Односторонние неравенства дискретизации и восстановление по выборке

И. В. Лимонова

МЦМУ МИАН, МГУ имени М. В. Ломоносова

(По совместной работе с Ю. В. Малыхиным и В. Н. Темляковым)

19 сентября 2024 г.

Аппроксимация, оптимизация и разреженное восстановление

Пусть (Ω, μ) — вероятностное пространство.

L_p, $1 \le p < \infty$, норма функций определяется стандартным образом:

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Под $L_\infty(\Omega)$ нормой мы понимаем равномерную норму ограниченных функций

$$\|f\|_\infty := \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|.$$

Дискретное пространство L_p^m векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\mathbf{x}\|_p := \begin{cases} \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |x_j|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le j\le m} |x_j|, & p = \infty. \end{cases}$$

Функции f, определенной на Ω, и набору точек $\xi^1, \dots, \xi^m \in \Omega$ мы ставим в соответствие вектор–выборку (sampling vector)

$$S(f, \xi) := (f(\xi^1), \dots, f(\xi^m)).$$

Пусть X_N — N–мерное подпространство L_p, $1 \le p < \infty$.

Для X_N выполнена теорема дискретизации типа Марцинкевича с параметрами m, p, C_1, C_2, если существует множество $\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ такое, что

$$C_1 \|f\|_p^p \le \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^p \equiv \|S(f,\xi)\|_p^p \le C_2 \|f\|_p^p, \quad \forall f \in X_N.$$

Для $p = \infty$

$$C_1 \|f\|_\infty \le \max_{1 \le j \le m} |f(\xi^j)| \equiv \|S(f,\xi)\|_\infty \le \|f\|_\infty, \quad \forall f \in X_N.$$

Пусть X_N — N–мерное подпространство L_p, $1 \le p < \infty$.

Для X_N выполнена теорема дискретизации типа Марцинкевича с параметрами m, p, C_1, C_2, если существует множество $\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ такое, что

$$C_1\|f\|_p^p \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(\xi^j)|^p \equiv \|S(f,\xi)\|_p^p \le C_2\|f\|_p^p, \quad \forall f \in X_N.$$

Для $p = \infty$

$$C_1\|f\|_\infty \le \max_{1\le j\le m}|f(\xi^j)| \equiv \|S(f,\xi)\|_\infty \le \|f\|_\infty, \quad \forall f \in X_N.$$

[3] Ф. Дай, А. Примак, В. Н. Темляков, С. Ю. Тихонов, Дискретизация интегральной нормы и близкие задачи, *УМН*, 2019.

[4] B. Kashin, E. Kosov, I. Limonova, V. Temlyakov, Sampling discretization and related problems, *J. Complexity*, 2022.

Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $D > 0$.
ПНД. Будем говорить, что X_N допускает Правое Неравенство Дискретизации, если для некоторых точек $\xi^1, \dots, \xi^m \in \Omega$ для любого $f \in X_N$ выполнено неравенство

$$\|S(f, \xi)\|_q \le D\|f\|_p.$$

Обозначение: $X_N \in \mathcal{RD}(m, p, q, D)$.

Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $D > 0$.

ПНД. Будем говорить, что X_N допускает Правое Неравенство Дискретизации, если для некоторых точек $\xi^1, \ldots, \xi^m \in \Omega$ для любого $f \in X_N$ выполнено неравенство

$$\|S(f,\xi)\|_q \leq D\|f\|_p.$$

Обозначение: $X_N \in \mathcal{RD}(m,p,q,D)$.

Предложение 1

Пусть $2 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и подпространство X_N удовлетворяет неравенству Никольского с параметрами 2 и p, то есть для некоторого $M > 0$

$$\|f\|_p \leq M\|f\|_2, \quad \forall f \in X_N.$$

Пусть X_N имеет ортонормированный базис $\{u_i\}_{i=1}^N$ со следующим свойством: $\sum_{i=1}^N |u_i(\omega)|^2 \geq cN$, $c > 0$, для любого $\omega \in \Omega$. Пусть $X_N \in \mathcal{RD}(m,p,q,D)$. Тогда

