

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Об одной начально-краевой задаче магнитной гидродинамики, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001, том 41, номер 11, 1734–1741

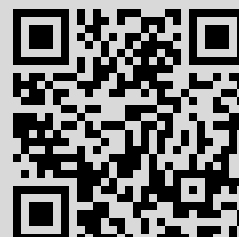
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 15:37:47



УДК 517.958;531.742

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ¹⁾

© 2001 г. М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

(119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, физфак)
e-mail: math356@chat.ru

Поступила в редакцию 10.10.00 г.

Рассматривается математическая модель динамики плохопроводящей жидкости в магнитном поле. Для гладких областей методом динамических потенциалов доказана однозначная разрешимость в классическом смысле соответствующей смешанной задачи. Для случая, когда область – прямоугольный параллелепипед, с помощью метода Фурье построено явное решение смешанной задачи, причем физический анализ построенного решения выявил интересный эффект стратификации объемного заряда. Аналогичный эффект ранее был выявлен при рассмотрении переходных процессов в полупроводниках.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛОХОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В гидродинамике диссипативные процессы определяются тремя величинами: двумя коэффициентами вязкости и коэффициентом теплопроводности. В магнитной гидродинамике это число значительно возрастает как ввиду появления новых величин электрической природы, так и вследствие наличия в каждой точке выделенного направления – направления внешнего магнитного поля, чем нарушается изотропия жидкости. В гидродинамике, как известно, вводится число Рейнольдса, характеризующее роль вязких членов в уравнениях движения по сравнению с конвекционными $R = ul/\nu$, где l и $u \sim l/\tau$ – характерные параметры длины и скорости для данного движения жидкости, ν – коэффициент вязкости. Наряду с этим числом в магнитной гидродинамике можно ввести магнитное число Рейнольдса

$$R_m = \frac{ul}{\nu_m}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma},$$

где σ – проводимость среды.

Система уравнений магнитной гидродинамики (см., например, [1]) допускает существенное упрощение в предельном случае плохо проводящей жидкости, т.е. когда $R_m \ll 1$ (см. [1, с. 340]). Так, система уравнений магнитной гидродинамики при $R_m \ll 1$ вместе с линеаризованными уравнениями Эйлера и непрерывности для однородной несжимаемой невязкой жидкости во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_3$ в линейном приближении имеет вид

$$\Delta_3 \varphi = \frac{1}{c} (\mathbf{B}_0, \text{rot} \mathbf{v}), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\sigma}{c} \left\{ [\mathbf{B}_0, \nabla \varphi] + \frac{1}{c} [\mathbf{B}_0, [\mathbf{B}_0, \mathbf{v}]] \right\}, \quad (1.2)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0.$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00013).

Для удобства перепишем уравнение (1.2) покомпонентно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \beta v_1 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{\sigma B_0}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \beta v_2 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\sigma B_0}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3},\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $\beta = \sigma B_0^2 / c$. Воспользовавшись принципом Дюамеля, из уравнений (1.3) получим

$$\begin{aligned}v_1(\mathbf{r}, t) &= v_{10}(\mathbf{r}) \exp(-\beta t) - \int_0^t d\tau \exp[-\beta(t-\tau)] \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\sigma B_0}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \\ v_2(\mathbf{r}, t) &= v_{20}(\mathbf{r}) \exp(-\beta t) - \int_0^t d\tau \exp[-\beta(t-\tau)] \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\sigma B_0}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right), \\ v_3(\mathbf{r}, t) &= v_{30}(\mathbf{r}) - \int_0^t d\tau \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3}.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.1), получаем интегродифференциальное уравнение малых колебаний в плохопроводящей жидкости:

$$\Delta_3 \varphi - \beta \int_0^t d\tau \exp[-\beta(t-\tau)] \Delta_2 \varphi = f_1(x, t), \quad x \in \Omega, \quad (1.5)$$

где

$$f_1(x, t) = \frac{B_0}{c} \left(\frac{\partial v_{20}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_{10}}{\partial x_2} \right) \exp(-\beta t),$$

