

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, К вопросу об асимптотическом поведении решения задачи Коши для системы уравнений амбиполярной диффузии, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001, том 41, номер 5, 783–795

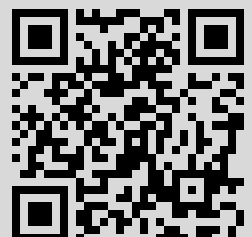
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 15:35:39



УДК 519.63

# К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АМБИПОЛЯРНОЙ ДИФФУЗИИ<sup>1)</sup>

© 2001 г. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119899 Москва, МГУ, физфак, Воробьевы горы)

e-mail: math356@cha.ru

Поступила в редакцию 14.04.2000 г.

Рассматривается задача Коши для системы уравнений амбиполярной диффузии. Получена точная оценка остаточного числа асимптотики при больших временах.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего исследования является получение точной оценки остаточного члена асимптотики при больших временах решения системы уравнений амбиполярной диффузии, в безразмерных переменных имеющей вид (см. [1])

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \Delta u + \operatorname{div}(u \nabla \varphi), \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial v}{\partial t} \equiv \Delta v - \operatorname{div}(v \nabla \varphi), \quad (1.2)$$

$$\Delta \varphi = v - u, \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, \quad (1.4)$$

где

$$\varphi(x, t) = \frac{e\phi(x, t)}{T}, \quad u = \frac{4\pi e^2}{T} N_e, \quad v = \frac{4\pi e^2}{T} N_i, \quad a^2 = D_e, \quad b^2 = D_i;$$

здесь  $\phi(x, t)$  – кулоновский потенциал самосогласованного электрического поля,  $N_e$  и  $N_i$  – концентрация электронов и ионов соответственно,  $D_e$  и  $D_i$  – коэффициенты диффузии электронов и ионов соответственно. Данная система уравнений описывает диффузию заряженных частиц в слабо ионизированном газе. Отметим, что система уравнений, обобщающая (1.1)–(1.3) в ограниченной области, изучалась в [2]. Система уравнений (1.1)–(1.4) исследовалась в [3], где была получена качественная оценка остаточного члена асимптотики. В связи с этим и возникает задача получения точной оценки, для чего существенно используется техника и некоторые результаты из [4]. Заметим, что в настоящей статье рассматривается случай  $N \geq 3$ , а случаи  $N = 1, 2$  требуют отдельного исследования.

## 2. ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Справедлива

**Теорема 1.** Для любых  $u_0(x), v_0(x) \in C^{(2+1)}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $u_0(x), v_0(x) \geq 0$  существует единственное классическое решение  $u(x, t), v(x, t) \in C^{(1)}((0, +\infty); C^{(2)}(\mathbb{R}^N))$ ,  $\varphi(x, t) \in C((0, \infty); C^{(2)}(\mathbb{R}^N))$  задачи (1.1)–(1.4) такое, что

$$u(x, t), v(x, t) \in C([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^N)), \quad p \in [1, \infty],$$

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00013).

$$u(x, t), v(x, t) \in L^\infty([0, \infty); W^{2,p}(\mathbb{R}^N)), \quad p \in [1, \infty],$$

$$u, v \in L^\infty([0, \infty); L^p(\mathbb{R}^N)), \quad p \in [1, \infty],$$

$$\varphi(x, t) \in C((0, \infty); W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)),$$

причем данное решение удовлетворяет следующим априорным оценкам:

$$\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty, \quad \|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty, \quad \|u\|_1 \leq \|u_0\|_1, \quad \|v\|_1 \leq \|v_0\|_1,$$

$$\|u\|_p \leq \frac{C_1}{(C_2 + C_3 t)^{N(1-1/p)/2}}, \quad \|v\|_p \leq \frac{C_4}{(C_2 + C_3 t)^{N(1-1/p)/2}}, \quad p \in [1, \infty), \quad C_k > 0, \quad k = \overline{1, 4}.$$

**Доказательство.**

**Шаг 1. Локальная разрешимость и единственность.** Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$u(t) = G_a(t) * u_0 + \int_0^t ds \nabla G_a(t-s) * [u(s) \nabla \varphi(s)], \quad (2.1)$$

$$v(t) = G_b(t) * v_0 + \int_0^t ds \nabla G_b(t-s) * [v(s) \nabla \varphi(s)], \quad (2.2)$$

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} dy \frac{u(y, t) - v(y, t)}{|x-y|^{N-2}}, \quad (2.3)$$

где знак  $*$  – свертка по пространственной переменной,

$$G_a(x, t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp[-|x|^2/(4a^2 t)], \quad G_b(x, t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp[-|x|^2/(4b^2 t)].$$

Здесь в качестве решения уравнения (1.3) взят ньютоновский потенциал (2.3) (см. [3]). Поскольку для любого классического решения, в котором в качестве решения (1.3) взято (2.3), справедливо представление (2.1)–(2.3), а с другой стороны, любое решение системы уравнений (2.1)–(2.3) класса  $C^{(1)}(0, T; C^{(2)}(\mathbb{R}^N))$  является классическим решением системы (1.1)–(1.4), то, стало быть, системы уравнений (1.1)–(1.4) и (2.1)–(2.3) в классе  $C^{(1)}(0, T; C^{(2)}(\mathbb{R}^N))$  эквивалентны с точностью до выбора решения уравнения (1.3). Поэтому переходим к доказательству локальной разрешимости системы уравнений (2.1)–(2.3).

