МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

На правах рукописи
УДК 517.984

Швейкина Ольга Александровна

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.02. дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент, И.В. Садовничая

Москва, 2014

Содержание

Введение

Настоящая диссертация является исследованием в теории операторов Штурма-Лиувилля, порождаемых на конечном интервале $(a, b) \in \mathbb{R}$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y. \tag{1}$$

В классической теории обычным условием на функцию $q(x)$ является условие $q(x) \in L_{1,loc}(a, b)$, т.е. функция предполагается суммируемой на любом отрезке, компактно вложенном в (a, b), а сингулярные операторы Штурма-Лиувилля характеризуются тем, что либо функция $q(x)$ не суммируема на отрезке $[a, b]$ (имеется неинтегрируемая особенность по крайней мере на одном из концов отрезка), либо интервал (a, b) бесконечен. В диссертации изучаются операторы с потенциалами $q \in W_2^{-1}[a, b]$ из пространства Соболева с отрицательным «показателем гладкости». В частности, потенциал может иметь неинтегрируемые особенности внутри интервала. Например, в качестве $q(x)$ можно взять функцию $(x - c)^\alpha$, где $c \in (a, b)$, $\alpha > -3/2$ или $q(x) = \delta(x - c)$. Такие функции мы будем понимать в смысле теории распределений.

Задачи об изучении оператора Штурма-Лиувилля и его многомерных аналогов $-\Delta + q(x)$ с потенциалами короткого взаимодействия (типа δ-функции) возникли в физической литературе. Математические исследования соответствующих физических моделей были инициированы в начале 60-х годов в работах Березина, Фаддеева и Минлоса [1], [2], [3]. В этих работах основной идеей была подходящая регуляризация потенциала. Эта тематика интенсивно развивалась в последние четыре десятилетия. Имеются монографии Альбеверио, Гештези, Хоэг-Крона и Хольдена [4], Кошманенко [5], Альбеверио и Курасова [6], где можно познакомиться с подробностями теории Березина-Минлоса-Фаддеева в ее современном состоянии и другими новыми направлениями, возникшими на основе этой теории. Там же можно познакомиться с обширной библиографией.

Другой подход к изучению операторов Штурма-Лиувилля с неклассическими потенциалами $q(x)$, являющимися производными от функций ограниченной вариации (зарядами), был предпринят Крейном [7], Кацем [8], Аткинсоном [9] и Жиковым [10]. На этом пути в работе Винокурова и Садовничего [11] получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций такого класса операторов. Из потенциалов, не принадлежащих последнему классу, изучался кулоновский потенциал $q(x) = 1/x$ на отрезке $[-1, 1]$ или на прямой $\mathbb{R}$, например, в работах Гунсона [12], Курасова [13], Аткинсона, Эверитта и Зеттла [14].

В работе Савчука и Шкаликова [15] (см. также работу Неймана-заде и Шкаликова [16]) было показано, что оператор Штурма-Лиувилля можно корректно определить для существенно более общего класса потенциалов $q(x)$, являющихся сингулярными распределениями первого порядка. Далее в статьях [17], [18] и [19] было предпринято дальнейшее изучение операторов с такими потенциалами. Вскоре появились работы Гринива и Микитюка [20] — [24], где этот подход получил существенное развитие, в особенности при решении обратной задачи Штурма-Лиувилля с неклассическими потенциалами.

В последнее время эти операторы активно изучаются. Так, в работах Савчука и Шкаликова [25] — [30] исследованы различные аспекты решения обратных задач для операторов с такими потенциалами. В работах Митягина и Дьякова [31] — [32] рассмотрены вопросы равносходимости, базисности и т.п. для операторов с периодическими и антипериодическими краевыми условиями. В работах Садовничей [33] — [34] также изучались вопросы равносходимости для подобных операторов. В последнее время активно исследовались операторы Штурма–Лиувилля и Шредингера с периодическими сингулярными потенциалами, такими, например, как $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x-k)$. Изучались и более общие классы потенциалов вида $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\delta(x-a_k)$ на всей оси и на полуоси (см., например, работу Маламуда и Костенко [35]). В работах Мирзоева и Конечной [36] — [38] рассматривались вопросы об индексах дефекта операторов с сингулярными потенциалами на полуоси.

Мы начнем изложение результатов с определения операторов с сингулярными потенциалами и описания их свойств. Здесь мы следуем статье Савчука и Шкаликова [39], в которой даны несколько способов определения операторов Штурма-Лиувилля с потенциалом-распределением и рассказано об их взаимосвязи. Также в этой работе намечены подходы к определению операторов с потенциалами высокой сингулярности (для потенциалов $q(x)$, не принадлежащих пространству W_2^{-1}), когда однозначного определения оператора с помощью выше предложенных способов не существует. Мы остановимся подробнее на результатах этой статьи в начале первой главы в разделе **Основные сведения** и рассмотрим изложенные в ней способы определения операторов с потенциалами-распределениями. Методы и идеи этой работы будут нами использоваться во всей диссертации.

Изложим основные результаты диссертации.

В первой Главе (помимо раздела **Основные сведения**) получены асимптотические формулы для собственных значений для различных видов граничных условий. Для формулировки результатов этой главы введем некоторые обозначения. Мы везде в диссертации предполагаем, что $q(x) \in W_2^{-1}[0,\pi]$ и используем представление

$$< q, \phi >= -\int_0^\pi u(x)\phi'(x)dx + u_\pi \phi(\pi) - u_0 \phi(0),$$

где функция $u \in L_2[0,\pi]$ (мы будем называть ее обобщенной первообразной функции q), а u_0 и u_π — комплексные числа. Мы также будем постоянно использовать выражение $y^{[1]}(x) := y'(x) - u(x)y(x)$, которое, согласно работам Савчука и Шкаликова, будем называть первой квазипроизводной функции y. Во избежание путаницы, отметим, что это понятие отличается от классического понятия квазипроизводных, определяемых, например в монографии [40].

Основной результат этой главы заключен в следующей теореме.

Теорема 1.4.

Для собственных значений оператора $L = -d^2/dx^2 - q(x)$, $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in L_2$, *выполнено:*

$$\lambda_n^{1/2} = m - \frac{1}{\pi} v(c, \pi, m^2) + \rho(\lambda_n),$$

где в случае граничных условий

- *Дирихле* $(y(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$: $m \in \mathbb{N},\ c = 0$
- *Неймана* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$: $m \in \mathbb{N} \bigcup 0,\ c = \pi/2,$
- *Дирихле–Неймана* $(y(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$: $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N},\ c = 0,$
- *Неймана–Дирихле* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$: $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N},\ c = \pi/2,$

а $|\rho(\lambda_n)| \le M\gamma^2(c, \pi, \lambda_n)$.

Здесь мы используем обозначения

$$v(c,x,\lambda)=\int_0^x u(t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}t)dt+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)dt+$$
$$+2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}s)dsdt- \qquad (2)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)dt,$$

$$\gamma(c,\lambda,x)=\left|\int_0^x u(t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}t)dt\right|+\left|\int_0^x u(t)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)dt\right|+$$
$$+2\left|\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}s)dtds\right|+$$
$$+\frac{1}{2}\left|\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)dt\right|+|\lambda|^{-1/2}||u||^2_{L_2}+||v(x,\lambda)||_{L_2}.$$

Метод, позволяющий получить результат теоремы 1.4 основан на модифицированной замене Прюфера $y(x,\lambda)=r(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda)$, $y^{[1]}(x,\lambda)-u(x)y(x,\lambda)=\lambda^{1/2}r(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda)$, (для определенности мы здесь приводим замену, используемую для случая краевых условий Дирихле и Дирихле—Неймана). Эта замена позволяет свести уравнение $Ly=\lambda y$ на собственные значения к решению системы

$$\theta'(x,\lambda)=\lambda^{1/2}+\lambda^{-1/2}u^2(x)\sin^2\theta(x,\lambda)+u(x)\sin 2\theta(x,\lambda), \qquad (3)$$

$$r'(x,\lambda)=-r(x,\lambda)\left[u(x)\cos 2\theta(x,\lambda)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}u^2(x)\sin 2\theta(x,\lambda)\right]. \qquad (4)$$

Таким образом, для получения асимптотических формул для собственных значений, достаточно изучить первое уравнение системы. Здесь основной является лемма

Лемма 1

Пусть $\alpha>0$ - произвольное фиксированное число, а P_α - область, ограниченная параболой $|\,\mathrm{Im}\ \sqrt{\lambda}|<\alpha$. Тогда существует число μ, зависящее только от $u(x)$ и α такое, что при любых $\lambda\in P_\alpha$, $\mathrm{Re}\ \lambda>\mu$, уравнение (3) имеет единственное решение $\theta(c,x,\lambda)$, определенное при всех $0\le x\le\pi$ и удовлетворяющее начальному условию $\theta(c,0,\lambda)=c$. Это решение допускает представление

$$\theta(c,x,\lambda)=c+\lambda^{1/2}x+v(c,x,\lambda)+\rho(c,x,\lambda),$$

где $|\rho(c,x,\lambda)| \le M\gamma^2(c,x,\lambda),\ \lambda \in P_\alpha,\ \mathrm{Re}\ \lambda > \mu$, *причем выбор постоянной* M *зависит от функции* u *и* α, *но не зависит от* $c,\ x,\ \lambda$.

Во второй Главе рассматривается асимптотика собственных функций операторов Штурма–Лиувилля для различных видов краевых условий и с помощью результатов Главы 1 в явном виде получены первые и вторые члены этих асимптотик.

Теорема 2.4

Рассмотрим оператор L, *порожденный дифференциальным выражением* $-y'' + q(x)y$, *где* $q(x) = u'(x)$ *в смысле распределений, а комплекснозначная функция* $u(x) \in L_2$. *Обозначим через* $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *систему собственных и присоединенных функций оператора* L, *через* $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— биортогональную систему (причем собственные функции мы нормируем условием* $||y_n||_{L_2} = 1$*). Тогда*

1) Для граничных условий Дирихле ($y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$)*:* $m = n, n \in \mathbb{N}$ *и справедливы следующие формулы:*

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) = \sin(mx)\left(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt - \int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\right) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\biggl(-\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\biggr) +$$
$$+ \cos(mx)\biggl(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt + 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt -$$
$$- \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\biggr) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\biggl(\int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt -$$
$$- \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \rho(x,\lambda_n), \qquad (5)$$

Соответствующие функции биортогональной системы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = \\
&\quad = \sin(mx)\biggl(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R(t) + 2iu_I(t))\cos(2mt)dt- \\
&\quad - \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\sin(mx)\biggl(-\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt + \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t) + 4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\biggr) + \\
&\quad + \cos(mx)\biggl(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt + 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt- \\
&\quad - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\biggr) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\cos(mx)\biggl(\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt- \\
&\quad - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \rho(x, \lambda_n);
\end{aligned} \tag{6}
$$

2) Для граничных условий Дирихле–Неймана ($y(0) = 0$, $y^{[1]}(\pi) = 0$)*:* $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$ *и выполнены равенства* (5) *и* (6)*;*

3) Для граничных условий Неймана ($y^{[1]}(0) = 0$, $y^{[1]}(\pi) = 0$)*:*

$m=n, n\in\mathbb{N}\bigcup 0$ и верны формулы:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x)=\cos(mx)\left(1-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt+\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\Bigg(\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Bigg)+$$
$$+\sin(mx)\Bigg(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt-2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\sin(2mt)dt+\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{2m}\sin(mx)\Bigg(-\int_0^x u^2(t)dt-\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}u^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}u^2(t)\cos(2mt)dt\Bigg)+\rho(x,\lambda_n), \tag{7}$$

При этом соответствующие функции биортогональной системы имеют *вид:*

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = \\
&\quad = \cos(mx)\biggl(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R(t) + 2iu_I(t))\cos(2mt)dt + \\
&\quad + \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\cos(mx)\biggl(\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt - \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t) + 4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\biggr) + \\
&\quad + \sin(mx)\biggl(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&\quad - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\biggr) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\sin(mx)\biggl(-\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt + \\
&\quad + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \rho(x, \lambda_n);
\end{aligned}
\tag{8}
$$

4) Для граничных условий Неймана–Дирихле ($y^{[1]}(0) = 0$, $y(\pi) = 0$)*:* $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$ *и имеют место равенства* (7) *и* (8).

