt\langle A(v), u - v\rangle.$$

С учетом (2.18) приходим к выводу, что

$$\int_0^T dt\langle \chi, u\rangle = -\int_0^T dt\|\nabla u\|_2^2 + \int_0^T dt\left\langle\int_0^t ds|u|^q u(s), u(t)\right\rangle - \int_0^T dt\langle \Delta u_0 + \Delta_p u_0, u\rangle.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^T dt\langle \chi - A(v), u - v\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad v = u - \lambda w, \quad w \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Стандартным образом (см., например, [37, с. 172]) приходим к выводу, что

$$\int_0^T dt\langle \chi - A(u), w\rangle = 0 \quad \forall w \in \mathbb{L}^r(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$\chi, A(u) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^{r'}(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)).$$

Значит, $\chi = -\Delta_p u$.

Докажем теперь, что

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Пусть

$$A_i(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \quad \langle A_i(v), v\rangle = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_p^p, \quad i = \overline{1, N}.$$

В силу того что $u_m \longrightarrow u$ $*$-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\limsup_{m\to+\infty}\int_0^T dt\langle A_i(u_m), u_m\rangle \le -\sum_{j=1, j\ne i}^N \int_0^T dt\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p + \limsup_{m\to+\infty}\int_0^T dt\langle A(u_m), u_m\rangle,$$

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T\langle A(u_m), u_m\rangle \le -\int\limits_0^T dt\|\nabla u\|_2^2 + \int\limits_0^T dt\left\langle\int\limits_0^t ds|u|^q u(s), u(t)\right\rangle - \int\limits_0^T dt\langle\Delta u_0 + \Delta_p u_0, u\rangle =$$

$$= -\int\limits_0^T dt\langle\Delta_p u, u\rangle = \int\limits_0^T dt\sum_{j=1}^N\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_p^p.$$

Таким образом, получаем

$$\limsup_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \le \int\limits_0^T dt\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p. \tag{2.22}$$

С другой стороны,

$$\partial u_m/\partial x_i \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^p(\Omega)) \subset \mathbb{L}^p(Q), \quad Q = [0, T]\times\Omega,$$

поэтому в силу рефлексивности $\mathbb{L}^p(Q)$ (см., например, [45, с. 180]) можно выделить подпоследовательность, которую мы снова обозначим через u_m, такую, что

$$\partial u_m/\partial x_i \longrightarrow \partial u/\partial x_i \text{ слабо в } \mathbb{L}^p(Q), \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.23}$$

Значит, в силу результата работы [45, с. 173] получим

$$\liminf_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p \ge \int\limits_0^T dt\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.24}$$

Из (2.22) и (2.24) следует, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_0^T dt\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.25}$$

Из результата работы [47, с. 293] и из (2.23), (2.25) следует, что

$$\partial u_m/\partial x_i \longrightarrow \partial u/\partial x_i \text{ сильно в } \mathbb{L}^p(Q), \quad i = \overline{1, N}, \tag{2.26}$$

что, в свою очередь, означает (см. [48, с. 102], что

$$\partial u_m/\partial x_i \longrightarrow \partial u/\partial x_i \text{ почти всюду в } Q \equiv [0, T]\times\Omega, \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.27}$$

Переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, имеем

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \longrightarrow \chi_i \;\; *\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}.$$

В силу (2.27) и результата работы [37, с. 25] получим

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \longrightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \;\; *\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \text{ в } \mathcal{D}'(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)).$$

В силу (2.13) можно выделить такую подпоследовательность, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \longrightarrow \psi \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = [0, T]\times\Omega.$$

А это значит, что

$$\psi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = [0, T]\times\Omega, \quad i = \overline{1, N}.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N},$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{(p-2)/2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.28}$$

Аналогичным образом при помощи (2.27) доказывается, что

$$\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \longrightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \ \ast\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Из (2.28) и теорем вложения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.29}$$

Докажем (2.29).

