

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников, Задача о колебаниях двустороннего отрезка в стратифицированной жидкости, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1997, том 37, номер 8, 968–974

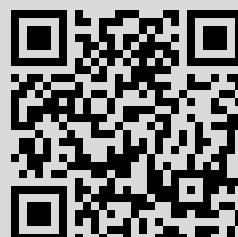
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.180.53.241

27 сентября 2014 г., 15:44:18



УДК 517.958:531.327

ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ ДВУСТОРОННЕГО ОТРЕЗКА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 1997 г. М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников
(Москва)

Поступила в редакцию 06.03.96 г.

Изучается классическая разрешимость начально-краевой задачи для “небуссинесковского” уравнения внутренних волн, описывающей возбуждение двумерных колебаний экспоненциально стратифицированной жидкости двусторонним криволинейным отрезком.

В настоящей статье продолжают начатые в [1], [2] исследования, посвященные задачам о нестационарных внутренних волнах, в стратифицированных и вращающихся жидкостях при задании условий возбуждения на криволинейных отрезках. В [1] при рассмотрении этих задач использовалось приближение Буссинеска [3]. В [2] изучена начально-краевая задача для полного небуссинесковского уравнения внутренних волн, в случае когда на криволинейном отрезке задано граничное условие Дирихле. Настоящая работа посвящена обобщению результатов работы [2] на случай двустороннего отрезка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Малые двумерные колебания идеальной несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости принято описывать уравнением внутренних волн, которое в безразмерных переменных имеет вид (см. [1], [3])

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_2 u - u) + u_{x_1 x_1} = 0, \quad (1.1)$$

где $u = u(x, t)$, $x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}^1$. Функция u связана с потенциальной функцией $\Phi(x, t)$, введенной в [1], соотношением

$$u(x, t) = e^{x_2} \Phi(x, t).$$

Пусть в жидкости, динамика которой описывается уравнением (1.1), находится бесконечно тонкий криволинейный отрезок

$$\Gamma \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s), s \in [0, l]\}.$$

Будем в дальнейшем предполагать, что $\Gamma \in A^{(2,\lambda)}$ – простая кривая ляпуновского типа, естественным образом параметризованная, т.е. в качестве параметра выступает длина дуги s . Пусть τ_s – вектор, касательный к Γ в точке $x(s) = (x_1(s), x_2(s)) \in \Gamma$ и указывающий направление возрастания параметра s , а p_s – вектор нормали к Γ в точке $x(s) \in \Gamma$, причем направление p_s таково, что вектор τ_s , будучи повернут на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, совпадает с вектором p_s . Ориентируем кривую, выделив ее внешнюю Γ^+ и внутреннюю Γ^- стороны, следующим образом: внешней стороной будем называть ту сторону кривой Γ , которая видна, если смотреть навстречу вектору нормали, а внутренней – соответственно, противоположную сторону.

Предположим, что до момента $t = 0$ колебания отсутствовали, т.е.

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad (1.2)$$

а начиная с момента $t = 0$ на сторонах Γ^+ и Γ^- отрезка Γ заданы, вообще говоря, различные распределения давления, что приводит к граничным условиям (см. [1])

$$u(x, t)|_{x=x(s) \in \Gamma^\pm} = f_\pm(s, t), \quad s \in [0, l]. \quad (1.3a)$$

Естественное с физической точки зрения требование непрерывности давления приводит [1] к

следующим условиям согласования:

$$f_+(0, t) = f_-(0, t), \quad f_+(l, t) = f_-(l, t). \quad (1.36)$$

Предположение об отсутствии источников на бесконечности сформулируем в виде следующих условий регулярности:

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right| \leq \frac{A_k(t)}{|x|}, \quad \left| \frac{\partial^k \nabla u}{\partial t^k} \right| \leq \frac{B_k(t)}{|x|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (1.4)$$

при $|x| \equiv (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow +\infty$.

Предположение об отсутствии сосредоточенных источников на концах Γ приводит к следующим условиям в окрестности концов отрезка Γ :

$$|\nabla u|, \left| \frac{\partial^2 \nabla u}{\partial t^2} \right| = O(r_{1,2}^{-1/2}), \quad (1.5)$$

где $r_{1,2}$ – расстояния до концов отрезка Γ .

