М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003, том 43, номер 1, 95–110

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2003, том 43, № 1, с. 95–110

УДК 519.632.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С НЕЛИНЕЙНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1)]

© 2003 г. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, физфак)
e-mail: korpusov@rsci.ru

Поступила в редакцию 22.03.02 г.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием псевдопараболического типа. При некоторых условиях на исходные данные доказана глобальная во времени разрешимость. При некоторых других условиях на начальные данные доказано несуществование глобального во времени решения. Причем получен результат Фуджиты о несуществовании глобального во времени положительного решения даже при “малых” в некотором смысле начальных функциях. Библ. 19.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в полупространстве $x_3 > 0$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, расположен полупроводник, а в полупространстве $x_3 < 0$ расположен диэлектрик. Предположим, что в полупроводнике отсутствуют свободные заряды и на границе $x_3 = 0$ расположены источники свободных зарядов, скорость роста плотности которых зависит от потенциала $\varphi(x, t)$ самосогласованного поля по закону $|\varphi|^q\varphi$, $q > 0$. Будем обозначать величины, относящиеся к полупроводнику ($x_3 > 0$), индексом 2 снизу, а относящиеся к диэлектрику ($x_3 < 0$) – индексом 1 снизу. Выберем направление нормали к плоскости $x_3 = 0$ из среды диэлектрика к среде полупроводника.

Справедливы следующие уравнения в полупространствах диэлектрика и полупроводника соответственно (см. [1]):

$$\operatorname{div}\mathbb{D}_1 = 4\pi\rho_1, \quad \operatorname{rot}\mathbb{E}_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbb{B}_1}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbb{B}_1 = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbb{H}_1 = 0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbb{D}_2 = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbb{E}_2 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbb{B}_2 = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbb{H}_2 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbb{D}_2}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbb{J}_2, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{B}_i = \mu_i\mathbb{H}_i, \quad \mathbb{H}_1 = -\nabla\psi_1, \quad \mathbb{D}_i = \varepsilon_i\mathbb{E}_i, \quad \mathbb{J}_i = \sigma_i\mathbb{E}_i, \quad \mathbb{E}_2 = -\nabla\varphi_2, \quad i = \overline{1, 2}, \tag{1.3}$$

где $i = \overline{1, 2}$, $\mathbb{D}_i$ – векторы индукции электрического поля, $\mathbb{E}_i$ – векторы напряженности электрического поля, $\mathbb{B}_i$ – векторы индукции магнитного поля, $\mathbb{H}_i$ – векторы напряженности магнитного поля, $\mathbb{J}_i$ – векторы плотности токов свободных зарядов, причем плотность токов свободных зарядов в диэлектрике предполагается отсутствующей, μ_i – магнитные проницаемости, ε_i – диэлектрические проницаемости, σ_i – электрические проводимости, ψ_1 – скалярный магнитный потенциал диэлектрика, φ_2 – потенциал электрического поля полупроводника. Введем обозначения

$$\mathbb{E} \equiv \mathbb{E}_1, \quad \mathbb{H} \equiv \mathbb{H}_2, \quad \varphi \equiv \varphi_2, \quad \psi \equiv \psi_1.$$

Тогда система уравнений (1.1) – (1.3) примет вид

$$\Delta\varphi = 0, \quad \operatorname{div}\mathbb{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbb{H} = -\frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi - \frac{4\pi\sigma_2}{c}\nabla\varphi, \quad x_3 > 0, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

$$\Delta\psi = 0, \quad \operatorname{div}\mathbb{E} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbb{E} = -\frac{\mu_1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi, \quad x_3 < 0, \quad t > 0. \tag{1.5}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00253, 01-01-06002).

С другой стороны, граничные условия на плоскости $x_3 = 0$ имеют вид (см., например, [2, с. 426])

$$-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - \varepsilon_1(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = 4\pi\omega, \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} = \sigma_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - \sigma_1(\mathbf{E}, \mathbf{n}) + |\varphi|^q\varphi, \quad q > 0, \tag{1.6}$$

$$\mu_1\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \mu_2(\mathbf{H}, \mathbf{n}), \quad [\mathbf{H}, \mathbf{n}] + [\nabla\psi, \mathbf{n}] = 0, \quad [\mathbf{E}, \mathbf{n}] + [\nabla\varphi, \mathbf{n}] = 0, \quad \left(\varepsilon_1\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma_1\mathbf{E}, \mathbf{n}\right) = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $\omega(x_1, x_2, t)$ – плотность свободных электронов на границе раздела полупроводник – диэлектрик. Условия (1.6) являются следствиями уравнений из [2]. Условие (1.7) имеет физический смысл отсутствия тока свободных зарядов через границу $x_3 = 0$. Система уравнений (1.4), (1.5) и граничные условия (1.6), (1.7) редуцируются к трем задачам.

Задача 1.

$$\Delta\varphi = 0, \quad x_3 > 0, \quad t > 0, \quad -\varepsilon_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - \varepsilon_1(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = 4\pi\omega, \quad x_3 = 0, \quad t > 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \sigma_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - \sigma_1(\mathbf{E}, \mathbf{n}) + |\varphi|^q\varphi, \quad q > 0, \quad x_3 = 0, \quad t > 0, \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}\left(\varepsilon_1\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma_1\mathbf{E}, \mathbf{n}\right) = 0, \quad x_3 = 0, \quad t > 0,\\ \varphi(x', x_3, t)\big|_{x_3 = 0,\, t = 0} = \varphi_0(x'), \quad x' \equiv (x_1, x_2).\end{gathered} \tag{1.10}$$