Определим

$$\psi(u, v) \equiv (\Phi_1(u; v), \Phi_2(v; u)),$$

где

$$\Phi_1(u; v) = G_a(t) * u_0 + \int_0^t ds \nabla G_a(t-s) * [u(s) \nabla \varphi(s)],$$

$$\Phi_2(v; u) = G_b(t) * v_0 + \int_0^t ds \nabla G_b(t-s) * [v(s) \nabla \varphi(s)],$$

и для произвольного  $T > 0$  рассмотрим множество

$$E_T = \{(u, v) \in C([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)) : \|(u, v)\| < +\infty\},$$

где

$$\|(u, v)\| = \sup_{t \in [0, T]} \{\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty + \|u(t)\|_1 + \|v(t)\|_1\}.$$

Пусть, кроме того,  $B_R = \{(u, v) \in E_T : \|(u, v)\| < R\}$ . Докажем, что при достаточно большом  $R > 0$  и малом  $T > 0$  отображение  $\psi(u, v)$  строго сжимающее на множестве  $B_R$ . С этой целью докажем сначала, что это отображение действует из  $B_R$  в  $B_R$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(u; v)\|_\infty &\leq \|u_0\|_\infty + \int_0^t ds \|\nabla G_a(t-s)\|_1 \|u(s) \nabla \varphi(s)\|_\infty \leq \\ &\leq \|u_0\|_\infty + C \int_0^t ds (t-s)^{-1/2} \|u(s) \nabla \varphi(s)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + T^{1/2} C \|(u, v)\|^2, \end{aligned}$$

поскольку

$$\|\nabla G_a(t)\|_1 \leq Ct^{-1/2},$$

$$\|\nabla \varphi\|_\infty \leq C \left\| \int_{\Omega_r(x)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |u(y, t) - v(y, t)| \right\|_\infty + C \left\| \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_r(x)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} |u(y, t) - v(y, t)| \right\|_\infty,$$

где  $\Omega_r(x)$  – шар радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x$ . Из последнего неравенства получаем

$$\|\nabla \varphi\|_\infty \leq C(\|u - v\|_\infty + \|u - v\|_1).$$

Теперь докажем неравенство

$$\|\Phi_1(u; v)\|_1 \leq \|u_0\|_1 + T^{1/2} C \|(u, v)\|^2.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(u, v)\|_1 &\leq \|u_0\|_1 + \int_0^t ds \|\nabla G_a(t-s)\|_1 \|u(s) \nabla \varphi(s)\|_1 \leq \|u_0\|_1 + C \int_0^t ds (t-s)^{-1/2} \|u(s) \nabla \varphi(s)\|_1 \leq \\ &\leq \|u_0\|_1 + C \int_0^t ds (t-s)^{-1/2} \|u(s)\|_1 \|\nabla \varphi(s)\|_\infty \leq \|u_0\|_1 + CT^{1/2} \|(u, v)\|^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$\|\Phi_2(v; u)\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty + T^{1/2} C \|(u, v)\|^2, \quad \|\Phi_2(v; u)\|_1 \leq \|v_0\|_1 + T^{1/2} C \|(u, v)\|^2.$$

Стало быть,

$$\|\psi(u, v)\| \leq \|(u_0, v_0)\| + T^{1/2} C \|(u, v)\|^2.$$

Отсюда вытекает, что при  $\|(u_0, v_0)\| \leq R/2$  и  $T < 1/(4C^2R^2)$  имеет место неравенство  $\|\psi(u, v)\| \leq R$   $\forall (u, v) \in B_R$ . Таким образом, приходим к выводу, что отображение  $\psi(u, v)$  действует из  $B_R$  в  $B_R$  при выполнении условия  $T < 1/(4C^2R^2)$ .

Перейдем к доказательству строгой сжимаемости отображения  $\psi(u, v)$ . Пусть  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in B_R$ . Рассмотрим разность

$$\Phi_1(u_1; v_1) - \Phi_1(u_2; v_2) = \int_0^t ds \nabla G_a(t-s) * \{(u_1 - u_2) \nabla \varphi_1 - u_2 (\nabla \varphi_2 - \nabla \varphi_1)\}.$$

Оценим последнее равенство по норме  $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ :

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(u_1; v_1) - \Phi_1(u_2; v_2)\|_\infty &\leq CT^{1/2} R \sup_{t \in [0, T]} \{\|u_1 - u_2\|_\infty + \|u_1 - u_2\|_1 + \|v_1 - v_2\|_\infty + \|v_1 - v_2\|_1\} \leq \\ &\leq RCT^{1/2} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|, \end{aligned}$$

поскольку

$$\|\nabla G_a(t)\|_1 \leq Ct^{-1/2},$$

$$\|\Phi_1(u_1; v_1) - \Phi_1(u_2; v_2)\|_1 \leq CT^{1/2} \sup_{t \in [0, T]} \{ \|u_1 - u_2\|_1 \|\nabla \varphi\|_\infty + \|u_2\|_1 \|\nabla \varphi_2 - \nabla \varphi_1\|_\infty \},$$

$$\|\Phi_1(u_1; v_1) - \Phi_1(u_2; v_2)\|_1 \leq RCT^{1/2} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|.$$

Аналогичным образом получаем

$$\|\Phi_2(v_1; u_1) - \Phi_2(v_2; u_2)\|_\infty \leq RCT^{1/2} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|,$$

$$\|\Phi_2(v_1; u_1) - \Phi_2(v_2; u_2)\|_1 \leq RCT^{1/2} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|.$$

Из полученных оценок вытекает, что

$$\|\psi(u_1, v_1) - \psi(u_2, v_2)\| \leq RCT^{1/2} \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\| \leq 0.5 \|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|$$

при  $T \leq 1/(4R^2C^2)$  с некоторой постоянной  $0 < C < +\infty$ , откуда следует, что оператор  $\psi(u, v)$  сжимающий на множестве  $B_R$ .

