

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников, О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1999, том 39, номер 6, 1006–1022

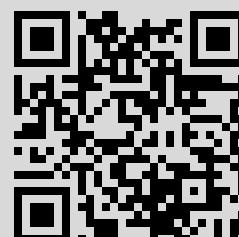
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 15:41:46



УДК 517.958:531.32

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ В СРЕДАХ С АНИЗОТРОПНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ¹⁾

© 1999 г. М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников

(119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, физфак)

Поступила в редакцию 27.11.98 г.

Рассматриваются физические модели, описывающие квазистационарные процессы в электромагнитных анизотропных средах: волны в плазме и ферромагнетиках во внешнем магнитном поле. Показано, что возможна редукция соответствующих векторных уравнений в частных производных к скалярным уравнениям составного типа.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

Особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах определяются спецификой материальных уравнений. Если длина волны мала по сравнению с пространственными неоднородностями, то эти уравнения можно записать в виде, учитывающем только временную дисперсию (см., например, [1], [2]):

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{r}, t) &= E_i(\mathbf{r}, t) + 4\pi P_i(\mathbf{r}, t), & B_i(\mathbf{r}, t) &= H_i(\mathbf{r}, t) + 4\pi M_i(\mathbf{r}, t), \\ P_i(\mathbf{r}, t) &= \hat{\kappa}_{ij} * E_j(\mathbf{r}, t) + P_{i0}(\mathbf{r}, t), & M_i(\mathbf{r}, t) &= \hat{\chi}_{ij} * H_j(\mathbf{r}, t) + M_{i0}(\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (1.1)$$

если не оговорено противное, то во всех формулах предполагается суммирование по неммым индексам, $i, j = 1, 2, 3$; $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – векторы индукции и напряженности электромагнитного поля, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ – векторы поляризации и намагниченности среды, $\mathbf{P}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{M}_0(\mathbf{r}, t)$ – заданные векторы, вообще говоря, зависящие от времени, определяемые начальным распределением поляризации и намагниченности среды, $\hat{\kappa}_{ij} *$ и $\hat{\chi}_{ij} *$ – сверточные вольтеровские операторы:

$$\hat{\kappa}_{ij} * f(t) = \int_0^t \kappa_{ij}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \hat{\chi}_{ij} * f(t) = \int_0^t \chi_{ij}(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

При этом интегрирование ведется в пределах от 0 до t , поскольку, с одной стороны, предполагается, что до момента времени $t = 0$ колебания в среде отсутствовали, а с другой стороны, в силу физического принципа причинности, поля в среде в данный момент времени могут зависеть только от полей в предшествующие моменты времени. В простейшем случае функции $\chi_{ij}(t, \tau)$ и $\kappa_{ij}(t, \tau)$ зависят от разности аргументов: $\chi_{ij}(t - \tau)$, $\kappa_{ij}(t - \tau)$. Предположим также, что данные функции принадлежат классу $C^{(0)}[0; +\infty)$.

В случае квазистационарного электромагнитного поля к материальным уравнениям (1.1) необходимо добавить следующие уравнения электромагнитного поля (см., например, [1]):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho^{\text{ext}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (1.2)$$

Макроскопический ток $\mathbf{j}^{\text{ext}}$ сторонних зарядов предполагается отсутствующим. Вводя потенциалы электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00337).

из уравнений (1.1)–(1.3) получаем

$$\sum_{l=1}^3 (\mathbb{I} + 4\pi \hat{\kappa}_{ll} *) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_l^2} + 4\pi \sum_{i \neq j}^{3,3} \hat{\kappa}_{ij} * \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i \partial x_j} = F_d(\mathbf{r}, t) - 4\pi \rho^{\text{ext}},$$

$$\sum_{l=1}^3 (\mathbb{I} + 4\pi \hat{\chi}_{ll} *) \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_l^2} + 4\pi \sum_{i \neq j}^{3,3} \hat{\chi}_{ij} * \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i \partial x_j} = F_b(\mathbf{r}, t),$$
(1.4)

где $F_b(\mathbf{r}, t) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}_0(\mathbf{r}, t)$, $F_d(\mathbf{r}, t) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}_0(\mathbf{r}, t)$. Отметим, что в большинстве рассматриваемых в дальнейшем средах операторные тензоры электрической и магнитной восприимчивостей

$$\hat{\kappa} * = \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_{11} * & \hat{\kappa}_{12} * & \hat{\kappa}_{13} * \\ \hat{\kappa}_{21} * & \hat{\kappa}_{22} * & \hat{\kappa}_{23} * \\ \hat{\kappa}_{31} * & \hat{\kappa}_{32} * & \hat{\kappa}_{33} * \end{pmatrix}, \quad \hat{\chi} * = \begin{pmatrix} \hat{\chi}_{11} * & \hat{\chi}_{12} * & \hat{\chi}_{13} * \\ \hat{\chi}_{21} * & \hat{\chi}_{22} * & \hat{\chi}_{23} * \\ \hat{\chi}_{31} * & \hat{\chi}_{32} * & \hat{\chi}_{33} * \end{pmatrix}$$
(1.5)

удовлетворяют следующим условиям: $\hat{\kappa}_{ij} * = -\hat{\kappa}_{ji} *$, $\hat{\chi}_{ij} * = -\hat{\chi}_{ji} *$ при $i \neq j$. В этом случае уравнения (1.4) примут диагональный вид:

$$\sum_{l=1}^3 (\mathbb{I} + 4\pi \hat{\kappa}_{ll} *) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_l^2} = -4\pi \rho^{\text{ext}} + F_d(\mathbf{r}, t),$$

$$\sum_{l=1}^3 (\mathbb{I} + 4\pi \hat{\chi}_{ll} *) \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_l^2} = F_b(\mathbf{r}, t).$$
(1.6)

Уравнения вида (1.6) возникают при рассмотрении нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [3], [4]. Особенно эффективным и “естественным” методом исследования подобных задач является операторный метод, идея которого восходит к работам Вольтерра [5], в последнее время развитый в работах [6]–[8] и примененный к исследованию начально-краевых задач для полных “небуассинесковских” уравнений внутренних гравитационно-гироскопических волн и ионно-звуковых волн в “незамагниченной” плазме (см. [9], [10]).

Отметим, что во многих случаях модельные задачи о нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией сводятся к интегродифференциальным уравнениям (1.4) с ядрами сверточных операторов, зависящими от разности аргументов и имеющими вид синуса, полинома или экспоненты. В таких случаях возможна редукция исходной векторной системы уравнений на основе введения обобщенных потенциалов квазистационарных электрического и магнитного полей (см. [3]–[4]), связанных с известными потенциалами электрического и магнитного полей $\varphi(x, t)$, $\psi(x, t)$ некоторыми дифференциальными соотношениями вида

$$\varphi(x, t) = \mathbb{R}_n(D_t) \Phi(x, t), \quad \psi(x, t) = \mathbb{Q}_m(D_t) \Psi(x, t),$$
(1.7)

где $\mathbb{R}_n(D_t)$ и $\mathbb{Q}_m(D_t)$ – дифференциальные полиномы порядка n и m соответственно, конкретный вид которых определяется ядрами сверточных операторов $\hat{\chi}_{ij} *$ и $\hat{\kappa}_{ij} *$. Как видно из соотношений (1.7), обобщенные потенциалы $\Phi(x, t)$ и $\Psi(x, t)$ определены неоднозначно, как функции времени, поэтому необходимо потребовать выполнения некоторых калибровочных условий, например таких:

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l} \Phi(x, t)|_{t=0} = 0, \quad l = \overline{0, n-1}, \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k} \Psi(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}.$$
(1.8)

После подстановки соотношений (1.7) для обобщенных потенциалов в интегродифференциальные уравнения (1.7) с учетом условий (1.8) в указанных выше случаях интегродифференциальные уравнения для потенциалов $\varphi(x, t)$, $\psi(x, t)$ преобразуются в дифференциальные уравнения составного типа (см. [3], [4]) для обобщенных потенциалов $\Phi(x, t)$ и $\Psi(x, t)$:

$$\mathbb{R}_n(D_t) \Delta_3 \Phi(x, t) + \sum_{i,j=1}^{3,3} \tilde{\mathbb{R}}_{nij}(D_t) \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} = -4\pi \rho^{\text{ext}} + F_d(x, t),$$

$$\mathbb{Q}_m(D_l)\Delta_3\Psi(x, t) + \sum_{i,j=1}^{3,3} \tilde{\mathbb{Q}}_{mij}(D_l)\frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x_i\partial x_j} = F_b(x, t),$$

$\tilde{\mathbb{R}}_{nij}$, $\tilde{\mathbb{Q}}_{mij}$ – полиномы порядка не выше n и m соответственно. В частности, в следующих разделах будут рассматриваться задачи, подпадающие под данные условия. Однако вполне возможно, что более сложные процессы в средах с анизотропной дисперсией можно будет описать лишь существенно интегродифференциальными уравнениями, родственными эллиптическим (см. [6], [8]) вида (1.4).