Введем обозначение $\psi \equiv |\partial u/\partial x_i|^{(p-2)/2}\partial u/\partial x_i$; в этом случае $|\psi|^\alpha\psi = |\partial u/\partial x_i|^{p-2}\partial u/\partial x_i$ при $\alpha = (p-2)/p$, $i = \overline{1, N}$. Отметим, что $|\psi|^\alpha\psi \in \mathbb{L}^\infty([0, T]; \mathbb{L}^{p'}(\Omega))$. Докажем, что $(|\psi|^\alpha\psi)'_t \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{L}^{p'}(\Omega))$. Действительно,

$$\int_0^T dt\left(\int_\Omega dx|\psi|^{\alpha p'}|\psi'_t|^{p'}\right)^{2/p'} \le \int_0^T dt\left(\int_\Omega dx|\psi|^{\alpha p' p_1}\right)^{2/(p' p_1)}\left(\int_\Omega dx|\psi'_t|^{p' p_2}\right)^{2/(p' p_2)},$$

где

$$\alpha p' p_1 = 2, \quad p' p_2 = 2, \quad p_1^{-1} + p_2^{-1} = 1, \quad p_1 = \frac{2(p-1)}{p-2}, \quad p_2 = \frac{2(p-1)}{p}.$$

Поскольку $\psi \in \mathbb{L}^\infty([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $\psi' \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega))$, то

$$\int_0^T dt\left(\int_\Omega dx|\psi|^{\alpha p'}|\psi'_t|^{p'}\right)^{2/p'} \le \sup_{t\in[0, T]}\|\psi\|_2^{2\alpha}\int_Q dxdt|\psi'|^2 < +\infty, \quad Q = [0, T]\times\Omega.$$

Теперь можно перейти к пределу при $m \longrightarrow +\infty$ в уравнении (2.4). Действительно,

$$(\nabla u'_m, \nabla w_j) \longrightarrow (\nabla u', \nabla w_j) \ \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, T), \quad (|u_m|^q u_m, w_j) \longrightarrow (|u|^q u, w_j) \ \ast\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T),$$
$$\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \longrightarrow \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \ \ast\text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T),$$

из последнего получаем, что

$$\left(\left[\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right]', \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \longrightarrow \left(\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]', \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \ \text{ в } \mathcal{D}'(0, T).$$

Переходя к пределу в уравнении (2.4), получаем равенство

$$(\nabla u', \nabla v) + \sum_{i=1}^N\left(\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]', \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = (|u|^q u, v) \quad \forall v \in \mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega).$$

Отсюда сразу же получаем (2.3). В силу (2.29) и того, что $u \in \mathbb{H}^1(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega))$, приходим к выводу, что каждое слагаемое в левой части (2.3) заведомо принадлежит классу $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1, p}(\Omega))$, что и доказывает первую часть утверждения.

Перейдем к доказательству единственности.

Пусть $u_j(t)$, $j = 1, 2$, – два решения задачи (2.3) в классах, сформулированных в условиях теоремы 1 с одним и тем же начальным условием. Тогда в силу (2.18) имеем

$$\Delta u_i + \Delta_p u_i = \Delta u_0 + \Delta_p u_0 - \int_0^t ds |u_i|^q u_i(s), \quad i = 1, 2.$$

Обозначим $w = u_1 - u_2$. В силу монотонности оператора Δ_p (см., например, [37, с. 168]) имеем

$$\|\nabla w\|_2^2(t) \le \int_0^t ds \int_\Omega dx \left| |u_1|^q u_1 - |u_2|^2 u_2 \right|(s)|w|(t) \le C_1 \int_0^t ds (\| |u_1|^q \|_N + \| |u_2|^q \|_N) \|w\|_r(s) \|w\|_2(t) \le$$

$$\le C_2 \|\nabla w\|_2(t) \int_0^t ds (\| |u_1|^q \|_N + \| |u_2|^q \|_N) \|w\|_r(s),$$

где $r = 2N/(N-2)$ при $N \ge 3$ и $r \ge 2$ при $N = 1, 2$; тогда имеет место вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^r(\Omega)$ (см., например, [43, с. 100]). Кроме того, потребуем $0 < q \le p/(N-p)$ при $N > p$ и $q > 0$ при $N \le p$. Тогда в силу $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{qN}(\Omega)$ и теорем вложения (см., например, [43, с. 100]) получаем

$$\|\nabla w\|_2(t) \le C_3 \int_0^t ds \|\nabla w\|_2(s).$$

В силу леммы Гронуолла–Беллмана (см., например, [44, с. 108]), из последнего неравенства получаем $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду в $Q = (0, T) \times \Omega$. Теорема 1 доказана.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ В ЛЮБОМ КОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ И "РАЗРУШЕНИЕ" ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Введем следующие обозначения:

$$E_m(t) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p, \quad E_{0m} \equiv E_m(0), \quad \alpha = \frac{q+2}{p},$$