В последней Главе доказаны теоремы о равносходимости и оценки ее скорости.

Теорема 3.4

Рассмотрим оператор L*, порожденный дифференциальным выражением* $-y'' + q(x)y$*, где* $q(x) = u'(x)$ *в смысле распределений, а комплекснозначная функция* $u(x) \in L_2[0,\pi]$*. Пусть* $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *— система собственных и присоединенных функций оператора* L*, причем для собственных функций* $||y_n(x)||_{L_2} = 1$*, а* $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$*— биортогональная к ней. Для произвольной функции* $f \in L_2[0,\pi]$ *обозначим за* $c_n = (f(x), v_n(x))$*,* $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), F(mx))$*. Тогда имеет место равномерная на всем отрезке* $[0,\pi]$ *равносходимость разложения функции* f *в ряд по системе* $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *и по системе* $\{F(mx)\}$*. При этом скорость равносходимости характеризу-*

ется следующим выражением

$$
\begin{aligned}
&||\sum_{n=1}^{l} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_{n,0}F(mx)||_C \le \\
&\le C_u\big(\sum_{n\ge l^{1/2-\varepsilon}} |c_{n,0}|^2\big)^{1/2} + ||f||_{L_2}(v_u([l^{1/2-\varepsilon}]) + C_u l^{-\varepsilon}),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *— произвольное малое положительное число,* $l^{1/2-\varepsilon} > N_u$*, а*

$$
v_u(k) = C_u((\sum_{n\ge k} ||\psi_n||^2_{L_2})^{1/2} + (\sum_{n\ge k} ||\phi_n||^2_{L_2})^{1/2}), \quad k \le N_u.
$$

Здесь в случае граничных условий

- *Дирихле* $(y(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$ $F(\alpha) = \sin(\alpha),\ m \in \mathbb{N},$
- *Неймана* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$ $F(\alpha) = \cos(\alpha),\ m \in \mathbb{N}\bigcup 0,$
- *Дирихле–Неймана* $(y(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$ $F(\alpha) = \sin(\alpha),\ m = n - \frac{1}{2},$ $n \in \mathbb{N},$
- *Неймана–Дирихле* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$ $F(\alpha) = \cos(\alpha), m = n - \frac{1}{2},$ $n \in \mathbb{N}.$

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [41] — [42], а также докладывались на конференциях в 2011-2013 годах (тезисы докладов можно посмотреть в [43] — [45]).

Автор сердечно благодарит своего научного руководителя Инну Викторовну Садовничую за постановку задачи, постоянное внимание к работе и советы по оформлению научных трудов.

Глава 1. Асимптотика собственных значений

В настоящей главе получены асимптотические формулы для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля, порожденного в пространстве $L_2[0,\pi]$ дифференциальным выражением

$$L(y) = -y'' + q(x)y \tag{10}$$

и граничными условиями, которые мы введем ниже. Потенциал $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2[0,\pi]$ (производная понимается в смысле распределений) предполагается комплекснозначным.

1. Основные сведения

Изложим необходимые нам определения и утверждения. Наше изложение следует результатам работы [39]. Мы начнем с определения оператора L.

1. Первый способ - **метод регуляризации**.

Обозначим через D пространство тест-функций на интервале $(0,\pi)$ (т.е. бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на $(0,\pi)$), а через D' — пространство распределений на D. Через $W_2^{-1}[0,\pi]$ (сокращенно W_2^{-1}) обозначим пространство, состоящее из функций $q(x) \in D'$, для которых первообразная $u(x) = \int q(\xi)d\xi$ (в смысле распределений) принадлежит $L_2[0,\pi]$. Норму в W_2^{-1} определим равенством $||q||_{-1} = \inf ||u(x)+c||_{L_2}$, где инфимум берется по всем константам c. Нетрудно показать, что пространство W_2^{-1} совпадает с дуальным к пространству $\dot{W}_2^1[0,\pi]$ по отношению к скалярному произведению в $L_2[0,\pi]$. Здесь

$$\dot{W}_2^1[0,\pi] = \{y | y \in W_2^1[0,\pi], y(0) = y(\pi) = 0\},$$

где через W_p^k обозначается соболевское пространство с нормой $||y||_{k,p} = ||y||_{L_p} + ||y^{(k)}||_{L_p}$. Далее, если норма $||\cdot||$ пишется без индексов, предполагаем, что она берется в пространстве L_2.

Пусть в дифференциальном выражении (1) $q(x) \in W_2^{-1}$, а $u(x) = \int q(\xi)d(\xi)$ — первообразная из пространства L_2. Введем квазипроизводную

$$y^{[1]}(x) = y' - u(x)y(x). \tag{11}$$

Теперь мы можем переписать (10) в виде

$$L(y) = -(y^{[1]})' - u(x)y^{[1]} - u^2(x)y. \tag{12}$$

Заметим, что для гладкой функции $u(x)$ уравнения (10) и (12) совпадают. Однако выражение (12) обладает тем преимуществом, что не содержит распределений, а потому с ним можно оперировать, по существу, так же, как в классической теории. Методы построения операторов на основе квазидифференциальных выражений можно найти в монографии Наймарка [40], статьях Эверитта, Маркуса и Зеттла [46], [47], [48]. Воспользуемся конструкцией, приведенной в работе Савчука и Шкаликова [15] (ниже приведем основные шаги этого метода без доказательств, более подробно см. статьи [15], [39]).

Свяжем с выражением (12) максимальный оператор L_M, определенный системой

$$\begin{aligned} &L_M y = L(y), \\ &D(L_M) = \{y|\ y, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi], L(y) \in L_2[0,\pi]\}, \end{aligned} \tag{13}$$

и минимальный оператор L_m, который является сужением максимального оператора на область

$$D(L_m) = \{y|\ y \in D(L_M), y(0) = y(\pi) = y^{[1]}(0) = y^{[1]}(\pi) = 0\}.$$

Так как функция $u(x)$ в общем случае комплексна, введем $\overline{L_M}$ и $\overline{L_m}$ — максимальный и минимальный операторы, порожденные сопряженным дифференциальным выражением $\overline{L(y)}$, в котором функция $u(x)$ заменена на $\overline{u(x)}$. Для описанных операторов верно следующее утверждение

Теорема А (формула Лагранжа)

Для функций $f \in D(L_M)$ и $g \in D(\overline{L_M})$ справедливо тождество

$$(L_M f, g) = (f, \overline{L_M} g) + [f, g]_0^\pi,$$

где $[f, g]_0^\pi = -f^{[1]}(x)\overline{g(x)}|_0^\pi - \overline{g^{[1]}(x)}f(x)|_0^\pi$.

Отсюда видно, что операторы L_M и $\overline{L_m}$ взаимно сопряжены, то есть

$$(L_M f, g) = (f, \overline{L_m} g), \quad f \in D(L_M), g \in D(\overline{L_m}).$$

Далее перепишем уравнение

$$L_M y := -y'' + u'(x)y = \lambda y + f, \quad \lambda \in C, f \in L_2$$

в виде системы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda - u^2 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $y_1 = y,\ y_2 = y^{[1]}$. При этом элементы матрицы A, образованной из коэффициентов системы (13)

$$A(x) = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda - u^2 & -u \end{pmatrix}$$

являются функциями из $L_1[0,\pi]$, благодаря чему верна

Теорема Б

Пусть $A(x)$ — матрица, размером $n * n$, элементы которой являются функциями пространства $L_1[0,\pi]$, а $f \in [L_1[0,\pi]]^n$ — вектор-функция. Тогда при любом $c \in [0,\pi]$ уравнение

$$y' = A(x)y + f, \quad y(c) = \xi \in C^n,$$

имеет единственное решение $y(x)$, причем $y(x)$ — абсолютно непрерывная на $[0,\pi]$ вектор-функция. Если последовательность матриц $A_\varepsilon(x)$ с элементами из $L_1[0,\pi]$ такова, что $||A_\varepsilon(x) - A(x)||_{L_1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то решения уравнений

$$y'_\varepsilon = A_\varepsilon(x)y_\varepsilon + f, \quad y_\varepsilon(c) = \xi,$$

сходятся к $y(x)$ равномерно на $[0,\pi]$. Кроме того, справедлива оценка

$$||y(x) - y_\varepsilon(x)||_{W_1^1[0,\pi]} \leq C\left(||f||_{L_1} + \|\xi\|\right)||A(x) - A_\varepsilon(x)||_{L_1},$$

где постоянная C не зависит от f и ε.

Далее с потощью Теоремы Б легко доказать следующее утверждение:

Теорема В

Для любого $\lambda \in C$ операторы $L_M - \lambda$ и $\overline{L_m} - \overline{\lambda}$ фредгольмовы, являются сопряженными друг к другу, а их дефектные числа равны 0, 2 и 2, 0 соответственно.

Напомним, что оператор F, действующий в гильбертовом (или банаховом) пространстве Ω, называется фредгольмовым, если область его определения $D(F)$ плотна в Ω, образ замкнут, а дефектные числа $\{\alpha, \beta\}$, равные размерностям ядра и коядра, конечны.

Также отметим следующую

Теорема Г

Пусть оператор L является сужением оператора L_M на область

$$D(L) = \{y | y \in D(L_M), U_1(y) = U_2(y) = 0\},$$

где

$$U_j(y) = a_{j1}y(0) + a_{j2}y^{[1]}(0) + b_{j1}y(\pi) + b_{j2}y^{[1]}(\pi), \quad j = 1, 2. \tag{15}$$

Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор L имеет непустое резольвентное множество и спектр его дискретен, если выполнено одно из следующих условий:

- $J_{42} \neq 0$,
- $J_{42} = 0,\ J_{14} + J_{32} \neq 0$,
- $J_{42} = J_{14} = J_{32} = 0,\ J_{12} + J_{34} = 0,\ J_{13} \neq 0$.

Доказательства теорем А-Г приведены в работах [15], [39].