Рассмотрим возможные граничные условия для введенных потенциалов квазистационарного электромагнитного поля в анизотропных средах с дисперсией. Введем единичный вектор нормали $\mathbf{n}_0(x)$ к граничной поверхности $S_{12} \in A^{(1,\lambda)}$ раздела двух сред, направленный из первой среды во вторую, обозначим через $S_{12}^\pm$ две стороны ориентированной поверхности S_{12} , тогда граничные условия для векторов индукции и напряженности электромагнитного поля будут иметь вид (см., например, [1])

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_0|_{S_{12}^+} - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}_0|_{S_{12}^-} &= 0, \quad \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_0|_{S_{12}^+} - \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_0|_{S_{12}^-} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}|_{S_{12}}, \\ \mathbf{D}_1 \mathbf{n}_0|_{S_{12}^+} - \mathbf{D}_2 \mathbf{n}_0|_{S_{12}^-} &= 4\pi \boldsymbol{\eta}|_{S_{12}}, \quad \mathbf{B}_1 \mathbf{n}_0|_{S_{12}^+} - \mathbf{B}_2 \mathbf{n}_0|_{S_{12}^-} = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{i}$ – поверхностные плотности “внешних” зарядов и тока на границе раздела двух сред. Подставим в уравнения (1.9) выражения (1.3) и (1.1); тогда граничные условия (1.9) примут вид

$$(\nabla \varphi_1, \zeta)|_{S_{12}^+} = (\nabla \varphi_2, \zeta)|_{S_{12}^-}, \quad (1.10a)$$

$$(\nabla \psi_1, \zeta)|_{S_{12}^+} - (\nabla \psi_2, \zeta)|_{S_{12}^-} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{i}, \zeta)|_{S_{12}}, \quad (1.10b)$$

$$(\mathbf{I}\delta_{ij} + 4\pi\kappa_{1ij}^*)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}n_{0i}|_{S_{12}^+} - (\mathbf{I}\delta_{ij} + 4\pi\kappa_{2ij}^*)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}n_{0i}|_{S_{12}^-} = 4\pi\tilde{\eta}(x, t)|_{S_{12}}, \quad (1.10v)$$

$$(\mathbf{I}\delta_{ij} + 4\pi\chi_{1ij}^*)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_j}n_{0i}|_{S_{12}^+} - (\mathbf{I}\delta_{ij} + 4\pi\chi_{2ij}^*)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_j}n_{0i}|_{S_{12}^-} = f_b(x, t)|_S, \quad (1.10r)$$

где $\zeta(x)$ – произвольный вектор в касательной плоскости в точке $x \in S_{12}$, $\tilde{\eta}(x, t) = \eta(x, t) + \eta_0(x, t)$ – полная поверхностная плотность зарядов, “внешних” и “внутренних”, $\eta_0(x, t) = P_{1i0}n_{0i}|_{S_{12}^+} - P_{2i0}n_{0i}|_{S_{12}^-}$, $f_b(x, t)|_S = M_{1i0}n_{0i}|_{S_{12}^+} - M_{2i0}n_{0i}|_{S_{12}^-}$.

Заметим, что из общих выражений (1.10) могут быть получены как точные, так и приближенные граничные условия для случаев, когда поле или совсем не проникает во вторую среду (идеальный проводник), или частично проникает, образуя “скин-слой”.

В дальнейшем будут рассмотрены конкретные модели сред с анизотропной дисперсией и полные уравнения, описывающие нестационарные процессы в этих средах, причем эти модели можно разделить на модели сред с анизотропией электрических свойств (плазма во внешнем магнитном поле) и с анизотропией магнитных свойств (магнетики во внешнем магнитном поле). Конкретный вид возможных граничных условий для каждой модели будет следовать из уравнений (1.10) и явного вида операторных тензоров электрической или магнитной восприимчивости.

2. “ХОЛОДНАЯ” ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Простейшая модель магнитоактивной плазмы, т.е. плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле, – это модель “холодной” бесстолкновительной плазмы [11]. Температура подобной плазмы предполагается настолько низкой, что тепловым движением частиц можно пренебречь. Условия применимости этого приближения (см. [11])

$$v_T|k_{\parallel}|/\omega \ll 1, \quad v_T|k_{\perp}|/\omega_B \ll 1, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{k}_{\parallel}$, $\mathbf{k}_{\perp}$ – составляющие волнового вектора вдоль и поперек внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, v_T – тепловая скорость частицы, ω – характерная частота колебания электромагнитного поля, $\omega_B =$

$= |q|B_0/(mc)$ – ларморова частота частицы заряда q . Неравенства (2.1) должны выполняться для каждого рода частиц в плазме. Кроме того, частота ω не должна быть слишком близкой к ларморовой частоте какой-либо из частиц плазмы, поскольку вблизи этих частот пространственная дисперсия должна учитываться и при выполнении условий (2.1).

В указанных предположениях рассмотрим бесстолкновительную “холодную” ионно-электронную плазму, помещенную во внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$. Выберем декартову систему координат $\{x, y, z\}$, в которой направление магнитного поля $\mathbf{B}_0$ совпадает с осью z . Линеаризованные уравнения движения ионов и электронов вместе с уравнениями Максвелла в приближении квазистационарного поля имеют вид (см. [11], [13])

$$m\partial \mathbf{v}_e/\partial t = e\nabla\varphi - m\omega_{B_e}[\mathbf{v}_e, \mathbf{e}_3], \quad M\partial \mathbf{v}_i/\partial t = -Ze\nabla\varphi + M\omega_{B_i}[\mathbf{v}_i, \mathbf{e}_3], \quad (2.2)$$

$$\partial \mathbf{P}/\partial t + en_0\mathbf{v}_e - Zen_0\mathbf{v}_i = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = -\nabla\varphi + 4\pi\mathbf{P}, \quad (2.3)$$

где индексы e, i относятся к электронам и ионам соответственно, $\omega_{B_e} = eB_0/(mc)$, $\omega_{B_i} = ZeB_0/Mc$ – ларморовы частоты электронов и ионов (M и m – их массы соответственно), φ – потенциал электрического поля, $\mathbf{D}$; $\mathbf{P}$ – векторы электрической индукции и поляризации.

Проинтегрировав уравнения (2.2) по времени, получим

$$\hat{A}_e \mathbf{v}_e = \frac{e}{m} \hat{S}_1 * \nabla\varphi + \mathbf{f}^{(e)}(x), \quad \hat{A}_i \mathbf{v}_i = -\frac{Ze}{M} \hat{S}_1 * \nabla\varphi + \mathbf{f}^{(i)}(x), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{P} = en_0 \hat{S}_1 * (Z\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) + \mathbf{P}_0(x), \quad (2.5)$$

где матричные операторы $\hat{A}_e$ и $\hat{A}_i$ имеют вид

$$\hat{A}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \omega_{B_e} \hat{S}_1 * 0 \\ -\omega_{B_e} \hat{S}_1 * & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\omega_{B_i} \hat{S}_1 * 0 \\ \omega_{B_i} \hat{S}_1 * & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$\mathbf{f}^{(e)}(x)$, $\mathbf{f}^{(i)}(x)$ – начальные распределения скоростей электронов и ионов соответственно, $\mathbf{P}_0(x)$ – начальное распределение поляризации плазмы, $\mathbf{I}$ – единичный оператор, $\hat{S}_g *$ – сверточный вольтерровский оператор с ядром $g(t) \in \mathbb{C}^{(0)}[0; +\infty)$:

$$\hat{S}_g * u = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Определители матричных операторов $\hat{A}_e$ и $\hat{A}_i$ равны почти единичным вольтерровым операторам (см. [7], [6]):

$$\det \hat{A}_e = \mathbf{I} + \omega_{B_e}^2 \hat{S}_t *, \quad \det \hat{A}_i = \mathbf{I} + \omega_{B_i}^2 \hat{S}_t *,$$