Ω – ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega \in A^{(1,h)}$. В дальнейшем будем предполагать $f_1(x, t) = 0$, что имеет место при условии

$$\partial v_{20} / \partial x_1 - \partial v_{10} / \partial x_2 = 0.$$

Пусть, кроме того,

$$\varphi(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = a(x, t)|_{x \in \partial\Omega}. \quad (1.6)$$

Из естественного условия согласования начального и граничного условий в классическом смысле следует, что

$$\varphi(x, 0) \equiv \varphi_0(x), \quad (1.7)$$

$$\Delta_3 \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0|_{x \in \partial\Omega} = a(x, 0)|_{x \in \partial\Omega}. \quad (1.8)$$

В силу условий (1.6), (1.7), применяя к обеим частям равенства (1.4) оператор

$$\partial/\partial t + \beta I,$$

получаем для потенциала $\varphi(x, t)$ дифференциальное уравнение составного типа третьего порядка:

$$\frac{\partial \Delta \varphi(x, t)}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_3^2} = 0.$$

Таким образом, приходим к постановке следующей задачи.

Задача D. Найти непрерывную функцию $\varphi(x, t)$ в $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$, принадлежащую классу $C([0, +\infty); C^{(2)}(\Omega)) \cap C^{(1)}((0, +\infty); C^{(2)}(\Omega))$ и удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (1.8), граничному условию (1.5), начальному условию (1.6), (1.7).

Отметим, что исследованию родственных задач для уравнений составного типа, а также вопросам редукции некоторых векторных систем уравнений к скалярным уравнениям составного типа посвящен ряд работ авторов [2]–[7].

2. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ D

Построим сначала фундаментальное решение оператора (1.8). С этой целью воспользуемся результатами работы [4], которые применим для данного частного случая. Рассмотрим следующее уравнение для фундаментального решения оператора (1.8) (см. [6]):

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{E}(x, t)}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x, t)}{\partial x_3^2} = \delta(x) \delta(t), \quad (2.1)$$

где $\delta(x) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. В [8] было показано, что с помощью преобразования Лапласа по t вопрос о построении фундаментального решения оператора (1.8) сводится к решению уравнения

$$\Delta_2 \bar{\mathcal{E}}(x, p) + \left(1 + \frac{\beta}{p}\right) \bar{\mathcal{E}}_{x_3 x_3}(x, p) = \frac{1}{p} \delta(x). \quad (2.2)$$

Сделаем замену переменных:

$$x'_3 = \frac{x_3}{(1 + \beta/p)^{1/2}}, \quad x'_i = x_i, \quad i = 1, 2.$$

В результате из (2.2) получим

$$\Delta'_3 \bar{\mathcal{E}}(x, p) = \frac{\delta(x')}{p(1 + \beta/p)^{1/2}}, \quad \Delta'_3 \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (2.3)$$

Из (2.3) и [9] следует, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}(x, p) &= -\frac{1}{4\pi p} \left[(x_1^2 + x_2^2) \left(1 + \frac{\beta}{p}\right) + x_3^2 \right]^{-1/2} = -\frac{1}{4\pi \sqrt{p}} [(x_1^2 + x_2^2)(p + \beta) + p x_3^2]^{-1/2} = \\ &= -\frac{1}{4\pi |x|} \frac{1}{\sqrt{p} \sqrt{p + \alpha(x)}}, \quad \alpha(x) = \beta \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Используя предыдущее равенство и формулу 22.83 из справочника по операционному исчислению (см. [10]), получаем

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{1}{4\pi |x|} e^{-[\alpha(x)t]^{1/2}} I_0\left(\frac{\alpha(x)t}{2}\right), \quad (2.4)$$

где $I_0(x)$ – функция Инфеляда нулевого порядка [11],

$$\alpha(x) = \beta \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Теперь переходим к исследованию задачи D. Рассмотрим следующую функцию:

$$\Phi(x, t) = \beta \int_0^t \int_{\Omega} dy d\tau \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial^2 \Phi_0(y)}{\partial y_3^2}.$$

Введем

Определение 1 (см. [12]). Будем говорить, что $\phi \in C_{2+\gamma}(\partial\Omega)$, если ϕ можно продолжить на шар Q_R^0 , $\delta\Omega \in Q_R^0$, так, что $\phi \in C_{2+\gamma}(\bar{Q}_R^0)$, $\gamma \in (0, 1]$.