$$(cN)^{q/2} \leq m(DM)^q.$$

Следствие 1

Пусть $\Lambda_N = \{k_i\}_{i=1}^N$ *— лакунарная последовательность, то есть* $k_{i+1} \ \geq \ bk_i$, $b > 1$, $i = 1, \dots, N-1$. *Обозначим*

$$\mathcal{T}(\Lambda_N) := \left\{ f \ : \ f(x) = \sum_{k \in \Lambda_N} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{T} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{T}(\Lambda_N) \in \mathcal{RD}(m, p, q, D)$ *для некоторых* $2 < p < \infty$, $2 < q < \infty$. *Тогда*

$$N^{q/2} \leq mC(p, q, b)D^q.$$

Следствие 1

Пусть $\Lambda_N = \{k_i\}_{i=1}^N$ — *лакунарная последовательность, то есть* $k_{i+1} \geq bk_i$, $b > 1$, $i = 1, \dots, N-1$. *Обозначим*

$$\mathcal{T}(\Lambda_N) := \left\{ f \,:\, f(x) = \sum_{k \in \Lambda_N} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{T} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{T}(\Lambda_N) \in \mathcal{RD}(m, p, q, D)$ *для некоторых* $2 < p < \infty$, $2 < q < \infty$. *Тогда*

$$N^{q/2} \leq mC(p, q, b)D^q.$$

ЛНД при $2 < p < \infty$, $2 < q < \infty$ для $\mathcal{T}(\Lambda_N)$ может быть достигнуто с использованием $m = O(N)$ точек: существует $m \leq CN$ точек $\xi^1, \dots, \xi^m$, дающих дискретизацию в L_2 (В. Н. Темляков, 2017), откуда

$$\|f\|_p \leq C_1 \|f\|_2 \leq C_2 \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2} \leq C_2 \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(\xi^j)|^q \right)^{1/q}.$$

Теорема А (А. А. Лунин, 1989). Существует такое $C > 0$, что для любой $N \times n$ матрицы A найдется $n \times n$ подматрица A_1, образованная n строками матрицы A, со следующим свойством:

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A_1\mathbf{x}\|_2 \le C \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2.$$

Предложение 2

Пусть X_N — N–мерное подпространство $L_2(\Omega, \mu)$, тогда $X_N \in \mathcal{RD}(N, 2, C)$ для некоторой абсолютной постоянной $C > 0$.

Следствие 2

Пусть $p \in \mathbb{N}$ чётно, тогда $X_N \in \mathcal{RD}(N^{p/2}, p, C^{2/p})$.

Предложение A (D. Freeman, D. Ghoreishi, 2023). *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Пусть* (Ω, μ) *— вероятностное пространство,* $X_N \subset L_p(\Omega, \mu)$ *— N–мерное подпространство. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $m_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что если* $M \ge m_0$ *и* $\{\xi^j\}_{j=1}^M \subset \Omega$ *— независимые случайные точки, то с вероятностью не меньше* $(1-\varepsilon)$ *имеют место неравенства*

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \le \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} |f(\xi^j)|^p \le (1+\varepsilon)\|f\|_p^p, \quad \forall f \in X_N.$$

Теорема B (D. Freeman, D. Ghoreishi, 2023). *Для любого* $1 \le q < 2$ *и* $N \in \mathbb{N}$ *существует* N*–мерное подпространство* $X_N \subset L_1([0,1])$ *со следующими свойствами:*

(a) $X_N \in NI(q, \infty, K_q^{-1} N^{1/q})$*;*

(b) Если $m \in \mathbb{N}$ *и* $t_j, j = 1, \dots, m$*, таковы, что* $\sum_{j=1}^{m} |f(t_j)|^q > 0$ *для любого* $f \in X_N \setminus \{0\}$*, то существует* $f \in X_N$*, для которого*

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(t_j)|^q \ge \frac{N^{2-q/2}}{m} \|f\|_q^q.$$

В частности, отсюда следует, что если $m = o(N^{2-q/2})$*, то ПНД(q) с инъективным оператором выборки не выполнено.*

Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $D > 0$.

ЛНД. Будем говорить, что X_N допускает Левое Неравенство Дискретизации, если для некоторых точек $\xi^1, \dots, \xi^m \in \Omega$ для любого $f \in X_N$ выполнено неравенство

$$\|f\|_p \le D\|S(f, \xi)\|_q.$$

Обозначим это свойство как $X_N \in \mathcal{LD}(m, p, q, D)$.

Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $D > 0$.

ЛНД. Будем говорить, что X_N допускает Левое Неравенство Дискретизации, если для некоторых точек $\xi^1, \dots, \xi^m \in \Omega$ для любого $f \in X_N$ выполнено неравенство

$$\|f\|_p \le D\|S(f,\xi)\|_q.$$

Обозначим это свойство как $X_N \in \mathcal{LD}(m,p,q,D)$.

Предложение 3

Пусть X — множество функций в $L_p(\Omega,\mu)$. Пусть точки $\xi^1, \dots, \xi^m \in \Omega$ и неотрицательные веса $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ таковы, что $\lambda_1 + \dots + \lambda_m \le C$ и

$$\|f\|_p \le D\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j |f(\xi^j)|^q\right)^{1/q}, \quad \forall f \in X.$$

Тогда существует $m_0 \le (C^2+1)m$ такое, что $X \in \mathcal{LD}(m_0, p, q, D(C+C^{-1})^{1/q})$.

Предложение 4

Пусть $1 \le p < \infty$. *Существуют положительные постоянные* $C_1(p)$ *и* $C_2(p)$ *такие, что любого* N*-мерного подпространства* $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ *выполнено* $X_N \in \mathcal{LD}(m, p, C_2)$, *т.е. существует набор точек* $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ *со свойством*

$$\|f\|_p \le C_2 \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} |f(\xi^j)|^p \right)^{1/p} \le C_2 \max_{1 \le j \le m} |f(\xi^j)|, \quad \forall f \in X_N,$$

при некотором $m \le C_1 N$ *(при* $p = 2$*),*
$m \le C_1 N \log N$ *(при* $p = 1$*),*
$m \le C_1 N \log N \log^2 \log N$ *(в случае* $1 < p < 2$*),*
$m \le C_1 N^{p/2}$ *(для чётных* p*),* $m \le C_1 N^{p/2} \log N$ *(для* $p > 2$*).*

$p = 2$ также F. Bartel, M. Schäfer, T. Ullrich, 2023

Открытая задача 1. При каком условии на m произвольное N–мерное подпространство $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ обладает свойством $X_N \in \mathcal{LD}(m, p, \infty, D)$, где $2 < p < \infty$ и $D = D(p)$, то есть найдется множество точек $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ со следующим свойством:

$$\|f\|_p \leq D \max_{1 \leq j \leq m} |f(\xi^j)|, \quad \forall f \in X_N \quad ?$$

Открытая задача 1. При каком условии на m произвольное N–мерное подпространство $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ обладает свойством $X_N \in \mathcal{LD}(m, p, \infty, D)$, где $2 < p < \infty$ и $D = D(p)$, то есть найдется множество точек $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ со следующим свойством:

$$\|f\|_p \le D \max_{1\le j\le m} |f(\xi^j)|, \quad \forall f \in X_N \quad ?$$

Можем взять m порядка N в случае $p \le 2$,
$m \le CN^{p/2} \log N$ в случае $p > 2$,
$m \le CN^{p/2}$ для чётных p,
$m = 9^N$ для $p = \infty$ (Б. С. Кашин, С. В. Конягин, В. Н. Темляков, 2023), для подпространства $\mathcal{T}(\Lambda_N)$ требуется $(N/e)e^{CN/D^2}$ точек.

Теорема C (D. Krieg, K. Pozharska, M. Ullrich, T. Ullrich, 2024). *Пусть* $2 \le p \le \infty$. *Существуют положительные постоянные* $C_1 = 4$ *и* $C_2 = 83$ *такие, что любое* N*-мерное подпространство* $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ *удовлетворяет свойству* $X_N \in \mathcal{LD}(C_1 N, p, 2, C_2 N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$, *т.е. существует множество из* $m \le C_1 N$ *точек* $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ *такое, что*

$$\|f\|_p \le C_2 N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall f \in X_N.$$

Для функционального класса $\mathbf{F}$ обозначим (В. Н. Темляков, 1993)

$$\varrho_m(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\text{linear } \Phi;\, \xi} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \Phi(f(\xi^1), \dots, f(\xi^m))\|_p.$$