Таким образом, система интегральных уравнений (2.1)–(2.3) имеет единственное решение  $(u, v)$ .

**Шаг 2.** Классическая разрешимость системы уравнений амбиполярной диффузии. Докажем, что построенное решение системы уравнений (2.1)–(2.3) является классическим. Для этого достаточно доказать, что

$$\operatorname{div}(u \nabla \varphi), \operatorname{div}(v \nabla \varphi) \in \mathbb{L}^\infty([0, T]; \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^N)) \cap \mathbb{C}^{(0)}([0, T] \times \mathbb{R}^N).$$

Подробное доказательство этого утверждения получено авторами и будет опубликовано позднее. Действительно, в этом случае (см., например, [5])  $\Phi_1(u; v)$ ,  $\Phi_2(v; u)$  принадлежат классу  $\mathbb{C}^{(1,2)}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ . Введем обозначения

$$g_{01}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} dy G_a(x - y, t) u_0(y), \quad g_{02}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} dy G_b(x - y, t) v_0(y),$$

$$g_1(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dy ds \nabla_y G_a(x - y, t - s) u(y, s) \nabla_y \varphi(y, s),$$

$$g_2(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dy ds \nabla_y G_b(x - y, t - s) v(y, s) \nabla_y \varphi(y, s).$$

Отметим, что  $g_{01}(x, t)$  и  $g_{02}(x, t)$  при  $t > 0$  – бесконечно дифференцируемые функции, поэтому переходим к анализу функций  $g_1(x, t)$  и  $g_2(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{|g_1(x, t) - g_1(x', t)|}{|x - x'|} &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dz ds |\nabla_z G_a(z, t - s)| \times \\ &\times \left[ \left| \frac{u(x + z, s) - u(x' + z, s)}{|x - x'|} \nabla_z \varphi(x + z, s) \right| + \left| \frac{\nabla_z \varphi(x + z, s) - \nabla_z \varphi(x' + z, s)}{|x - x'|} u(x' + z, s) \right| \right] \leq \\ &\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dz ds \frac{1}{(t - s)^{N/2 + 1/2}} \exp\{-C|z|^2/[a^2(t - s)]\} \times \\ &\times \left[ \left| \frac{u(x + z, s) - u(x' + z, s)}{|x - x'|} \nabla_z \varphi(x + z, s) \right| + \left| \frac{\nabla_z \varphi(x + z, s) - \nabla_z \varphi(x' + z, s)}{|x - x'|} u(x' + z, s) \right| \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$\left| \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi(y, t)}{\partial y_i} \right| |x - y|^{-1} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right|.$$

Справедливо следующее представление для второй производной ньютоновского потенциала [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \int_{B_r(x)} \frac{\partial^2 \Gamma(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} (u(y, t) - u(x, t) + v(x, t) - v(y, t)) dy + \\ &+ [u(x, t) - v(x, t)] \int_{|x-y|=r} \frac{\partial \Gamma(x-y)}{\partial x_i} v_j(y) ds + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(x)} \frac{\partial^2 \Gamma(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} (u(y, t) - v(y, t)) dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое предыдущего равенства:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B_r(x)} \frac{\partial^2 \Gamma(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} (u(y, t) - u(x, t) + v(x, t) - v(y, t)) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{B_r(0)} \left| \frac{\partial^2 \Gamma(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right| |u(x+z, t) - u(x, t) + v(x, t) - v(x+z, t)| dz \leq C([u]_1 + [v]_1) \int_{B_r(0)} \frac{1}{|z|^{N-1}} dz \leq C([u]_1 + [v]_1), \\ &\left| [u(x, t) - v(x, t)] \int_{|x-y|=r} \frac{\partial \Gamma(x-y)}{\partial x_i} v_j(y) ds \right| \leq (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) \int_{|z|=r} \left| \frac{\partial \Gamma(z)}{\partial z} \right| ds_z \leq C(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty), \\ &\left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(x)} \frac{\partial^2 \Gamma(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} [u(y, t) - v(y, t)] dy \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)} \frac{1}{|z|^N} |u(x+z, t) - v(x+z, t)| dz \leq C(\|u\|_1 + \|v\|_1). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C([u]_1 + [v]_1 + \|u\|_\infty + \|v\|_\infty + \|u\|_1 + \|v\|_1).$$

Таким образом,

$$\frac{|g_1(x, t) + g_1(x', t)|}{|x - x'|} \leq CT^{1/2} [\|(u, v)\| ([u]_1 + [v]_1) + \|(u, v)\|^2],$$

где

$$[u]_1 = \sup_{[0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|u(y_1, t) - u(y_2, t)|}{|y_1 - y_2|}.$$