Предположим, что граница $\partial\Omega$ области Ω класса C^3 , $a(x, 0) \in C_{2+\gamma}(\partial\Omega)$; тогда из результатов работы [12, с. 65] и системы уравнений (1.7) получим $\phi_0(x) \in C_{2+\gamma}(\bar{\Omega})$. В этом случае справедливо включение

$$\partial^2 \phi_0(x) / \partial x_3^2 \in C_\gamma(\bar{\Omega});$$

тогда $\Phi(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Delta \Phi(x, t)}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x_3^2} = \beta \frac{\partial^2 \phi_0(x)}{\partial x_3^2}$$

в классическом смысле [13]. Используя равномерную непрерывность по Гёльдеру функции

$$\partial^2 \phi_0(x) / \partial x_3^2 \in C_\gamma(\bar{\Omega}),$$

а также интегрируемость функции $\mathcal{E}(x, t)$, получаем, что функция $\Phi(x, t)$ непрерывна по $x \in \bar{\Omega}$. Действительно, пусть ε – произвольное фиксированное положительное число; тогда

$$\Phi(x, t) - \Phi(\hat{x}, t) = \int_{\Omega} M(t, y) [U(x + y) - U(\hat{x} + y)] dy, \quad (2.5)$$

где

$$M(t, y) = \int_0^t d\tau \mathcal{E}(y, \tau), \quad U(x) = \frac{\partial^2 \phi_0(x)}{\partial x_3^2}.$$

Из (2.5) получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |\Phi(x', t) - \Phi(x, t)| &\leq \int_0^t |M(t, y)| dy \sup_{x, x' \in \Omega, x \neq x', y \in \Omega} \frac{|U(x + y) - U(x' + y)|}{|x - x'|^\gamma} |x - x'|^\gamma \leq \\ &\leq C(t, U, \gamma, \Omega) |x - x'|^\gamma. \end{aligned}$$

Выберем

$$\delta = (\varepsilon / C)^{1/\gamma},$$

откуда сразу же с учетом (2.5) получаем, что для всех $x, x' \in \Omega$, $|x - x'| < \delta$ будет

$$|\Phi(x, t) - \Phi(x', t)| \leq \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $\Phi(x, t)$.

Введем новую неизвестную функцию $w(x, t)$ соотношением

$$w(x, t) = \Phi(x, t) - \phi_0(x) + \beta \int_{\Omega} \int_0^t dy d\tau \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial^2 \phi_0(y)}{\partial y_3^2}.$$

Очевидно, что $w(x, t)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta w(x, t)}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_3^2} &= 0, \\ w(x, 0) &= 0, \\ w(x, t)|_{x \in \partial\Omega} &= \left[a(x, t) - a(x, 0) + \beta \int_0^t \int_{\partial\Omega} dy d\tau \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \frac{\partial^2 \varphi_0(y)}{\partial y_3^2} \right] \Big|_{x \in \partial\Omega} = f(x, t)|_{x \in \partial\Omega}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введем динамические потенциалы

$$\begin{aligned} A[\mu](x, t) &= \int_{\partial\Omega} dy \mu(y, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|}, \\ B[\mu](x, t) &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} dy d\tau \mu(y, t) \mathcal{M}_{y\tau} \mathcal{E}(x - y, t - \tau), \end{aligned}$$

где $\mu(x, t) \in C_0^{(1)}([0, \infty); C(\partial\Omega)) \equiv \{\mu(x, t) \in C^{(1)}([0, \infty); C(\partial\Omega)) : \mu(x, 0) = 0\}$,

$$\mathcal{M}_{y\tau} u = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y} + \beta \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_3) \frac{\partial u}{\partial x_3}.$$

Отметим, что линейная комбинация динамических потенциалов $B[\mu](x, t) - A[\mu](x, t)$ всюду вне $\partial\Omega$ при $t \geq 0$ бесконечно дифференцируема по x и удовлетворяет в классическом смысле уравнению (1.8) (см. [3, с. 140]).