Будем разрешать любое отображение $\Phi : \mathbb{C}^m \to X_N \subset L_p(\Omega, \mu)$, где X_N — линейное подпространство размерности $N \le m$. Определим (D. Dunh, 1990)

$$\varrho^*_m(\mathbf{F}, L_p) := \inf_{\Phi;\xi;X_N, N \le m} \sup_{f \in \mathbf{F}} \|f - \Phi(f(\xi^1), \dots, f(\xi^m))\|_p.$$

Имеют место следующие очевидные неравенства:

$$d_m(\mathbf{F}, L_p) \le \varrho^*_m(\mathbf{F}, L_p) \le \varrho_m(\mathbf{F}, L_p),$$

где $d_m(\mathbf{F}, L_p)$ — поперечник по Колмогорову.

F. Bartel, A. Cohen, F. Dai, M. Dolbeault, L. Kämerer, D. Krieg, G. Migliorati, N. Nagel, K. Pozharska, M. Schäfer, V. N. Temlyakov, M. Ullrich, T. Ullrich, T. Volkmer, ...

Для положительного веса $\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ определим полунорму

$$\|S(f,\xi)\|_{p,\mathbf{w}} := \left(\sum_{j=1}^{m} w_j |f(\xi^j)|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Рассмотрим следующий оператор (алгоритм) восстановления:

$$\ell p\mathbf{w}(\xi)(f) := \ell p\mathbf{w}(\xi, X_N)(f) := \arg\min_{u \in X_N} \|S(f-u,\xi)\|_{p,\mathbf{w}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\ell\infty(\xi)(f) := \ell\infty(\xi, X_N)(f) := \arg\min_{u \in X_N} \|S(f-u,\xi)\|_{\infty}.$$

Напомним, что наилучшее приближение $f \in L_p(\Omega,\mu)$, $1 \le p \le \infty$, элементами X_N определяется следующим образом:

$$d(f, X_N)_p := \inf_{u \in X_N} \|f-u\|_p.$$

A1. Дискретизация. Пусть $1 \le p \le \infty$ и точки $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ обеспечивают ВЛНД, то есть, в случае $p < \infty$ имеет место неравенство

$$\|u\|_p \le D\|S(u,\xi)\|_{p,\mathbf{w}}, \quad \forall u \in X_N,$$

а в случае $p = \infty$ —

$$\|u\|_\infty \le D\|S(u,\xi)\|_\infty, \quad \forall u \in X_N$$

с некоторой положительной постоянной D.

A2. Веса. Для положительной постоянной W

$$\sum_{j=1}^m w_j \le W.$$

Теорема D (В. Н. Темляков, 2021). *В предположениях* **A1** *и* **A2** *для любого* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ *имеем для* $1 \le p < \infty$

$$\|f - \ell p\mathbf{w}(\xi)(f)\|_p \le (2DW^{1/p} + 1)d(f, X_N)_\infty.$$

Если выполнено **A1**, *то для любого* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\|f - \ell\infty(\xi)(f)\|_\infty \le (2D + 1)d(f, X_N)_\infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $p \in [1, \infty)$ *и набор* $\xi = \{\xi^j\}_{j=1}^m$ *обеспечивает свойство* $X_N \in \mathcal{LD}(m, p, \infty, D)$ *для подпространства* $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$, *то есть для любого* $u \in X_N$

$$\|u\|_p \le D \max_{1 \le j \le m} |u(\xi^j)|. \tag{1}$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\|f - \ell\infty(\xi)(f)\|_p \le (2D + 1)d(f, X_N)_\infty.$$

Пусть $h \in X_N$ — элемент наилучшего приближения к f из X_N в L_∞. Имеем

$$\|f - h\|_p \le \|f - h\|_\infty = d(f, X_N)_\infty. \tag{2}$$

Ясно, что

$$\|S(f - h, \xi)\|_\infty \le \|f - h\|_\infty = d(f, X_N)_\infty. \tag{3}$$

Из определения алгоритма $\ell\infty(\xi)$ получаем

$$\|S(f - \ell\infty(\xi)(f), \xi)\|_\infty \le \|S(f - h, \xi)\|_\infty \le d(f, X_N)_\infty. \tag{4}$$