При изучении операторов с регулярными потенциалами, краевые условия, для которых выполняется одно из условий 1-3, называются регулярными по Биркгофу. Если $u(x)$ — гладкая функция, то замена в краевых условиях переменных $y'(0)$, $y'(\pi)$ на квазипроизводные сохраняет свойство регулярности краевых условий. Утверждение Теоремы В сохраняется и в случае невырожденных краевых условий, в которых пункт 3 заменяется на (см. [49])

$$J_{42} = 0,\ J_{14} + J_{32} = 0,\ J_{13} \neq 0.$$

В дальнейшем нас будут интересовать именно регулярные краевые условия, так как для рассматриваемой задачи при $u(x) \in L_2$ операторы с регулярными краевыми условиями сохраняют классические асимптотики для собственных значений и собственных функций, причем система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса (подробнее об этом будет сказано в Главе 2).

В случае вещественности функции $u(x)$ минимальный оператор L_m симметричен с индексами дефекта (2, 2). Несложно описать все самосопряженные расширения L_m.

Теорема Д

Если функция $u(x)$ вещественна, то произвольное самосопряженное расширение L симметрического оператора L_m является сужением оператора

L_M на область

$$D(L) = \{y | y \in D(L_M), U_1(y) = U_2(y) = 0\},$$

где линейные формы U_1 и U_2 имеют представление (15)*, для коэффициентов которых выполнены равенства*

$$AJA^* - BJB^* = 0, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Наоборот, любые краевые условия вида (15), (16) *определяют самосопряженный оператор L.*

Доказательства этой теоремы получается повторением рассуждений из работы Крейна [50], §3.

Полезно отметить, что краевые условия, определяющие самосопряженные расширения, можно записать также в форме

$$(U - 1) \begin{pmatrix} y^{[1]}(0) \\ -y^{[1]}(\pi) \end{pmatrix} + i(U + 1) \begin{pmatrix} y(0) \\ y(\pi) \end{pmatrix} = 0,$$

где U — произвольная унитарная матрица второго порядка. Доказательство эквивалентности такой записи предыдущей производится так же, как в монографии Рофе-Бекетова и Холькина [51]. Полезно отметить, что краевые условия, определяющие самосопряженный оператор, обязательно удовлетворяют одному из условий 1 — 3 Теоремы Г, т.е. являются регулярными по Биркгофу.

2. Второй способ определения операторов с потенциалами-распределениями - **аппроксимация гладкими потенциалами**.

Пусть $q(x) \in W_2^{-1}[0, \pi],\ u(x) = \int q(t)dt$. Пусть $q_\varepsilon(x)$ — семейство функций, таких, что $||q_\varepsilon(x) - q(x)||_{W_2^{-1}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Это условие эквивалентно тому, что $u_\varepsilon(x) = \int q_\varepsilon(t)dt \to u(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве L_2.

Обозначим через L_ε оператор, порожденный дифференциальным выражением $L_\varepsilon(y) = -y'' + q_\varepsilon(x)y$ и регулярными краевыми условиями (15), в которых переменные $y^{[1]}(0), y^{[1]}(\pi)$ определяются равенством

$$y^{[1]}(x) = y'(x) - u_\varepsilon(x)y(x).$$

В случае гладких функций $u_\varepsilon(x)$ подстановка в краевые условия переменных $y^{[1]}(0), y^{[1]}(\pi)$ вместо обычных производных сохраняет регулярность краевых условий. Поэтому (см. [52], Гл. 1)операторы L_ε корректно определены и имеют дискретный спектр. Оказывается справедливым следующий результат:

Теорема Е

Существуют значения $\lambda \in \mathbb{C}$ такие, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ значение λ принадлежит резольвентным множествам операторов L_ε, а последовательность $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ фундаментальна при $\varepsilon \to 0$ в равномерной операторной топологии, т.е.

$$\|(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (L_\delta - \lambda)^{-1}\| \to 0 \quad \text{при } \varepsilon, \delta \to 0.$$

Оператор T являющийся пределом последовательности $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ не имеет ядра, а потому на области значений T определен оператор T^{-1}. При этом оператор $T^{-1} + \lambda$ совпадает с оператором L, определенном в Теореме Д.

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [39], §1.

3. Следующий метод, который рассматривается в статье [39] — **метод квадратичных форм**.

Предположим сначала, что $u(x)$ — вещественная функция. Выпишем квадратичную форму, отвечающую дифференциальному выражению (12). Имеем

$$\begin{aligned}(L(y), y) = -((y^{[1]})', y) - (u(x)y^{[1]}, y) - (u^2(x)y, y) =\\ = (y^{[1]}, y^{[1]}) - (u^2(x)y, y) + (y^\vee, y^\wedge),\end{aligned} \tag{17}$$

где $y^\vee = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(\pi) \end{pmatrix}$, $y^\wedge = \begin{pmatrix} y^{[1]}(\pi) \\ -y^{[1]}(\pi) \end{pmatrix}$. Пусть A — произвольная самосопряженная матрица размера 2×2. Положим

$$W^1_{2,U} = \{y \in W^1_2[0,\pi] | Uy^\wedge = 0\}, \tag{18}$$

где U — произвольная матрица размера 2×2. $W^1_{2,U}$ есть подпространство в W^1_2 коразмерности ≤ 2, в зависимости от ранга матрицы U. При $U = 0$ имеем $W^1_{2,U} = W^1_2$. Определим на пространстве $W^1_{2,U}$ квадратичную форму

$$\daleth(y, y) = (y^{[1]}, y^{[1]}) - (u^2(x)y, y) + (Ay^\wedge, y^\wedge). \tag{19}$$

Тогда для нее справедливо следующее утверждение:

Теорема К

Квадратичная форма (19) определена при $y \in W^1_{2,U}$ и замкнута.

Замкнутая квадратичная форма (19) (зависит от выбора матриц A и U), согласно первой теореме о представлении (см., например, [[52], Гл. 6.2]), определяет самосопряженный полуограниченный оператор L, причем область определения квадратного корня $(L+\alpha)^{1/2}$ (здесь $\alpha > 0$ — достаточно большое число) совпадает с $W^1_{2,U}$. Таким образом могут быть получены все описанные ранее самосопряженные расширения минимального оператора L_m. Например, если самосопряженное расширение L описывается краевыми условиями $(U-1)y^\vee + i(U+1)y^\wedge = 0$, где матрица $U-1$ обратима (это соответствует условию в Теореме Г $J_{42} \neq 0$), то этому расширению соответствует квадратичная форма (19), определенная на всем пространстве W^1_2, причем матрица A в (19) находится из условия $A = -i(U-1)^{-1}(U+1)$, то есть является преобразованием Кэли от U.

Подход к определению оператора с помощью метода квадратичных форм позволяет нам получить дополнительную информацию об области оператора L. Например, верно следующее утверждение:

Теорема Л

Пусть L — самосопряженное расширение минимального оператора L_m, а $W^1_{2,U}$ — подпространство в W^1_2, состоящее из функций, которые удовлетворяет краевым условиям нулевого порядка (имеются в виду краевые условия вида (15)*, порождающие расширение L). Тогда*

$$D(L) = \{y \in W^1_{2,U} | L(y) \in L_2\}, \tag{20}$$

где равенство $-y'' + q(x)y = f(x) \in L_2$ понимается в смысле теории распределений.

Доказательство теорем К и Л см. в [39].

Предложенный метод квадратичных форм может быть также использован и для определения операторов с комплексным потенциалом–распредлением $q(x)$. Однако этот метод не дает определения операторов с произвольными регулярными (или более общими) краевыми условиями, а только краевыми условиями, которые являются подчиненными возмущениями самосопряженных. В случае комплексной функции $u(x)$ равенство (17) следует записать в виде

$$(L(y), y) = (y', y') - (u(x)y, y') - (u(x)y', y) + (y^\vee, y^\wedge).$$

Это равенство позволяет ассоциировать с дифференциальным выражением

$L(y)$ квадратичную форму

$$\gimel(y,y) = (y', y') - (u(x)y, y') - (u(x)y', y) + (Ay^{\wedge}, y^{\wedge}),$$

где A — произвольная комплексная матрица размера 2×2. Здесь предполагается, что форма $\gimel(y,y)$ определена на пространстве $W^1_{2,U}$. Эта квадратичная форма не является вещественной, но она секторальна и является ε-подчиненной форме (y', y') при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно (см. [[52], Гл. 6.2]), существует максимальный секториальный оператор L, порождающий эту форму. Произвольные расширения L, полученные в предыдущем пункте, не могут получаться на этом пути. Более точно, этим методом получаются те операторы L из теоремы Г, для которых равенства $U_j(y) = 0, j = 1, 2$, влекут возможность представления

$$(y^{\vee}, y^{\wedge}) = (Ay^{\wedge}, y^{\wedge}).$$

4. Последний способ определения операторов с потенциалами–распределениями — **метод мультипликаторов**.

Пусть $q(x) \in D'$, а $y \in D$. Тогда

$$\gimel(y,y) = (-y'' + q(x)y, y) = (y', y') + (q(x)y, y).$$

Если спрведлива оценка

$$|(q(x)y, y)| \leq \varepsilon(y', y') + M(y, y), M = M(\varepsilon), \tag{21}$$

то квадратичная форма секториальна и замыкаема, причем область ее замыкания совпадает с пространством $\dot{W}^1_2$. В этом случае с формой $\gimel$ можно ассоциировать оператор. Естественен вопрос: для каких функций $q(x) \in D'$ оценка (21) справедлива? Для ответа на него полезно ввести следующее понятие. Функцию $q(x) \in D'$ назовем мультипликатором из пространства $\dot{W}^1_2$ в дуальное пространство W^{-1}_2, если

$$|(q(x)y, y)| \leq C||y||^2_{1,2}, \forall y \in D, \tag{22}$$

где постоянная C не зависит от y, а $||\cdot||_{1,2}$ — норма в $\dot{W}^1_2$. Очевидно, мультипликаторы образуют линейное пространство с нормой $||q|| = \inf C$, где инфинум берется среди постоянных C в (22). Это пространство обозначим через $M[1]$. В статье [16] показано, что $W^{-1}_2 \subset M[1]$, а в статье [53] доказано равенство $M[1] = W^{-1}_2$ и эквивалентность норм в этих пространствах. Хотя в работах [16] и [53] рассматриваются операторы на всей прямой $\mathbb{R}$ (и их многомерные обращения в $\mathbb{R}^n$), доказательства не меняются при переходе на конечный интервал. В нашем случае справедливость включения $W_2^{-1} \subset M[1]$ очевидна в силу оценки

$$|(q(x)y, y)| \leq |(q(x), y\overline{y})| \leq ||q||_{1,2}||y\overline{y}||_{1,2} \leq ||q||_{-1,2}||y||_{1,2}^2, y \in D.$$

Далее, заметим, что гладкие функции $\phi \in D$ плотны в пространстве $W_2^{-1} = M[1]$, следовательно, для любого мультипликатора q из этого пространства выполнена оценка (21). Тем самым, для любой $q \in W_2^{-1}$ определен оператор L, ассоциированный с формой $\daleth(y, y)$. Этот оператор L совпадает с прежними определениями оператора L, отвечающего краевым условиям Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Однако этот метод можно распространить для определения операторов с более общими краевыми условиями, хотя краевые условия либо не будут фигурировать вовсе, либо будет одно условие нулевого порядка.