Справедлива

Лемма 1. Если $\mu(x, t) \in C_0^{(1)}([0, \infty); C(\partial\Omega))$ и $\partial\Omega \in A^{(1,h)}$, то динамический потенциал $B[\mu](x, t)$ определен при $x \in \partial\Omega$ и принадлежит $C_0^{(1)}([0, \infty); C(\Omega))$. Кроме того, если $\mu(x, t) \in C_0^{(1)}([0, \infty); C(\partial\Omega))$, то

$$\lim_{z_1 \xrightarrow{n_z} z \in \partial\Omega^+} B[\mu](z_1, t) = -\frac{1}{2} \mu(z, t) + B[\mu](z, t).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\mathcal{M}_{y\tau} \mathcal{E}(x - y, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{n}_y} + \beta \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_3) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_3},$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{1}{|x-y|} \Phi(\zeta), \quad \Phi(\zeta) = -\frac{1}{4\pi} e^{-\zeta} I_0(\zeta), \quad \zeta = \frac{\alpha(x-y)\tau}{2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = \frac{\Phi'(\zeta)}{|x-y|} \frac{1}{2} \alpha(x-y),$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = \frac{\cos \psi_{xy} \Phi'(\zeta)}{|x-y|} \frac{1}{2} \alpha(x-y) + \frac{1}{|x-y|} \Phi''(\zeta) \frac{\tau}{4} \alpha(x-y) \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{n}_y} + \frac{1}{|x-y|} \Phi'(\zeta) \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{n}_y},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y_3} = 2 \frac{x_3 - y_3}{|x-y|^2} - 2 \frac{(x_3 - y_3)^3}{|x-y|^4}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_i} = -2 \frac{(x_i - y_i)(x_3 - y_3)^2}{|x-y|^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{n}_y} = -2 \frac{\cos \psi_{xy} (x_3 - y_3)^2}{|x-y|^2} + 2 \frac{x_3 - y_3}{|x-y|^2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3),$$

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y_3} = \frac{x_3 - y_3}{|x - y|^3} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \Phi(\zeta) + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\Phi(\zeta)' \tau \partial \alpha}{|x - y| 2 \partial y_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{m}_y} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y_3} =$$

$$= \frac{\cos \psi_{xy}}{|x - y|^2} \left[\frac{\beta}{2} \Phi'(\zeta) (x_1^2 + x_2^2) - \Phi''(\zeta) \zeta \frac{(x_3 - y_3)^2}{|x - y|^2} - \Phi'(\zeta) \frac{(x_3 - y_3)^2}{|x - y|^2} \right],$$

где $\psi_{xy} = \langle x - y, \mathbf{n}_y \rangle$.

Далее, дословно повторяя рассмотрения работы [3, с. 140], приходим к первому утверждению леммы 1. Доказательство второй части леммы 1 аналогично доказательству теоремы 4.1.2 из работы [3]. Лемма доказана.

Будем искать решение задачи $\mathbb{D}$ в виде $B[\mu](x, t) - A[\mu](x, t)$. Из граничного условия задачи (2.6) получим

$$\mu(x, t) - A[\mu](x, t) + B[\mu](x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Уравнения типа (2.7) обсуждались в [2]–[4]. Повторяя соответствующие рассуждения указанных работ для (2.7), можно с помощью метода последовательных приближений доказать их разрешимость в пространстве $\mathbb{C}_0^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}(\partial\Omega))$ для всех $T > 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Если $a(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty); \mathbb{C}(\partial\Omega))$ и $\partial\Omega \in \mathbb{C}^3 \cap A^{(1, h)}$, $a(x, 0) \in \mathbb{C}_{2+\gamma}(\partial\Omega)$ (см. определение 1), то задача $\mathbb{D}$ разрешима в классическом смысле.