В дальнейшем мы займемся этой задачей. Без ограничения общности будем считать $\varepsilon_2 = \sigma_2 = 1$. Введем оператор следа $\gamma : \gamma u(x', x_3) = v(x')$, и поскольку

$$\partial/\partial\mathbf{n} = -\partial/\partial x_3,$$

то в силу граничного условия (1.10) и из граничных условий (1.8), (1.9) получим, что дифференциальным следствием задачи (1.8) будет следующая задача ($u \equiv \varphi$):

$$\Delta u = 0, \quad x_3 > 0, \quad t > 0, \tag{1.11}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + |u|^q u\right)\right|_{x_3 = 0} = 0, \quad v(x', t) \equiv \gamma u(x_3, x', t), \quad x' \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \tag{1.12}$$

$$v(x', 0) = v_0(x'), \quad x' \in \mathbb{R}^2. \tag{1.13}$$

Дополнительно потребуем, чтобы функция φ была ограничена в полупространстве $x_3 > 0$. Таким образом, из задачи 1 находим функцию φ. Тогда имеет смысл

Задача 2.

$$\Delta\psi = 0, \quad x_3 < 0, \quad t > 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} \equiv -\frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi - \frac{4\pi\sigma_2}{c}\nabla\varphi, \quad x_3 > 0, \quad t > 0,$$

$$\mu_1\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \mu_2(\mathbf{H}, \mathbf{n}), \quad [\mathbf{H}, \mathbf{n}] + [\nabla\psi, \mathbf{n}] = 0, \quad x_3 = 0, \quad t > 0.$$

Решая эту задачу, находим функцию ψ, определенную в полупространстве $x_3 < 0$. В этом случае определена

Задача 3.

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu_1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi, \quad x_3 < 0, \quad (\mathbf{E}, \mathbf{n}) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{n})e^{-4\pi\sigma_1/(\varepsilon_1 t)}, \quad x_3 = 0, \quad t \ge 0,$$

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}] = (-[\nabla\varphi, \mathbf{n}]), \quad x_3 = 0, \quad t > 0.$$

По всей видимости, задача (1.11)–(1.13) является относительно новой в теории псевдопараболических уравнений. Поэтому приведем обзор результатов по общей теории псевдопараболических уравнений и близких задач для уравнения Лапласа с нелинейными динамическими граничными условиями. Во-первых, отметим результаты из [3], в которой исследуются псевдопараболические нелинейные уравнения либо с вырожденным оператором при производной во времени, либо с незнакоопределенным оператором при производной во времени. Широкий спектр результатов получен в [4]. Вопрос о разрушении за конечное время решений уравнений псевдопараболического типа рассматривался в [5]. Однозначная разрешимость абстрактной задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами изучалась в [6]. Разрушение за конечное время и существование глобального во времени ограниченного решения нелинейного уравнения Буссинеска с источником вида

$$u_t - \Delta\psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0$$

исследовалось в [7]. В [8] были предложены физические модели, приводящие к нелинейным уравнениям псевдопараболического типа. В [9], [10] были рассмотрены начально-краевые задачи псевдопараболического типа и изучены вопросы существования глобальных во времени решений и разрушения решений за конечное время. Наконец, в [11] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа

$$u_t = c\Delta u_t + \varphi(u).$$

В [12] рассматривалась начально-краевая задача для уравнения Лапласа с эволюционными граничными условиями вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \mathbb{n}} + |w|^q w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial \mathbb{n}} + |w|^q w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial \mathbb{n}} + \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^q \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

при этом были получены результаты о локальной разрешимости в слабом обобщенном смысле. В [13] исследовался вопрос глобальной разрешимости и асимптотики при больших временах решения уравнения Лапласа с линейным динамическим граничным условием типа Соболева с производной по времени второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbb{n}} + \Phi\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbb{n}} = 0.$$

Наконец, в [14] исследовался вопрос глобальной разрешимости и разрушения за конечное время решения уравнения Лапласа с нелинейным граничным условием вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \mathbb{n}} = u^{1+q}, \quad q > 0,$$

при этом, в частности, был получен результат Фуджиты [15] о разрушении решения этого уравнения за конечное время даже для малых начальных функций задачи.

В заключение отметим, что при исследовании тех или иных задач для нелинейных псевдопараболических уравнений используется техника, развитая для изучения нелинейных задач для квазилинейных параболических уравнений. В этой связи отметим работу [16] (см. также библиографию в ней).

2. РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ (1.11) – (1.13) К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Под решением задачи (1.11) – (1.13) будем понимать функцию $u(x_3, x', t)$ из следующего класса.

Класс $\mathbb{K}$. Для любого $t > 0$ имеем $u(x_3, x', t) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^3_+)$, причем $u(x_3, x', t)$ ограничена в полупространстве $x_3 > 0$, $x' \equiv (x_1, x_2)$. Для любого $x' \in \mathbb{R}^2$ фиксированного $u(x_3, x', t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\mathbb{R}}^1_+))$, $v(x', t) \equiv \gamma u(x_3, x', t)$, $v(x', t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; W^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]})$, $\beta > 2$. Причем граничное условие (1.12) понимается как поточечный предел при $(x', t) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^1_+$ фиксированном каждого слагаемого, определенного в полупространстве $x_3 > 0$, при $x_3 \downarrow +0$. Кроме того, будем предполагать, что

$$v_0(x') \in \mathbb{W}^{2,\infty}((1 + |x'|^2)^{\alpha/2}; \mathbb{R}^2), \quad \alpha > 2.$$

Теорема 1. *В классе* **K** *задача* (1.11)–(1.13) *эквивалентна системе интегральных уравнений*

$$u(x', x_3, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{x_3 v_0(y) e^{-t}}{\left(x_3^2 + |x' - y|^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, s) e^{-(t-s)}}{\sqrt{x_3^2 + |x' - y|^2}}, \quad x_3 > 0, \tag{2.1}$$

$$v(x', t) = v_0(x')e^{-t} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, s) e^{-(t-s)}}{|x' - y|}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Обозначим через $\hat{u}(\xi) = \hat{F}[u](\xi)$ преобразование Фурье по переменной $x' \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ в смысле распределений медленного роста $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^2)$. Тогда из (1.11) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\hat{u}(\xi, x_3, t) - |\xi|^2 \hat{u}(\xi, x_3, t) = 0, \quad x_3 > 0, \quad t > 0.$$

