

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, К вопросу о глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения составного типа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001, том 41, номер 6, 959–964

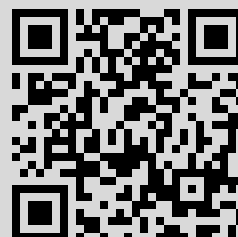
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 15:34:41



УДК 519.634

К ВОПРОСУ О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА¹⁾

© 2001 г. М. О. Корпусов

(119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, физфак)

Поступила в редакцию 02.06.2000 г.

В случае начально-краевой задачи для нелинейного уравнения составного типа, являющейся математической моделью ряда нестационарных физических процессов, приведены условия на начальные данные, обеспечивающие как глобальную разрешимость, так и разрушение классического решения за конечное время T_0 .

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего исследования является изучение вопроса о существовании и несуществовании глобального во времени решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения составного типа

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxx} = f(u_{xx}), \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (1.3)$$

описывающего волны в средах с высокочастотной дисперсией и модельной нелинейностью [1]. Отметим, что в [2] исследовались начально-краевые задачи для родственного уравнения

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxx} = \varphi(u_x),$$

обобщающего волновое уравнение с высокочастотной дисперсией в упругих стержнях

$$u_{tt} - [a_0 + na_1(u_x)^{n-1}]u_{xx} - \beta u_{xxx} = 0.$$

В связи с этим исследование начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) существенно опирается на технику работы [2].

Отметим также, что в [3] исследовались начально-краевые задачи для близкого нелинейного уравнения составного типа:

$$u_{xxx} + \alpha u_{xx} - Q_0(u)_{tt} = 0, \quad Q_0(u) = \beta u - \varphi(u).$$

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ВО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1)–(1.3)

Теорема 1. Для любых $u_0(x), u_1(x) \in C^{(2)}[0, 1]$, $u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$, и для $f(s)$ локально липшиц-непрерывной, найдется $T_0 > 0$ такое, что существует единственное классическое решение

$$u(x, t) \in C^{(2)}([0, T_0]; C^{(2)}[0, 1]),$$

причем, если $|f(s)| \leq A \int_0^s dy f(y) + B$, $A, B > 0$, то $T_0 = +\infty$, а если выполнены следующие условия:

$$1) \int_0^1 (u_{0x} u_{1x} + \beta u_{0xx} u_{1xx}) dx > 0,$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-00013, 01-01-06002).

$$2) \int_0^1 \{u_{1x}^2 + \alpha u_{0xx}^2 + \beta u_{1xx}^2\} dx + \int_0^1 dx \int_0^{u_{0xx}} f(s) ds \leq 0,$$

$$3) f(s)s \leq 2(2\delta + 1) \int_0^s f(s) ds + 2\delta \alpha s^2, \quad \delta > 0,$$

то $T_0 < +\infty$, причем $\lim_{t \nearrow T_0} (\|u_x(x, t)\|_2^2 + \beta \|u_{xx}(x, t)\|_2^2) = +\infty$.

Доказательство. Локальная разрешимость и единственность. Используя технику работы [2], можно доказать, что любое классическое решение $u(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[0, 1])$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$u(x, t) = u_0(x) + u_1(x)t + \int_0^t \int_0^1 (t - \tau) G(x, \xi) [\alpha u_{\xi\xi} + f(u_{\xi\xi})] d\xi d\tau, \quad (2.1)$$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\beta} \sinh(1/\beta)} \begin{cases} \sinh\left(\frac{1-\xi}{\sqrt{\beta}}\right) \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\beta}}\right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \sinh\left(\frac{\xi}{\sqrt{\beta}}\right) \sinh\left(\frac{1-x}{\sqrt{\beta}}\right), & \xi \leq x \leq 1; \end{cases}$$

с другой стороны, каждое решение $u(x, t) \in C([0, T]; C^{(2)}[0, 1])$ интегрального уравнения (2.1), где $u_0(x), u_1(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ и $u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$, является классическим решением задачи (1.1)–(1.3).