Рассмотрим подпространство $W_{2,U}^1 \subseteq W_2^1$ коразмерности 1 или 0 (см. (18)). На этом подпространстве определим квадратичную форму

$$\daleth(y, y) = (y', y') + (q(x), y\overline{y}), y \in W_{2,U}^1. \tag{23}$$

Если $W_{2,U}^1 = W_2^1$, то условие $y \in W_{2,U}^1$ влечет за собой $y\overline{y} \in W_2^1$. Это свойство сохраняется для $W_{2,U}^1$, если краевое условие, порождающее это пространство, имеет вид $y(0) = 0$ или $y(\pi) = 0$, либо $y(0) - \alpha y(\pi) = 0$ и $\alpha = \pm 1$. При $\alpha \neq \pm 1$ функция $y\overline{y} \in W_{2,V}^1$, где индекс V означает новое краевое условие $V(\phi) = \phi(0) - |\alpha|^2\phi(\pi) = 0$. Из определения формы (23) и включения $y\overline{y} \in W_{2,V}^1$ следует, что форма $\daleth$ корректно определена на $W_{2,U}^1$, если $q \in (W_{2,V}^1)'$ — дуальному пространству к $W_{2,V}^1$ по отношению к скалярному произведению в L_2.

Пространство $\dot{W}_2^1$ имеет коразмерность 1 или 2 в $W_{2,V}^1$, поэтому W_2^{-1} (дуальное к $\dot{W}_2^1$ имеет коразмерность 1 или 2 в $(W_{2,V}^1)'$. Например, в случае $W_{2,U}^1 = W_2^1$ имеем $(W_2^1)' = W_2^{-1} \bigoplus G$, где G — двумерное пространство, содержащее функционалы $F_0(y) = y(0)$ и $F_1(y) = y(\pi)$. Дуальным к пространству $W_{2,V}^1$ с краевым условием $y(0) - \alpha^2 y(\pi) = 0$ будет пространство $W_2^{-1} \bigoplus G$, где одномерное пространство G содержит функционал $F(y) = \alpha^2 y(0) + y(\pi)$.

Из плотности гладких функций в W_2^{-1} можно вывести оценку

$$|(q, y\overline{y})| \leq \varepsilon(y', y') + M(y, y), y \in W^1_{2,U},$$

а потому квадратичная форма (23) определяет некоторый секториальный оператор L.

Недостаток такого определения оператора L состоит в том, что мы не указываем явную формулу для квадратичной формы (23) через регулярную функцию $u(x) = \int q(\xi)d\xi$. Однако это можно исправить и написать явную формулу, используя представление

$$y\overline{y} = (y - \psi)\overline{y} + \psi(\overline{y} - \overline{\psi}) + \psi\overline{\psi},$$

где $\psi = y(0) + \pi^{-1}(y(\pi) - y(0))x$. Функция $y - \phi$ аннулируется на концах отрезка, а потому справедливо равенство

$$\begin{aligned}(q(x), y\overline{y}) &= -(u(x), [y\overline{y} - \psi\overline{\psi}]') + (q(x), \psi\overline{\psi}) = \\ &= -(u(x), (y\overline{y})') + (u(x), (\psi\overline{\phi})') + (q, \psi\overline{\psi}),\end{aligned}$$

при этом выбор значения $(q, \psi\overline{\psi})$ находится в вашей власти. Несложно видеть, что описанный метод позволяет определить такой же класс операторов, как и метод квадратичных форм.

2. Типы операторов

Мы рассказали об определении оператора L. Далее в этой главе рассматриваются 4 основных типа операторов:

- L_D — порожденный выражением (10) и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$,
- L_{DN} — порожденный выражением (10) и граничными условиями Дирихле-Неймана $y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0$,
- L_{ND} — порожденный выражением (10) и граничными условиями Неймана-Дирихле $y^{[1]}(0) = y(\pi) = 0$,
- L_N — порожденный выражением (10) и граничными условиями Неймана $y^{[1]}(0) = y^{[1]}(\pi) = 0$.

Потенциал q предполагается элементом пространства $W_2^{-1}[0,\pi]$ всех линейных непрерывных функционалов на пространстве Соболева $W_2^1[0,\pi]$. Подобные функционалы допускают представление

$$< q, \phi >= -\int_0^\pi u(x)\phi'(x)dx + u_\pi\phi(\pi) - u_0\phi(0), \tag{24}$$

где $u \in L_2[0,\pi]$ — введенная выше обощенная первообразная функции q, а u_0 и u_π — комплексные числа. Представление (24) неоднозначно, так как тройки $(u(x), u_\pi, u_0)$ и $(u(x)+c, u_\pi+c, u_0+c)$ задают один и тот же функционал.

Заметим, что квадратичные формы операторов имеют вид

$$\begin{aligned}
&< L_D y, y >= \int_0^\pi |y^{[1]}(x)|^2dx - \int_0^\pi u^2(x)|y(x)|^2dx,\\
&< L_{DN} y, y >=< L_D y, y > +u_\pi|y(\pi)|^2,\\
&< L_{ND} y, y >=< L_D y, y > -u_0|y(0)|^2,\\
&< L_N y, y >=< L_D y, y > +u_\pi|y(\pi)|^2 - u_0|y(0)|^2
\end{aligned} \tag{25}$$

(функцию u здесь для простоты мы взяли вещественной). При этом первую форму мы рассматриваем на пространстве $\dot{W}_2^1[0,\pi]$, вторую — на пространстве $\{y \in W_2^1 |\ y(0) = 0\}$, третью — на пространстве $\{y \in W_2^1[0,\pi] |\ y(\pi) = 0\}$, а четвертую — на всем пространстве $W_2^1[0,\pi]$.

Из (25) видно, что изучив четыре оператора, введенные выше, мы тем самым изучим все операторы с разделенными краевыми условиями (условиями типа Штурма). Действительно, например квадратичная форма оператора с краевыми условиями $y(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) + hy(\pi) = 0$ имеет вид

$$\int_0^\pi |y^{[1]}(x)|^2dx - \int_0^\pi u^2(x)|y(x)|^2dx + h|y(\pi)|^2 + u_\pi|y(\pi)|^2, \tag{26}$$

то есть совпадает с формой оператора L_{DN} при выборе числа $c = h$ в определении функции u по функционалу q.

3. Асимптотические формулы для собственных значений

Переходим непосредственно к изучению каждого типа операторов. Как показано выше, от выражения (10) можно перейти к системе

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda - u^2 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_1 = y,\ y_2 = y^{[1]}(x). \tag{27}$$

Сделаем замену $y_1(x,\lambda) = r(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda) = \lambda^{1/2}r(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda)$, которая является модификацией замены Прюфера (см. [54]). Тогда систему (27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta &= ur\sin\theta + \lambda^{1/2}r\cos\theta \\ \lambda^{1/2}r'\cos\theta - \lambda^{1/2}r\theta'\sin\theta &= -\lambda r\sin\theta - u^2 r\sin\theta - \lambda^{1/2}ur\cos\theta, \end{aligned} \tag{28}$$

где $r = r(x,\lambda),\ \theta = \theta(x,\lambda), u = u(x)$, а производные функций r и θ берутся по переменной x. Умножим первое уравнение в (28) на $\lambda^{1/2}\cos\theta$ и вычтем второе уравнение, умноженное на $\sin\theta$. В результате получим уравнение для функции $\theta(x,\lambda)$

$$\theta'(x,\lambda) = \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}u^2(x)\sin^2\theta(x,\lambda) + u(x)\sin 2\theta(x,\lambda). \tag{29}$$

Если мы сложим первое уравнение в (28), умноженное на $\lambda^{1/2}\sin\theta$, со вторым уравнением, умноженным на $\cos\theta$, то получим уравнение на функцию $r(x,\lambda)$

$$r'(x,\lambda) = -r(x,\lambda)\left[u(x)\cos 2\theta(x,\lambda) + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}u^2(x)\sin 2\theta(x,\lambda)\right]. \tag{30}$$

Итак, мы получили уравнения для функций $r(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$, с помощью которых можно выразить решение уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \tag{31}$$

Введем необходимые обозначения и сформулируем вспомогательные леммы для исследования этих формул. Будем обозначать

$$\begin{aligned} v(c,x,\lambda) = &\int_0^x u(t)\sin(2c + 2\lambda^{1/2}t)dt + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)dt + \\ &+ 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2c + 2\lambda^{1/2}t)\sin(2c + 2\lambda^{1/2}s)dsdt - \\ &- \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\cos(2c + 2\lambda^{1/2}t)dt, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \gamma(c,\lambda,x) = &\left|\int_0^x u(t)\sin(2c + 2\lambda^{1/2}t)dt\right| + \left|\int_0^x u(t)\cos(2c + 2\lambda^{1/2}t)dt\right| + \\ &+ 2\left|\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2c + 2\lambda^{1/2}t)\sin(2c + 2\lambda^{1/2}s)dtds\right| + \\ &+ \frac{1}{2}\left|\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\cos(2c + 2\lambda^{1/2}t)dt\right| + |\lambda|^{-1/2}||u||_{L_2}^2 + ||v(x,\lambda)||_{L_2}. \end{aligned}$$

Сформулируем утверждения, которые потребуются нам в дальнейшем.

Лемма 1 ([39], §2)

Пусть $\alpha > 0$ - произвольное фиксированное число, а P_α - область, ограниченная параболой $|Im\ \sqrt{\lambda}| < \alpha$. Тогда существует число μ, зависящее только от $u(x)$ и α такое, что при любых $\lambda \in P_\alpha$, $Re\ \lambda > \mu$, уравнение (29) имеет единственное решение $\theta(c, x, \lambda)$, определенное при всех $0 \le x \le \pi$ и удовлетворяющее начальному условию $\theta(c, 0, \lambda) = c$. Это решение допускает представление

$$\theta(c, x, \lambda) = c + \lambda^{1/2}x + v(c, x, \lambda) + \rho(c, x, \lambda),$$

где $|\rho(c, x, \lambda)| \le M\gamma^2(c, x, \lambda),\ \ \lambda \in P_\alpha,\ \ Re\ \lambda > \mu$, причем выбор постоянной M зависит от функции u и α, но не зависит от c, x, λ.

Лемма 2 ([39], §2)

Пусть $\alpha > 0$ - произвольное фиксированное число, а P_α - область, ограниченная параболой $|Im\ \sqrt{\lambda}| < \alpha$. Пусть $\theta(c, x, \lambda)$ - решение уравнения (29) с начальным условием $\theta(c, 0, \lambda) = c$. Тогда решение $r(c, x, \lambda)$ уравнения (30) с начальным условием $r(c, 0, \lambda) = 1$ допускает представление

$$\begin{aligned} r(c, x, \lambda) = 1 + \int_0^x u(t) \cos(2c + 2\lambda^{1/2}) dt + \\ + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_0^x u^2(t) \sin(2c + 2\lambda^{1/2}) dt + \rho(c, x, \lambda), \lambda \in P_\alpha,\ \mathrm{Re}\ \lambda > \mu, \end{aligned} \tag{33}$$

где $|\rho(c, x, \lambda)| \le M\gamma^2(c, x, \lambda)$, причем M и μ зависят только от u и α.

Переходим к непосредственному вычислению асимптотик собственных значений. Асимптотика для граничных условий Дирихле была получена в статье Савчука А.М. [30]. Рассмотрим остальные типы. Начнем исследование со случая граничных условий Дирихле–Неймана.

3.1. Случай граничных условий Дирихле–Неймана

Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ собственные значения, занумерованные в порядке возрастания вещественной части.

Теорема 1.1.