Поскольку  $u(x, t) = g_{01}(x, t) + g_1(x, t)$ , то приходим к выводу, что

$$[u]_1 \leq [u_0]_1 + CT^{1/2} [\|(u, v)\| ([u]_1 + [v]_1) + \|(u, v)\|^2];$$

аналогично, для  $v(x, t)$  выводим

$$[v]_1 \leq [v_0]_1 + CT^{1/2} [\|(u, v)\| ([u]_1 + [v]_1) + \|(u, v)\|^2],$$

откуда немедленно получаем

$$[u]_1 \leq \frac{([u_0]_1 + [v_0]_1) + CT^{1/2} R^2}{1 - CT^{1/2} R}.$$

при  $t \in [0, T]$ ,  $T < 1/(4C^2R^2)$ ,  $T > 0$ . Аналогичная оценка имеет место для  $v(x, t)$ . Тем самым доказано, что функции  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  являются липшиц-непрерывными по  $x$  равномерно по  $t \in [0, T]$ , ограниченными и непрерывными при  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$ . Используя стандартный алгоритм продолжения решения во времени, можно доказать, что решение системы уравнений (2.1)–(2.3) липшиц-непрерывно по  $x$  и непрерывно во времени на интервале существования решения  $t \in (0, T_{\max})$ . Точно так же, как при выводе оценки (2.8) работы [7, с. 321], получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in C([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Докажем теперь, что  $\text{div}(u \nabla \varphi) \in L^\infty([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N))$ . Так как  $u, v \in C([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ , то ньютоновский потенциал  $\varphi(x, t) \in C((0, T); C^2(\mathbb{R}^N))$  и  $\Delta \varphi(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$ , поэтому

$$\text{div}(u \nabla \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi) + u(v - u).$$

Поскольку  $u, v \in C([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ , то  $u(v - u) \in C([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N))$ . Позже докажем, что  $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N} \frac{|(\nabla u, \nabla \varphi)(y_1) - (\nabla u, \nabla \varphi)(y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq \\ & \leq \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N} \frac{|(u(y_1) - \nabla u(y_2), \nabla \varphi(y_1))|}{|y_1 - y_2|} + \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^N} \frac{|(\varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2), \nabla u(y_2))|}{|y_1 - y_2|} \leq \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty \right] \right\} \leq \\ & \leq C \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \|(u, v)\| \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty (\|u\|_1 + \|v\|_1 + \|(u, v)\|) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно доказать, что  $\text{div}(v \nabla \varphi) \in L^\infty([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N))$ . Тем самым доказана классическая разрешимость задачи (1.1)–(1.4) локально во времени.

**Лемма 3.** Доказательство принадлежности решения классу

$$u(x, t), v(x, t) \in L^\infty([0, T]; W^{2,p}(\mathbb{R}^N)), \quad p \in [1, +\infty],$$

$$u, v_t \in L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R}^N)), \quad p \in [1, +\infty].$$

Докажем сначала, что  $\nabla u, \nabla v \in L^p(\mathbb{R}^N)$  для  $p \in [1, \infty]$ . Как мы уже раньше замечали, поскольку  $u, v \in C([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ , то  $\varphi(x, t) \in C((0, T); C^2(\mathbb{R}^N))$  и  $\Delta \varphi = v - u$  и справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \nabla u = & - \int_{\mathbb{R}^N} dy \nabla_y G_a(x - y, t) u_0(y) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dy ds \nabla_y G_a(x - y, t - s) u(y, s) [v(y, s) - u(y, s)] + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dy ds \nabla_y G_a(x - y, t - s) (\nabla u(y, s), \nabla \varphi(y, s)). \end{aligned}$$

При  $0 \leq t \leq T$  имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_p & \leq \|\nabla u_0\|_p + CT^{1/2} \|u(v - u)\|_p + CT^{1/2} \|\nabla u\|_p \|(u, v)\| \leq \\ & \leq \|\nabla u_0\|_p + CT^{1/2} \|(u, v)\|^2 + CT^{1/2} \|\nabla u\|_p \|(u, v)\|, \quad p \in [1, \infty], \end{aligned}$$

$$\|\nabla u\|_{\infty} \leq \|\nabla u_0\|_{\infty} + CT^{1/2} \|(u, v)\|^2 + CT^{1/2} \|\nabla u\|_{\infty} \|(u, v)\|, \quad p = \infty,$$

откуда получаем оценки

$$\|\nabla u\|_{\infty} \leq \frac{\|\nabla u_0\|_{\infty} + CT^{1/2} R^2}{1 - CT^{1/2} R}, \quad t \in [0, T],$$

$$\|\nabla u\|_p \leq \frac{\|\nabla u_0\|_p + CT^{1/2} R^2}{1 - CT^{1/2} R}, \quad t \in [0, T], \quad T < 1/(4C^2 R^2), \quad 0 < t < T.$$

Аналогичным образом устанавливаются оценки для  $v(x, t)$ . Таким образом,  $\nabla u, \nabla v \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)$  для  $p \in [1, \infty]$ . Поскольку  $v, u \in \mathbb{C}([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N))$ , то справедлива следующая цепочка равенств:

$$\text{div}(u \nabla \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi) + u(v - u).$$

Оценим последнее равенство по норме  $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $p \in [1, \infty]$ :

$$\|\text{div}(u \nabla \varphi)\|_p \leq \|(\nabla u, \nabla \varphi)\|_p + \|u(v - u)\|_p \leq \|\nabla \varphi\|_{\infty} \|\nabla u\|_p + \|u\|_{\infty} (\|u\|_p + \|v\|_p).$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{div}(u \nabla \varphi), \text{div}(v \nabla \varphi) \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N), \quad p \in [1, \infty],$$