Оценки (3) и (4) дают

$$\|S(h - \ell\infty(\xi)(f), \xi)\|_\infty \le 2d(f, X_N)_\infty.$$

Из предположения (1) о дискретизации следует, что

$$\|h - \ell\infty(\xi)(f)\|_p \le D\|S(h - \ell\infty(\xi)(f), \xi)\|_\infty \le 2Dd(f, X_N)_\infty. \tag{5}$$

Используя оценки (2) и (5), получаем

$$\|f - \ell\infty(\xi)(f)\|_p \le (1 + 2D)d(f, X_N)_\infty.$$

Теорема D и Теорема 1 влекут следующие неравенства для любого компакта $\mathbf{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ и произвольной вероятностной меры μ на Ω

$$\varrho_m^*(\mathbf{F}, L_p(\Omega, \mu)) \le C d_N(\mathbf{F}, L_\infty), \quad C = 2DW^{1/p} + 1, \quad 1 \le p < \infty.$$

Здесь значение m таково, что, в случае Теоремы D, условия **A.1** и **A.2**, а в случае Теоремы 1, условие (1) выполняется для любого N-мерного подпространства $\mathcal{C}(\Omega)$, т.е. можно взять $CN^{p/2} \log N$.

Открытая задача 2. Пусть $2 < p < \infty$. Каков минимальный рост $m(N)$ по N, гарантирующий выполнение следующего свойства: для любого компакта $\mathbf{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ и произвольной вероятностной меры μ на Ω

$$\varrho_{m(N)}^*(\mathbf{F}, L_p(\Omega, \mu)) \le C d_N(\mathbf{F}, L_\infty), \quad 2 < p < \infty.$$

Для $p = 2$ $\varrho_{bN}(\mathbf{F}, L_2(\Omega, \mu)) \le B d_N(\mathbf{F}, L_\infty)$ (В. Н. Темляков, 2021).

Теорема 2. *Существуют две положительные постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что для любого* N*-мерного подпространства* $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ *найдется множество точек* $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ *с* $m \le C_1 N$*, обладающих следующим свойством: для любого* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\|f - \ell\infty(\xi, X_N)(f)\|_2 \le (2C_2 + 1)d(f, X_N)_\infty.$$

Односторонняя универсальная дискретизация

Напомним определение v–членного приближения по заданной системе $\mathcal{D}_N = \{g_i\}_{i=1}^N$. Для $v \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{X}_v(\mathcal{D})$ обозначим набор всех линейных пространств, порождённых g_j, $j \in J$, где $J \subset \mathbb{N}$ с $|J| = v$. Обозначим $\Sigma_v(\mathcal{D})$ — множество всех v–членных приближений по $\mathcal{D}$:

$$\Sigma_v(\mathcal{D}) := \bigcup_{V \in \mathcal{X}_v(\mathcal{D})} V.$$

Определим величину

$$\sigma_v(f, \mathcal{D})_X := \inf_{g \in \Sigma_v(\mathcal{D})} \|f - g\|_X$$

наилучшего v–членного приближения элемента $f \in X$ в норме X по отношению к $\mathcal{D}$.

Обозначим

$$\ell p(\xi, L) := \ell p \mathbf{w}_m(\xi, L), \qquad \mathbf{w}_m := (1/m, \dots, 1/m).$$

Алгоритм ℓp. Для системы $\mathcal{D}_N$ и множества точек $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ определим алгоритм

$$L(\xi, f) := \arg\min_{L \in \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)} \|f - \ell p(\xi, L)(f)\|_p,$$

$$\ell p(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f) := \ell p(\xi, L(\xi, f))(f).$$

Алгоритм ℓp^s. Для системы $\mathcal{D}_N$ и множества точек $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ определим алгоритм

$$L^s(\xi, f) := \arg\min_{L \in \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)} \|S(f - \ell p(\xi, L)(f), \xi)\|_p,$$

$$\ell p^s(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f) := \ell p(\xi, L^s(\xi, f))(f).$$

$\ell p^s(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f)$ — наилучшее v–членное приближение функции f по системе $\mathcal{D}_N$ в пространстве $L_p(\xi)$ с нормой $\|S(f, \xi)\|_p$.