причем операторы вида $\mathbf{I} + \hat{S}_g *$ образуют абелеву группу относительно умножения (см. [6], [7]); в частности, оператор $\mathbf{I} - \omega_{B_e(i)} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_e(i)}t)} *$ является обратным к оператору $\mathbf{I} + \omega_{B_e(i)}^2 \hat{S}_t *$, поэтому для матричных операторов (2.6) определены обратные матричные операторы, имеющие вид

$$\hat{A}_e^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \omega_{B_e} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_e}t)} * & -\omega_{B_e} \hat{S}_t * & 0 \\ \omega_{B_e} \hat{S}_t * & \mathbf{I} - \omega_{B_e} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_e}t)} * & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}}_i^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \omega_{B_i} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_i} t)} * & \omega_{B_i} \hat{S}_1 * & 0 \\ -\omega_{B_i} \hat{S}_1 * & \mathbf{I} - \omega_{B_i} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_i} t)} * & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Разрешая уравнения (2.4) относительно вектор-функций $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_i$ и подставляя полученные выражения в уравнение для вектора поляризации (2.5), получаем

$$P_l = -\hat{\kappa}_{lj} * \varphi_{x_j}(x, t) + \frac{1}{4\pi} F_{l0}(x, t), \quad (2.7)$$

где $\hat{\kappa} = (\hat{\kappa}_{lj} *)$ – операторный тензор электрической восприимчивости:

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_1 * & -\hat{\kappa}_2 * & 0 \\ \hat{\kappa}_2 * & \hat{\kappa}_1 * & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\kappa}_3 * \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\hat{\kappa}_1 * = \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{B_i}} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_i} t)} * + \frac{\omega_{p_e}^2}{\omega_{B_e}} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_e} t)} *, \quad \hat{\kappa}_2 * = (1/2)(\omega_{p_e}^2 \omega_{B_e} - \omega_{p_i}^2 \omega_{B_i}) \hat{S}_t^2 *, \quad \hat{\kappa}_3 * = \omega_p^2 \hat{S}_t^2 *,$$

$\omega_p^2 = \omega_{p_i}^2 + \omega_{p_e}^2$, $\omega_{p_i}^2 = 4\pi Z^2 e^2 n_0 / M$ – частота Ленгмюра для ионов, $\omega_{p_e}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ – частота Ленгмюра для электронов,

$$F_{l0}(x, t) = 4\pi P_{l0}(x) + 4\pi e n_0 [(\hat{\mathbf{A}}_i^{-1})_{lj} f_j^{(i)}(x) - (\hat{\mathbf{A}}_e^{-1})_{lj} f_j^{(e)}(x)] t^2 / 2.$$

Подставляя уравнение (2.7) с учетом (2.8) в уравнение (2.3), получаем интегродифференциальное уравнение электронно-ионных волн в холодной “замагниченной” плазме:

$$\begin{aligned} & \Delta_3 \varphi(x, t) + \omega_p^2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \varphi_{x_3 x_3}(x, \tau) + \\ & + \int_0^t d\tau \{ \omega_{p_e}^2 \sin[\omega_{B_e}(t - \tau)] / \omega_{B_e} + \omega_{p_i}^2 \sin[\omega_{B_i}(t - \tau)] / \omega_{B_i} \} \Delta_2 \varphi(x, \tau) = \operatorname{div} \mathbf{F}_0(x, t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Delta_2 \equiv \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2.$$

Если ввести в рассмотрение функцию $\Phi(\mathbf{r}, t)$, определяемую уравнением

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_e}^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t)$$

и удовлетворяющую калибровочным условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Phi(x, t) |_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 5},$$

то из уравнения (2.9) вытекает дифференциальное уравнение в частных производных для обобщенного потенциала электрического поля $\Phi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_e^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_i^2 \right) \Delta_2 \Phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_e}^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2 \right) \Phi_{x_3 x_3} = \operatorname{div} \mathbf{F}_0(x, t), \quad (2.10)$$

где $\omega_i = \sqrt{\omega_{p_i}^2 + \omega_{B_i}^2}$, $\omega_e = \sqrt{\omega_{p_e}^2 + \omega_{B_e}^2}$.

Отметим, что при $\omega \gg \sqrt{\omega_{B_i} \omega_{B_e}}$ ионы можно считать неподвижными [11]. В этом случае исходная векторная система уравнений состоит из уравнений (2.2), (2.3), в которой $\mathbf{v}_i = 0$. При этом

выражение для операторного тензора электрической восприимчивости можно получить формально, положив в уравнении (2.8) все величины с индексом i равными нулю:

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_1^* - \hat{\kappa}_2^* & 0 \\ \hat{\kappa}_2^* & \hat{\kappa}_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\kappa}_3^* \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\hat{\kappa}_1^* = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}} \hat{S}_{\sin(\omega_{Be} t)^*}, \quad \hat{\kappa}_2^* = (1/2) \omega_{pe}^2 \omega_{Be} \hat{S}_t^*, \quad \hat{\kappa}_3^* = \omega_{pe}^2 \hat{S}_t^*.$$

Таким образом, интегродифференциальное уравнение электронных волн в холодной плазме во внешнем поле имеет вид

$$\Delta_3 \varphi + \omega_{pe}^2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \varphi_{x_3 x_3}(x, \tau) + \omega_{pe}^2 \int_0^t d\tau \frac{\sin[\omega_{Be}(t - \tau)]}{\omega_{Be}} \Delta_2 \varphi(x, \tau) = \text{div} \mathbf{F}_0(x, t), \quad (2.12)$$

а соответствующее дифференциальное уравнение для обобщенного потенциала $\Phi(x, t)$, связанного с кулоновским потенциалом $\varphi(x, t)$ электрического поля соотношением

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Be}^2 \right) \Phi(x, t) \quad (2.13)$$

и удовлетворяющего калибровочным условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Phi(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 3},$$

примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2 \right) \Delta_2 \Phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Be}^2 \right) \Phi_{x_3 x_3} = \text{div} \mathbf{F}_0(x, t). \quad (2.14)$$

Приведем граничные условия на границе раздела “идеальный” проводник – “холодная” плазма. Для простоты рассмотрим случай неподвижных ионов (2.11)–(2.14), поскольку аналогичным образом могут быть получены граничные условия и для модели “холодной” ионно-электронной плазмы. С этой целью подставим в общее граничное условие (1.10в) выражение для операторного тензора электрической восприимчивости (2.11), а затем уравнение (2.13) для обобщенного потенциала $\Phi(x, t)$ квазистационарного электрического поля и учтем калибровочные условия (2.14). Предполагая, что электрическое поле “не проникает” в “идеальный” проводник, получаем следующее граничное условие:

$$\mathcal{L}_{ix} \Phi(x, t)|_{x \in S} \equiv (\mathcal{N}_{ix} \Phi(x, t) + \mathcal{R}_{ix} \Phi(x, t))|_{x \in S} = \tilde{\eta}(x, t)|_{x \in S}, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{ix} \Phi(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Be}^2 \right) \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial n_x} + 4\pi \omega_{pe}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Be}^2 \right) \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_3} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) + \\ &\quad + 4\pi \omega_{pe}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) + \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \right), \\ \mathcal{R}_{ix} \Phi(x, t) &= 4\pi \omega_{pe}^2 \omega_{Be} \left(\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t \partial x_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) - \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t \partial x_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \right) + \\ &\quad + 4\pi \omega_{pe}^4 \omega_{Be} \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) - \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \right), \end{aligned}$$

$\tilde{\eta}(x, t)$ – поверхностная плотность заряда на поверхности проводника S . Если на проводнике задан полный заряд (основная задача электростатики [14]) $q(t)$, $t \in [0, +\infty)$, то естественным гра-

ничным условием будет условие

$$\frac{1}{4\pi} \int_S ds \mathcal{L}_{ix} \Phi(x, t)|_{x \in S} = q(t), \quad (2.16)$$

где оператор $\mathcal{L}_{ix}$ определен в (2.15). В случае системы непересекающихся проводников для корректной постановки начально-краевой задачи достаточно задать заряд на каждом из проводников (см., например, [15]). Кроме того, из граничного условия (1.10а) вытекает, что

$$\Phi(x, t)|_{x \in S} = C(t), \quad (2.17)$$

$C(t)$ – либо заданная функция времени, либо неизвестная функция; в последнем случае условие (2.17) должно рассматриваться совместно с условием (2.16).

Отметим, что по своей структуре граничный оператор $\mathcal{N}_{ix}$ является некоторым аналогом классического оператора нормальной производной для уравнений высокого порядка составного типа [3]–[8], а оператор $\mathcal{M}_{ix}$ – как нетрудно заметить, аналог касательной производной. Таким образом, общий граничный оператор в краевом условии (2.15) является своеобразным неклассическим аналогом кривой производной для уравнений составного типа.

3. ДВУХТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Наряду с плазменными волнами, связанными с колебаниями электронов, в плазме могут распространяться также ионно-звуковые волны, в которых существенные колебания испытывают как электронная, так и ионная плотности. Эти колебания имеют слабое затухание в том случае, если температура ионов T_i много меньше температуры электронов T_e (см. [11]):

$$T_i \ll T_e.$$

В предположении, что давление плазмы мало по сравнению с давлением магнитного поля, $\beta \equiv 8\pi p_0/B_0^2 \ll 1$ (p_0 – невозмущенное давление в плазме, B_0 – невозмущенное магнитное поле), электрическое поле можно считать потенциальным $\text{rot} \mathbf{E} = \partial \mathbf{B} \approx 0$. Кроме того, при условии $\omega > \omega_B$, электроны успевают распределиться по Больцману [16]. С точки зрения электродинамического описания колебаний в данной системе, ионы можно считать внутренними зарядами, движение которых приводит к возникновению поляризации плазмы, а электроны – внешними зарядами.

Линеаризованная система уравнений, описывающая ионно-звуковые волны в бесстолкновительной плазме во внешнем однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_3$, имеет вид (см. [16])

$$\partial \mathbf{v}_i / \partial t = -(e/M) \nabla \phi - \omega_{Bi} [\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_i], \quad \partial \mathbf{P} / \partial t = en_0 \mathbf{v}_i, \quad (3.1)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = -4\pi en_e, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D} = -\nabla \phi + 4\pi \mathbf{P}, \quad (3.3)$$

$$n_e = n_0 e \phi / T_e, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{v}_i$ – гидродинамическая скорость, n_0 – невозмущенная плотность частиц, n_e – возмущенная часть плотности электронов ($n_e = n_0 \exp(e\phi/T_e) - n_0$ без линеаризации), $\mathbf{P}$ – вектор поляризации плазмы, вызванный движением ионов, $\omega_{Bi} = eB_0/(Mc)$. В уравнении движения мы пренебрегли давлением ионов.

Система уравнений (3.1)–(3.4) отличается от системы (2.2), (2.3) только тем, что в уравнениях (3.1) отсутствуют слагаемые, связанные с движением электронов (слагаемые с индексом e), а в уравнении (3.2) для вектора индукции электрического поля электроны учитываются как внешние заряды в системе “ионы во внешнем магнитном поле”. Поэтому из уравнений (2.7), (2.8), формально положив все величины с индексом e равными нулю, получим

$$\mathbf{P}_i = -\hat{\mathbf{K}}_{ij} * \phi_j(x, t) + (4\pi)^{-1} F_{i0}(x, t), \quad (3.5)$$

где $\hat{\kappa} = (\hat{\kappa}_{ij}^*)$ – операторный тензор электрической восприимчивости, равный

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_1^* & \hat{\kappa}_2^* & 0 \\ -\hat{\kappa}_2^* & \hat{\kappa}_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\kappa}_3^* \end{pmatrix},$$

$$\hat{\kappa}_1^* = \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{B_i}} \hat{S}_{\sin(\omega_{B_i} t)}^*, \quad \hat{\kappa}_2^* = (1/2) \omega_{p_i}^2 \omega_{B_i} \hat{S}_t^{*2}, \quad \hat{\kappa}_3^* = \omega_{p_i}^2 \hat{S}_t^*,$$

$$F_{i0}(x, t) = 4\pi P_{i0}(x) + 4\pi e n_0 (\hat{A}_i^{-1})_{ij} f_j^{(i)}(x) t^2 / 2,$$

матричный оператор $\hat{A}^{-1}$ определен в (2.13).

Подставляя выражение (3.5) для вектора поляризации плазмы в уравнение (3.3), а получившееся выражение для вектора индукции электрического поля – в уравнение Пуассона (3.2), с учетом (3.4) получаем интегродифференциальное уравнение ионно-звуковых волн в “замагниченной” плазме:

$$\Delta_3 \Phi - \frac{1}{r_D^2} \Phi + \omega_{p_i}^2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \Phi_{x_3 x_3}(x, \tau) + \omega_{p_i}^2 \int_0^t d\tau \frac{\sin[\omega_{B_i}(t - \tau)]}{\omega_{B_i}} \Delta_2 \Phi(x, \tau) = \text{div} F_0(x, t), \quad (3.6)$$

где $\omega_{p_i}^2 = 4\pi e^2 n_0 / M$ – частота Ленгмюра для ионов, $r_D = [T_e / (4\pi n_0 e^2)]^{1/2}$ – радиус Дебая, $\omega_{B_i} = e B_0 / (M c)$ – ионная гирочастота.

Если ввести обобщенный потенциал $\Phi(x, t)$, связанный с кулоновским потенциалом $\varphi(x, t)$ электрического поля соотношением

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2 \right) \Phi(x, t)$$

и удовлетворяющий начальным условиям, имеющим смысл калибровочных условий на обобщенный потенциал,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Phi(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 3},$$

то из уравнения (3.6) вытекает дифференциальное уравнение для обобщенного потенциала электрического поля

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_i}^2 \right) \left(\Delta_3 \Phi - \frac{1}{r_D^2} \Phi \right) + \omega_{p_i}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 \Phi + \omega_{p_i}^2 \omega_{B_i}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \text{div} F_0(x, t). \quad (3.7)$$

Отметим, что вывод уравнения нестационарных ионно-звуковых волн в “незамагниченной” плазме вместе с постановкой начально-краевых задач имеется в работах [17], [18]. В частности, наиболее типичные граничные условия, соответствующие основной задаче электростатики о нахождении распределения поля в среде заданным распределением заряда на проводнике, имеют вид (2.15)–(2.17).

Рассмотрим теперь некоторые волновые процессы в двухтемпературной плазме, наблюдаемые в случае низкочастотных колебаний: $\omega \ll \omega_{B_i}$ или $\omega \ll \omega_{B_e}$.

В первом случае $\omega \ll \omega_{B_i}$ в работах [19], [20] была предложена модель для описания низкочастотных волн, сводящаяся к системе векторных уравнений динамики электронной и ионной компонент плазмы. Рассматривались колебания плазмы, однородные вдоль направления внешнего магнитного поля $\mathbb{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_3$, с частотами $\omega < \omega_{B_i}$ и волновыми векторами, удовлетворяющими неравенству $1/\rho_i < k < 1/\rho_e$, где ρ_i и ρ_e – соответственно, гирорадиусы для электронов и ионов. Тогда для описания движения электронов можно использовать гидродинамическое описание [19]. Таким образом, в линейном приближении имеем

$$\partial \mathbf{P} / \partial t + e n_0 \mathbf{v}_e = 0. \quad (3.8)$$

Ионы в данном случае рассматриваются как внешние заряды по отношению к системе “электроны во внешнем магнитном поле”:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi en_i, \quad \mathbf{D} = -\nabla \phi_e + 4\pi \mathbf{P}, \quad (3.9)$$

где n_i – возмущенная плотность ионов, а $\phi_e(x, t)$ – потенциал электрического поля электронов. В случае низкочастотных колебаний по отношению к циклотронному вращению ионов, а стало быть, и по отношению к электронам, используют так называемое дрейфовое приближение для уравнения движения частиц [21] (в данном случае для электронов):

$$\mathbf{v}_e = \frac{c}{B_0} \left(-[\nabla \phi_e, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{\omega_{B_e}} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \phi_e \right) + v_{e3} \mathbf{e}_3, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v_{e3}}{\partial t} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi_e}{\partial x_3}, \quad (3.11)$$

n_0 – невозмущенная плотность частиц, $\mathbf{v}_e$ – скорость электронов. Поскольку рассматриваются коротковолновые колебания плазмы, то для ионов гидродинамическое описание неприменимо. Для коротковолновых колебаний становится существенным тепловое движение ионов в поперечном направлении. Такое движение должно приводить к быстрому установлению максвелловского распределения ионов в поле колебаний. В линейном приближении для возмущенной части плотности ионов в поле потенциала $\phi_e(x, t)$ имеем

$$n_i = -n_0 e \phi_e / T_i. \quad (3.12)$$

Во втором случае $\omega \ll \omega_{B_e}$ в работе [12] рассматривалась модель низкочастотных колебаний плазмы в предположении, что $\omega_{B_i} < \omega \ll \omega_{B_e}$. В этом случае электроны рассматриваются как внешние заряды по отношению к системе “ионы во внешнем магнитном поле”:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi en_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla \phi_i + 4\pi \mathbf{P}, \quad (3.13)$$

где n_e – возмущенная плотность электронов. При этом электроны распределены в поле потенциала $\phi_i(x, t)$ электрического поля ионов по закону Больцмана. В линейном приближении для возмущенной части плотности электронов в поле потенциала $\phi_i(x, t)$ имеем

$$n_e = n_0 e \phi_i / T_e. \quad (3.14)$$

Ионы для простоты считаются “холодными” и описываются в рамках дрейфового приближения линейными уравнениями движения:

$$\partial \mathbf{P} / \partial t - en_0 \mathbf{v}_i = 0, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{v}_i = -\frac{c}{B_0} \left\{ -[\nabla \phi_i, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{\omega_{B_i}} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \phi_i \right\} + v_{i3} \mathbf{e}_3, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_3}, \quad (3.17)$$

n_0 – невозмущенная плотность частиц, $\mathbf{v}_i$ – скорость ионов.