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p, \quad E_0 \equiv E(0), \quad B_1 \equiv B_1^{q+2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(q+2)/p},$$

где B_1 – наилучшая постоянная вложения пространств $\mathbb{W}_0^{1, p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда в случае $p \ge q + 2$ величина T_0 из теоремы* 1 *равна* $+\infty$. *Кроме этого, справедливо следующее*:

1) *если $p > q + 2$, то*

$$\left[E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\frac{\|u_0\|_{q+2}^{q+2}}{E_0^\alpha}t\right]^{1/(1-\alpha)} \le E(t) \le [E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t]^{1/(1-\alpha)};$$

2) *если* $p = q + 2$, *то*

$$E_0 \exp\left\{\frac{\|u_0\|_{q+2}^{q+2}}{E_0^{\alpha}} t\right\} \le E(t) \le E_0 \exp\{B_2 t\};$$

3) *если же* $p < q + 2$ (*т.е.* $\alpha > 1$), *то найдется такое* $T_0 = T_0(u_0)$, *что*

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p = +\infty,$$

$$T_1 \equiv (\alpha - 1)^{-1} B_2^{-1} E_0^{-\alpha+1} \le T_0 \le (\alpha - 1)^{-1} \|u_0\|_{q+2}^{-q-2} E_0 \equiv T_2.$$

В случаях 1) и 2) неравенства снизу имеют место при дополнительном условии $q > 0$ при $N = 1, 2$ и $0 < q < 4/(N-2)$ при $N \ge 3$. Наконец, неравенство сверху в случае 3) имеет место при таких же условиях на q.

Доказательство. Пусть u_m – галеркинские приближения, определенные в (2.4). Поскольку $u_{0m} \longrightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, а последовательность $u_m \longrightarrow u$ $*$-слабо в $\mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то, переходя в (2.8) и (2.9) к пределу при $m \longrightarrow +\infty$ с учетом того, что $E(t) \le \liminf_{m \to +\infty} E_m(t)$ (см. [45, с. 173]), получаем

$$E(t) \le [E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_2 t]^{1/(1-\alpha)} \quad \text{при} \quad \alpha < 1, \tag{3.1}$$

$$E(t) \le E_0 \exp\{B_2 t\} \quad \text{при} \quad \alpha = 1. \tag{3.2}$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha > 1$.

Поскольку последовательность $u_{0m} \longrightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то в силу результата работы [47, с. 293] имеем $E_{0m} \longrightarrow E_0$. В этом случае из числовой последовательности E_{0m} можно выделить либо монотонно неубывающую, либо монотонно невозрастающую подпоследовательность. Будем искомую подпоследовательность последовательности E_{0m} и соответствующие подпоследовательности последовательностей u_{0m} и u_m обозначать таким же образом. Рассмотрим неравенство (2.10). Предположим, что E_{0m} – монотонно невозрастающая последовательность. Введем обозначение: $\{E_{0m}^{\{n\}}\}$ – последовательность, полученная из E_{0m} путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых; тогда неравенство (2.10) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, T_1^{\{n\}})$, где $T_1^{\{n\}} \equiv (\alpha-1)^{-1} B_2^{-1} E_{0n}$. Поскольку $u_m \longrightarrow u$ $*$-слабо в $\mathbb{L}^{\infty}(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то для всех таких t можно перейти к пределу при $m \longrightarrow +\infty$ в (2.10) и с учетом результата работы [45, с. 173] получить неравенство

$$E(t) \le E_0[1 - (\alpha-1)B_2 E_0^{\alpha-1} t]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при} \quad t \in [0, T_1^{\{n\}}). \tag{3.3}$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и того, что $T_1^{\{n\}} \uparrow T_1$ при $n \uparrow +\infty$, приходим к выводу, что (3.3) имеет место при $t \in [0, T_1)$ и, кроме того, $T_0 \ge T_1$. Пусть теперь E_{0m} – монотонно неубывающая последовательность. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что (3.3) имеет место для всех $t \in [0, T_1)$ и $T_0 \ge T_1$.