Таким образом, верна

Задача S. Найти при $t \geq 0$ в области $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ непрерывную функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ в классическом смысле уравнению (1.1) в области $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, начальным условиям (1.2), граничным условиям (1.3а), условиям (1.4) и (1.5).

Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения. Множество функций $\{v(s): (s(l-s))^{1/2}v(s) \in C^{(0,h)}[0, l]\}$ обозначим через $C_{1/2}^{(0,h)}[0, l]$. Введем также следующие классы функций $v(s, t)$:

$$C_0^{(2)}[[0, \infty); C^{(0,h)}[0, l]] = \{v(s, t) \in C^{(2)}[[0, \infty); C^{(0,h)}[0, l]]: v(s, 0) = v_t(s, 0) = 0\},$$

$$C_0^{(2)}[[0, \infty); C_{1/2}^{(0,h)}[0, l]] = \{v(s, t) \in C^{(2)}[[0, \infty); C_{1/2}^{(0,h)}[0, l]]: v(s, 0) = v_t(s, 0) = 0\}.$$

Перейдем теперь к изучению вопроса о классической разрешимости задачи S.

2. ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВОГО ПОТЕНЦИАЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Так же как и в [2] введем в рассмотрение динамический потенциал простого слоя

$$V[v](x, t) = \int_0^l v(\sigma, t) K_0(|x - y(\sigma)|) d\sigma + \int_0^t \int_0^l v(\sigma, t - \tau) F(x - y(\sigma), \tau) d\sigma d\tau, \quad (2.1a)$$

где $x \equiv (x_1, x_2)$, $y(\sigma) \equiv (y_1(\sigma), y_2(\sigma))$, $|x| \equiv (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, а

$$F(x - y(\sigma), t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha + i\infty}^{\alpha + i0} \{K_0(\gamma(p, x, y(\sigma))|x - y(\sigma)|) - K_0(|x - y(\sigma)|)\} e^{pt} dp, \quad \alpha > 0, \quad (2.16)$$

$$\gamma(p, x, y(\sigma)) = [p^2 + a^2(x, y(\sigma))(p^2 + 1)^{-1}]^{1/2}, \quad (2.1b)$$

$$a(x, y(\sigma)) \equiv |x_2 - y_2(\sigma)|/|x - y(\sigma)|. \quad (2.1r)$$

Здесь и далее под $K_0(z)$ понимается главная ветвь функции Макдональда на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Ветвь корня (2.1b) выбрана таким образом, чтобы $\gamma(p, x, y(\sigma)) \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\text{Re } p > 0$.

Из результатов [2] вытекает

Лемма 1. Если $v(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, \infty); C_{1/2}^{(0,h)}[0, l]]$, то функция (2.1a) непрерывна всюду в $\mathbb{R}^2$, вне Γ удовлетворяет уравнению (1.1) в классическом смысле, начальным условиям (1.2), условиям регулярности (1.4) и условиям (1.5) в окрестности концов кривой Γ .

Рассмотрим функцию

$$v(x - y(\sigma), t) \equiv K_0(|x - y(\sigma)|)\theta(t) + \int_0^t F(x - y(\sigma), \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $F(x - y(\sigma), \tau)$ определена в (2.1б). Из (2.1б) вытекает, что преобразование Лапласа функции v имеет вид

$$\bar{v}(x - y(\sigma), p) = \frac{1}{p} K_0(\gamma(p, x, y(\sigma))|x - y(\sigma)|), \quad (2.3)$$

где $\gamma(p, x, y(\sigma))$ определена в (2.1в).

Представим $\bar{v}(x - y(\sigma), p)$ в виде

$$\bar{v}(x - y(\sigma), p) = -\bar{v}_1(x - y(\sigma), p) + \bar{v}_2(x - y(\sigma), p), \quad (2.4a)$$

где

$$\bar{v}_1(x - y(\sigma), p) = \frac{1}{p} \left[\ln|x - y(\sigma)| + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{a^2(x, \sigma)}{p^2} \right) \right], \quad (2.4б)$$

$$\bar{v}_2(x - y(\sigma), p) = \frac{1}{p} \left[K_0(\gamma(p, x, y(\sigma))|x - y(\sigma)|) + \ln \gamma(p, x, y(\sigma))|x - y(\sigma)| + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) \right]. \quad (2.4в)$$