Для собственных значений оператора $L_{DN} = -d^2/dx^2 - q(x)$ с граничными условиями Дирихле-Неймана $y(0) = 0,\ \ y^{[1]}(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, а $u(x) \in L_2$, выполнено:

$$\lambda_n^{1/2} = n - 1/2 - \frac{1}{\pi} v(0, \pi, (n-1/2)^2) + \rho(\lambda_n), \tag{34}$$

где через $\{\rho(\lambda_n)\}$ обозначена произвольная последовательность, удовлетворяющая условию $|\rho(\lambda_n)| \leq M\gamma^2(0, \lambda_n, \pi)$. Здесь выбор постоянной M зависит только от функции u.

Доказательство

Пусть функция $\Psi(x, \lambda)$ — решение уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda y$ с граничными условиями $\Psi(0, \lambda) = 0$ и $\Psi^{[1]}(0, \lambda) = 1$. Тогда уравнение $\Psi(\pi, \lambda) = 0$ опеределяет собственные значения оператора L. Выражая решения через функции Прюфера, получаем $\Psi(x, \lambda) = r(0, x, \lambda)\sin(\theta(0, x, \lambda))$. Значит, уравнение для собственных значений имеет вид $\sin(\theta(0, \pi, \lambda)) = 0$. Будем обозначать для краткости $m = n - 1/2, n \in \mathbb{N}$, $\gamma(0, \lambda_n, \pi) = \gamma(\lambda_n, \pi)$, $v(0, x, \lambda) = v(x, \lambda)$. По Лемме 1 при $c = 0$ и $x = \pi$ получим:

$$\lambda_n^{1/2} + \frac{1}{\pi} v(\pi, \lambda_n) + \rho(\lambda_n) = m, \text{ где } |\rho(\lambda_n)| \leq M\gamma^2(\lambda_n, \pi).$$

Таким образом, необходимо доказать оценку

$$|v(\pi, \lambda_n) - v(\pi, m^2)| \leq M\gamma^2(\lambda_n, \pi). \tag{35}$$

Преобразуем левую часть неравенства.

$$\begin{aligned} v(\pi, \lambda_n) - v(\pi, m^2) = &\int_0^\pi u(t)(\sin(2\lambda_n^{1/2} t) - \sin(2mt))dt + \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda_n^{-1/2} - m^{-1}) \left(\int_0^\pi u^2(t)dt - \int_0^\pi u^2(t)\cos(2\lambda_n^{1/2} t)dt \right) - \\ &- \frac{1}{2} m^{-1} \left(\int_0^\pi u^2(t)\cos(2\lambda_n^{1/2} t)dt - \int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt \right) + \\ &+ 2 \left(\int_0^\pi \int_0^t u(t)u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2} t)\sin(2\lambda_n^{1/2} s)dsdt - \right. \\ &\left. - \int_0^\pi \int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt \right) \end{aligned} \tag{36}$$

Обозначим слагаемые из правой части (36) в порядке их очередности I_1, I_2, I_3, I_4, и введем величину $\nu_n = \lambda_n^{1/2} - m$, причем отметим, что из (32) следует, что $|\nu_n| \leq M\gamma^2(\lambda_n, \pi)$. Перейдем к оценке I_1, для этого преобразуем сумму синусов к более удобному виду, применяя разложение функции $\sin(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = 2\lambda_n^{1/2}t$ (напомним, что $0 \le t \le \pi$).

$$\begin{aligned}
&\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2mt) = \sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t - 2\nu_n t) = \\
&= \sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)\cos(2\nu_n t) + \cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\nu_n t) = \\
&= \sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)(1 - O(\nu_n^2)) + \cos(2\lambda_n^{1/2}t)(2\nu_n t + O(\nu_n^3)) = \\
&= 2\nu_n t\cos(2\lambda_n^{1/2}t) + O(\nu_n^2)
\end{aligned}$$

Подставим полученное в I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 = &\left|2\nu_n \int_0^\pi tu(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt + O(\nu_n^2)\right| = \left|2\nu_n\pi \int_0^\pi u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt\right. \\
&\left. - 2\nu_n \int_0^\pi \int_0^t u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt\right| + O(\nu_n^2) \le M|\nu_n||\gamma(\lambda_n,\pi)| \le M^2\gamma^2(\lambda_n,\pi).
\end{aligned}$$

Далее заметим, что $\lambda_n^{-1/2} - m^{-1} = O(m^{-2})$, $m^{-2} \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$ и $\cos(2\lambda_n^{1/2}t) - \cos(2mt) = O(\nu_n)$, $\nu_n m^{-1} \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$, следовательно I_2 и I_3 по модулю не превосходят величины $M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$.

Для оценки последнего слагаемого в правой части (36) воспользуемся равенством:

$$\begin{aligned}
&\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s) - \cos(2mt)\sin(2ms) = \\
&= \cos(2\lambda_n^{1/2}t)(\sin(2\lambda_n^{1/2}s) - \sin(2ms)) + (\cos(2\lambda_n^{1/2}t) - \cos(2mt))\sin(2ms) = \\
&= 2\nu_n s\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\cos(2\lambda_n^{1/2}s) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s) + O(\nu_n^2)
\end{aligned}$$

Из определения функции $\gamma(\lambda_n, x)$ после изменения порядка интегрирования получим:

$$2\nu_n\left(\int_0^\pi u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\int_0^t u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt\right) \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi).$$

$$2\nu_n\left(\int_0^\pi u(t)\sin(2\lambda_n^{1/2}t)\int_0^t u(s)\sin(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt\right) \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi).$$

Значит, $|I_4| \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$, и справедливость оценки (35) установлена. Теорема 1.1 доказана. $\square$

Замечание 1.1.

Из [39] §2 следует, что в случае $u \in L_2$ для любого фиксированного $x \in [0,\pi]$ последовательность $\{|\gamma(\lambda_n, x)|\} \in l_2$. Обозначив $\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma(\lambda_n, x)|^2$, получим, что $||\gamma(x)||_{C[0,\pi]} \leq C$.

Замечание 1.2.

В Теореме 1.1 нумерацию чисел λ_n надо начинать именно с $n = 1$. Это следует из результатов работ [39]. А именно из того, что найдется число $R > 0$ такое, что количество чисел λ_n, лежащих в круге $|\lambda_n| < R$, с учетом кратности совпадает с числом собственных значений невозмущенного оператора (с нулевым потенциалом). Мы используем этот факт и в доказательстве следующих теорем.

Замечание 1.3.

Отметим, что потенциал q предполагается комплекснозначным, так что собственные значения λ_n не обязаны быть простыми. Однако, геометрическая кратность каждого собственного значения равна единице, что следует из теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения второго порядка. Таким образом, для каждого собственного значения мы имеем лишь одну жорданову цепочку. Вопрос построения этой цепочки, равно как и вопрос построения биортогональной системы, подробно рассмотрен в [30]. Нам будет важно лишь то, что при больших n все собственные значения λ_n просты. Этот факт мы будем использовать в следующих главах.

3.2. Случай граничных условий Неймана–Дирихле

Теорема 1.2.

Для собственных значений оператора $L_{ND} = -d^2/dx^2 - q(x)$ с граничными условиями Неймана–Дирихле $y^{[1]}(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, а $u(x) \in L_2$, выполнено:

$$\lambda_n^{1/2} = n - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\upsilon(\pi/2, \pi, (n - \frac{1}{2})^2) + \rho(\lambda_n), \quad n = 1, 2, ... \qquad (37)$$

где через $\{\rho(\lambda_n)\}$ обозначена последовательность, удовлетворяющая условию $|\rho(\lambda_n)| \leq M\gamma^2(\pi/2, \pi, \lambda_n)$. Выбор постоянной M зависит только от функции u.

Доказательство

Пусть функция $\Psi(x, \lambda)$ — решение уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda y$ с граничными условиями $\Psi^{[1]}(0,\lambda) = 0$ и $\Psi(0,\lambda) = 1$. Тогда уравнение $\Psi(\pi,\lambda) = 0$ определяет собственные значения оператора L. Выражая решения через функции Прюфера, получаем $\Psi(x,\lambda) = r(\pi/2,x,\lambda)\sin(\theta(\pi/2,x,\lambda))$. Таким образом, уравнение для собственных значений имеет вид $\sin(\theta(\pi/2,\pi,\lambda)) = 0$. По Лемме 1 при $c = \pi/2$ получим:

$$\lambda_n^{1/2} + \frac{1}{\pi}v(\pi/2,\pi,\lambda_n) + \rho(\pi,\lambda_n) + \frac{1}{2} = n, \text{ где } |\rho(\pi,\lambda_n)| \leq M\gamma^2(\pi/2,\pi,\lambda_n).$$

В результате, необходимо доказать оценку

$$|v(\pi/2,\pi,\lambda_n) - v(\pi/2,\pi,(n-1/2)^2)| \leq M\gamma^2(\pi/2,\pi,\lambda_n). \tag{38}$$

Заметим, что из (32) следует, что $\gamma(0,x,\lambda) = \gamma(\pi/2,x,\lambda)$, поэтому здесь как и в Теореме 1.1 мы будем использовать обозначение $\gamma(\pi/2,x,\lambda) = \gamma(x,\lambda)$.

Преобразуем левую часть неравенства, обозначив для краткости $n - 1/2$ через m.

$$\begin{aligned} v(\pi/2,\pi,\lambda_n) - v(\pi/2,\pi,m^2) = &-\int_0^\pi u(t)(\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2mt))dt + \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda_n^{-1/2} - m^{-1})\left(\int_0^\pi u^2(t)dt + \int_0^\pi u^2(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt\right) + \\ &+ \frac{1}{2}m^{-1}\left(\int_0^\pi u^2(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt - \int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \\ &+ 2\left(\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt - \right. \\ &\left. - \int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) \end{aligned} \tag{39}$$

Обозначим слагаемые из правой части (39) в порядке их очередности I_1, I_2, I_3, I_4, и введем величину $\nu_n = \lambda_n^{1/2} - m$, которая по определению, данному в (32), подчиняется неравенству $|\nu_n| \leq M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$. Перейдем к оценке I_1, для этого преобразуем сумму синусов к более удобному виду, применяя разложение функции $\sin(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = 2\lambda_n^{1/2}t$ (здесь $0 \leq t \leq \pi$).

$$
\begin{aligned}
&\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2mt) = \sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t - 2\nu_n t) = \\
=&\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)\cos(2\nu_n t) + \cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\nu_n t) = \\
=&\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)(1 - O(\nu_n^2)) + \cos(2\lambda_n^{1/2}t)(2\nu_n t + O(\nu_n^3)) = \\
=&2\nu_n t\cos(2\lambda_n^{1/2}t) + O(\nu_n^2)
\end{aligned}
$$

Подставим полученное в I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 = &\left|2\nu_n\int_0^\pi tu(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt + O(\nu_n^2)\right| = \left|2\nu_n\pi\int_0^\pi u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt\right. \\
&\left.- 2\nu_n\int_0^\pi\int_0^t u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt\right| + O(\nu_n^2) \le M|\nu_n||\gamma(\lambda_n,\pi)| \le M^2\gamma^2(\lambda_n,\pi).
\end{aligned}
$$

Как и в Теореме 1.1, здесь выполняются неравенства $\lambda_n^{-1/2} - m^{-1} = O(m^{-2})$, $m^{-2} \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$ и $\cos(2\lambda_n^{1/2}t) - \cos(2mt) = O(\nu_n)$, $\nu_n m^{-1} \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$, следовательно I_2 и I_3 по модулю не превосходят величины $M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$.