Для дальнейшего нам необходимо доказать, что для почти всех $t \in [0, T]$ $E_m(t) \longrightarrow E(t)$ $\forall T \in (0, T_0)$.

С этой целью заметим, что при доказательстве теоремы 1 мы получили (2.26), а значит, в силу вложения $\mathbb{L}^p(Q) \subset \mathbb{L}^2(Q)$, $Q = [0, T] \times \Omega$ $\forall T \in [0, T_0)$, имеем

$$\int_0^t ds E_m(s) \longrightarrow \int_0^t ds E(s) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0). \tag{3.4}$$

С другой стороны, при выполнении условий $q > 0$ при $N = 1, 2$ и $0 < q < 4/(N-2)$ при $N \ge 3$ имеем компактное вложение $\mathbb{H}^1(Q) \subset \mathbb{L}^{q+2}(Q)$ (см., например, [43, с. 100]), а последовательность u_m сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$. Стало быть, последовательность $u_m \longrightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^{q+2}(Q)$, $Q = [0, T] \times \Omega\ \forall T \in (0, T_0)$. Поскольку правая часть выражения для $E_m(t)$ сходится для любого $t \in [0, T]$, $T \in (0, T_0)$, к некоторой функции $\eta(t)$ и из доказательства теоремы 1 следует, что $E_m(t) \le C < +\infty$, где C не зависит ни от m, ни от t, то, в силу теоремы Лебега о переходе к пределу, под знаком интеграла Лебега (см., например, [48, с. 75]) имеем $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)\ \forall T \in (0, T_0)$ и

$$\int_0^t E_m(s)ds \longrightarrow \int_0^t ds\eta(s) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0). \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.4) с (3.5), приходим к выводу, что

$$\int_0^t ds[E(s) - \eta(s)] = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0), \tag{3.6}$$

причем $E(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$, поэтому, дифференцируя обе части равенства (3.6) по Лебегу (см., например, [48, с. 124]) на сегменте $[0, T]\ \forall T \in (0, T_0)$, получаем

$$\eta(t) = E(t) \text{ для почти всех } t \in [0, T] \ \ \forall T \in (0, T_0).$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что последовательность $E_m(t)$ при дополнительных условиях на $q > 0$ сходится почти всюду к $E(t)$ на множестве $t \in [0, T]\ \forall T \in (0, T_0)$.

В силу (2.6), (2.11), а также поскольку $u_m(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p = +\|u_m\|_{q+2}^{q+2}(s), \tag{3.7}$$

$$\|\nabla u_m'\|_2^2 + \frac{4(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^N \int_\Omega dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right|^2 = \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{q+2}^{q+2}. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что $E_m(t)$, $E_m'(t) \in \mathbb{AC}[0, T]$. Справедливы следующие неравенства:

$$\left|\int_\Omega dx(\nabla u_m', \nabla u_m)\right|^2 \le \|\nabla u_m'\|_2^2 \|\nabla u\|_2^2, \tag{3.9}$$

$$\left|\int_\Omega dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right| \le \int_\Omega dx \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right| \le \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^{p/2}\left(\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}. \tag{3.10}$$

В силу неравенства Шварца (см., например, [50, с. 18]) имеем

$$\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^{p/2}\left(\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^N\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}. \tag{3.11}$$

В силу (3.7)–(3.11) справедлива цепочка неравенств

$$\left|\langle u_m, [-\Delta u_m - \Delta_p u_m]_t'\rangle\right|^2 \le \left|\langle \nabla u_m', \nabla u_m\rangle\right|^2 + (p-1)^2\left|\sum_{i=1}^N\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right|^2 +$$

$$+ 2(p-1)\left|(\nabla u_m', \nabla u_m)\right|\left|\sum_{i=1}^N\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'}{\partial x_i}\right| \le \|\nabla u_m'\|_2^2\|\nabla u_m\|_2^2 +$$

$$+(p-1)^2\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\sum_{i=1}^N\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\right|^2+2(p-1)\|\nabla u'_m\|_2\|\nabla u_m\|_2\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^N\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}\le\left(\|u_m\|_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)\times$$

$$\times\left(\|\nabla u'_m\|_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^N\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\right|^2\right)\le$$

$$\le p\left(\|\nabla u'_m\|_2^2+(p-1)\sum_{i=1}^N\int_\Omega dx\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\right|^2\right)\left(\frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_2^2+\frac{p-1}{p}\sum_{i=1}^N\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right\|_p^p\right).$$