Основываясь на [4]–[6], нетрудно видеть, что функции $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, определенные (2.4б), (2.4в), являются изображениями функций $v_1(x - y(\sigma), t)$ и $v_2(x - y(\sigma), t)$, причем

$$v_1(x - y(\sigma), t) = \ln|x - y(\sigma)|\theta(t) + \int_0^t [1 - \cos(\tau a(x, y(\sigma)))] d\tau. \quad (2.5)$$

Методами из [1] легко установить, что функция $v_1(x - y(\sigma), t)$ связана с построенным в [1] ядром динамического логарифмического потенциала для двумерного уравнения внутренних волн в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + u_{x_1 x_1} = 0 \quad (2.6)$$

точно таким же образом, как функция (2.2) с ядром динамического потенциала простого слоя (2.10) для уравнения (1.1).

Для построения углового потенциала в [1] использовалась система уравнений вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) u_{x_1} = -v_{x_2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{x_2} = v_{x_1}, \quad (2.7)$$

которая в классе достаточно гладких функций эквивалентна уравнению (2.6).

Система (2.7), очевидно, не эквивалентна уравнению (1.1). Однако оказывается возможным использовать ее для построения углового потенциала в рассматриваемом случае.

Пусть $\Gamma \in A^{(2,\lambda)}$ – простая кривая ляпуновского типа, заданная, как и в разделе 1, уравнениями $y_1 = y_1(\sigma)$, $y_2 = y_2(\sigma)$, σ – естественный параметр. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\Phi(x, s, t; \Gamma) = \int_0^s d\sigma \{ w_1(x, y(\sigma), t) y_1'(\sigma) + w_2(x, y(\sigma), t) y_2'(\sigma) \}, \quad (2.8)$$

где функции $w_{1,2}$ определяются следующими соотношениями:

$$w_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \sin(t - \tau) \frac{\partial}{\partial y_2} v(x - y(\sigma), \tau) d\tau, \quad (2.9a)$$

$$w_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t - \tau) \frac{\partial}{\partial y_1} v(x - y(\sigma), \tau) d\tau, \quad (2.9б)$$

функция $v(x - y(\sigma), t)$ определена в (2.2).

Представим $\Phi(x, s, t; \Gamma)$ в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 определены формулами (2.8), (2.9), причем в (2.9) вместо функции v следует подставить, соответственно, функции $v_1(x - y(\sigma), t)$ и $v_2(x - y(\sigma), t)$, определенные выше (см. (2.4б), (2.4в)).

С учетом результатов [1] нетрудно убедиться, что функция Φ_1 имеет вид

$$\Phi_1(x, s, t; \Gamma) = -\theta(t)[t\psi(x, y(s)) - \int_0^{\psi(x, y(\sigma))} \sin(\theta t) * \sin(t \sin \theta) d\theta]. \quad (2.10)$$

Здесь и далее $*$ означает вольтеррову свертку по переменной t , а $\psi(x, y(s))$ — ядро гармонического углового потенциала, введенное в [1] (см. также [7]):

$$\cos \psi(x, y) = \frac{x_1 - y_1}{|x - y|}, \quad \sin \psi(x, y) = \frac{x_2 - y_2}{|x - y|}.$$

Для Φ_2 приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, s, t; \Gamma) = & \theta(t) \left\{ t \int_0^s \frac{\partial}{\partial \sigma} \psi(x, y(\sigma)) [-|x - y(\sigma)| K_1(|x - y(\sigma)|) + 1] d\sigma - \right. \\ & - \int_0^s \sin \psi(x, y(\sigma)) \sin[\sin \psi(x, y(\sigma), t)] * t \frac{\partial}{\partial \sigma} \psi(x, y(\sigma)) [1 - |x - y(\sigma)| K_1(|x - y(\sigma)|)] d\sigma - \\ & - \int_0^s \mathcal{H}(x, y(\sigma), t) * t \frac{\partial}{\partial \sigma} \psi(x, y(\sigma)) d\sigma + \\ & \left. + \int_0^s \sin \psi(x, y(\sigma)) \sin[t\psi(x, y(\sigma))] * t * \mathcal{H}(x, y(\sigma), t) \frac{\partial}{\partial \sigma} \psi(x, y(\sigma)) d\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где функция $\mathcal{H}(x, y(\sigma), t)$ определена выражением

$$\mathcal{H}(x, y(\sigma), t) = \frac{1}{2\pi i} \times \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} [\gamma(x, y(\sigma), p) |x - y(\sigma)| K_1(\gamma(x, y(\sigma), p) |x - y(\sigma)|) - |x - y(\sigma)| K_1(|x - y(\sigma)|)] dp, \quad \sigma > 0. \quad (2.12)$$

В (2.12) и всюду далее под $K_1(z)$ понимается главная ветвь функции Макдональда первого порядка, рассматриваемая на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси, $\gamma(x, y(\sigma), p)$ имеет тот же смысл, что и в (2.1б).