Отсюда

$$\hat{u}(\xi, x_3, t) = \hat{v}(\xi, t) e^{-x_3|\xi|}. \tag{2.3}$$

Из (1.12) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}(\xi, t) + \hat{v}(\xi, t) = \frac{1}{|\xi|}\widehat{|v|^q v}(\xi, t),$$

откуда следует

$$\hat{v}(\xi, t) = \hat{v}_0(\xi)e^{-t} + \int_0^t ds e^{-(t-s)} \frac{1}{|\xi|}\widehat{|v|^q v}(\xi, s). \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) вытекает

$$\hat{u}(\xi, x_3, t) = \hat{v}_0(\xi) e^{-t - x_3|\xi|} + \int_0^t ds e^{-(t-s)} \frac{1}{|\xi|} e^{-x_3|\xi|}\widehat{|v|^q v}(\xi, s). \tag{2.5}$$

Предположим, что $v_0(x') \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$, $|v|^q v \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Заметим, что справедливо одно вспомогательное утверждение, доказательство которого аналогично рассуждениям работы [17, с. 167]: если $f \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)$, $g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$, то преобразование Фурье свертки $F[f * g]$ в смысле $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^2)$ существует и равно $F[f]F[g]$.

Действительно, $\forall w \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

$$(f * g, w) \equiv (f(x), (g(y), w(x + y))),$$

$$(F[f * g], w) \equiv (f * g, F[w]) = \left(f(x), \left(g(y), \int_{\mathbb{R}^2} w(\xi) e^{i\langle x + y, \xi\rangle} d\xi\right)\right) =$$

$$= \left(f(x), \int_{\mathbb{R}^2} (g, e^{i\langle \xi, y\rangle}) e^{i\langle \xi, x\rangle} w(\xi) d\xi\right) = \left(f, \int_{\mathbb{R}^2} F[g](\xi) w(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle} d\xi\right) =$$

$$= (f, F[F[g]w]) = (F[f], F[g]w) = (F[f]F[g], w).$$

Таким образом, в силу (2.5), любое решение задачи (1.11) – (1.13) может быть представлено в виде

$$u(x', x_3, t) = p_{x_3}(x') * v_0(x')e^{-t} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds e^{-(t-s)} \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, s)}{\sqrt{x_3^2 + |x' - y|^2}}, \quad t > 0, \quad x_3 > 0, \tag{2.6}$$

где

$$p_{x_3}(x') \equiv \frac{1}{2\pi}\frac{x_3}{(x_3^2 + |x'|^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, в классе $\mathbb{K}$ из задачи (1.11) – (1.13) следует интегральное уравнение (2.6). Теперь докажем возможность перехода к пределу при $x_3 \downarrow 0$ в интегральном уравнении (2.6) в классе $\mathbb{K}$. При этом воспользуемся стандартной техникой (см., например, [18, с. 151]).

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части равенства (2.6). Воспользуемся очевидным соотношением

$$p_{x_3}(x') * v_0(x') - v_0(x') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} dz \frac{1}{(1 + |z|^2)^{3/2}}[v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi_A} + \int_{\Pi_A}\right)\frac{dz}{(1 + |z|^2)^{3/2}}[v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')],$$

где $\Pi_A \equiv [-A, A] \times [-A, A]$. Это позволит получить некоторые оценки для каждого из интегралов в правой части полученного соотношения:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi_A} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{3/2}}[v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')]\right| \le 2M \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi_A} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{3/2}} < 2\pi\varepsilon$$

при достаточно большом $A > 0$. Пусть $0 < x_3 < \delta$ и δ выбрано столь малым, что $|(x' - x_3 z) - x'| < 2A\delta = \delta_1$; тогда, в силу непрерывности функции $v_0(x')$,

$$|v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')| < \pi\varepsilon/(2A^2),$$

и, наконец, справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Pi_A} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{3/2}}[v_0(x' - x_3 z) - v_0(x')]\right| < \varepsilon/2.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $0 < A < +\infty$ и $\delta = \delta(\varepsilon, A)$, что

$$|p_{x_3}(x') * v_0(x') - v_0(x')| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < x_3 < \delta.$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x_3 \downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, t)}{\sqrt{x_3^2 + |x' - y|^2}} = \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, t)}{|x' - y|}.$$

В силу того, что $v(x;, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{L}^\infty(1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2))$, имеем

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy(|v|^q v)(y, t)\left[\frac{1}{\sqrt{x_3^2 + |x' - y|^2}} - \frac{1}{|x' - y|}\right]\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^2} dz\frac{1}{|z|}|v|^{1+q}(x' - z, t)\left|\frac{|z|}{\sqrt{x_3^2 + |z|^2}} - 1\right| \le$$

$$\le C\int\limits_0^{+\infty} d\rho\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\frac{1}{(1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho\cos\varphi)^{\beta/2}}\left|\frac{\rho}{\sqrt{x_3^2 + \rho^2}} - 1\right|, \quad \beta > 2.$$

Подынтегральное выражение ограничено сверху функцией

$$f(x, \rho, \varphi) \equiv C(1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho\cos\varphi)^{-\beta/2}.$$

В силу результата леммы 2, из Приложения настоящей работы вытекает

$$\int\limits_0^{+\infty} d\rho\int\limits_0^{2\pi} d\varphi|f(x, \rho, \varphi)| \le C < +\infty.$$

Используя теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега (см., например, [19]), получаем

$$\lim_{x_3 \downarrow +0}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{(|v|^q v)(y, t)}{\sqrt{x_3^2 + |x' - y|^2}} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{(|v|^q v)(y, t)}{|x' - y|}.$$

Теперь, перейдя к пределу при $x_3 \downarrow 0$ в интегральном уравнении (2.1), получим

$$v(x', t) = v_0(x')e^{-t} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{(|v|^q v)(y, t)e^{-(t-s)}}{|x' - y|}.$$

Таким образом, в классе **K** из системы уравнений (1.11)–(1.13) следует система двух интегральных уравнений (2.1) и (2.2).