Для оценки последнего слагаемого в правой части (39) воспользуемся равенством:

$$
\begin{aligned}
&\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s) - \cos(2mt)\sin(2ms) = \\
=&\cos(2\lambda_n^{1/2}t)(\sin(2\lambda_n^{1/2}s) - \sin(2ms)) + (\cos(2\lambda_n^{1/2}t) - \cos(2mt))\sin(2ms) = \\
=&2\nu_n s\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\cos(2\lambda_n^{1/2}s) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s) + O(\nu_n^2)
\end{aligned}
$$

Из определения функции $\gamma(c,\lambda_n,x)$ после изменения порядка интегрирования получим:

$$
2\nu_n\left(\int_0^\pi u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\int_0^t u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt\right) \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi).
$$

$$
2\nu_n\left(\int_0^\pi u(t)\sin(2\lambda_n^{1/2}t)\int_0^t u(s)\sin(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt\right) \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi).
$$

Таким образом, $|I_4| \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$, и мы подтвердили справедливость оценки (38). Теорема 1.2 доказана. □

3.3. Случай граничных условий Неймана

Теорема 1.3.

Для собственных значений оператора $L_N = -d^2/dx^2 - q(x)$ с граничными условиями Неймана $y^{[1]}(0) = 0$, $y^{[1]}(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$, а $u(x) \in L_2$, выполнено:

$$\lambda_n^{1/2} = n - \frac{1}{\pi}v(\pi/2, \pi, n^2) + \rho(\lambda_n), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{40}$$

где $|\rho(\lambda_n)| \leq M\gamma^2(\pi/2, \pi, \lambda_n)$, причем выбор постоянной M зависит только от функции u.

Доказательство

Пусть функция $\Psi(x, \lambda)$ — решение уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda y$ с граничными условиями $\Psi^{[1]}(0, \lambda) = 0$ и $\Psi(0, \lambda) = 1$. Тогда уравнение $\Psi(\pi, \lambda) = 0$ опеределяет собственные значения оператора L. Выражая решения через функции Прюфера, получаем $\Psi(x, \lambda) = r(\pi/2, x, \lambda)\cos(\theta(\pi/2, x, \lambda))$. Значит, уравнение для собственных значений данной задачи имеет вид $\cos(\theta(\pi/2, \pi, \lambda)) = 0$. Далее, применив Лемму 1 при условии $c = \pi/2$, получим, что необходимо доказать оценку

$$|v(\pi/2, \pi, \lambda_n) - v(\pi/2, \pi, n^2)| \leq M\gamma^2(\pi/2, \pi, \lambda_n). \tag{41}$$

Рассмотрим подробнее левую часть неравенства (41). Как в Теореме 1.2, будем записывать $\gamma(\pi/2, \pi, \lambda_n)$ в виде $\gamma(\pi, \lambda_n)$.

$$\begin{aligned} v(\pi, \lambda_n) - v(\pi, n^2) = &-\int_0^\pi u(t)(\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2nt))dt + \\ &+ \frac{1}{2}(\lambda_n^{-1/2} - n^{-1})\left(\int_0^\pi u^2(t)dt + \int_0^\pi u^2(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt\right) + \\ &+ \frac{1}{2}n^{-1}\left(\int_0^\pi u^2(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt - \int_0^\pi u^2(t)\cos(2nt)dt\right) + \\ &+ 2\left(\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt - \right. \\ &\left. - \int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2nt)\sin(2ns)dsdt\right) \end{aligned} \tag{42}$$

Обозначим слагаемые из правой части (42) в порядке их очередности I_1, I_2, I_3, I_4 и рассмотрим их по отдельности. Аналогично Теореме 1.1 введем величину $\nu_n = \lambda_n^{1/2} - n$, для которой выполнено $|\nu_n| \leq M\gamma^2(\lambda_n, \pi)$ (это следует из (32)). Начнем анализ (42) с I_1, где преобразуем сумму синусов, применяя, как и раньше, разложение $\sin(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = 2\lambda_n^{1/2}t$:

$$
\begin{aligned}
&\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2nt) = \sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t - 2\nu_n t) = \\
=&\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)\cos(2\nu_n t) + \cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\nu_n t) = \\
=&\sin(2\lambda_n^{1/2}t) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)(1 - O(\nu_n^2)) + \cos(2\lambda_n^{1/2}t)(2\nu_n t + O(\nu_n^3)) = \\
=&2\nu_n t\cos(2\lambda_n^{1/2}t) + O(\nu_n^2)
\end{aligned}
$$

Подставим полученное в I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 = &\left|2\nu_n \int_0^\pi tu(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt + O(\nu_n^2)\right| = \left|2\nu_n\pi \int_0^\pi u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt\right. \\
&\left. - 2\nu_n \int_0^\pi \int_0^t u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt\right| + O(\nu_n^2) \le M|\nu_n||\gamma(\lambda_n,\pi)| \le M^2\gamma^2(\lambda_n,\pi).
\end{aligned}
$$

Далее докажем, что I_2 и I_3 по модулю не превосходят величины $M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$. Это выполняется, благодаря тому что $\lambda_n^{-1/2} - n^{-1} = O(n^{-2})$, $n^{-2} \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$ и $\cos(2\lambda_n^{1/2}t) - \cos(2nt) = O(\nu_n)$, $\nu_n n^{-1} \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$.

Переходим к оценке последнего слагаемого в правой части (42). Для этого воспользуемся равенством:

$$
\begin{aligned}
&\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s) - \cos(2nt)\sin(2ns) = \\
=&\cos(2\lambda_n^{1/2}t)(\sin(2\lambda_n^{1/2}s) - \sin(2ns)) + (\cos(2\lambda_n^{1/2}t) - \cos(2nt))\sin(2ns) = \\
=&2\nu_n s\cos(2\lambda_n^{1/2}t)\cos(2\lambda_n^{1/2}s) - \sin(2\lambda_n^{1/2}t)\sin(2\lambda_n^{1/2}s) + O(\nu_n^2)
\end{aligned}
$$

Из определения функции $\gamma(\lambda_n, x)$ после изменения порядка интегрирования получим:

$$
2\nu_n \left(\int_0^\pi u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t) \int_0^t u(s)\cos(2\lambda_n^{1/2}s)dsdt \right) \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi).
$$

То же верно для аналогичного интеграла с синусами. Значит, $|I_4| \le M\gamma^2(\lambda_n,\pi)$, и справедливость оценки (41) установлена. Теорема 1.3 доказана. □

3.4. Обобщенная теорема

Воспользуемся доказанным выше и результатами работы [39] и сформулируем теорему об асимптотиках в общем виде.

Теорема 1.4.

Для собственных значений оператора $L = -d^2/dx^2 - q(x)$, $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in L_2$, *выполнено:*

$$\lambda_n^{1/2} = m - \frac{1}{\pi} v(c, \pi, m^2) + \rho(\lambda_n), \tag{43}$$

где в случае граничных условий

- *Дирихле* $(y(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$ *:* $m \in \mathbb{N},\ c = 0$
- *Неймана* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$*:* $m \in \mathbb{N} \bigcup 0,\ c = \pi/2,$
- *Дирихле–Неймана* $(y(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$*:* $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N},\ c = 0,$
- *Неймана–Дирихле* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$*:* $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N},\ c = \pi/2,$

а $|\rho(\lambda_n)| \le M\gamma^2(c, \pi, \lambda_n)$.

Глава 2. Асимптотика собственных функций

1. Собственные и присоединенные функции

Продолжим исследование оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y \tag{44}$$

в пространстве $L_2[0,\pi]$ с потенциалом $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2[0,\pi]$ (производная понимается в смысле распределений).

В Главе 1 показано, что от дифференциального выражения (44) мы можем перейти к системе

$$\begin{aligned} &L_M y = L(y), \\ &D(L_M) = \{y|\ y, y^{[1]} \in W_1^1[0,\pi], L(y) \in L_2[0,\pi],\} \end{aligned}$$

где L_M — максимальный оператор, а $y^{[1]}(x) := y'(x) - u(x)y(x)$ — первая квазипроизводная. Обозначим через $w(x,\lambda)$ решение дифференциального уравнения $L(w) = \lambda w$ с начальными условиями $w(0,\lambda) = 0,\ w^{[1]}(0,\lambda) = 1$. Нули целой функции $w(\pi,\lambda)$ совпадают с собственными значениями оператора L. В силу теоремы о существовании и единственности, геометрическая кратность каждого собственного значения равна 1. В случае вещественного потенциала присоединенные функции отсутствуют, то есть все собственные значения являются простыми, но в общем случае, это не так. Обозначим через $\{\mu_k\}_1^\infty$ все нули функции $w(\pi,\lambda)$ без учета кратности, то есть $\mu_j = \mu_k$ только при $j = k$. Нумерацию будем вести в порядке возрастания модуля, а в случае совпадения модулей — по возрастанию аргумента, значения которого выбираются из интервала $(-\pi,\pi]$. Цепочкой из собственных и присоединенных функций, отвечающей собственному значению μ_k, называется система функций

$$\{y_k^0, y_k^1, ..., y_k^{p_k-1}\},$$

для которой

$$(L - \mu_k I)y_k^0 = 0,\ (L - \mu_k I)y_k^j = y_k^{j-1},\ j = 1, ..., p_k - 1.$$

Отметим, что в нашем случае геометрическая кратность собственных значений $= 1$, поэтому мы говорим только об одной цепочке, всегда предполагая, что ее длина максимальна.

Пусть μ_k — ноль функции $w(\pi, \lambda)$ кратности q_k. Заметим, что функции $w_\lambda^{(j)}(x, \lambda),\ j = 1, 2, ..., q_k - 1$ удовлетворяют дифференциальным выражениям $L(w_\lambda^{(j)}) = \lambda w_\lambda^{(j)} + w_\lambda^{(j-1)}$, причем $w_\lambda^{(j)}(0, \lambda) \equiv 0$. Кроме того $w_\lambda^{(j)}(\pi, \mu_k) = 0$, так как μ_k - это ноль кратности q_k. Получается, что $w_\lambda^{(j)}(x, \mu_k), j = 1, 2, ..., q_k - 1$ образуют цепочку из собственной и присоединенных функций, отвечающую собственному значению μ_k. Как и любая цепочка из собственной и присоединенных функций, эта система линейно независима, и значит порождает пространство размерности q_k. Осталось добавить (см. Наймарк [40], глава 1, пункт 3) , что эта цепочка является канонической, то есть имеет максимальную длину ($p_k = q_k$).

Нам будет удобно ввести и другую нумерацию собственных и присоединенных функций. Под системой собственных и присоединенных функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ мы будем далее понимать систему

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{ \frac{w_\lambda^{(j)}(\cdot, \mu_k)}{||w(\cdot, \mu_k)||_{L_2}} \}_{j=0}^{q_k - 1}.$$

Таким образом, $||y_n||_{L_2} = 1$, если y_n — собственная функция. Через $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ обозначим нули функции $w(\pi, \lambda)$ в порядке возрастания модуля с учетом кратности (в этом случае $Ly_n = \lambda_n y_n$ для любого $n \in N$).