Пусть $\mu(s, t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, \infty; \mathbb{C}_{1/2}^{(0, h)}[0, l]]$. Рассмотрим интеграл типа потенциала:

$$W[\mu_{tt}](x, t) = \int_0^l \int_0^t \mu_{tt}(s, t - \tau) \Phi(x, s, \tau; \Gamma) ds d\tau, \quad (2.13)$$

где $\Phi(x, s, t, \Gamma)$ определена в (2.8). Интегрируя по частям в (2.13) с учетом условий $\mu(s, 0) = \mu_t(s, 0) = 0$, окончательно получаем

$$W[\mu_{tt}](x, t) = T[\mu](x, t) = T_1[\mu](x, t) + T_2[\mu](x, t), \quad (2.14a)$$

$$T_i[\mu](x, t) = \int_0^l \int_0^t \mu(s, t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Phi_i(x, s, \tau; \Gamma) ds d\tau, \quad i = 1, 2, \quad (2.14б)$$

а функции $\Phi_{1,2}$ даются формулами (2.10), (2.11) соответственно.

Принимая во внимание определение (2.8), функции $\Phi(x, s, t; \Gamma) = \Phi_1(x, s, t; \Gamma) + \Phi_2(x, s, t; \Gamma)$, нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что она при любом фиксированном s удовлетворяет в классическом смысле уравнению (1.1) при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. С учетом этого факта можно установить, что и потенциал $T[\mu](x, t)$ с плотностью $\mu(s, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}[0, l]]$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $t > 0$ всюду вне Γ .

Исходя из явного вида функции Φ_1 и результатов [1], легко убедиться, что функция $T_1[\mu](x, t)$ в (2.14а) является динамическим угловым потенциалом для уравнения (2.6), введенным в [1].

Рассмотрим потенциал $T_2[\mu](x, t)$, определенный (2.14б). Учитывая явный вид его ядра, следующий из (2.14б), (2.11) и (2.12) и результаты работы [6], где изучались функции вида (2.12), нетрудно убедиться, что ядро потенциала $T_2[\mu](x, t)$ является достаточно гладким, а сам потенциал — непрерывным в $\mathbb{R}^2$ по переменной x при любом $t > 0$.

Таким образом, представление (2.14б) потенциала $T_2[\mu](x, t)$ с учетом результатов работы [1] позволяет без труда провести исследование его свойств. Справедлива

Теорема 1. Пусть $\mu(s, t) \in C^{(2)}[[0, +\infty); C^{(0)}[0, l]]$ и

$$\int_0^l ds \mu(s, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Тогда верно следующее:

а) всюду вне кривой Γ потенциал $T[\mu](x, t)$ является однозначной функцией, удовлетворяющей в классическом смысле уравнению (1.1);

б) справедливы следующие предельные формулы:

$$\lim_{x \rightarrow x(s) \in \Gamma_{\pm}} T[\mu](x, t) = T_{\pm}[\mu](s, t) = D[\mu](s, t) \mp \pi(I - J_1(t) *) \rho(s, t),$$

где

$$\rho(s, t) = \int_0^s d\sigma \mu(\sigma, t), \quad J_1(t) * \chi(t) = \int_0^t J_1(t - \tau) \chi(\tau) d\tau,$$

здесь $J_1(t)$ — функция Бесселя I рода и первого порядка, а

$$D[\mu](s, t) = \int_0^l \rho(\sigma, t) \frac{\cos \theta(s, \sigma)}{|x(s) - y(\sigma)|} d\sigma - \\ - \int_0^t \int_0^l \rho(\sigma, t - \tau) \sin \psi(s, \sigma) \sin [\tau \sin \psi(s, \sigma)] \frac{\cos \theta(s, \sigma)}{|x(s) - y(\sigma)|} d\sigma d\tau + \bar{T}_2[\mu](s, t),$$