Полученные системы (3.8)–(3.12) и (3.9)–(3.17) являются векторными, что в ряде случаев сильно осложняет изучение свойств решений начально-краевых задач для этих систем. Покажем, как можно свести полученные математические модели к начально-краевым задачам для скалярных уравнений в частных производных высокого порядка составного типа.

Поскольку система уравнений (3.8)–(3.12) переходит в систему уравнений (3.13)–(3.17) при замене индексов $e \longleftrightarrow i$ и одновременном изменении знака $n_i \mapsto -n_e$, $\mathbf{v}_e \mapsto -\mathbf{v}_i$, то рассмотрим первую систему уравнений и выпишем окончательные результаты для второй системы.

Проинтегрируем по времени уравнение (3.11) и подставим получившееся выражение вместе с уравнением (3.10) в выражение (3.8), которое, в свою очередь, проинтегрируем по времени. В результате получим

$$P_l = -\hat{\mathbf{k}}_{lj} * \phi_{ex_j}(x, t) + (4\pi)^{-1} F_{l0}(x, t), \quad (3.18)$$

где операторный тензор электрической восприимчивости $\hat{\kappa} = (\hat{\kappa}_{ij}^*)$ имеет вид

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} (c^2/u_{A_e}^2)\mathbf{I} & (\omega_{p_e}^2/\omega_{B_e})\hat{S}_1^* & 0 \\ -(\omega_{p_e}^2/\omega_{B_e})\hat{S}_1^* & (c^2/u_{A_e}^2)\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{p_e}^2\hat{S}_1^* \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$u_{A_e} = B_0/\sqrt{4\pi n_0 m}$ – альфвеновская скорость для электронов,

$$\mathbf{F}_0(x, t) = -4\pi e n_0 v_{e3}(x, 0) \mathbf{e}_3 + 4\pi e (n_0/\omega_{B_e}) \nabla_{\perp} \Phi_e(x, 0).$$

Из уравнений (3.9), (3.12) и (3.18), (3.19) вытекает интегродифференциальное уравнение, описывающее низкочастотные электронные магнитно-звуковые волны:

$$\left(1 + \frac{c^2}{u_{A_e}^2}\right) \Delta_2 \Phi_e + (\Phi_e)_{x_3 x_3} - \frac{1}{r_{D_e}^2} \Phi_e + \omega_{p_e}^2 \int_0^t d\tau (t - \tau) (\Phi_e)_{x_3 x_3}(x, \tau) = \text{div} \mathbf{F}_0(x, t), \quad (3.20)$$

$r_{D_e}^2 = T_e^2/(4\pi e^2 n_0)$ – квадрат электронного дебаевского радиуса. Введем обобщенный потенциал электрического поля $\Phi_e(x, t)$:

$$\Phi_e(x, t) = \partial^2 \Phi_e / \partial t^2,$$

удовлетворяющий калибровочным условиям

$$\frac{\partial^k \Phi_e(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 1}.$$

Тогда уравнение (3.20) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_2 \Phi_e + \frac{u_{A_e}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \Phi_e - \frac{1}{r_{D_e}^2} \Phi_e \right) + \omega_{B_e}^2 \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x_3^2} = \frac{u_{A_e}^2}{c^2} \text{div} \mathbf{F}_0(x, t). \quad (3.21)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (3.13)–(3.17). Отметим, что операторный тензор электрической восприимчивости совпадает с (3.19) с заменой индекса e на i . При этом интегродифференциальное уравнение, описывающее низкочастотные ионные магнитно-звуковые волны, имеет вид

$$\left(1 + \frac{c^2}{u_{A_i}^2}\right) \Delta_2 \Phi_i + (\Phi_i)_{x_3 x_3} - \frac{1}{r_{D_i}^2} \Phi_i + \omega_{p_i}^2 \int_0^t d\tau (t - \tau) (\Phi_i)_{x_3 x_3}(x, \tau) = \text{div} \mathbf{F}_0(x, t),$$

где $u_{A_i} = B_0/\sqrt{4\pi n_0 M}$ – альфвеновская скорость для ионов, $r_{D_i}^2 = T_i^2/(4\pi e^2 n_0)$ – квадрат ионного дебаевского радиуса. Для обобщенного потенциала электрического поля $\Phi_i(x, t)$:

$$\Phi_i(x, t) = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^k \Phi_i(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 1},$$

дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_2 \Phi_i + \frac{u_{A_i}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta_3 \Phi_i - \frac{1}{r_{D_i}^2} \Phi_i \right) + \omega_{B_i}^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x_3^2} = \frac{u_{A_i}^2}{c^2} \text{div} \mathbf{F}_0(x, t). \quad (3.22)$$

Типичные граничные условия для уравнений (3.21), (3.22) будут иметь вид (2.15)–(2.17) с граничным оператором косой производной $\mathfrak{L}_{ix}$, имеющим вид

$$\mathfrak{L}_{ix} \equiv \mathfrak{N}_{ix} + \mathfrak{N}_{ix},$$

$$\mathfrak{N}_{ix} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial n_x} + \frac{c^2}{u_{A_e}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \omega_{p_e}^2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\Re_{ix} \equiv \frac{\omega_{p_e}^2}{\omega_{B_e}} \left(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_2} - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_1} \right).$$

4. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В МАГНЕТИКАХ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В макроскопической теории анизотропия магнитных свойств ферромагнетиков описывается путем введения в термодинамический потенциал энергии анизотропии. Для одно- и двусосных кристаллов разложение энергии анизотропии начинается с членов второй степени по компонентам $\mathbf{m} = \mathbf{M}/|\mathbf{M}|$ (см. [1]):

$$U_{\text{ан}} = K_{ij} m_i m_j, \quad (4.1)$$

где K_{ij} – симметричный тензор второго ранга, компоненты которого имеют размерность плотности энергии. С другой стороны, предполагается, что размеры ферромагнетика намного больше, чем размеры, при которых существенна энергия неоднородности. В этом случае можно не учитывать ее вклад в свободную энергию ферромагнетика [1].

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – ортогональный базис в диагональном представлении тензора K_{ij} . Рассмотрим некоторые случаи выражения (4.1), реализуемые для одноосных кристаллов. Тензор K_{ij} для одноосных кристаллов имеет две независимые компоненты, а поскольку имеется квадратичная комбинация, не зависящая от направления вектора $\mathbf{m}$: $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$, то выражение (4.1) содержит всего один независимый коэффициент:

$$U_{\text{ан}} = -K m_z^2 \text{ – одноосный ферромагнетик.}$$

В зависимости от знака коэффициента K энергия анизотропии $U_{\text{ан}}$ будет минимальна при некоторых определенных направлениях вектора намагниченности $\mathbf{M}$:

$$K > 0: \mathbf{M} = M_3 \mathbf{e}_3 \text{ – одноосный ферромагнетик типа “легкая” ось } (\mathbf{e}_3),$$

$$K < 0: \mathbf{M} \perp \mathbf{e}_3 \text{ – одноосный ферромагнетик типа “легкая” плоскость } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

В рамках макроскопического описания движения магнитного момента для неметаллических ферромагнетиков (ферритов) можно воспользоваться бездиссипативным уравнением Ландау–Лифшица [1], [2]:

$$\partial \mathbf{M} / \partial t = \gamma [\mathbf{H}_{\text{эф}}, \mathbf{M}], \quad (4.2)$$

где $\mathbf{H}_{\text{эф}} = \mathbf{H} + \beta M_z \mathbf{e}_3$ – эффективное магнитное поле в ферромагнетике, $\mathbf{H}$ – внешнее магнитное поле, $\beta = K/|\mathbf{M}|^2$, $\gamma = g|e|/2mc$, g – гиромагнитное отношение ферромагнетика. Кроме того, как всегда, предполагаем, что электромагнитное поле квазистационарно: $\omega \ll c/l$, l – характерные размеры тела. Тогда к уравнению Ландау–Лифшица необходимо добавить уравнения “квазистационарного” магнитного поля:

$$\text{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим сначала случай одноосного феррита типа “легкая” ось: $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_3$ – внешнее поле. Линеаризованное уравнение Ландау–Лифшица в данном случае примет вид

$$\partial \mathbf{m} / \partial t = \gamma [\mathbf{H}_{\text{эф}}, M_0 \mathbf{e}_3 + \mathbf{m}], \quad (4.4)$$

где $\mathbf{H}_{\text{эф}} = H_0 \mathbf{e}_3 + \mathbf{h} + \beta M_0 \mathbf{e}_3 + \beta \tilde{m}_z \mathbf{e}_3$, $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_3 + \mathbf{h}$, $\mathbf{B} = (H_0 + 4\pi M_0) \mathbf{e}_3 + \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}$, $\beta = K/M_0^2$.