Построим теперь биортогональную систему $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ к системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Прежде всего заметим, что при любом k система $\{z_k^j\}_{j=0}^{q_k-1}$, где $z_j^k(x) = \overline{w_\lambda^{(j)}(x, \mu_k)}$, является системой из собственных и присоединенных функций оператора $L^* = \frac{d^2}{dx^2} + \overline{q}$, отвечающей собственному значению $\overline{\mu_k}$. Покажем теперь, как с помощью конечных линейных комбинаций системы $\bigcup_{k=1}^\infty \{z_k^j\}_{j=0}^{q_k-1}$ построить биортогональную $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ к ней систему. Заметим, что если функция z лежит в корневом подпространстве оператора L^*, отвечающем собственному значению $\overline{\mu_l}$, а функция y — в корневом подпространстве оператора L, отвечающем собственному значению μ_k, где $k \neq l$, то функции y и z ортогональны. Действительно, для собствнных функций $\mu_k(y, z) = (Ly, z) = (y, L^* z) = \mu_l(y, z)$, то есть $(y, z) = 0$. Если теперь y — первая присоединенная функция, а z — собственная функция, то, учитывая то, что ортогональность собственных функций уже доказана, $\mu_k(y, z) = (Ly, z) = (y, L^* z) = \mu_l(y, z)$. Дальнейшее очевидно. Таким образом, достаточно построить биортогональную систему в каждом корневом подпространстве по отдельности. В случае простого собственного значения получим: $v_n(x) = \overline{y_n(x)}/(y_n(x), \overline{y_n(x)})$. Знаменатель здесь отличен от нуля, так как интегрированием по частям легко получить равенство $\int_0^\pi w^2(x, \mu_k)dx = w'_\lambda(\pi, \mu_k) w'_x(\pi, \mu_k)$.

2. Асимптотические формулы для собственных и присоединенных функций

Найдем в явном виде асимптотики системы собственных и присоединенных функций для решения нашей задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \tag{45}$$

Так же, как в Главе 1, мы подробно рассмотрим регулярные краевые условия и соответствующие им 4 оператора:

- L_D — порожденный выражением (44) и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$,
- L_{DN} — порожденный выражением (44) и граничными условиями Дирихле-Неймана $y(0) = y^{[1]}(\pi) = 0$,
- L_{ND} — порожденный выражением (44) и граничными условиями Неймана-Дирихле $y^{[1]}(0) = y(\pi) = 0$,
- L_N — порожденный выражением (44) и граничными условиями Неймана $y^{[1]}(0) = y^{[1]}(\pi) = 0$.

В Главе 1 показаны следующие свойства этих операторов, которые нам понадобятся в дальнейшем:

- Они фредгольмовы с индексами (0, 0) (а в случае вещественного потенциала самосопряжены и ограничены);
- Эти операторы имеют чисто дискретный спектр.

В статье Савчука [30] был подробно изучен случай оператора L_D. Рассмотрим по очереди остальные типы операторов, начиная со случая граничных условий Дирихле–Неймана.

Введем вспомогательные обозначения. Будем обозначать

$$\begin{aligned}v(c,x,\lambda) = &\int_0^x u(t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}t)dt + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)dt + \\ &+ 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}s)dsdt - \\ &- \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)dt,\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\gamma(c,\lambda,x) = &\left|\int_0^x u(t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}t)dt\right| + \left|\int_0^x u(t)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)dt\right| + \\ &+ 2\left|\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)\sin(2c+2\lambda^{1/2}s)dtds\right| + \\ &+ \frac{1}{2}\left|\lambda^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\cos(2c+2\lambda^{1/2}t)dt\right| + |\lambda|^{-1/2}||u||^2_{L_2} + ||v(c,x,\lambda)||_{L_2}.\end{aligned}$$

Приведем вспомогательные леммы, которые понадобятся нам при доказательстве основных утверждений. В Главе 1 было показано, что решение уравнения (45) можно выразить через функции $r(c,x,\lambda)$ и $\theta(c,x,\lambda)$, для которых выполняются равенства:

$$\theta'(x,\lambda) = \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}u^2(x)\sin^2\theta(x,\lambda) + u(x)\sin 2\theta(x,\lambda). \tag{47}$$

$$r'(x,\lambda) = -r(x,\lambda)\left[u(x)\cos 2\theta(x,\lambda) + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}u^2(x)\sin 2\theta(x,\lambda)\right]. \tag{48}$$

Также имеют место следующие леммы:

Лемма 1 ([39], §2)

Пусть $\alpha > 0$ - произвольное фиксированное число, а P_α - область, ограниченная параболой $|Im\ \sqrt{\lambda}| < \alpha$. Тогда существует число μ, зависящее только от $u(x)$ и α такое, что при любых $\lambda \in P_\alpha$, $Re\ \lambda > \mu$, уравнение (47) имеет единственное решение $\theta(c,x,\lambda)$, определенное при всех $0 \le x \le \pi$ и удовлетворяющее начальному условию $\theta(c,0,\lambda) = c$. Это решение допускает представление

$$\theta(c,x,\lambda) = c + \lambda^{1/2}x + v(c,x,\lambda) + \rho(c,x,\lambda),$$

где $|\rho(c,x,\lambda)| \le M\gamma^2(c,x,\lambda)$, $\lambda \in P_\alpha$, $Re\ \lambda > \mu$, причем выбор постоянной M зависит от функции u и α, но не зависит от c, x, λ.

Лемма 2 ([39], §2)

Пусть $\alpha > 0$ - произвольное фиксированное число, а P_α - область, ограниченная параболой $|Im\ \sqrt{\lambda}| < \alpha$. Пусть $\theta(c, x, \lambda)$ - решение уравнения (47) с начальным условием $\theta(0, \lambda) = c$. Тогда решение $r(c, x, \lambda)$ уравнения (48) с начальным условием $r(c, 0, \lambda) = 1$ допускает представление

$$
\begin{aligned}
&r(c, x, \lambda) = 1 - \int_0^x u(t) \cos(2c + 2\lambda^{1/2}) dt - \\
&- \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_0^x u^2(t) \sin(2c + 2\lambda^{1/2}) dt + \rho(c, x, \lambda), \lambda \in P_\alpha,\ Re\ \lambda > \mu,
\end{aligned}
\tag{49}
$$

где $|\rho(c, x, \lambda)| \leq M\gamma^2(c, x, \lambda)$, причем M и μ зависят только от u и α.

Переходим к непосредственному изучению поставленного вопроса.

2.1. Случай граничных условий Дирихле–Неймана

Теорема 2.1.

Рассмотрим оператор L_{DN}, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2$, и краевыми условиями Дирихле-Неймана $y(0) = 0$, $y^{[1]}(\pi) = 0$. Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ систему собственных и присоединенных функций оператора L, через $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональную систему (причем собственные функции мы нормируем условием $||y_n||_{L_2} = 1$). Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) = \sin(mx)\left(1+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt-\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\right)+\\
+\frac{1}{2m}\sin(mx)\Bigg(-\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt+\\
+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Bigg)+\\
+\cos(mx)\Bigg(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt+2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\\
-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt-\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\Bigg)+\\
+\frac{1}{2m}\cos(mx)\Bigg(\int_0^x u^2(t)dt-\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt-\\
-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\cos(2mt)dt\Bigg)+\rho(x,\lambda_n).
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Здесь и далее через $\rho(x,\lambda_n)$ будем обозначать функции, удовлетворяющие оценке $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(x,\lambda_n)|\le C$, $m=n-1/2, n\in\mathbb{N}$; $u_R(x)$ и $u_I(x)$ обозначают вещественную и мнимую части функции $u(x)$ соответственно.

Соответствующие функции биортогональной системы имеют вид:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\; v_n(x) =$$

$$= \sin(mx)\left(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R(t) + 2iu_I(t))\cos(2mt)dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right) +$$

$$+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t) + 4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right) +$$

$$+ \cos(mx)\left(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt + 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \right.$$

$$\left. - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) +$$

$$+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt - \right.$$

$$\left. - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \rho(x, \lambda_n). \tag{51}$$

Доказательство

Согласно замене Прюфера (подробное описание см. Глава 1), собственные функции имеют вид

$$y_n(x, \lambda_n) = r(c, x, \lambda_n)\sin\theta(c, x, \lambda_n). \tag{52}$$

Заметим, что присоединенные функции при достаточно больших n отсутствуют, так как собственные значения просты (см. Замечание 1.2 Главы 1). Также отметим, что собственные функции, заданные формулой (52), не нормированы. Подставим в (52) асимптотические формулы для функций $r(c, x, \lambda)$ и $\theta(c, x, \lambda)$, где согласно Леммам 1 и 2 при $c = 0$,

$$r(0, x, \lambda_n) = 1 - \int_0^x u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt - \frac{1}{2}\lambda_n^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\sin(2\lambda_n^{1/2}t)dt + \rho(0, x, \lambda_n),$$

$$\theta(0, x, \lambda_n) = \lambda_n^{1/2}x + v(0, x, \lambda_n) + \rho(0, x, \lambda_n), \quad |\rho(0, x, \lambda_n)| \le M\gamma^2(0, x, \lambda_n).$$

Дальше для краткости будем обозначать $\theta(0, x, \lambda_n) = \theta(x, \lambda_n)$, $r(0, x, \lambda_n) = r(x, \lambda_n)$, $v(0, x, \lambda) = v(x, \lambda)$, $\rho(0, x, \lambda_n) = \rho(x, \lambda_n)$, $\gamma(0, x, \lambda_n) = \gamma(x, \lambda_n)$. Также введем величину $\mu_n = (-1/\pi)v(\pi, m^2)$. Теперь воспользуемся доказанной в Главе 1 теоремой о собственных значениях (см. Глава 1, Теорема 1.1) и преобразуем $\sin(\theta(x, \lambda_n))$.

$$\sin\theta(x, \lambda_n) = \sin\left(\lambda_n^{1/2}x + v(x, \lambda_n) + \rho(x, \lambda_n)\right)$$

Здесь для продолжения цепочки равенств будем использовать разложение в ряд Тейлора функций $\cos x$ и $\sin x$.

$$\begin{aligned}
&\sin(\lambda_n^{1/2}x + v(x, \lambda_n) + \rho(x, \lambda_n)) = \sin\left(\mu_n x + mx + v(x, \lambda_n) + \rho(x, \lambda_n)\right) = \\
&= \sin(mx)\cos(\mu_n x + v(x, \lambda_n) + \rho(x, \lambda_n)) + \\
&\quad + \cos(mx)\sin(\mu_n x + v(x, \lambda_n) + \rho(x, \lambda_n)) = \\
&= \sin(mx)(1 + (\mu_n x + v(x, \lambda_n) + \rho(x, \lambda_n))^2) + \\
&\quad + \cos(mx)(\mu_n x + v(x, \lambda_n) + \rho(x, \lambda_n)) + \rho(x, \lambda_n) = \\
&= \sin(mx) + \cos(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt + \frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)dt + \\
&\quad + 2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&\quad - \frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt - \\
&\quad - \frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt - \\
&\quad - \frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt + \\
&\quad + \frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt + \rho(x, \lambda_n).
\end{aligned}$$

Подставим полученное в выражения для функций $y_n(x)$.

$$y_n(x,\lambda_n) = r(x,\lambda_n)\sin(\theta(x,\lambda_n)) = \sin(mx) + \cos(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt +$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)dt + 2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt -$$
$$-\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt -$$
$$-\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt -$$
$$-\frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt +$$
$$+\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt - \sin(mx)\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt -$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n), \tag{53}$$

при этом $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum_{n=1}^\infty |\rho(x,\lambda_n)| \le C$.