Введем оператор

$$Sw = u_0(x) + u_1(x)t + \int_0^t \int_0^1 (t - \tau) G(x, \xi) [\alpha w_{\xi\xi} + f(w_{\xi\xi})] d\xi d\tau.$$

Применим теорему Банаха о неподвижной точке к отображению Sw , действующему на замкнутом выпуклом ограниченном подмножестве

$$P(U, T) = \{u \in X(T), |u|_{X(T)} \leq 2U + 1\}, \quad U = \|u_{0x}\|_{C^1[0,1]} + \|u_{1x}\|_{C^1[0,1]},$$

функционального пространства

$$X(T) = \{u(x, t): u \in C([0, T]; C^{(2)}[0, 1]), u(0, t) = u(1, t) = 0\},$$

пополненного по норме

$$|u|_{X(T)} = \max_{0 \leq t \leq T} [\max_{0 \leq x \leq 1} |u_x(\cdot, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |u_{xx}(\cdot, t)|].$$

С этой целью сначала докажем, что отображение Sw действует из $P(U, T)$ в $P(U, T)$, поскольку S очевидно действует из $X(T)$ в $X(T)$:

$$(Sw)_x = u_{0x}(x) + u_{1x}(x)t + \int_0^t \int_0^1 (t - \tau) G_x(x, \xi) [\alpha w_{\xi\xi} + f(w_{\xi\xi})] d\xi d\tau,$$

$$(Sw)_{xx} = u_{0xx}(x) + u_{1xx}(x)t +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 (t - \tau) G_{xx}(x, \xi) [\alpha w_{\xi\xi} + f(w_{\xi\xi})] d\xi d\tau - \frac{1}{\beta} \int_0^t (t - \tau) [\alpha w_{xx} + f(w_{xx})] d\tau.$$

Очевидно, существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что

$$\|Sw\|_{X(T)} \leq U + TU + C_1 T^2 [2U + 1 + \varphi(2U + 1)], \quad \varphi(\eta) = \max_{|s| \leq \eta} |f(s)|,$$

$$\|Sw\|_{X(T)} \leq U + C_1 T [C_2 (2U + 1) + \varphi(2U + 1)]$$

при $T \leq 1/2$. Если, кроме того,

$$T \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{U+1}{C_1[C_2(2U+1) + \varphi(2U+1)]}\right),$$

то

$$\|Sw\|_{X(T)} \leq 2U+1.$$

Теперь докажем, что отображение w при достаточно малом T относительно U является строго сжимающим на множестве $P(U, T)$:

$$\begin{aligned} (Sw_1 - Sw_2)_x &= \int_0^1 \int_0^1 (t-\tau) G_x(x, \xi) [\alpha(w_{1\xi\xi} - w_{2\xi\xi}) + f(w_{1\xi\xi}) - f(w_{2\xi\xi})] d\xi d\tau, \\ (Sw_1 - Sw_2)_{xx} &= \int_0^1 \int_0^1 (t-\tau) G_{xx}(x, \xi) [\alpha(w_{1\xi\xi} - w_{2\xi\xi}) + f(w_{1\xi\xi}) - f(w_{2\xi\xi})] d\xi d\tau, \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \int_0^1 (t-\tau) [\alpha(w_{1xx} - w_{2xx}) + f(w_{1xx}) - f(w_{2xx})] d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда следует существование таких констант C_3, C_4, C_5 , что

$$\|Sw_1 - Sw_2\|_{X(T)} \leq (C_3 T^2/2) [C_4 + C_5(U)] \|w_1 - w_2\|_{X(T)},$$

где $f(s)$ локально липшиц-непрерывна, $C_5(U): |f(s_1) - f(s_2)| \leq C_5(U)|s_1 - s_2|$, $|s_1|, |s_2| \leq 2U+1$. Из последнего неравенства следует

$$\|Sw_1 - Sw_2\|_{X(T)} \leq \|w_1 - w_2\|_{X(T)}/2$$

при

$$T \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{U+1}{C_1[C_2(2U+1) + \varphi(2U+1)]}, \frac{1}{\sqrt{C_3[C_4 + C_5(U)]}}\right).$$

Таким образом, доказана однозначная разрешимость локально во времени.

Справедлива

Теорема 2 (см. [2, теорема 2.1]). Пусть $u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = 0$, $u_0(x), u_1(x) \in C^{(2)}[0, 1]$, и $f(s)$ локально липшиц-непрерывна. Тогда интегральное уравнение (2.1) имеет единственное решение $u(x, t) \in C^{(2)}([0, T_0); C^{(2)}[0, 1])$, где $[0, T_0)$ – максимальный интервал времени существования решения. Более того, если

$$\sup_{t \in [0, T_0)} (\|u_x\|_{C^{(1)}[0, 1]} + \|u_{xt}\|_{C^{(1)}[0, 1]}) < +\infty,$$

то $T_0 = +\infty$.