Таким образом, из системы уравнений (4.3), (4.4) получим

$$\partial \mathbf{m} / \partial t = \gamma (H_0 + \beta M_0) [\mathbf{e}_3, \mathbf{m}] - \gamma M_0 [\nabla \psi, \mathbf{e}_3], \quad (4.5)$$

$$\text{div} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = -\nabla \psi + 4\pi \mathbf{m}, \quad \mathbf{h} = -\nabla \psi, \quad (4.6)$$

где $\psi(x, t)$ – скалярный потенциал магнитного поля. Так же как и в предыдущих случаях, сведем эту систему к одному скалярному уравнению в частных производных высокого порядка составного типа. Проинтегрировав уравнение (4.5) по времени, получим

$$\hat{\mathbf{V}}_1 \mathbf{m} = -\hat{\mathbf{V}}_2 \nabla \psi + \mathbf{m}_0(x),$$

$$\hat{\mathbf{V}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \omega_1 \hat{S}_1 * & 0 \\ -\omega_1 \hat{S}_1 * & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{V}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma M_0 \hat{S}_1 * & 0 \\ -\gamma M_0 \hat{S}_1 * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1 = \gamma(H_0 + \beta M_0)$. Матричный оператор $\hat{\mathbf{V}}_1$ обратим, поскольку определитель этого матричного оператора равен почти единичному сверточному вольтерровскому (см. [6]–[8])

$$\det \hat{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{I} + \omega_1^2 \hat{S}_1 * ,$$

который однозначно обратим $(\mathbf{I} + \omega_1^2 \hat{S}_1 *)^{-1} = \mathbf{I} - \omega_1 \hat{S}_{\sin(\omega_1 t)} *$. Таким образом, обращая матричный оператор $\hat{\mathbf{V}}_1$, в результате ряда преобразований приходим к следующему уравнению для намагниченности $\mathbf{m}$:

$$m_l = -\hat{\chi}_{lj} * \Psi_{x_j}(x, t) + \frac{1}{4\pi} q_l(x, t), \quad (4.7)$$

$$\hat{\chi} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} (\omega_2^2/\omega_1) \hat{S}_{\sin(\omega_1 t)} * & \gamma M_0 \hat{S}_{\cos(\omega_1 t)} * & 0 \\ -\gamma M_0 \hat{S}_{\cos(\omega_1 t)} * & (\omega_2^2/\omega_1) \hat{S}_{\sin(\omega_1 t)} * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$q_l(x, t) = 4\pi(\hat{\mathbf{V}}_1^{-1})_{lj} m_{0l}(x)$, $\omega_2^2 = 4\pi\gamma^2 M_0(H_0 + \beta M_0)$. Подставляя уравнения (4.7) в (4.6), с учетом (4.8) получаем интегродифференциальное уравнение спиновых волн в однородном феррите типа “легкая ось”:

$$\Delta_3 \Psi(x, t) + \omega_2^2 \int_0^t d\tau \frac{\sin[\omega_1(t-\tau)]}{\omega_1} \Delta_2 \Psi(x, \tau) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t). \quad (4.9)$$

Введем обобщенный потенциал магнитного поля $\Psi(x, t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\Psi = (\partial^2/\partial t^2 + \omega_1^2) \Psi(x, t) \quad (4.10)$$

и дополнительным калибровочным условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \Psi(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 1}. \quad (4.11)$$

Тогда из уравнения (4.9) получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \right) \Delta_3 \Psi(x, t) + \omega_2^2 \Delta_2 \Psi(x, t) = \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t), \quad (4.12)$$

где $\omega_1 = \gamma(H_0 + \beta M_0)$, $\omega_2 = \gamma\sqrt{4\pi M_0(H_0 + \beta M_0)}$.

Типичные граничные условия для данной модели в случае границы раздела “идеальный” проводник – магнетик имеют вид

$$\mathfrak{L}_{ix} \Psi(x, t)|_{x \in S} = (\mathbf{q}, \mathbf{n})|_{x \in S}, \quad (\nabla \Psi, \boldsymbol{\zeta})|_S = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{i}, \boldsymbol{\zeta})|_{S_{12}}, \quad (4.13)$$

$$\mathfrak{L}_{ix} \equiv \mathfrak{N}_{ix} + \mathfrak{R}_{ix},$$

$$\mathfrak{N}_{ix} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \right) \frac{\partial}{\partial n_x} + \omega_2^2 \left(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$$\mathfrak{R}_{ix} \equiv \gamma M_0 \left(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_2} - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_1} \right),$$

где $\boldsymbol{\zeta}(x)$ – произвольный вектор в касательной плоскости в точке $x \in S$, $\mathbf{i}$ – поверхностная плотность заряда на проводнике.

Рассмотрим теперь случай однородного феррита типа “легкая плоскость”. В этом случае эффективное внутреннее поле феррита имеет вид $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_1 + \mathbf{h} + \beta m_3 \mathbf{e}_3$, а намагниченность $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_1 + \mathbf{m}$ (см. [1]). Подставляя выражение для эффективного поля и намагниченности в уравнение (4.3), получаем

$$\partial \mathbf{m} / \partial t = \gamma H_0 [\mathbf{e}_1, \mathbf{m}] + \gamma M_0 [\mathbf{h}, \mathbf{e}_1] - \gamma |\beta| m_3 M_0 \mathbf{e}_2, \quad (4.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = -\nabla \psi + 4\pi \mathbf{m}, \quad \mathbf{h} = -\nabla \psi. \quad (4.15)$$

Аналогично выводу уравнений (4.7)–(4.12) из системы (4.14), (4.15) получаем

$$m_l = -\hat{\chi}_{lj} * \psi_{x_j}(x, t) + \frac{1}{4\pi} q_l(x, t), \quad (4.16)$$

$$\hat{\chi} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_4^2 / \omega_3) \hat{S}_{\sin(\omega_3 t)} * & \gamma M_0 \hat{S}_{\cos(\omega_3 t)} * \\ 0 & -\gamma M_0 \hat{S}_{\cos(\omega_3 t)} * & (\omega_5^2 / \omega_3) \hat{S}_{\sin(\omega_3 t)} * \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

где $q_l(x, t) = 4\pi (\hat{\mathbf{V}}_3)_{lj} m_{0l}(x)$, $\omega_3 = \gamma \sqrt{H_0(H_0 + |\beta| M_0)}$, $\omega_4 = \gamma \sqrt{4\pi(H_0 + |\beta| M_0)M_0}$, $\omega_5 = \gamma \sqrt{4\pi H_0 M_0}$,

$$\hat{\mathbf{V}}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} - \omega_3 \hat{S}_{\sin(\omega_3 t)} * & -\gamma(H_0 + \beta M_0) \hat{S}_{\cos(\omega_3 t)} * \\ 0 & \gamma H_0 \hat{S}_{\cos(\omega_3 t)} * & \mathbf{I} - \omega_3 \hat{S}_{\sin(\omega_3 t)} * \end{pmatrix}.$$

Подставляя уравнение (4.16) в (4.15), с учетом (4.17) получаем интегродифференциальное уравнение спиновых волн в однородном феррите типа “легкая плоскость”:

$$\Delta_3 \psi(x, t) + \int_0^t d\tau \frac{\sin[\omega_3(t - \tau)]}{\omega_3} [\omega_4^2 \psi_{x_2 x_2}(x, \tau) + \omega_5^2 \psi_{x_3 x_3}(x, \tau)] = \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t).$$

Для обобщенного потенциала магнитного поля $\Psi(x, t)$,

$$\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_3^2 \right) \Psi(x, t), \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k} \Psi(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 1},$$

получим, что и в этом случае математическая модель исследуемой задачи сводится к одному скалярному уравнению в частных производных высокого порядка составного типа:

$$(\partial^2 / \partial t^2 + \omega_3^2) \Delta_3 \Psi(x, t) + \omega_4^2 \Psi_{x_2 x_2}(x, t) + \omega_5^2 \Psi_{x_3 x_3}(x, t) = \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t). \quad (4.18)$$

Стандартным образом можно показать, что граничные условия на поверхности раздела “идеальный” проводник – магнетик имеют вид (4.13) с граничным оператором косой производной $\mathfrak{L}_{tx}$ следующего вида:

$$\mathfrak{L}_{tx} \equiv \mathfrak{N}_{tx} + \mathfrak{R}_{tx},$$

$$\mathfrak{N}_{tx} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_3^2 \right) \frac{\partial}{\partial n_x} + \omega_4^2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + \omega_5^2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\mathfrak{R}_{tx} \equiv \gamma M_0 \left[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_2} - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_3} \right].$$

Спиновые волны в различных структурах в рамках теории молекулярного поля описываются однотипным образом. Особенности спиновых волн в антиферромагнетиках обусловлены существованием двух и более магнитных подрешеток. Рассмотрим простейший, но наиболее интересный случай – двухподрешеточный антиферромагнетик типа “легкая плоскость”.