Для задачи (2.6) стандартным образом выводится энергетическое тождество

$$\frac{1}{2} \|\nabla w\|_2^2 + \beta \int_0^t d\tau \|w_{x_3}\|_2^2 = \int_0^t \int_{\partial\Omega} w M_{tx} w dx d\tau + \frac{1}{2} \|\nabla w_0\|_2^2, \quad w_0(x) = w(x, 0), \quad (2.8)$$

из которого следует, что соответствующая однородная задача (2.6) имеет тривиальное решение.

Теорема 2. Если решения задачи $\mathbb{D}$ принадлежат классу функций, допускающих применение энергетического тождества (2.8), то в этом классе они являются единственными.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $\mathbb{D}$ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЯ

Сформулируем задачу $\mathbb{D}$ для частного случая, когда $\Omega \equiv \Pi \equiv \{0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq x_3 \leq c\}$:

$$\frac{\partial \Delta_3 \varphi}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad (3.1)$$

$$\varphi|_{x_1=0} = \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3), \quad \varphi|_{x_1=a} = 0,$$

$$\varphi|_{x_2=0} = \varphi|_{x_2=b} = \varphi|_{x_3=0} = \varphi|_{x_3=c} = 0,$$

где $\lambda_2 = \pi m/b$, $\lambda_3 = \pi l/c$, $m, l \in \mathbb{Z}_+$; здесь $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$ является решением задачи

$$\Delta_3 \varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_0|_{x_1=0} = \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3), \quad \varphi_0|_{x_1=a} = 0, \quad (3.2)$$

$$\varphi_0|_{x_2=0} = \varphi_0|_{x_2=b} = \varphi_0|_{x_3=0} = \varphi_0|_{x_3=c} = 0.$$

Решение краевой задачи (3.2) (см., например, [14]) имеет вид

$$\varphi_0(x) = \frac{\text{sh}[\lambda_{ml}(a - x_1)]}{\text{sh}(\lambda_{ml} x_1)} \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3), \quad \lambda_{ml}^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Сделаем в задаче (3.1) замену функций $w(x, t) = \varphi(x, t) - \varphi_0(x)$. Подставляя функцию $w(x, t)$ в уравнения задачи (3.1), получаем

$$\frac{\partial \Delta_3 w}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = -\beta \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_3^2}, \quad (3.3)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w(x, t)|_{x \in \partial \Pi} = 0,$$

где $\partial \Pi$ – граница прямоугольного параллелепипеда Π . Задачу (3.3) будем решать методом Фурье разделения переменных. В результате получим

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = w(x, t) + \varphi_0(x) = & -\operatorname{cth}(\lambda_{ml} a) \frac{bc}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} \times \\ & \times \left[1 - \exp\left(-\beta \frac{\lambda_3^2}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} t\right) \right] \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3) \sin(\lambda_n x_1) + \varphi_0(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция из равенства (3.4) принадлежит классу $C([0, +\infty); C^{(2)}(\Omega)) \cap C^{(1)}((0, +\infty); C^{(2)}(\Omega))$.

Проведем качественный анализ полученного решения начально-краевой задачи D. Перейдем к анализу полученного решения для объемной плотности заряда, которое, в силу (3.4) и уравнения для объемной плотности заряда