Тем самым доказано, что

$$u(x, t), v(x, t) \in \mathbb{L}^{\infty}([0, T]; \mathbb{W}^{2,p}(\mathbb{R}^N))_{\text{tr}}, \quad v_t \in \mathbb{L}^{\infty}([0, T]; \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)), \quad p \in (1, +\infty).$$

Докажем теперь принадлежность  $u(x, t), v(x, t)$  классу  $\mathbb{L}^{\infty}([0, T]; \mathbb{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N))$ . Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_i} \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} dy \frac{\partial \nabla G_a(x-y, t)}{\partial y_i} u_0(y) \right| + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dy ds \nabla_y G_a(x-y, t-s) \frac{\partial}{\partial y_i} \{u(y, s)[v(y, s) - u(y, s)]\} \right| + \\ &+ \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dy ds \nabla_y G_a(x-y, t-s) \left( \frac{\partial \nabla u(y, s)}{\partial y_i}, \nabla \varphi(y, s) \right) \right| + \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} dy ds \nabla_y G_a(x-y, t-s) \left( \frac{\partial \nabla \varphi(y, t)}{\partial y_i}, \nabla u(y, s) \right) \right|. \end{aligned}$$

Оценим теперь обе части предыдущего неравенства по норме  $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N)$ :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial \nabla_y u}{\partial y_i} \right\|_1 &\leq \left\| \frac{\partial \nabla_y u_0}{\partial y_i} \right\|_1 + CT^{1/2} R \sup_{t \in [0, T]} \left( \left\| \frac{\partial u}{\partial y_i} \right\|_1 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y_i} \right\|_1 \right) + CT^{1/2} R \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial \nabla_y u}{\partial y_i} \right\| + \\ &+ CT^{1/2} \sup_{t \in [0, T]} (\|\nabla_y u\|_1 + [u]_1 + [v]_1 + R). \end{aligned}$$

Отсюда при достаточно большом  $R$  и достаточно малом  $T$  получаем, что

$$u(x, t) \in \mathbb{L}^{\infty}([0, T]; \mathbb{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N)).$$

Аналогичным образом получаем, что  $v(x, t) \in \mathbb{L}^{\infty}([0, T]; \mathbb{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N))$ .

Данное решение может быть продолжено на максимальный интервал времени  $(0, T_{\max})$ , причем  $T_{\max} = +\infty$ , если

$$\sup_{t \in [0, T_{\max}]} (\|u\|_{\infty} + \|u\|_1 + \|v\|_{\infty} + \|v\|_1) < +\infty. \quad (2.4)$$

**Лемма 4.** *Априорные оценки и глобальная разрешимость.* Поскольку  $u(x, t), v(x, t) \in L^\infty([0, T]; W^{2,p}(\mathbb{R}^N)), p \in [1, \infty)$ , то справедливы следующие неравенства (см. [4, формула (2.11)]):

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \Delta u f(u(x, t)) \leq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} dx \Delta v f(v(x, t)) \leq 0, \quad (2.5)$$

если  $f(s) : f(s) = \text{sign}(s), f(s) = \text{sign}(s - m)^+, f(s) = \text{sign}(s)^+, f(s) = \text{sign}(s)^-, m > 0$ , где

$$f(s) = \text{sign}(s - m)^+ = (1, \text{при } s \geq m; 0, \text{при } s < m),$$

$$f(s) = \text{sign}(s - m)^- = (-1, \text{при } s \leq m; 0, \text{при } s > m).$$

С другой стороны, поскольку

$$u(x, t), v(x, t) \in L^\infty([0, T]; W^{1,p}(\mathbb{R}^N)) \cap C^{(1)}((0, T); C^{(2)}(\mathbb{R}^N)) \cap C((0, T); \text{Lip}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)), \\ p \in [1, \infty],$$

то, в силу принадлежности  $u(x, t), v(x, t)$  классу  $C([0, T]; \text{Lip}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ , ньютоновский потенциал  $\phi(x, t) \in C((0, T); C^{(2)}(\mathbb{R}^N))$ , и поскольку, кроме того,  $u(x, t), v(x, t) \in C([0, T]; L^p(\mathbb{R}^N)), p \in [1, \infty]$ , то имеем  $\phi(x, t) \in L^\infty([0, T]; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N))$ . Тем самым справедлива формула интегрирования по частям для функций  $f(s) : f(s) = \text{sign}(s), f(s) = \text{sign}(s - m)^+, f(s) = \text{sign}(s)^+, f(s) = \text{sign}(s)^-, m > 0$ .