Пусть $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_2$. Если не учитывать влияния анизотропии в базисной плоскости, то из симметрии задачи ясно, что намагниченности подрешеток установятся под одинаковым углом к внешнему полю, причем $\sin \alpha = H_0 / 2H_E$, где α – угол между $\mathbf{e}_1$ и направлением спонтанной намагничен-

ности первой подрешетки $\mathbf{M}_{10}$ (см. [22]). Уравнения движения намагниченностей подрешеток без учета диссипации имеют вид

$$\partial \mathbf{m}_1 / \partial t = \gamma [\mathbf{H}_{1\text{эф}}, \mathbf{M}_1], \quad \partial \mathbf{m}_2 / \partial t = \gamma [\mathbf{H}_{2\text{эф}}, \mathbf{M}_2]. \quad (4.19)$$

Будем рассматривать малые колебания намагниченности $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ во внешнем магнитном поле. Тогда намагниченности подрешеток имеют вид

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{e}_1 M_0 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 M_0 \sin \alpha + \mathbf{m}_1, \quad \mathbf{M}_2 = -\mathbf{e}_1 M_0 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 M_0 \sin \alpha + \mathbf{m}_2; \quad (4.20)$$

эффективные поля, действующие на подрешетки, таковы:

$$\mathbf{H}_{1\text{эф}} = H_0 \mathbf{e}_2 + \frac{H_K}{M_0} m_{1x_3} \mathbf{e}_3 - \lambda \mathbf{M}_2 + \mathbf{h}, \quad \mathbf{H}_{2\text{эф}} = H_0 \mathbf{e}_2 + \frac{H_K}{M_0} m_{2x_3} \mathbf{e}_3 - \lambda \mathbf{M}_1 + \mathbf{h}, \quad (4.21)$$

где $H_K = 2K/M_0 < 0$ – константа поля анизотропии, $-\lambda \mathbf{M}_1, -\lambda \mathbf{M}_2$ – обменные поля, действующие со стороны первой подрешетки на вторую и со стороны второй на первую, $\mathbf{h}$ – малое возмущение внешнего поля, причем $h \ll H_0$. Введем ферромагнитный и антиферромагнитный векторы $\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$, $\mathbf{L} = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$, тогда система уравнений (4.19)–(4.21) может быть сведена к следующим уравнениям (см. [22]):

$$\partial \tilde{m}_1 / \partial t = \gamma (H_0 - H_K \sin \alpha) \tilde{m}_3 - 2\gamma \sin(\alpha) h_3, \quad (4.22)$$

$$\partial \tilde{m}_2 / \partial t = \gamma H_K \cos(\alpha) L_3, \quad (4.23)$$

$$\partial \tilde{m}_3 / \partial t = -\gamma H_0 \tilde{m}_1 + 2\gamma \sin(\alpha) h_1, \quad (4.24)$$

$$\partial L_1 / \partial t = -\gamma H_K \sin(\alpha) L_3, \quad (4.25a)$$

$$\partial L_2 / \partial t = -\gamma (2H_E - H_K) \cos(\alpha) \tilde{m}_3 + 2\gamma M_0 \cos(\alpha) h_3, \quad (4.25b)$$

$$\partial L_3 / \partial t = \gamma H_E \cos(\alpha) \tilde{m}_2 - 2\gamma M_0 \cos(\alpha) h_2, \quad (4.26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi \tilde{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{h} = -\nabla \psi, \quad (4.27)$$

где $\tilde{\mathbf{m}} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3)$, $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$, $H_E = \lambda M_0$.

Покажем, что и эту систему можно свести к одному скалярному уравнению, аналогичному предыдущим.

Система уравнений для нахождения ферромагнитного вектора $\tilde{\mathbf{m}}$ состоит из уравнений (4.22)–(4.24), (4.26), (4.27). Проинтегрируем по времени уравнения (4.22)–(4.24) и (4.26). В проинтегрированное уравнение (4.23) подставим выражение, получившееся в результате интегрирования соотношения (4.26) для L_3 . В результате получим

$$\hat{\mathbf{V}}_4 \tilde{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{V}}_5 \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{q}}_0(x, t),$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_0(x, t) = \tilde{m}_{10}(x) \mathbf{e}_1 + (-\gamma |H_K| \cos(\alpha) L_{30}(x) t + \tilde{m}_{20}(x)) \mathbf{e}_2 + \tilde{m}_{30}(x) \mathbf{e}_3,$$

$$\hat{\mathbf{V}}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & -\gamma [H_0 + |H_K| \cos(\alpha)] \hat{S}_1^* \\ 0 & \mathbf{I} + \gamma^2 |H_K| H_E \cos^2(\alpha) \hat{S}_1^* & 0 \\ \gamma H_0 \sin(\alpha) \hat{S}_1^* & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{V}}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\gamma \sin(\alpha) \hat{S}_1^* \\ 0 & 2\gamma^2 M_0 |H_K| \cos^2(\alpha) \hat{S}_1^* & 0 \\ 2\gamma \sin(\alpha) \hat{S}_1^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как и раньше, обращаем матричный оператор $\mathbf{V}_4$ (поскольку $\det \hat{\mathbf{V}}_4 = \mathbf{I} + \gamma^2 |H_K| H_E \cos^2(\alpha) \hat{S}_1^*$ – обратимый оператор) и в результате получаем уравнение для вектора намагниченности $\tilde{\mathbf{m}}$ системы и выражение для операторного тензора магнитной восприимчивости:

$$\tilde{m}_i = -\hat{\chi}_{ij} \psi_{x_j} + \frac{1}{4\pi} q_{i0}(x, t), \quad (4.28)$$

$$\hat{\chi} = (\hat{\chi}_{ij}) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} (\omega_8^2/\omega_6)\hat{S}_{\sin(\omega_6 t)}^* & 0 & -2\gamma \sin(\alpha)\hat{S}_{\cos(\omega_6 t)}^* \\ 0 & (\omega_{10}^2/\omega_7)\hat{S}_{\sin(\omega_7 t)}^* & 0 \\ 2\gamma \sin(\alpha)\hat{S}_{\cos(\omega_6 t)}^* & 0 & (\omega_9^2/\omega_6)\hat{S}_{\sin(\omega_6 t)}^* \end{pmatrix},$$

где $\omega_6^2 = \gamma^2 H_0(H_0 + |H_K| \sin \alpha)$, $\omega_7^2 = \gamma^2 H_E |H_K| \cos^2 \alpha$, $\omega_8^2 = \omega_6^2/H_E$, $\omega_9^2 = 2\gamma^2 H_0 \sin \alpha$, $\omega_{10}^2 = 2\gamma^2 M_0 |H_K| \cos^2 \alpha$, $\mathbf{q}_0(x, t) = 4\pi(\hat{\mathbf{V}}^{-1})_{lj} \tilde{\mathbf{q}}_{0j}$.

Таким образом, из уравнений (4.27), (4.28) получаем интегродифференциальное уравнение спиновых волн в двухподрешеточном антиферромагнетике типа "легкая плоскость":

$$\begin{aligned} \Delta_3 \psi(x, t) + \int_0^t d\tau \{ \sin[\omega_6(t-\tau)]/\omega_6 \} [\omega_8^2 \psi_{x_1 x_1}(x, \tau) + \omega_9^2 \psi_{x_3 x_3}(x, \tau)] + \\ + \omega_{10}^2 \int_0^t d\tau \{ \sin[\omega_7(t-\tau)]/\omega_7 \} \psi_{x_2 x_2}(x, \tau) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{q}_0(x, t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Введем обобщенный потенциал магнитного поля $\Psi(x, t)$:

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_6^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2 \right) \Psi(x, t), \quad \frac{\partial^k}{\partial t^k} \Psi(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, 3};$$

тогда получим дифференциальное уравнение для $\Psi(x, t)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_6^2 + \omega_8^2 \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_6^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2 + \omega_{10}^2 \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_6^2 + \omega_9^2 \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} = \operatorname{div} \mathbf{q}_0(x, t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Отметим, что к уравнениям вида (4.29) и (4.30) сводится система уравнений, описывающая спиновые волны в слабом ферромагнетике в рамках модели Дзялошинского [22].