$$\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi(x, t) = \rho(x, t),$$

примет вид

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = & B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n^3}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} \left[1 - \exp\left(-\beta \frac{\lambda_3^2}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} t\right) \right] \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3) \sin(\lambda_n x_1) + \\ & + B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_2^2 \lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} \left[1 - \exp\left(-\beta \frac{\lambda_3^2}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} t\right) \right] \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3) \sin(\lambda_n x_1) + \\ & + B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_3^2 \lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} \left[1 - \exp\left(-\beta \frac{\lambda_3^2}{\lambda_n^2 + \lambda_{ml}^2} t\right) \right] \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3) \sin(\lambda_n x_1) = \\ & = B \lambda_{ml} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{\mu_n^2 + 1}\right) \right] \sin(\mu_n \lambda_{ml} x_1), \\ & B = \operatorname{cth}(\lambda_{ml}) \frac{bc}{16\pi} \sin(\lambda_2 x_2) \sin(\lambda_3 x_3) \sin(\lambda_n x_1), \quad T = \beta \frac{\lambda_3^2}{\lambda_{ml}^2} t, \quad \mu_n = \lambda_n / \lambda_{ml}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть $T = T_0 > 1$ – фиксированный момент времени. Найдем то значение $z > 1$, при котором функция

$$f_{T_0}(z) = z \left[1 - \exp\left(-\frac{T_0}{z^2 + 1}\right) \right] = z [1 - \exp(-T_0/z^2)] + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Рассмотрим отдельно функцию

$$Q(z) = z [1 - \exp(-T_0/z^2)] = \sqrt{T_0} y [1 - \exp(-1/y^2)], \quad y = z/\sqrt{T_0}.$$

Исследуем функцию

$$g(y) = y [1 - \exp(-1/y^2)]$$

на максимальное значение. Стандартное рассуждение приводит к выводу, что максимальное значение функции $g(y)$, а значит, и $f_{T_0}(z)$ достигается в точке y_0 , определяемой уравнением

$$\exp(1/y_0^2) = 1 + 2/y_0^2. \quad (3.6)$$

Нетрудно заметить, что функция $g(y)$ принимает максимальное значение в единственной точке $0 < y_0 < +\infty$:

$$f_{T_0}(z_0) = \sqrt{T_0} y_0 [1 - \exp(-1/y_0^2)] + o(1/\sqrt{T_0}), \quad z_0 = y_0 \sqrt{T_0}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что для каждого момента времени $T = T_0$ слагаемое в выражении (3.5) с номером

$$n = (az_0(T_0)\lambda_{ml})/\pi$$

имеет наибольшую амплитуду, которая со временем растет, как $\sqrt{T_0}$; кроме того, для каждого фиксированного момента времени это слагаемое осциллирует по x с частотой осцилляции, возрастающей со временем T_0 .

Таким образом, на основании модели, предложенной в [7], удалось поставить математическую начально-краевую задачу **D**, решение которой выявляет интересный эффект стратификации объемного заряда в проводящей среде без дисперсии. Аналогичная ситуация имела место при рассмотрении переходных процессов в полупроводнике (см. [7], [15], [16]), причем в [15] приведены данные экспериментального измерения объемной плотности заряда в полупроводнике, совпадающие с качественной наблюдаемой картиной, описываемой соответствующей математической моделью. Отметим, что динамический эффект стратификации объемного заряда в проводящей среде выявляется только при изучении соответствующей начально-краевой задачи в ограниченных областях.

В заключение авторы считают приятным долгом выразить признательность Ю.Д. Плетнеру за внимание к работе и полезное обсуждение полученных в ней результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
2. Габов С.А., Свешиников А.Г. Задачи динамики стратифицированной жидкости. М.: Наука, 1986.
3. Габов С.А., Свешиников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
4. Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
5. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешиников А.Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 6. С. 968–984.
6. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешиников А.Г. О модельном уравнении составного типа, описывающем переходные процессы в полупроводниках // Вестн. МГУ. Сер. физ., astron. 1999. № 6. С. 12–14.
7. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешиников А.Г. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1237–1249.
8. Плетнер Ю.Д. О фундаментальных решениях операторов типа Соболева // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1555–1557.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
10. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. школа, 1965.
11. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
12. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.
13. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
14. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1998.
15. Астратов В.Н., Ильинский А.В., Киселев В.А. Стратификация объемного заряда при экранировании поля в кристаллах // Физ. твердого тела. 1984. Т. 26. № 9. С. 2843–2851.
16. Фурман А.С. О стратификации объемного заряда при переходных процессах в полупроводниках // Физ. твердого тела. 1986. Т. 28. № 7. С. 2083–2090.