Доказательство в точности повторяет доказательство теоремы 2.1 из работы [2].

Глобальная разрешимость задачи (1.1)–(1.3)

Умножая обе части уравнения (1.1) на u_{xx} и интегрируя по частям получившееся выражение на промежутке $[0, 1]$, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_{xt}\|_2^2 + \alpha \|x_{xx}\|_2^2 + \beta \|u_{xxt}\|_2^2 + 2 \int_0^1 \int_0^1 f(s) ds dx \right) = 0.$$

Отсюда при условии, что $u_0, u_1(x) \in C^{(2)}[0, 1]$, $f(s)$ непрерывна, получим

$$\begin{aligned} E(t) &= \|u_{xt}\|_2^2 + \alpha \|x_{xx}\|_2^2 + \beta \|u_{xxt}\|_2^2 + 2 \int_0^1 \int_0^{u_{xx}} f(s) ds dx = \\ &= \|u_{1x}\|_2^2 + \alpha \|x_{0xx}\|_2^2 + \beta \|u_{1xx}\|_2^2 + 2 \int_0^1 \int_0^{u_{0xx}} f(s) ds dx = E(0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Предположим теперь, что выполнено условие 1) теоремы 1. Дифференцируя соотношение (2.1) два раза по x и два раза по t , получаем

$$u_{xxtt} = -\frac{\alpha}{\beta} u_{xx} - \frac{1}{\beta} f(u_{xx}) + \int_0^1 G_{xx}[\alpha u_{\xi\xi} + f(u_{\xi\xi})] d\xi. \quad (2.3)$$

Умножив обе части (2.3) на u_{xxt} , получим

$$\frac{d}{dt} \left(u_{xxt}^2 + \frac{\alpha}{\beta} u_{xx}^2 + \frac{2}{\beta} \int_0^{u_{xx}} f(s) ds \right) = 2 \int_0^1 G_{xx}(x, \xi) [\alpha u_{\xi\xi} + f(u_{\xi\xi})] d\xi u_{xxt}. \quad (2.4)$$

Интегрирование обеих частей уравнения (2.4) по времени t дает

$$u_{ixx}^2 + \frac{\alpha}{\beta} u_{xx}^2 + \frac{2}{\beta} \int_0^{u_{xx}} f(s) ds \leq E_1(x) + 2 \int_0^t \int_0^1 G_{xx}(x, \xi) [\alpha u_{\xi\xi} + f(u_{\xi\xi})] d\xi u_{xxt} d\tau, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} E_1(x) &= u_{1xx}^2 + \frac{\alpha}{\beta} u_{0xx}^2 + \frac{2}{\beta} \left| \int_0^{u_{0xx}} f(s) ds \right|, \\ u_{ixx}^2 + \frac{\alpha}{\beta} u_{xx}^2 + \frac{2}{\beta} \int_0^{u_{xx}} f(s) ds &\leq E_1(x) + \int_0^t \left[\alpha \int_0^1 |G_{xx}(x, \xi)| |u_{\xi\xi}| d\xi + 2C_6 \int_0^1 |f(u_{\xi\xi})| d\xi \right] |u_{xxt}| d\tau \leq \\ &\leq E_1(x) + \int_0^t \left[\alpha \int_0^1 |G_{xx}(x, \xi)| |u_{\xi\xi}| d\xi + 2C_6 A \int_0^1 \int_0^{u_{\xi\xi}} f(s) ds d\xi + 2C_6 B \right] |u_{xxt}| d\tau \leq \\ &\leq E_1(x) + \int_0^t \left[C_7 + C_6 A \int_0^1 |u_{\xi\xi}|^2 d\xi + 2C_6 A \int_0^1 \int_0^{u_{\xi\xi}} f(s) ds d\xi + 2C_6 B \right] |u_{xxt}| d\tau \leq \\ &\leq E_1(x) + \int_0^t [C_8 + C_9 E(0)] |u_{xxt}| d\tau \leq E_1(x) + [C_8 + C_9 E(0)] \frac{T^2}{2} + \int_0^t |u_{xxt}|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Умножив обе части неравенства (2.6) на A и добавив к полученному выражению $2B/\beta$ из условия 1) теоремы 1, получим

$$A u_{xxt}^2 + \frac{A\alpha}{\beta} u_{xx}^2 + \frac{2}{\beta} |f(u_{xx})| \leq M_1(T) + A \int_0^t |u_{xxt}|^2 d\tau. \quad (2.7)$$