где $\bar{T}_2[\mu](s, t)$ — прямое значение функции $T_2[\mu](s, t)$, определенной соотношением (2.14б), на кривой Γ , $\theta(s, \sigma)$ — угол между нормалью $\mathbf{n}_{\sigma}$ и вектором $\mathbf{y}(\sigma)\mathbf{x}(s)$;

в) для функции $u(x, t) = T[\mu](x, t)$ выполнены условия регулярности (1.4) и (1.5);

г) если $\mu(s, 0) = \mu_r(s, 0) = 0$, то функция $u(x, t) = T[\mu](x, t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям: $u(x, 0) = u_r(x, 0) = 0$.

Теперь воспользуемся построенным динамическим угловым потенциалом $T[\mu](x, t)$ для доказательства классической разрешимости задачи S.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ S

Будем искать решение задачи в виде суммы динамических потенциалов $V[v](x, t)$ и $T[\mu](x, t)$, определенных выражениями (2.1) и (2.14а) соответственно: $u(x, t) = V[v](x, t) + T[\mu](x, t)$, $\mu(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, \infty); C^{(0,h)}[0, l]]$;

$$\int_0^l \mu(s, t) ds = 0, \quad v(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, \infty); C_{1/2}^{(0,h)}[0, l]]. \quad (3.1)$$

Из результатов раздела 2 следует, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет всем условиям задачи S за исключением граничных (1.3а). Из граничных условий (1.3а), используя лемму 1 и теорему 1, получаем равенства

$$V[v](s, t) + T_+[\mu](s, t) = f_+(s, t), \quad V[v](s, t) + T_-[\mu](s, t) = f_-(s, t). \quad (3.2)$$

Складывая и вычитая выражения (3.2), с учетом результатов теоремы 1 получаем следующие соотношения:

$$V[v](s, t) = \frac{1}{2}\{f_+(s, t) + f_-(s, t)\} - D[\mu](s, t), \quad (3.3)$$

$$(I - J_1(t) *) \rho(s, t) = \frac{1}{2\pi}\{f_-(s, t) - f_+(s, t)\}. \quad (3.4)$$

Функцию $D[\mu](s, t)$ можно представить в виде следующей суммы:

$$D[\mu](s, t) = D_1[\mu](s, t) + D_2[\mu](s, t),$$

где

$$D_1[\mu](s, t) = \int_0^l \rho(\sigma, t) \frac{\cos \theta(s, \sigma)}{|x(s) - y(\sigma)|} d\sigma - \int_0^t \int_0^l \rho(\sigma, t - \tau) \sin \psi(s, \sigma) \sin[\tau \sin \psi(s, \sigma)] \frac{\cos \theta(s, \sigma)}{|x(s) - y(\sigma)|} d\sigma d\tau,$$

$$\rho(\sigma, t) = \int_0^\sigma ds \mu(s, t),$$

$$D_2[\mu](s, t) \equiv \bar{T}_2[\mu](s, t) = \int_0^t \int_0^l \mu(\sigma, t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Phi_2(s, \sigma, \tau; \Gamma) d\sigma d\tau;$$

здесь

$$\Phi_2(s, \sigma, \tau; \Gamma) = \lim_{x \rightarrow x(s) \in \Gamma_\pm} \Phi_2(x, \sigma, \tau; \Gamma) = \Phi_2(x, \sigma, \tau; \Gamma)|_{x=x(s) \in \Gamma_\pm},$$

$\Phi_2(x, \sigma, \tau; \Gamma)$ определено соотношением (2.11).

Точно так же, как и в [1], используя методы теории сингулярных интегральных операторов [9], можно показать, что $D_1[\mu](s, t) \in C_0^{(2)}[[0, +\infty); C^{(1, \lambda)}[0, l]]$, $(\Gamma \in A^{(2, \lambda)})$. Из явного вида функции $D_2[\mu](s, t)$ вытекает, что $D_2[\mu](s, t) \in C_0^{(2)}[[0, +\infty); C^{(1, \lambda)}[0, l]]$. Тем самым $D[\mu](s, t) \in C_0^{(2)}[[0, +\infty); C^{(1, \lambda)}[0, l]]$.