Наконец, из (3.7) и (3.8) и предыдущего неравенства получим

$$\frac{d^2E_m}{dt^2}E_m-\alpha\left(\frac{dE_m}{dt}\right)^2\ge 0,\quad \alpha=\frac{q+2}{p}. \tag{3.12}$$

Теперь рассмотрим три случая: $0<\alpha<1$, $\alpha=1$, $1<\alpha$. Без ограничения можно считать, как и ранее, последовательность E_{0m} монотонной и положительной, тогда последовательность $E_m>0$ для всех $m\in\mathbb{N}$. В первом случае ($0<\alpha<1$) из (3.12) следует

$$\left(\frac{E'_m}{E_m^\alpha}\right)'\ge 0,\quad \frac{E'_m}{E_m^\alpha}\ge\frac{\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}}{E_{0m}^\alpha},\quad E_m(t)\ge\left[E_{0m}^{1-\alpha}+(1-\alpha)\frac{\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}}{E_{0m}^\alpha}t\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим теперь второй случай: $\alpha=1$. Из (3.12) получаем

$$E''_mE_m-(E'_m)^2\ge 0,\quad \left(\ln\frac{E'_m}{E_m}\right)'\ge 0,\quad E_m(t)\ge E_{0m}\exp\left\{\frac{\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}}{E_{0m}}t\right\}. \tag{3.14}$$

Наконец, рассмотрим третий случай: $\alpha>1$. Из (3.12) вытекает

$$\left(\frac{E'_m}{E_m^\alpha}\right)'\ge 0,\quad \frac{E'_m}{E_m}\ge\frac{\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}}{E_{0m}^\alpha},\quad E_m\ge E_{0m}\left[1-(\alpha-1)\frac{\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}}{E_{0m}}t\right]^{-1/(\alpha-1)}. \tag{3.15}$$

В силу сильной сходимости $u_{0m}\longrightarrow u_0$ в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\subset\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и из условий $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)\subset\mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ теоремы 1 получаем $E_{0m}\longrightarrow E_0$ и $\|u_{0m}\|_{q+2}\longrightarrow\|u_0\|_{q+2}$. С другой стороны, мы установили, что $E_m(t)\longrightarrow E(t)$ для почти всех $t\in[0,T_0)$. Поэтому, переходя к пределу при $m\longrightarrow+\infty$ в неравенствах (3.13) и (3.14), получаем

$$E(t)\ge\left[E_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)\frac{\|u_0\|_{q+2}^{q+2}}{E_0^\alpha}t\right]^{1/(1-\alpha)},\quad \alpha\in(0,1),$$

$$E(t)\ge E_0\exp\left\{\frac{\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}}{E_{0m}}t\right\},\quad \alpha=1.$$

Введем обозначение $F_{0m}=\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}/E_{0m}$. Без ограничения общности переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательность $E_{0m}>0$ равномерно по m, поскольку $E_0>0$. В силу сходимости последовательности $F_{0m}\longrightarrow F_0$ при $m\longrightarrow+\infty$, где $F_0\equiv\|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}/E_0$, можно выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим через F_{0m}. Соответствующие подпоследовательности последовательностей u_{0m} и u_m снова будем обозначать u_{0m} и u_m. Перепишем (3.15) с учетом принятого обозначения:

$$E_m \geq E_{0m}[1-(\alpha-1)F_{0m}t]^{-1/(\alpha-1)}. \tag{3.16}$$

Пусть последовательность F_{0m} монотонно неубывающая, тогда неравенство (3.16) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, (\alpha-1)^{-1}F^{-1})$, где $F = \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} F_{0m}$. Переходя к пределу при $m \longrightarrow +\infty$ для таких t в неравенстве (3.16), получаем

$$E \geq E_0[1-(\alpha-1)F_0t]^{-1/(\alpha-1)}, \quad t \in [0, (\alpha-1)^{-1}F^{-1}]. \tag{3.17}$$

Но $F = F_0$ в силу того, что последовательность F_{0m} монотонно неубывающая и сходящаяся к $F_0 \equiv \|u_{0m}\|_{q+2}^{q+2}/E_0$. Отсюда и из (3.17) сразу же получаем, что $T_0 \leq (\alpha-1)^{-1}\|u_{0m}\|_{q+2}^{-q-2}E_0 \equiv T_2$.