Определение 1 (Ф. Дай, В. Н. Темляков, 2023)

Пусть $1 \le p < \infty$. Будем говорить, что множество $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ даёт *одностороннюю L_p-универсальную дискретизацию с параметром* $D \ge 1$ для набора $\mathcal{X} := \{X(n)\}_{n=1}^k$ конечномерных линейных подпространств $X(n)$, если

$$\|f\|_p \le D \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} |f(\xi^j)|^p \right)^{1/p} \qquad \forall f \in \bigcup_{n=1}^{k} X(n). \tag{6}$$

Теорема E (Ф. Дай, В. Н. Темляков, 2023). *Пусть m, v, N — натуральные числа, причём $v \le N$. Пусть $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ — система из N элементов. Предположим, что множество $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ даёт универсальное ЛНД(p) свойство (6) с $1 \le p < \infty$ для набора $\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\|f - \ell p(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f)\|_p \le (2D+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

Теорема F (Ф. Дай, В. Н. Темляков, 2023). *Пусть m, v, N — натуральные числа, причём $2v \le N$. Пусть $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ — система из N элементов. Предположим, что множество $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ даёт универсальное ЛНД(p) свойство (6) с $1 \le p < \infty$ для набора $\mathcal{X}_{2v}(\mathcal{D}_N)$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ выполнено*

$$\|f - \ell p^s(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f))\|_p \le (2D+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

Определение 2

Пусть $1 \le p < \infty$. Будем говорить, что множество $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ даёт *универсальное ЛНД*(p, ∞) *с параметром* $D \ge 1$ для набора $\mathcal{X} := \{X(n)\}_{n=1}^k$ конечномерных линейных подпространств $X(n)$, если ξ обеспечивает выполнение свойства $\bigcup_{n=1}^k X(n) \in \mathcal{LD}(m, p, \infty, D)$, то есть

$$\|f\|_p \le D \max_{1 \le j \le m} |f(\xi^j)| \qquad \forall f \in \bigcup_{n=1}^k X(n). \tag{7}$$

Мы обсуждаем следующую версию алгоритма ℓp.

Алгоритм $\ell(p, \infty)$**.** Для системы $\mathcal{D}_N$ и множества точек $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ определим алгоритм

$$L(\xi, f) := \arg \min_{L \in \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)} \|f - \ell\infty(\xi, L)(f)\|_p,$$

$$\ell(p, \infty)(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f) := \ell\infty(\xi, L(\xi, f))(f).$$

Теорема 3. *Пусть m, v, N — натуральные числа такие, что $v \le N$. Пусть $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ — система из N элементов. Предположим, что существует множество $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$, которое даёт универсальное ЛНД(p,∞) свойство (7) с $1 \le p < \infty$ для набора $\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\|f - \ell(p,\infty)(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f)\|_p \le (2D+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

Доказательство.

Пусть $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ — множество, обеспечивающее универсальное ЛНД(p,∞) для набора $\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)$. Тогда для каждого подпространства $X(n)$ из набора $\mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N)$ мы можем применить Теорему 2 с одним и тем же множеством точек ξ. Это влечёт для всех $n = 1, \dots, k$, $k = \binom{N}{v}$, выполнение неравенства

$$\|f - \ell\infty(\xi, X(n))(f)\|_p \le (2D+1)d(f, X(n))_\infty.$$

Тогда $\|f - \ell(p,\infty)(\xi, \mathcal{X})(f)\|_p \le (2D+1) \min\limits_{1\le n\le k} d(f, X(n))_\infty.$

Теорема 4. *Пусть* m*,* v*,* N *— натуральные числа, причём* $2v \leq N$*. Пусть* $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$ *— система из* N *элементов. Предположим, что множество* $\xi := \{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$*, обеспечивает универсальное ЛНД*(p,∞) *свойство (7) с* $1 \leq p < \infty$ *для набора* $\mathcal{X}_{2v}(\mathcal{D}_N)$*. Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ *имеем неравенство*

$$\|f - \ell p^s(\xi, \mathcal{X}_v(\mathcal{D}_N))(f)\|_p \leq (2D+1)\sigma_v(f, \mathcal{D}_N)_\infty.$$

Спасибо за внимание!