Докажем обратное утверждение: всякое решение системы интегральных уравнений (2.1), (2.2) в классе **K** является решением задачи (1.11)–(1.13).

С этой целью рассмотрим следующие интегралы:

$$J_1 = p_{x_3}(x') * v_0(x'), \quad J_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{(|v|^q v)(x' - y)}{\sqrt{x_3^2 + |y|^2}}.$$

Пусть $x_3 > 0$, тогда

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_3^2 + |y|^2}}\right)v_0(x' - y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{1}{\sqrt{x_3^2 + |y|^2}}\Delta_{2y}v_0(x' - y).$$

Поскольку $v_0(x') \in \mathbb{W}^{2,\infty}((1 + |x'|^2)^{\alpha/2}; \mathbb{R}^2)$, то справедливо предельное равенство

$$\lim_{x_3 \downarrow 0}\frac{\partial J_1}{\partial x_3} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{1}{|y|}\Delta_{2y}v_0(x' - y).$$

Рассмотрим теперь интеграл J_2 при $x_3 > 0$:

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{x_3}{(x_3^2 + |y|^2)^{3/2}}(|v|^q v)(x' - y, t).$$

Докажем, что

$$\lim_{x_3 \downarrow 0} \frac{\partial J_2}{\partial x_3} = -(|v|^q v)(x', t).$$

Действительно, в силу принадлежности $u(x', t)$ к классу $\mathbb{K}$ имеем $(|v|^q v)(x', t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2))$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial J_2}{\partial x_3} + (|v|^q v)(x', t)\right| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\Pi_A} + \int\limits_{\Pi_A}\right)\frac{dz}{(1+|z|^2)^{3/2}}\left|(|v|^q v)(x' - x_3 z, t) - (|v|^q v)(x', t)\right|.$$

Далее нетрудно доказать (см., например, [18, с. 151]), что $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0,\ \delta(A, \varepsilon) > 0$ такие, что для всех $0 < x_3 < \delta$

$$\left|\frac{\partial J_2}{\partial x_3} + (|v|^q v)(x', t)\right| < \varepsilon.$$

Отметим, что при $x_3 > 0$ для функции $u(x', x_3, t)$, определенной из (2.1), справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3, t) = \frac{1}{2\pi}e^{-t}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \frac{\Delta_{2y} v_0(x' - y')}{\sqrt{x_3^2 + |y|^2}} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds e^{-(t-s)}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \frac{x_3(|v|^q v)(x' - y, s)}{(x_3^2 + |y|^2)^{3/2}},$$

$$\lim_{x_3 \downarrow +0}\frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3, t) = \frac{e^{-t}}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \frac{\Delta_{2y} v_0 x' - y}{|y|} - \int\limits_0^t ds e^{-(t-s)}(|v|^q v)(x', s) = \frac{\partial u}{\partial x_3}(x', 0, t).$$

Следовательно, для любых $x' \in \mathbb{R}^2$ и $t \ge 0$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}}^1_+)).$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_3} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}}^1_+))$$

для любого $x' \in \mathbb{R}^2$ и $t \ge 0$ фиксированных. Причем при $x_3 > 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \frac{x_3}{(x_3^2 + |y|^2)^{3/2}}(|v|^q v)(x' - y).$$

Перейдя к пределу при $x_3 \downarrow 0$ в последнем равенстве, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} + |u|^q u = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0.$$

Кроме того, при $x_3 > 0$ имеем

$$u(x', x_3, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \frac{x_3 v_0(y) e^{-t}}{(x_3^2 + |x' - y|^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, s) e^{-(t-s)}}{\sqrt{x_3^2 + |x' - y|^2}}.$$

Очевидно, что функция $u(x', x_3, t)$ бесконечно дифференцируема в области

$$\{x_3 > 0\} \times \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^1_+$$

и является гармонической по переменным (x', x_3) при $x_3 > 0$, т.е. удовлетворяет уравнению (1.11).

Таким образом, в классе **K** задача (1.11) – (1.13) эквивалентна системе интегральных уравнений (2.1), (2.2). Теорема 1 доказана.

3. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ВО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (2.2)

Пусть $v_0(x') \in \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2)$ при $2 < \beta$, $1 + q^{-1} < \beta < 1 + q$.

Теорема 2 (о существовании). *Для любой функции* $v_0(x')$, *принадлежащей указанному выше классу, при условии* $q > 1$ *и при достаточно "малой" начальной функции* $v_0(x')$

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^2} [|v_0(x')| + |\nabla v_0(x')|](1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]} \le \delta$$

существует единственное решение

$$v(x', t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2))$$

интегрального уравнения

$$v(x', t) = v_0(x')e^{-t} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, s)e^{-(t-s)}}{|x'-y|}, \tag{3.1}$$

в котором интегрирование по $s \in (0, t)$ *понимается в смысле Лебега.*

Доказательство. Обозначив, $w(x', t) \equiv v(x', t)(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}$, из (3.1) получим, что $w(x', t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(x', t) = w_0(x')e^{-1} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy(|w|^q w)(y, s)e^{-(t-s)} f(x', y),$$

$$w_0(x') \equiv v_0(x')(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}, \quad f(x', y) \equiv \frac{(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}}{|y|(1+|x'-y|^2)^{\beta/2}}.$$

Для доказательства теоремы применим метод последовательных приближений, рекуррентно определяя

$$v_1(x', t) \equiv v_0(x')e^{-t}, \quad v_{n+1}(x', t) \equiv v_0(x')e^{-t} + A(v_n)(x', t),$$

$$A(v) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds e^{-(t-s)} \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(x'-y, s)}{|y|}.$$

Введем следующие нормы:

$$\|v\|_0 \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^2, t \ge 0} \left|(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]} v(x', t)\right|, \quad \|v\|_1 \equiv \|v\|_0 + \|\nabla v\|_0. \tag{3.2}$$