Пусть теперь последовательность F_{0m} монотонно невозрастающая. Обозначим через $\{F_{0m}^{(n)}\}$ последовательность, полученную из последовательности $\{F_{0m}\}$ путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых. Сделаем предположение, что

$$T_0 > (\alpha-1)^{-1}\|u_0\|_{q+2}^{-q-2}E_0 \equiv T_2, \tag{3.18}$$

и пусть, кроме того, $M \equiv \sup\limits_{t \in [0, T_2]} E(t) < +\infty$. Тогда (3.16) имеет место равномерно по $t \in [0, (\alpha-1)^{-1}F_{0n}^{-1})$. Переходя к пределу при $m \longrightarrow +\infty$ в неравенстве (3.16), получаем, в силу сделанного предположения относительно T_0, следующее неравенство:

$$E_0[1-(\alpha-1)F_0t]^{-1/(\alpha-1)} \leq M < +\infty, \quad t \in [0, (\alpha-1)^{-1}F_{0n}^{-1}). \tag{3.19}$$

Однако в силу того, что $F_{0n} \searrow F_0$ при $n \longrightarrow +\infty$, найдется такое $n \in \mathbb{N}$ и такое $t_n \in (0, (\alpha-1)^{-1}F_{0n}^{-1})$, что (3.19) потеряет смысл. Значит, предположение (3.18) не выполняется. Отсюда сразу же выводим, что

$$T_0 \leq (\alpha-1)^{-1}\|u_0\|_{q+2}^{-q-2}E_0 \equiv T_2.$$

Теорема 2 доказана.

4. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Рассмотрим вопрос о возникновении зависимости тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} полупроводникового кристалла от электрического поля в кристалле.

Возможны две ситуации: изначально изотропный кристалл или оптически одноосный кристалл (см., например, [51, с. 505–507]).

В первом случае при слабом электрическом поле у тензора диэлектрической проницаемости не могут появиться слагаемые линейные по полю и поэтому разложение данного тензора по электрическому полю начинается со слагаемых второго порядка. Причем физически интересным случаем является анизотропное по компонентам поля разложение. В нашем случае данная ситуация соответствует $p = 4$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(\delta_{ij} + \delta_{ij}E_j^2),$$

и учитывается так называемый эффект Керра (см. [51 , с. 506]), состоящий в том, что в электрическом поле изотропный кристалл становится оптически одноосным.

Во втором случае в электрическом поле оптически одноосный кристалл может стать оптически анизотропным. Тогда разложение тензора диэлектрической проницаемости начинается со слагаемых первого порядка по полю. В нашем случае это соответствует ситуации $p = 3$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(\delta_{ij} + \delta_{ij}|E_j|).$$

Перейдем к интерпретации результатов теоремы 2. Слагаемое $|u|^q u$ в уравнении (1.7) соответствует наличию источника тока свободных электронов, которые, с точки зрения зонной теории, перешли из зоны валентности полупроводникового кристалла в зону проводимости. При этом они потратили определенную энергию для преодоления барьера. Зависимость тензора диэлектрической проницаемости от поля увеличивает энергию барьера и, стало быть, препятствует переходу из зоны валентности в зону проводимости. Сочетание этих двух факторов и приводит либо к "пробою" полупроводника, либо к постепенному росту энергии электронов, который при учете тепловых потерь, в свою очередь, приводит к "разогреву" полупроводника (см. [52, с. 125]).

Приведем "физически" осмысленные значения параметров исходной задачи, согласованные с результатами теорем 1 и 2:

$$N = 3, \quad p = 3, \quad 2 < q + 2 < 6 \text{ или } N = 3, \quad p = 4, \quad 2 < q + 2 < 6.$$

Как видно, найдутся такие q, что будут иметь место все случаи из условий теоремы 2.