Предположим, что $f_\pm(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, +\infty); C^{(1, \alpha)}[0, l]]$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$. Тогда, дифференцируя соотношение (3.4) по s , получаем выражение

$$\mu(s, t) = \frac{1}{2\pi}(I - S_t *) [f'_-(s, t) - f'_+(s, t)], \quad (3.5)$$

где

$$S_t * \chi(t) = \int_0^t S(t - \tau) \chi(\tau) d\tau, \quad S(\tau) = - \int_0^\tau J'_1(\xi) \frac{d\xi}{\xi},$$

здесь использовалось равенство $(I - J_1 *)^{-1} = I - S_t *$, полученное в [1]. Заметим, что из соотношения (3.4) и условий согласования (1.3б) вытекает справедливость равенства

$$\int_0^l ds \mu(s, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Таким образом, получено явное решение уравнения (3.4) и, следовательно, вопрос о существовании классического решения задачи S сводится к вопросу о разрешимости только одного интегрального уравнения (3.3) в классе функций $v(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, \infty); C_{1/2}^{(0, h)}[0, l]]$.

Как доказано выше, правая часть интегрального уравнения (3.3) является функцией из множества $C_0^{(2)}[[0, \infty); C^{(1,\beta)}[0, l]]$ при $\beta = \min\{\lambda, \alpha\}$.

В [2] было доказано, что интегральное уравнение $V[\mu](s, t) = F(s, t)$ имеет решение $\mu_F(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, \infty); C_{1/2}^{(0,h)}[0, l]]$ для любой функции $F(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, \infty); C^{(1,\beta)}[0, l]]$, причем $h = \min\{\beta, 1/2\}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. При любых $f_{\pm}(s, t) \in C_0^{(2)}[[0, \infty); C^{(1,\alpha)}[0, l]]$, $\alpha > 0$, удовлетворяющих условиям согласования (1.3а), существует классическое решение задачи S, даваемое формулой (3.1), а плоскости потенциалов являются решением системы (3.3), (3.4).

Обсудим теперь вопрос о единственности решения задачи S. Будем говорить, что решение задачи S удовлетворяет условиям гладкости A, если функции $D_t^k u(x, t)$ и $D_t^k D_{x_j} u(x, t)$, $k = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$, непрерывны по (x, t) в каждой замкнутой области $\bar{\Omega}_\varepsilon^R \times [0, T]$ ($T > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $R > R_0$), где $\bar{\Omega}_\varepsilon^R$ – область, получаемая удалением из круга $S(0, R)$ радиуса R с центром в точке $x = 0$ дуги Γ и двух кругов $\bar{S}_\varepsilon$ радиуса ε с центрами на концах дуги Γ .

Используя формулу интегрирования по частям, с учетом условий регулярности на бесконечности (1.4) и (1.5) в окрестности концевых точек отрезка Γ , при условии, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям гладкости A, получаем энергетическое тождество для уравнения (1.1):

$$\frac{1}{2} \left\{ \|\nabla_2 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)}^2 + \|u_{x_1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)}^2 + \|u_t\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)}^2 \right\} = \int_0^t \int_\Gamma d\Gamma_x d\tau \{ u_\tau N_{\tau x} u|_{\Gamma_+} - u_\tau N_{\tau x} u|_{\Gamma_-} \}, \quad (3.6)$$

где символом $N_{\tau x}$ обозначен следующий граничный оператор:

$$N_{\tau x} u \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial u}{\partial n_x} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}_x) \frac{\partial u}{\partial x_1},$$

где $\mathbf{n}_x$ – внешняя нормаль к границе Γ в точке $x \in \Gamma$, $\mathbf{e}_1$ – орт оси Ox_1 .

Применив формулу (3.6) к решению однородного уравнения (1.1) с однородными начальными и граничными условиями с учетом условий на бесконечности (1.4), убедимся, что справедлива

Теорема 3. Построенное решение является единственным классическим решением задачи S, удовлетворяющим условиям гладкости A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
2. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. О разрешимости одной начально-краевой задачи для уравнения внутренних волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 5. С. 617–620.
3. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. школа, 1963.
5. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974.
6. Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1889.
7. Габов С.А. Угловой потенциал и его некоторые приложения // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 4. С. 490–504.
8. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехтеориздат, 1953.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.