Оценим оператор $A(\cdot)$ по норме $\|\cdot\|_1$:

$$\|A(v)\|_1 \le \|A(v)\|_0 + \|\nabla A(v)\|_0,$$

$$|A(v)|(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds e^{-(t-s)} \int_{\mathbb{R}^2} dy f(x', y)|w|^{1+q}(x'-y, s).$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} dy f(x', y) = \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}}{|y|(1+|x'-y|^2)^{\beta/2}}.$$

Используя результат леммы 2 (см. Приложение), мы можем оценить последний интеграл. Окончательно получаем

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x', y) \le C(q, \beta) < +\infty$$

при дополнительных условиях $\beta > 2$, $1 + q^{-1} < \beta \le 1 + q$. Отсюда и из (3.2) получаем

$$|A(v)|(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]} \le C(q, \beta)\|v\|_0^{1+q}, \quad \|A(v)\|_0 \le C\|v\|_0^{1+q}.$$

Получим теперь оценку для $\|\nabla A(v)\|_0$:

$$|\nabla A(v)|(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]} \le \frac{1+q}{2\pi}\int_0^t dse^{-(t-s)}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}}{|y|}(|v|^q|\nabla v|)(x'-y) \le$$

$$\le \frac{1+q}{2\pi}\int_0^t dse^{-(t-s)}\int_{\mathbb{R}^2} dyf(x', y)(|w|^q|\nabla v|)(x'-y)(1+|x'-y|^2)^{\beta/[2(q+1)]} \le C\|v\|_0^q\|\nabla v\|_0,$$

откуда следует, что

$$\|\nabla A(v)\|_0 \le C\|v\|_1^{1+q}.$$

Таким образом,

$$\|A(v)\|_1 < C\|v\|_1^{1+q}. \tag{3.3}$$

Для введенного нелокального оператора $A(v)$ справедливо следующее вспомогательное утверждение, аналогичное утверждению работы [12, с. 490], доказанному в ней для нелинейного степенного оператора.

Лемма 1. *Пусть задано $M > 0$ и $q > 1$. Каковы бы ни были функции z_1 и z_2 такие, что $\|z_i\|_1 \le M$, $i = \overline{1, 2}$, имеем*

$$\|A(z_1) - A(z_2)\|_1 \le \frac{c_1(1+q)^2M^q}{\pi}\|z_1 - z_2\|_1, \quad c_1 = \sup_{x' \in \mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} f(x', y)dy.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$z_{1i} \equiv \frac{\partial z_1}{\partial x_i}, \quad z_{2i} \equiv \frac{\partial z_2}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\left||z_1|^q z_{1i} - |z_2|^q z_{2i}\right| \le M\left||z_1|^q - |z_2|^q\right| + M^q|z_{1i} - z_{2i}| \le$$

$$\le qMM^{q-1}|z_1 - z_2| + M^q|z_{1i} - z_{2i}| \le qM^q[|z_1 - z_2| + |z_{1i} - z_{2i}|],$$

$$\left||z_1|^q z_1 - |z_2|^q z_2\right| \le (1+q)M^q|z_1 - z_2|,$$

$$|A(z_1) - A(z_2)|(1+|x'|^2)^{\beta/[2(1+q)]} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^t dse^{-(t-s)}\int_{\mathbb{R}^2} dyf(x', y)(1+|x'-y|^2)^{\beta/2}\left||z_1|^q z_1 - |z_2|^q z_2\right| \le$$

$$\le \frac{1+q}{2\pi}c_1M^q\|z_1 - z_2\|_0, \quad c_1 = \sup_{x' \in \mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} dyf(x', y),$$

$$\|A(z_1) - A(z_2)\|_0 \le \frac{1+q}{2\pi} c_1 M^q \|z_1 - z_2\|_0,$$

$$|\nabla A(z_1) - \nabla A(z_2)|(1+|x'|^2)^{\beta/[2(1+q)]} \le \frac{1+q}{2\pi}\int\limits_0^t ds e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy f(x', y)(1+|x'-y|^2)^{\beta/2} \sum_{i=1}^2 \left||z_1|^q z_{1i} - |z_2|^q z_{2i}\right| \le$$

$$\le \frac{q(1+q)}{2\pi} M^q c_1 \sum_{i=1}^2 (\|z_1 - z_2\|_0 + \|z_{1i} - z_{2i}\|_0) \le \frac{q(1+q)}{2\pi} c_1 M^q \|z_1 - z_2\|_1,$$

$$\|\nabla A(z_1) - \nabla A(z_2)\|_0 \le \frac{q(1+q)}{\pi} c_1 M^q \|z_1 - z_2\|_1.$$

Отсюда получаем

$$\|A(z_1) - A(z_2)\|_1 \le \frac{c_1(1+q)^2 M^q}{\pi} \|z_1 - z_2\|_1, \quad c_1 = \sup_{x' \in \mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x', y) dy.$$

Лемма доказана.

Из итерационной схемы и (3.3) имеем

$$\|u_{n+1}\|_1 \le \delta + C\|u_n\|_1^{1+q}, \quad \|u_0\|_1 \le \delta.$$

Отсюда следует (см., например, [12, с. 490]), что при достаточно малом $\delta > 0$ будет $\|u_n\| \le u_n \le$ $\le M(\delta) \longrightarrow +0$. Из леммы 1 получаем

$$\|u_{n+1} - u_n\|_1 = \|A(u_n) - A(u_{n-1})\|_1 \le \frac{c_1}{\pi}(1+q)^2 M(\delta)^q \|u_n - u_{n-1}\|_1.$$

С другой стороны, при достаточно малом $\delta > 0$ получаем

$$\frac{c_1}{\pi}(1+q)^2 M(\delta)^q < \frac{1}{2}, \quad \|u_{n+1} - u_n\|_1 \le \frac{1}{2}\|u_n - u_{n-1}\|_1.$$

Отсюда сразу же получаем сильную сходимость рекуррентной последовательности

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{в} \quad \mathbb{L}^\infty([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2)).$$