Применение неравенства Гронуолла (см., например, [4]) из (2.7) дает

$$A u_{xxt}^2 + \frac{A\alpha}{\beta} u_{xx}^2 + \frac{2}{\beta} |f(u_{xx})| \leq M_1(T) e^{AT}.$$

Таким образом,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{xx}\|_{C[0,1]} + \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{txx}\|_{C[0,1]} + \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(u_{xx})\|_{C[0,1]} \leq M_2(T). \quad (2.8)$$

Дифференцируя (2.1) по x и по t с учетом (2.8), получаем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x\|_{C[0,1]} \leq M_3(T), \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{xt}\|_{C[0,1]} \leq M_4(T),$$

а из (2.3) следует $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{xxt}\|_{C[0,1]} \leq M_5$.

Таким образом, приходим к выводу, что, в силу теоремы 2, при условии 1) теоремы 1 будет $T_0 = +\infty$, т.е. существует единственное глобальное во времени решение задачи (1.1)–(1.3).

Разрушение за конечное время классического решения задачи (1.1)–(1.3)

Пусть выполнены все условия теоремы 1. Введем функцию

$$F(t) = \int_0^1 (u_x^2 + \beta u_{xx}^2) dx,$$

тогда

$$F'(t) = 2 \int_0^1 (u_x u_{xt} + \beta u_{xx} u_{xxt}) dx,$$

$$F''(t) = 2 \int_0^1 (u_{xt}^2 + \beta u_{xxt}^2) dx + 2 \int_0^1 (u_x u_{xtt} + \beta u_{xx} u_{xxtt}) dx,$$

$$[F''(t)]^2 \leq 4 \int_0^1 (u_x^2 + \beta u_{xx}^2) dx \int_0^1 (u_{xt}^2 + \beta u_{xxt}^2) dx.$$

Как легко видеть, из условий (1)–(3) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} F(x)F''(t) - (1 + \delta)[F'(t)]^2 &\geq F \left[2 \int_0^1 (u_{xt}^2 + \beta u_{xxt}^2) dx + 2 \int_0^1 (u_x u_{xtt} + \beta u_{xx} u_{xxtt}) dx - \right. \\ &\quad \left. - 4(1 + \delta) \int_0^1 (u_{xt}^2 + \beta u_{xxt}^2) dx \right] \geq 2F \left[-\alpha \int_0^1 u_{xx}^2 dx - \int_0^1 f(u_{xx}) u_{xx} dx - (2\delta + 1) \int_0^1 (u_{xt}^2 + \beta u_{xxt}^2) dx \right] \geq \\ &\geq 2F \left[-\alpha(2\delta + 1) \int_0^1 u_{xx}^2 dx - 2(2\delta + 1) \int_0^1 f(s) ds - (2\delta + 1) \int_0^1 (u_{xt}^2 + \beta u_{xxt}^2) dx \right] \geq -2FE(0) \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $F(t) > 0$, и, кроме того, в силу условия 1) теоремы 1, $F(0) > 0$, и согласно результатам работ [2], [5] приходим к выводу, что $T_0 < +\infty$, причем

$$\lim_{t \nearrow T_0} (\|u_x\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2) = +\infty.$$

Теорема 1 доказана.

В заключение автор считает приятным долгом выразить признательность своим учителям А.Г. Свешникову за ценные замечания, улучшившие содержание статьи, и Ю.Д. Плетнеру за полезное обсуждение полученных в работе результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович М.И. Автоколебания распределенных систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 477–510.
2. Guowang C., Shubin W. Existence and non-existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1995. V. 36. № 3. P. 475–487.
3. Пятков С.Г. Краевые задачи для некоторых уравнений и систем, возникающих в теории электрических цепей // Актуальные вопр. соврем. матем. 1995. № 1. С. 121–133.
4. Демидович В.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. Levine H.A. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 1–21.