Например, для  $f(u) = \text{sign}(u)$  получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \text{div}(u \nabla \phi) \text{sign}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} dy (\nabla |u|, \nabla \phi) + \int_{\mathbb{R}^N} dy |u| \nabla \phi = - \int_{\mathbb{R}^N} dy |u| \Delta \phi + \int_{\mathbb{R}^N} dy |u| \Delta \phi = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \text{div}(u \nabla \phi) f(u) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} dx \text{div}(v \nabla \phi) f(v) = 0. \quad (2.6)$$

Докажем теперь априорные оценки

$$\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty, \quad \|v\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty, \quad \|u\|_1 \leq \|u_0\|_1, \quad \|v\|_1 \leq \|v_0\|_1.$$

Умножим обе части уравнения (1.1) на функцию  $f(u) = \text{sign}(u)^+$  и проинтегрируем получившееся выражение по  $x \in \mathbb{R}^N$ . В силу соотношений (2.5), (2.6) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u^+(x) dx \leq 0.$$

Аналогичным образом выводим следующие априорные оценки:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u^- dx \leq 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u| dx \leq 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} (u - m)^+ dx \leq 0.$$

Интегрируя уравнение (1.1) по всему пространству  $\mathbb{R}^N$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} u dx = 0.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} dx u^+(x, t) + \int_{\mathbb{R}^N} dx u^-(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0^+(x) + \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0^-(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx u^+(x, t) \leq \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0^+(x), \quad \int_{\mathbb{R}^N} dx u^-(x, t) \leq \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0^-(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx (u - m)^+(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} dx (u_0 - m)^+(x, t),$$

где  $m = \|u_0\|_\infty$ , откуда получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx u^+(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0^+(x), \quad \int_{\mathbb{R}^N} dx u^-(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0^-(x), \quad \int_{\mathbb{R}^N} dx (u - m)^+(x, t) = 0.$$

Поскольку  $u_0(x) \geq 0$ , то  $0 \leq u(x, t) \leq m$  почти всюду. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx |u(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} dx |u_0(x)|.$$

Повторяя указанную процедуру применительно к уравнению (2.3), получаем

$$0 \leq v(x, t) \leq \|v_0\|_\infty \text{ почти всюду, } \int_{\mathbb{R}^N} dx |v(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} dx |v_0(x)|.$$

Таким образом, справедливо неравенство (2.4). Тем самым доказана глобальная разрешимость системы уравнений (1.1)–(1.4).

Докажем теперь оценки решения системы уравнений (1.1)–(1.4) по норме  $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)$ .

Умножим обе части уравнения (1.1) на  $|u|^{p-2}u$  ( $p \geq 2$ ), а уравнение (1.2) – на  $|v|^{p-2}v$  ( $p \geq 2$ ) и проинтегрируем по  $\mathbb{R}^N$ , в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{pa^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \Delta u dx + \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(u \nabla \phi) |u|^{p-2} u dx = -(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u, \nabla \phi) |u|^{p-2} u dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \Delta \phi dx = -(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(|u|^p), \nabla \phi) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p (v - u) dx = -(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx + \frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p (v - u) dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

и, аналогично, для  $v$ :

$$\frac{1}{pb^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx = -(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-2} |\nabla v|^2 dx - \frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p (v - u) dx. \quad (2.8)$$

Складывая равенства (2.7) и (2.8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{a^2} \|u\|_p^p + \frac{1}{b^2} \|v\|_p^p \right] + (p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-2} |\nabla v|^2 dx + (p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx = \\ = \frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p - |v|^p)(v - u) dx \leq 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{a^2} \|u\|_p^p + \frac{1}{b^2} \|v\|_p^p \right] + \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla(|u|^{p/2})|^2 + |\nabla(|v|^{p/2})|^2] \leq 0.$$

Воспользуемся теперь интерполяционным неравенством из [4, лемма 1]:

$$\|w\|_p^{[N(p-1)+2]p/[N(p-1)]} \leq C \|w\|_1^{2p/[N(p-1)]} \|\nabla(|w|^{p/2})\|_2^2,$$

$$\forall p \in [2, +\infty), \quad w \in \mathbb{W}^{2,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N).$$

Введем функции

$$f_1(t) = \|u\|_p^p/a^2, \quad f_2(t) = \|u\|_p^p/b^2,$$

тогда, воспользовавшись интерполяционным неравенством, получим

$$\frac{d}{dt}(f_1(t) + f_2(t)) + A(f_1^\alpha + f_2^\alpha) \leq 0, \quad \alpha = \frac{[N(p-1)+2]}{N(p-1)},$$

где учтено, что

$$\|u\|_1 \leq \|u_0\|_1, \quad \|v\|_1 \leq \|v_0\|_1,$$

$$A = \min\{A_1, A_2\}, \quad A_1 = \frac{4(p-1)Ca^{2\alpha}}{p\|u_0\|_1^{2p/[N(p-1)]}}, \quad A_2 = \frac{4(p-1)Cb^{2\alpha}}{p\|v_0\|_1^{2p/[N(p-1)]}}.$$

Заметим, что в силу строгой выпуклости вниз функции  $x^\alpha$ ,  $\alpha \in (1, +\infty)$ ,  $x > 0$ , справедливо неравенство (см., например, [8, с. 249])

$$f_1^\alpha + f_2^\alpha \geq \frac{1}{2^{\alpha-1}}(f_1 + f_2)^\alpha.$$

Таким образом, для  $\alpha \in (1, +\infty)$  справедливо неравенство

$$dz/dt + Bz^\alpha \leq 0,$$

где  $z = f_1 + f_2$ ,  $B = A/2^{\alpha-1}$ , из которого получаем

$$z \leq (z_0^{1-\alpha} + Bt)^{-1/(\alpha-1)}.$$

Таким образом, отсюда имеем

$$\|u\|_p \leq \frac{C_1}{(C_2 + C_3 t)^{N(1-1/p)/2}}, \quad \|v\|_p \leq \frac{C_4}{(C_2 + C_3 t)^{N(1-1/p)/2}},$$

$$p = \frac{N(\alpha-1)+2}{N(\alpha-1)}, \quad C_k > 0, \quad k = \overline{1, 4}.$$

Причем последние неравенства продолжаются на случай  $p \in (1, +\infty)$  при помощи стандартной процедуры интерполяции пространств  $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)$  (см., например, [9]). Теорема доказана.