Докажем теперь единственность решения интегрального уравнения (3.1). Пусть w_1 и w_2 – два решения уравнения (3.1); тогда

$$|w_1 - w_2| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t ds e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy f(x', y)\left||w_1|^q w_1 - |w_2|^q w_2\right| \le$$

$$\le \frac{1+q}{2\pi}\int\limits_0^t ds e^{-(t-s)} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dy f(x', y) \max\{|w_1|^q, |w_2|^q\}|w_1 - w_2| \le$$

$$\le \frac{1+q}{2\pi} c_1 M^q \int\limits_0^t ds e^{-(t-s)}|w_1 - w_2| \le d\int\limits_0^t ds|w_1 - w_2|,$$

где $d = c_1(1+q)M^q/(2\pi)$,

$$M_i = \sup_{t \ge 0,\, x' \in \mathbb{R}^2} \left|(1+|x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]} w_i\right|, \quad M = \max_i M_i.$$

Таким образом,

$$|w_1 - w_2| \le d\int_0^t ds|w_1 - w_2|,$$

а значит, существует такое $t_0 > 0$, что $w_1 = w_2$ при $t \in [0, t_0]$. Далее, воспользовавшись известным алгоритмом продолжения во времени (см., например, [12]), получаем $w_1 = w_2$ для любого $t \in [0, +\infty]$ и для всех $x' \in \mathbb{R}^2$. Итак, существует единственное решение интегрального уравнения (3.1) класса $\mathbb{L}^\infty([0, +\infty]; W^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2))$.

Докажем, что

$$v(x', t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2)).$$

С этой целью достаточно доказать принадлежность к данному классу второго слагаемого в правой части интегрального уравнения (3.1):

$$\psi(x', t) \equiv \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{(|v|^q v)(y, s)e^{-(t-s)}}{|x' - y|}.$$

Так как

$$v(x', t) \in \mathbb{L}^\infty([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2)),$$

то, очевидно,

$$\psi(x', t) \in \mathbb{AC}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2)).$$

Стало быть,

$$v(x', t) \in \mathbb{AC}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2))$$

и интеграл по s является собственным интегралом Римана. Отсюда сразу же получаем

$$v(x', t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2)).$$

Из явного вида функции $\psi(x', t)$ следует, что

$$v(x', t) \in \mathbb{C}_b^{(1)}([0, +\infty]; \mathbb{W}^{1,\infty}((1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}; \mathbb{R}^2)).$$

Теорема доказана.

Из полученных результатов следует и существование $u(x', x_3, t)$ из (2.1) для любого $t \in [0, +\infty]$ и, в силу теоремы 1, глобальная разрешимость задачи (1.11)–(1.13).

Теорема 3 (о несуществовании). *Справедливы следующие утверждения.*

1^0. *Пусть* $v_0(x') \in \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ *такова, что*

$$0 < \|v_0\|_{q+2}^{q+2} < \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} dxdy \frac{(|v_0|^q v_0)(x)(|v_0|^q v_0)(y)}{|x - y|};$$

тогда найдется такое $0 \le T_0 < +\infty$, *что решение* (3.1):

$$v(x', t) \not\subset \mathbb{L}^\infty([0, T_0); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

2^0. *Пусть* $q \in (0, 1/2)$, $v_0(x') \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^2)$ *и* $v_0 \ge 0$, *причем* $v_0 > 0$ *на множестве положительной меры; тогда любое положительное решение интегрального уравнения* (3.1) *таково, что найдется* $0 \le T_0 < +\infty$ *и*

$$v(x', t) \subseteq \mathbb{L}^\infty([0, T_0); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

Доказательство.

Пусть существует глобальное решение интегрального уравнения (3.1) при условиях, сформулированных либо в п. 1^0 либо в п. 2^0 класса

$$\mathbb{L}^{\infty}([0,+\infty);\, \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2)\cap\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^2)).$$

Тогда, в силу того что оператор в правой части интегрального уравнения (3.1) является "сглаживающим", решение принадлежит классу

$$\mathbb{C}^{(1)}([0,+\infty);\, \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2)\cap\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^2)).$$

В этом случае интегральное уравнение (3.1) можно записать в виде следующей задачи Коши для интегродифференциального уравнения:

$$v_t(x',t)+v(x',t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{(|v|^q v)(y,t)}{|x'-y|},\quad v(x',0) = v_0(x'). \tag{3.4}$$

Введем новую функцию $w = e^t v$; тогда (3.6) примет вид

$$w_t(x',t) = \frac{1}{2\pi}e^{-qt}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dy\frac{(|w|^q w)(y,t)}{|x'-y|}. \tag{3.5}$$

Пусть выполнены условия п. 1^0; тогда, умножая обе части (3.5) на $(|w|^q w)(x',t)$ и интегрируя по $x'\in\mathbb{R}^2$, получаем

$$\frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\|w\|_{q+2}^{q+2} = \frac{1}{2\pi}e^{-qt}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dxdy\frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}. \tag{3.6}$$

С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^2}|w|^q w w_t dx\right|^2 \le \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx|w|^q w_t^2\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx|w|^{q+2}. \tag{3.7}$$

Теперь умножим обе части (3.5) на функцию $(|w|^q w)_t$; тогда после интегрирования по $x'\in\mathbb{R}^2$ получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}(|w|^q w)_t w_t dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-qt}}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dxdy\frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}. \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx|w|^q w_t^2 = \frac{1}{2(1+q)}\frac{1}{2\pi}e^{-qt}\frac{df}{dt},\quad f(t)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dxdy\frac{(|w|^q w)(x,t)(|w|^q w)(y,t)}{|x-y|}.$$

Введем обозначение $\varphi\equiv\|w\|_{q+2}^{q+2}$. Оценки (3.5) – (3.7) приводят к неравенству

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \le (q+2)^2\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx|w|^2 w_t^2\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx|w|^{q+2} \le \frac{q+2}{2(q+1)}e^{-qt}\frac{d}{dt}\left(e^{qt}\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