В заключение авторы выражают признательность Ю.Д. Плетнеру за полезное обсуждение полученных в работе результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
2. *Свиридюк Г.А., Федоров В.Е.* Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сибирский матем. журнал. 1995. Т. 36. № 5. С. 1130–1145.
3. *Свиридюк Г.А.* Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 5. С. 216–237.
4. *Свиридюк Г.А., Семенова И.Н.* О разрешимости неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Дифференц. ур-ния. 1988. Т. 24. № 9. С. 1607–1613.
5. *Свиридюк Г.А., Казак В.А.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 2. С. 292–297.
6. Уравнения соболевского типа. Сборник научных работ / Под ред. В.Е. Федорова. Челябинск: Челябинский гос. ун-т, 2002.
7. *Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
8. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999.
9. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научн. книга, 1998.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
11. *Stefanelli U.* On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations // Different. Integral Equations. 2002. V. 15 (8). P. 897–922.
12. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear differential equation // Math. Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc., 1997. Vol. 49.
13. *Ляшко С.И.* Обобщенное управление линейными системами. Киев: Наук. думка, 1998.
14. *Кожанов А.И.* Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником // Сибирский матем. журнал. 1994. Т. 35. № 5. С. 1062–1073.
15. *Кожанов А.И.* Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 70.
16. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1237–1249.
17. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения составного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 11. С. 1647–1654.
18. *Корпусов М.О.* Глобальная разрешимость и разрушение за конечное время решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 6. С. 849–866.
19. *Корпусов М.О.* К вопросу о разрушении за конечное время решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения $Au_t = F(u)$ // Дифференц. ур-ния.
20. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Энергетическая оценка при $t \longrightarrow \infty$ для решения нелинейного уравнения псевдопараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 8. С. 1200–1206.
21. *Корпусов М.О.* "Разрушение" решения псевдопараболического уравнения с производной по времени от нелинейного эллиптического оператора // Ж. вычисл. матем. и матем физ. 2002. Т. 42. № 12. С. 1788–1795.
22. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 1. С. 95–110.

23. *Гладков А.Л.* Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 356.
24. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
25. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
26. *Пятков С.Г.* Краевые задачи для некоторых уравнений и систем, возникающих в теории электрических цепей // Актуальные вопр. соврем. матем. 1995. № 1. С. 121–133.
27. *Guowang C., Shubin W.* Existence and non-existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1995. V. 36. № 3. P. 475–487.
28. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматгиз, 1998.
29. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Univ. Tokyo. 1966. Sect. IA. V. 13. P. 109–124.
30. *Levine H.A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational. Mech. Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.
31. *Amann H., Fila M.* A fujita-type theorem for the laplace equation with a dynamical boundary condition // Acta Math. Univ. Comenianae. 1997. V. 66. № 2. P. 321–328.
32. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
33. *Rossi J.D.* The blow-up rate for a semilinear parabolic equation with a nonlinear boundary condition // Acta. Math. Univ. Comenianae. 1998. V. 67. № 2. P. 343–350.
34. *Egorov Yu.V., Kondratiev V.A.* On blow-up solutions for parabolic equations of second order // Different. Equations, Asymptotic Analys. and Math. Phys. Berlin: Akad. Verlag, Ser. Math. Res. 1997. V. 100. P. 77–84.
35. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. Матем. ин-та РАН. М., 2001. Т. 232. С. 1–222.
36. *Лаптев Г.Г.* Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Тр. Матем. ин-та РАН. М., 2001. Т. 232. С. 223–235.
37. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
38. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
39. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
40. *Gao H., Ma T.F.* Global solutions for a nonlinear wave equation with the p-laplacian operator // Electron. J. Qualitativ. Theory of Different. Equat. 1999. № 11. С. 1–13.
41. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.
42. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
43. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
44. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
45. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
46. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи. М.: Мир, 1971.
47. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
48. *Дьяченко М.И., Ульянов П.Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
49. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.
50. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
51. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
52. *Басс Ф.Г., Бочков В.С., Гуревич Ю.Г.* Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках. М.: Наука, 1984.