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

Справедлива следующая

Лемма 1 (см. [4, лемма 3]). *Найдется некоторая постоянная  $C_p$ ,  $\forall p \in [1, \infty]$  такая, что*

$$\|G(x, t) * w - MG(x, t)\|_p \leq C_p \|w\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)} t^{-N(1-1/p), 1-1/2} \quad \forall t > 0,$$

где через  $*$  обозначена свертка по пространственной переменной, для каждой функции  $w \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)$  с  $M = \int_{\mathbb{R}^N} dx w(x)$

$$G(x, t) = [4\pi t]^{-N/2} \exp[-|x|^2/4t],$$

$$\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|) \equiv \{w : (1+|x|)w \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

Теорема 2. Если  $u_0, v_0 \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ , тогда

$$\forall p \in (1, \infty) \quad \exists C_{1p} > 0, \quad C_{2p} > 0 : t^{\beta(p)} \|u(t) - M_1 G_a(t)\|_p \leq C_{1p}, \quad t^{\beta(p)} \|v(t) - M_2 G_b(t)\|_p \leq C_{2p},$$

где

$$\beta(p) = \begin{cases} N(1 - 1/p)/2 + 1/2, & \text{если } N > 3, \\ N(1 - 1/p)/2 + 1/2 - \varepsilon, & \text{если } N = 3 \quad \forall \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$M_1 = \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0(x), \quad M_2 = \int_{\mathbb{R}^N} dx v_0(x);$$

кроме того,

$$t^{\sigma(q)} \|\Phi(x, t) - \Phi(x, t)\|_q \leq C_{3q}, \quad q > N/(N - 1),$$

где

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(N - 2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} dy \frac{M_1 G_a(y, t) - M_2 G_b(y, t)}{|x - y|^{N-2}},$$

$$\sigma(q) = \begin{cases} N(1 - 1/q)/2 - 1/2, & \text{если } N > 3, \\ N(1 - 1/q)/2 - 1/2 - \varepsilon, & \text{если } N = 3 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда  $u_0(x), v_0(x) \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Из (2.1), (2.2) получим

$$u(t) - M_1 G_a(t) = G_a(t) * u_0 - M_1 G_a(t) + \int_0^t ds \nabla G_a(t - s) * [u(s) \nabla \varphi(s)], \quad (3.1)$$

$$v(t) - M_2 G_b(t) = G_b(t) * v_0 - M_2 G_b(t) - \int_0^t ds \nabla G_b(t - s) * [v(s) \nabla \varphi(s)]. \quad (3.2)$$

Оценим по норме  $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^N)$  соотношения (3.1), (3.2) и с учетом результата леммы 3 работы [4] получим

$$\|u(t) - M_1 G_a(t)\|_p \leq C_{1p} \|u_0\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|)} t^{-N(1 - 1/p)/2 - 1/2} + \left\| \int_0^t ds \nabla G_a(t - s) * [u(s) \nabla \varphi(s)] \right\|_p, \quad (3.3)$$

$$\|v(t) - M_2 G_b(t)\|_p \leq C_{2p} \|v_0\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|)} t^{-N(1 - 1/p)/2 - 1/2} + \left\| \int_0^t ds \nabla G_b(t - s) * [v(s) \nabla \varphi(s)] \right\|_p. \quad (3.4)$$

Дальнейшие рассуждения проведем на основе неравенства (3.3), поскольку для неравенства (3.4) рассуждения аналогичны. Теперь оценим последнее слагаемое неравенства (3.3):

$$\left\| \int_{t/2}^t ds \nabla G_a(t - s) * [u(s) \nabla \varphi(s)] \right\|_p \leq \int_{t/2}^t ds \|\nabla G_a(t - s)\|_1 \| [u(s) \nabla \varphi(s)] \|_p \leq C \int_{t/2}^t ds (t - s)^{-1/2} \|u(s)\|_{p_{q_1}} \|\nabla \varphi(s)\|_{p_{q_2}},$$

где  $1/q_1 + 1/q_2 = 1$ . Заметим, что  $\|\nabla \varphi\|_{p_1} \leq C(\|v\|_{p_2} + \|u\|_{p_2})$ ,  $1/p_1 = 1/p_2 - 1/N$  (см., например, [10,

с. 141)),  $p_1 = pq_2$ . Отсюда получаем

$$\left\| \int_{t/2}^t ds \nabla G_a(t-s) * [u(s) \nabla \varphi(s)] \right\|_p \leq C \int_{t/2}^t (t-s)^{-1/2} s^{-N[1-1/(pq_1)]/2} s^{-N[1-1/p_2]/2} ds \leq Ct^{-N[2-1/p]/2+1}, \quad N \geq 3.$$

Теперь рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t/2} ds \nabla G_a(t-s) * [u(s) \nabla \varphi(s)] \right\|_p &\leq \int_0^{t/2} \|\nabla G_a(t-s)\|_p \|u(s) \nabla \varphi(s)\|_1 ds \leq \\ &\leq C \int_0^{t/2} ds (t-s)^{-N(1-1/p)/2-1/2} \|u(s)\|_{p_1} \|\nabla \varphi(s)\|_{p_2}, \end{aligned}$$

где  $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ ,  $\|\nabla \varphi\|_{p_2} \leq C(\|u\|_{p_3} + \|v\|_{p_3})$ ,  $1/p_2 = 1/p_3 - 1/N$ ,  $\|\nabla G_a(t)\|_p \leq Ct^{-N(1-1/p)/2-1/2}$ .