откуда получаем

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)^{\alpha}} - \alpha\frac{(\varphi'(t))^2}{\varphi(t)^{1+\alpha}} + q\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^{\alpha}} \ge 0,\quad \alpha\equiv 1+\gamma,\quad \gamma\equiv q/(2+q). \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует

$$\left(e^{qt}\frac{\varphi'(t)}{\varphi^{\alpha}(t)}\right)' \geq 0, \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi^{\alpha}} \geq \frac{q+2}{\varphi^{\alpha}}e^{-qt}f(0)\varphi(0)^{-\alpha},$$

что дает $\varphi(0) \geq f(0)(2\pi)^{-1}$, или, иначе,

$$\|v_0\|_{q+2}^{q+2} \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dxdy\frac{(|v_0|^q v_0)(x)(|v_0|^q v_0)(y)}{|x-y|}.$$

Полученное неравенство противоречит п. 1^0 теоремы 3, что и доказывает существование такого $0 \leq T_0 < +\infty$, что

$$v(x', t) \not\subseteq \mathbb{L}^{\infty}([0, T_0); \mathbb{L}^{1+q}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^2)).$$

Докажем теперь п. 2^0.

Пусть выполнены условия п. 2^0. Рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$v_t + v \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2(R)} dy\frac{1}{|x'-y|}v^{1+q}(y, t) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega_2(R)} dy\frac{1}{\sqrt{(x_3-a)^2+|x'-y|^2}}v^{1+q}(y, t),$$

где $\Omega_2(R) \subseteq \mathbb{R}^2$ – круг радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Продолжим предыдущее неравенство:

$$v_t + v \geq 2\int\limits_{\Omega_2(R)} dyG(x', x_3; y, a)v^{1+q}(y, t), \tag{3.10}$$

где $G(x', x_3, y, a)$ – функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндре $D \equiv [0, l] \times \Omega_2(R) \in \mathbb{R}^3_+$. Пусть

$$\varphi_3 \equiv \sin\left(\frac{\pi}{l}x_3\right)c_3 J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right), \quad c_2 \equiv \frac{\mu_1^2}{2\pi R^2}\left[\int\limits_0^{\mu_1} dzJ_0(z)z\right]^{-1},$$

где φ_3 – первая собственная функция первой краевой задачи для оператора Лапласа в цилиндре $D \equiv [0, l] \times \Omega_2(R) \in \mathbb{R}^3_+$, μ_1 – первый корень уравнения $J_0(z) = 0$, где $J_0(z)$ – функция Бесселя I рода. Очевидно, $\varphi_3 > 0$ при $0 \leq r < R$, $0 < x_3 < l$, поэтому, умножая обе части неравенства (3.10) на φ_3 и интегрируя по $(x', x_3) \in D$, получаем

$$\frac{df}{dt} + f \geq 2\int\limits_D dx'dx_3\varphi_3(x', x_3)\int\limits_{\Omega_2(R)} dyG(x', x_3; y, a)v^{1+q}(y, t),$$

$$f(t) \equiv \int\limits_D dx'dx_3 v(x', t)\varphi_3(x', x_3) = \frac{2l}{\pi}f_1(t), \quad f_1(t) \equiv \int\limits_{\Omega_2(R)} dx' v(x', t)\psi_2(x'),$$

$$\psi_2(x') \equiv \frac{\mu_1^2}{2\pi R^2}\left[\int\limits_0^{\mu_1} dzJ_0(z)z\right]^{-1} J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right).$$

Отсюда следует

$$\frac{df_1}{dt} + f_1 \geq \frac{\pi}{l\lambda_3}\int\limits_{\Omega_2(R)} dy\psi_2(y)v^{1+q}(y, t)\sin\frac{\pi a}{l}, \quad \lambda_3 \equiv \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{R}\right)^2.$$

Положим $a = l/2$ и воспользуемся неравенством Йенсена (см., например, [15]); тогда получим

$$\frac{df_1}{dt} + f_1 \geq \frac{\pi}{l\lambda_3}f_1^{1+q}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$f_2(t) \equiv e^t f_1(t), \quad \frac{df_2}{dt} \geq \frac{\pi}{l\lambda_3} e^{-qt} f_2^{1+q}, \quad f_2(0)^{-q} - f_2(t)^q \geq \frac{\pi}{l\lambda_3}(1 - e^{-qt}),$$

$$f_1(0)^{-q} \geq \frac{\pi}{l\lambda_3}, \quad \pi^{-1/q} l^{1/q}\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_1}{R}\right)^2\right]^{1/q} \geq f_1(0).$$

Возьмем $l = R$; тогда получим

$$c_2 R^{-1/q} \geq \frac{\mu_1^2}{2\pi R^2}\left[\int_0^{\mu_1} dz J_0(z) z\right]^{-1} \int_0^{2\pi} ds \int_0^R dr r J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right) v_0(r, s), \quad c_2 \equiv \pi^{-1/q}[(\pi)^2 + (\mu_1)^2]^{1/q}.$$

Предположим, что $\operatorname{supp} v_0(x') \subset \Omega_2(R_0)$, $R_0 \in (0, \infty)$; в этом случае имеем

$$\int_0^{2\pi} ds \int_0^R dr r J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right) v_0(r, s) = \int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} ds dr r J_0\left(\frac{r}{R}\mu_1\right) v_0(r, s) \geq$$

$$\geq \int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} ds dr r J_0\left(\frac{r}{R_0}\mu_1\right) v_0(r, s) = J_0\left(\frac{r_1}{R_0}\mu_1\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} dr r v_0(r, s),$$

$$R > R_0, \quad b = \frac{r_1}{R}\mu_1 < \mu_1, \quad r_1 = r_1(R_0) \in (0, R_0).$$

В итоге получаем $R^{-1/q} \geq c_3 R^{-2}$, что при достаточно большом $R > R_0 > 0$ при условии $q \in (0, 1/2)$ приводит к противоречию. Полученное противоречие доказывает п. 2 теоремы. Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 2. *При условиях* $\beta > 2$, $1 + q^{-1} < \beta$, $q > 0$, *справедливо следующее неравенство*:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} dy f(x', y)\right| \leq C_1(1 + |x'|^2)^{-\beta/[2(q+1)]} + \left\{\begin{array}{ll} C_2, & |x'| \leq \varepsilon < +\infty \\ C_3(|x'|^{-1} + |x'|^{1-\beta}), & |x'| \geq \varepsilon > 0 \end{array}\right\}.$$