Граничные условия на поверхности раздела "идеальный" проводник – магнетик имеют вид (4.13) с граничным оператором косой производной $\mathfrak{L}_{tx}$, имеющим в данном случае вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{tx} &\equiv \mathfrak{N}_{tx} + \mathfrak{R}_{tx}, \\ \mathfrak{N}_{tx} &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_6^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2 \right) \frac{\partial}{\partial n_x} + \omega_{10}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_6^2 \right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2 \right) \left(\omega_8^2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega_9^2 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \\ \mathfrak{R}_{tx} &\equiv 2\gamma \sin \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_7^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_3) \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

При выводе уравнений спиновых волн мы не учитывали, что внутреннее поле в ферромагнетиках и антиферромагнетиках зависит от формы рассматриваемых кристаллов. Вообще говоря, учет этого фактора представляет собой сложную краевую задачу. Однако можно рассмотреть наиболее простую из таких граничных задач – об однородных магнитных колебаниях малого ферромагнитного эллипсоида [23]. Причем "малость" ферромагнетика понимается двояким образом: малость по сравнению с другими размерами системы, что позволяет рассматривать в качестве заданных величин внешние магнитные поля, и малость размеров образца по сравнению с длиной электромагнитной волны, что дает возможность для переменных составляющих использовать магнитостатическое приближение, т.е. систему уравнений магнитостатики.

Поскольку рассматриваемый образец является эллипсоидом, то можно применить известный результат магнитостатики [14]: внутреннее магнитное поле в эллипсоиде, помещенном в однородное внешнее поле $\mathbf{H}_e$, однородно и составляет

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_e - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{M}, \quad (4.31)$$

где $\mathbf{M}$ – намагниченность, $\bar{\mathbf{N}}$ – симметричный тензор размагничивания. Подставляя в (4.31) поля и намагниченность в виде сумм постоянных и переменных составляющих, мы получаем для постоянных

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{e0} - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{M}_0,$$

а для переменных составляющих

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_e - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{m}. \quad (4.32)$$

Условие равновесия в данном случае примет вид

$$[\mathbf{M}_0, \mathbf{H}_{e0} - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{M}_0] = 0,$$

откуда следует, что $N_{13} = N_{23} = 0$. Линеаризованное уравнение Ландау–Лифшица в данном случае имеет вид

$$\partial \mathbf{m} / \partial t = -\gamma [\mathbf{m}, \mathbf{H}_{e0} - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{M}_0] - \gamma [(\bar{\mathbf{N}}\mathbf{m}), \mathbf{M}_0] - \gamma [\mathbf{M}_0, \mathbf{h}_e]. \quad (4.33)$$

Спроектируем (4.33) на оси системы координат, в которой ось z совпадает с направлением $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{M}_0$. Пусть в этих осях (не совпадающих, вообще говоря, с осями x', y', z' эллипсоида) тензор $\bar{\mathbf{N}}$ имеет вид

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{12} & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение (4.33) покомпонентно (см. [23]):

$$(\partial/\partial t + \omega_{xy})m_x + \omega_y m_y = \gamma M_0 h_{e2}, \quad (\partial/\partial t - \omega_{xy})m_y - \omega_x m_x = -\gamma M_0 h_{e1}, \quad \partial m_z / \partial t = 0, \quad (4.34)$$

где $\omega_{xy} = \gamma N_{12} M_0$, $\omega_x = \gamma(H_{e0} - N_{33}M_0 + N_{11}M_0)$, $\omega_y = \gamma(H_{e0} - N_{33}M_0 + N_{22}M_0)$. Кроме того, в силу “малости” размеров ферромагнитного эллипсоида в указанном ранее смысле необходимо добавить уравнения магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{h}_e + 4\pi \mathbf{m}, \quad \mathbf{h}_e = -\nabla \psi. \quad (4.35)$$

Из системы уравнений (4.34), (4.35) стандартным образом получаем выражение для операторного тензора магнитной восприимчивости

$$\hat{\chi} = \frac{\omega_s}{4\pi} \begin{pmatrix} (\omega_y/\omega_0)\hat{S}_{\sin(\omega_0 t)^*} & (\hat{S}_{\cos(\omega_0 t)^*} - (\omega_{xy}/\omega_0)\hat{S}_{\sin(\omega_0 t)^*}) & 0 \\ -(\hat{S}_{\cos(\omega_0 t)^*} + (\omega_{xy}/\omega_0)\hat{S}_{\sin(\omega_0 t)^*}) & (\omega_x/\omega_0)\hat{S}_{\sin(\omega_0 t)^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_0^2 = \omega_x \omega_y - \omega_{xy}^2$, $\omega_s = 4\pi\gamma M_0$, и соответствующее интегродифференциальное уравнение спиновых волн в эллипсоидальном ферромагнетике во внешнем магнитном поле

$$\Delta_3 \psi + \omega_s \int_0^t d\tau \frac{\sin[\omega_0(t-\tau)]}{\omega_0} (\omega_y \psi_{x_1 x_1} + \omega_x \psi_{x_2 x_2} - 2\omega_{xy} \psi_{x_1 x_2}) = \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t),$$

из которого для обобщенного потенциала магнитного поля

$$\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) \Psi, \quad \frac{\partial^k \Psi(x, t)|_{t=0}}{\partial t^k} = 0, \quad k = \overline{0, 1},$$

вытекает дифференциальное уравнение составного типа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\Delta_3 \Psi + \omega_s \omega_y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \omega_s \omega_x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2\omega_{xy} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \operatorname{div} \mathbf{q}(x, t). \quad (4.36)$$

Граничные условия на поверхности раздела “идеальный” проводник – магнетик имеют вид (4.13) с граничным оператором $\mathfrak{L}_{tx}$:

$$\mathfrak{L}_{tx} \equiv \mathfrak{N}_{tx} + \mathfrak{M}_{tx},$$

$$\mathfrak{N}_{tx} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right) \frac{\partial}{\partial n_x} + \omega_s \omega_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega_s \omega_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\mathfrak{M}_{tx} \equiv \omega_s \left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega_{xy}\right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) \frac{\partial}{\partial x_2} - \omega_s \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_{xy}\right) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Таким образом, нами показано, что широкий круг векторных математических моделей, описывающих нестационарные волновые процессы в различных по своей физической природе средах с анизотропной дисперсией, единообразным образом может быть сведен к начально-краевым задачам для достаточно однотипных скалярных уравнений высокого порядка (2.10), (2.14), (3.7), (3.21), (3.22), (4.12), (4.18), (4.31), (4.36). Это ставит задачу построения полной теории начально-краевых задач для данного класса уравнений в частных производных и изучения общих свойств их решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
3. Габов С.А., Свешиников А.Г. Задачи динамики стратифицированной жидкости. М.: Наука, 1986.
4. Габов С.А., Свешиников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
6. Плетнер Ю.Д. О построении решений некоторых уравнений в частных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 5. С. 742–757.
7. Плетнер Ю.Д. О свойствах решений некоторых уравнений в частных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 6. С. 890–903.
8. Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
9. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешиников А.Г. Нестационарные волны в стратифицированной жидкости, возбуждаемые изменением нормальной компоненты скорости на криволинейном отрезке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 9. С. 1112–1121.
10. Альшин А.Б., Плетнер Ю.Д., Свешиников А.Г. Разрешимость одной внешней начально-краевой задачи для уравнения ионно-звуковых волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 10. С. 180–189.
11. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
12. Кудашев В.Р., Михайловский А.Б., Шарапов С.Е. К нелинейной теории дрейфовой моды, индуцированной тороидальностью // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 4. С. 417–421.
13. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
14. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
15. Страттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.: ОГИЗ, 1948.
16. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Атомиздат, 1989.
17. Габов С.А. Математические основы линейной теории нестационарных ионно-звуковых волн в “незамагниченной” плазме // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 12. С. 133–148.
18. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: Физматгиз, 1998.
19. Каменец Ф.Ф., Лахин В.П., Михайловский А.Б. Нелинейные электронные градиентные волны // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 4. С. 412–416.
20. Ситенко А.П., Сосенко П.П. О коротковолновой конвективной турбулентности и аномальной электронной теплопроводности плазмы // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. Вып. 4. С. 456–462.
21. Клеммоу Ф., Доуэрты Дж. Электродинамика частиц и плазмы. М.: Мир, 1996.
22. Кринчик Г.С. Физика магнитных явлений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
23. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994.