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t/2} ds \nabla G_a(t-s) * [u(s) \nabla \varphi(s)] \right\|_p &\leq C \int_0^{t/2} (t-s)^{-N(1-1/p)/2-1/2} (C_2 + C_3 s)^{-N[1-1/p_1]/2-N[1-1/p_3]/2} ds \leq \\ &\leq Ct^{-N(1-1/p)/2-1/2} \int_0^{t/2} (C_2 + C_3 s)^{-N[1-1/N]/2} ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи:

- 1)  $N > 3$ , тогда  $N(1-1/N)/2 > 1$ ;
- 2)  $N = 3$ , тогда  $N(1-1/N)/2 = 1$ .

В случае 1) имеем

$$\int_0^{t/2} (C_2 + C_3 s)^{-N[1-1/N]/2} ds \leq \int_0^{+\infty} (C_2 + C_3 s)^{-N[1-1/N]/2} ds < +\infty.$$

С другой стороны,

$$N(2-1/p)/2-1 > N[1-1/p]/2+1/2,$$

поэтому

$$\left\| \int_0^t ds \nabla G_a(t-s) * [u(s) \nabla \varphi(s)] \right\|_p \leq Ct^{-N[1-1/p]/2-1/2}.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы с  $\beta(p) = N[1-1/p]/2 + 1/2$ . В случае 2) получим

$$\int_0^{t/2} (C_2 + C_3 s)^{-1} ds \leq \frac{1}{C_3} \ln \left( \frac{C_3 t}{2C_2} + 1 \right),$$

откуда сразу же следует утверждение теоремы с  $\beta(p) < N[1-1/p]/2 + 1/2$ . Асимптотическая оценка для кулоновского потенциала  $\varphi(x, t)$  сразу же вытекает из (2.3), свойств потенциала Рисса [10] и асимптотического поведения функций  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ . Теорема доказана.

Сформулируем окончательный результат: получена точная оценка остаточного члена асимптотики при больших временах в норме  $\mathbb{L}^p$ :

Если  $u_0(x), v_0(x) \in \mathbb{L}^1(1+|x|; \mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ , то

$$\forall p \in (1, \infty) \quad \exists C_{1p} > 0, \quad C_{2p} > 0 : t^{\beta(p)} \|u(t) - M_1 G_a(t)\|_p \leq C_{1p}, \quad t^{\beta(p)} \|v(t) - M_2 G_b(t)\|_p \leq C_{2p},$$

где

$$\beta(p) = \begin{cases} N(1 - 1/p)/2 + 1/2, & \text{если } N > 3, \\ N(1 - 1/p)/2 + 1/2 - \varepsilon, & \text{если } N = 3 \quad \forall \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$M_1 = \int_{\mathbb{R}^N} dx u_0(x), \quad M_2 = \int_{\mathbb{R}^N} dx v_0(x),$$

$$t^{\sigma(q)} \|\varphi(x, t) - \Phi(x, t)\|_q \leq C_{3q}, \quad q > \frac{N}{N-1},$$

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} dy \frac{M_1 G_a(y, t) - M_2 G_b(y, t)}{|x-y|^{N-2}},$$

$$\sigma(q) = \begin{cases} N(1 - 1/q)/2 - 1/2, & \text{если } N > 3, \\ N(1 - 1/q)/2 - 1/2 - \varepsilon, & \text{если } N = 3 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

С другой стороны, в работе [4] получена

**Теорема 3.** Пусть  $u_0(x), v_0(x) \in \mathbb{L}_+^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{L}_+^p(\mathbb{R}^N)$  при  $(a^2 = b^2 = 1)$  для некоторого  $p > N/2$ . Тогда найдется такая постоянная  $\lambda > 0$ , что

$$\|u(t) - MG(x, 2t+1)\|_1^2 + \|v(t) - MG(x, 2t+1)\|_1^2 + \|\nabla \varphi(x, t)\|_2^2 \leq \frac{C}{(2t+1)^\lambda},$$

где

$$G(x, t) = [4\pi t]^{-N/2} \exp[-|x|^2/4t], \quad M = \int_{\mathbb{R}^N} dy u_0(y) = \int_{\mathbb{R}^N} dy v_0(y).$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифшиц Л.Д., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
2. Gajewski H. On existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions of the basic equations for carrier transport in semiconductors // Z. Angew. Math. und Mech., 1985, Bd. 65. № 2, S. 101–108.
3. Arnold A., Markowich P., Toscani G. On large asymptotics for drift-diffusion poisson systems: Preprint ESI 655. Vienna, 1999.
4. Escobedo M., Zuaniа E. Large time behavior for convection-diffusion equations in  $\mathbb{R}^N$  // J. Functional Analys. 1991. V. 100. P. 119–161.
5. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
6. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. Зорич В.А. Математический анализ. М.: Наука, 1981. Т. 1.
9. Берг Й., Лефстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
10. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.