Доказательство. В полярной системе координат интеграл в формулировке леммы примет вид

$$\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi [1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho\cos\varphi]^{-\beta/2} =$$

$$= \int_0^{+\infty} d\rho\left(\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} + 2\int_0^\varepsilon\right) d\varphi [1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho\cos\varphi]^{-\beta/2} = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} d\rho \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} d\varphi [1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho\cos\varphi]^{-\beta/2} \leq 2(\pi - \varepsilon)\int_0^{+\infty} d\rho [1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho\cos\varepsilon]^{-\beta/2} \leq$$

$$\leq \frac{2(\pi-\varepsilon)}{[1-\cos\varepsilon]^{\beta/2}}\int_0^{+\infty} d\rho \frac{1}{(1 + \rho^2 + |x'|^2)^{\beta/2}} \leq \frac{2(\pi-\varepsilon)}{(1-\cos\varepsilon)^{\beta/2}}\int_0^{+\infty} d\rho \frac{(1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}}{(1 + \rho^2 + |x'|^2)^{\beta/2}} \frac{1}{(1 + |x'|^2)^{\beta/[2(q+1)]}} \leq$$

$$\leq C_1 \frac{1}{(1 + |x'|^2)^{\beta/[2(1+q)]}}$$

при дополнительном условии $\beta > 1 + 1/q$, $q > 0$;

$$I_2 = 2\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\varepsilon} d\varphi[1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho\cos\varphi]^{-\beta/2} \le 2\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\varepsilon} d\varphi(1 + |x'|^2 + \rho^2 - 2|x'|\rho + |x'|\rho\varphi^2)^{-\beta/2}.$$

Рассмотрим сначала случай $|x'| \le \varepsilon > 0$:

$$I_2 \ge 2\int_0^{+\infty} d\rho \frac{1}{[1 + (|x'| - \rho)^2]^{\beta/2}} \int_0^{\varepsilon} d\varphi \frac{1}{[1 + |x'|\rho/(1 + |x'|^2 + \rho^2)\varphi^2]^{\beta/2}}.$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл

$$\int_0^{\varepsilon} d\varphi \frac{1}{[1 + |x'|\rho/(1 + |x'|^2 + \rho^2)\varphi^2]^{\beta/2}} \le \frac{\sqrt{1 + (|x'| - \rho)^2}}{\sqrt{|x|\rho}} \int_0^{+\infty} d\psi \frac{1}{(1 + \psi^2)^{\beta/2}},$$

$$I_2 \le \frac{1}{\sqrt{|x'|}} \int_0^{+\infty} d\rho \frac{1}{\sqrt{\rho}[1 + (|x'| - \rho)^2]^{(\beta - 1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{|x'|}} \int_{-|x'|}^{+\infty} dz \frac{1}{\sqrt{z + |x'|}(1 + z^2)^{(\beta - 1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{|x'|}}(J_1 + J_2),$$

где

$$J_1 = \int_{-|x'|/2}^{+\infty} dz \frac{1}{\sqrt{z + |x'|}(1 + z^2)^{(\beta - 1)/2}}, \quad J_2 = \int_{-|x'|}^{+\infty} dz \frac{1}{\sqrt{z + |x'|}(1 + z^2)^{(\beta - 1)/2}},$$

$$J_1 \le C_2/\sqrt{|x'|}, \quad \beta > 2,$$

$$J_2 = \sqrt{|x'|} \int_{-1}^{-1/2} dy \frac{1}{\sqrt{1 + y}(1 + y^2|x'|^2)^{(\beta - 1)/2}} \le C_3 \frac{\sqrt{|x'|}}{|x'|^{\beta - 1}},$$

$$J_2 = \sqrt{|x'|} \int_{-1}^{-1/2} dy \frac{1}{\sqrt{1 + y}(1 + y^2|x'|^2)^{(\beta - 1)/2}} \le C_3 \frac{\sqrt{|x'|}}{|x'|^{\beta - 1}}.$$

Таким образом,

$$I_2 \le C\left[\frac{1}{|x'|} + \frac{1}{|x'|^{\beta - 1}}\right], \quad \beta > 2, \quad |x'| \ge \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим теперь случай $|x'| \le \varepsilon < +\infty$:

$$I_2 \le C\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{\varepsilon} d\varphi \frac{1}{[1 + (|x'| - \rho)^2 + |x'|\rho\varphi^2]^{\beta/2}} \le C\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho \frac{1}{[1 + (|x'| - \rho)^2]^{\beta/2}} \le C\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(1 + z^2)^{\beta/2}} < +\infty$$

при $\beta > 1$. Лемма доказана.

В заключение авторы выражают глубокую признательность И.А. Шишмареву за ценные замечания, улучшившие содержание статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
2. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.: ОГИЗ, 1948.
3. *Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
4. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
5. *Levine H.A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Ration. Mech. and. Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.

6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
7. *Кожанов А.И.* Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 64. № 1. С. 70–75.
8. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1237–1249.
9. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения составного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 11. С. 1716–1724.
10. *Корпусов М.О.* Глобальная разрешимость и разрушение за конечное время решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 6. С. 849–866.
11. *Гладков А.Л.* Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 356–362.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
13. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматгиз, 1998.
14. *Amann H., Fila M.* A fujita-type theorem for the laplace equation with a dynamical boundary condition // Acta Math. Univ. Comenianae. 1997. V. 66. № 2. P. 321–328.
15. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Univ. Tokyo. 1966. Sect. IA. V. 13. P. 109–124.
16. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
17. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
18. *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Изд-во РУДН, 1997.
19. *Дьяченко М.И., Ульянов П.Л.* Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.