Произведем нормировку собственных функций, для этого полученное выражение необходимо домножить на $\left(\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx\right)^{-1/2}$ (напомним, что функция $q(x)$ предполагается комплекснозначной). Будем выделять вещественную и мнимую часть функции $u(x)$, то есть обозначим $u(x) = u_R(x) + iu_I(x)$. Тогда сопряженная функция выглядит следующим образом: $\overline{u(x)} = u_R(x) - iu_I(x)$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \int_0^{\pi} \Big[&\sin(mx) + \cos(mx)\int_0^x (u_R(t)+iu_I(t))\sin(2mt)dt + \\
&+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))dt + \\
&+2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t)+iu_I(t))(u_R(s)+iu_I(s))\cdot \\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&-\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt - \\
&-\frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi} (u_R(t)+iu_I(t))\sin(2mt)dt - \\
&-\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi} (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))dt - \\
&-\frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi}\int_0^t (u_R(t)+iu_I(t))(u_R(s)+iu_I(s))\cdot \\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt + \\
&+\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi} (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt - \\
&-\sin(mx)\int_0^x (u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)dt - \\
&-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n)\Big]\cdot \\
&\cdot\Big[\sin(mx) + \cos(mx)\int_0^x (u_R(t)-iu_I(t))\sin(2mt)dt + \\
&+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))dt + \\
&+2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t)-iu_I(t))(u_R(s)-iu_I(s))\cdot \\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&-\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt - \\
&-\frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi} (u_R(t)-iu_I(t))\sin(2mt)dt - \\
&-\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi} (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))dt - \\
&-\frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi}\int_0^t (u_R(t)-iu_I(t))(u_R(s)-iu_I(s))\cdot \\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^{\pi}(u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt-$$
$$-\sin(mx)\int_0^{x}(u_R(t)-iu_I(t))\cos(2mt)dt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^{x}(u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt+\rho(x,\lambda_n)\big]dx$$

Выделим некоторые типы слагаемых, которые получаются при перемножении y_n и $\overline{y_n}$, и отметим, почему каждый из них образует последовательность, лежащую в l_1.

1) $\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$,

изначально $u(t)\in L_2$, значит ее коэффициенты Фурье образуют последовательность из пространства l_2, тогда в квадрате они принадлежат пространству l_1;

2) $\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$,

аналогично пункту 1) интегральный сомножитель является последовательностью из пространства l_2, при домножении его на $1/m$, получаем последовательность, принадлежащую l_1;

3) $\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{t} u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt$,

последовательность, образуемая двойным интегралом, из пространства l_2, а сомножитель $1/m$ переводит произведение в пространство l_1;

4)$\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi} u^2(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$,

второй интеграл образует последовательность, принадлежащую l_2, $u(t)\in L_2$, следовательно, $u^2(t)\in L_1$ и значит ее коэффициенты Фурье убывают; перемножаем последовательности $\{\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt\}$ и $\{1/m\}$ и результирующая последовательность будет из пространства l_1;

5) $\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi} u^2(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$, попадает в остаток аналогично пункту 4);

6) все интегралы с сомножителем $1/m^2$, а также всевозмож-

ные произведения $\int\limits_0^\pi u^2(t)dt$, $\int\limits_0^\pi u^2(t)\sin(2mt)dt$, $\int\limits_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt$, $\int\limits_0^\pi\int\limits_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt$, где в формулах встречаются три знака интеграла образуют последовательности, лежащие в пространстве l_1;

7) все шесть пунктов рассматриваются аналогично в случае, когда появляются интегралы с $\overline{u(x)}$.

С учетом приведенных рассуждений и того, что при сложении слагаемых, составляющих $y_n(x)$ и $\overline{y_n(x)}$, с одинаковыми коэффициентами мнимые части будут сокращаться, продолжим вычисление нормировочного сомножителя, приводя сразу подобные члены.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \int_0^\pi \sin^2(mx)dx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x u_R(t)\sin(2mt)dtdx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t))dtdx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cdot\\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)dtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u_R(t)\sin(2mt)dtdx- \qquad (54)\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))dtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cdot\\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdtdx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)dtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin^2(mx)\int_0^x u_R(t)\cos(2mt)dtdx-\\
&-2\int_0^\pi \frac{1}{2m}\sin^2(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dtdx+\rho(\lambda_n),
\end{aligned}
$$

где $\sum_{n=1}^\infty |\rho(\lambda_n)| \le C$.

При подсчете данного сомножителя важно помнить, что m не является целым числом, а $m = n-1/2$, где n — целое. Уменьшим количество интегралов в каждом слагаемом, пользуясь следующими равенствами:

$$
\int_0^\pi \sin^2(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos(2mx))dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2mx)}{4m}\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}; \qquad (55)
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x F(t)dtdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2mx)\int_0^x F(t)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \sin(2mx)dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\frac{\cos(2mx)}{2m}\bigg|_t^\pi dt = \\
&= \frac{1}{4m}\int_0^\pi F(t)(1+\cos(2mt))dt;
\end{aligned} \tag{56}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2mx)\int_0^x\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \sin(2mx)\int_0^t F(s)dsdxdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\int_t^\pi \sin(2mx)dxdsdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\frac{-\cos(2mx)}{2m}\bigg|_t^\pi dsdt = \\
&= \frac{1}{4m}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)(1+\cos(2mt))dsdt;
\end{aligned} \tag{57}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi x\sin(mx)\cos(mx)\int_0^\pi F(t)dtdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin(2mx)\int_0^\pi F(t)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_0^\pi x\sin(2mx)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\Big(\frac{-x\cos(2mx)}{2m}\bigg|_0^\pi + \\
&+ \frac{1}{2m}\int_0^\pi \cos(2mx)dx\Big)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\Big(\frac{\pi}{2m}+\frac{1}{2m}\frac{\sin(2mx)}{2m}\bigg|_0^\pi\Big)dt = \\
&= \frac{\pi}{4m}\int_0^\pi F(t)dt;
\end{aligned} \tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi x\sin(mx)\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\int_0^\pi x\sin(2mx)dxdsdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\Big(\frac{-x\cos(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2m}\int_0^\pi \cos(2mx)dx\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\Big(\frac{\pi}{2m} + \frac{1}{2m}\frac{\sin(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi\Big)dsdt = \frac{\pi}{4m}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)dsdt;
\end{aligned}
\tag{59}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^2(mx)\int_0^x F(t)dtdx = \int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \sin^2(mx)dxdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi (1-\cos(2mx))dxdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)[(\pi - t) - \int_t^\pi \cos(2mx)dx]dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)[(\pi - t) - \frac{\sin(2mx)}{2m}\Big|_t^\pi]dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)(\pi - t)dt - \frac{1}{4m}\int_0^\pi F(t)\sin(2mt)dt;
\end{aligned}
\tag{60}
$$

где $F(t)$ и $F(s)$ — соответствующие подынтегральные функции в правой части (54).

Пользуясь приведенными равенствами (55) — (60) продолжим преобразования:

$$\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\sin{(2mt)}(1+\cos(2mt))dt +$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))(1+\cos(2mt))dt +$$
$$+\frac{1}{m}\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cos(2mt)\sin(2ms)(1+\cos(2mt))dsdt -$$
$$-\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)(1+\cos(2mt))dt - \frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\sin{(2mt)}dt -$$
$$-\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))dt -$$
$$-\frac{1}{m}\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt +$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)dt -$$
$$-\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt + \frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)\sin(2mt)dt -$$
$$-\frac{1}{2m}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt +$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin^2(2mt)dt + \rho(\lambda_n) \tag{61}$$

Легко заметить, что большинство из слагаемых в правой части (61) образуют последовательность, лежащую в l_1 (что показано выше). Таким образом, окончательно нормировочный сомножитель имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi (\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt -\\ -\frac{1}{2m}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin{(2mt)}dt + \rho(\lambda_n) =\\ = \frac{\pi}{2}\biggl(1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt -\\ -\frac{1}{\pi m}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\biggr) + \rho(\lambda_n),\end{aligned}$$

где $\sum_{n=1}^\infty |\rho(\lambda_n)| \le C$.

Возведем полученное выражение для нормировки собственных функций в степень $-1/2$:

$$(\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx)^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigg(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt + \\ + \frac{1}{2\pi m}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Bigg) + \rho(\lambda_n), \tag{62}$$

Теперь перемножим соотношения (53) и (62) и получим асимптотические формулы для нормированных собственных функций:

$$y_n(x,\lambda_n) = \big[\sin(mx) + \cos(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt + \\ + \frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)dt + \\ + 2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\ - \frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt - \\ - \frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt - \\ - \frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt + \\ + \frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt - \sin(mx)\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt - \\ - \frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n)\big]\cdot \\ \cdot\big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigg(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt + \\ \frac{1}{2\pi m}\int_0^\pi(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Bigg) + \rho(\lambda_n)\big],$$

Отметим, что при перемножении слагаемых из правой части (53) на второе и третье слагаемое правой части (62) практически все (кроме первого) образуют последовательности из l_1, которые пойдут в остаток. В результате после раскрытия скобок и приведения подобных получим равенство (50).

Переходим к вычислению функций биортогональной системы. Как показано выше, они задаются равенством $v_n(x) = \overline{y_n(x)}\big((y_n(x), \overline{y_n(x)})\big)^{-1}$. Второй сомножитель можно записать в виде $(y_n(x), \overline{y_n(x)}) = \int_0^\pi y_n^2(x)dx$. Учитывая перечисленные выше типы слагаемых, которые входят в остаточную последовательность, получим, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2}\int_0^\pi y_n^2(x)dx = \\
&\qquad = \int_0^\pi \Big[\sin(mx)\bigg(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt - \\
&\qquad - \int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\bigg) + \\
&\qquad + \frac{1}{2m}\sin(mx)\bigg(-\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt + \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\bigg) + \\
&\qquad + \cos(mx)\bigg(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt + \\
&\qquad + 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&\qquad - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\bigg) + \\
&\qquad + \frac{1}{2m}\cos(mx)\bigg(\int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \\
&\qquad - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt\bigg) + \rho(\lambda_n)\Big]^2 dx
\end{aligned}
$$

Рассмотрим подробнее слагаемые с синусами, так как слагаемые с косинусами пойдут в остаток. Будем пользоваться следующими равенствами:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^2(mx)\int_0^x (u_R(t) + iu_I(t))\cos(2mt)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_R(t) + iu_I(t))\cos(2mt)(\pi - t)dt - \\
&- \frac{1}{4m}\int_0^\pi (u_R(t) + iu_I(t))\cos(2mt)\sin(2mt)dt;
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(mx)\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)dtdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt;$$

$$\int_0^\pi \sin^2(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dtdx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt -$$
$$- \frac{1}{4m}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin^2(2mt)dt;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dtdx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt.$$

В результате получим, что

$$\int_0^\pi y_n^2(x)dx = 1 - \frac{2i}{\pi}\int_0^\pi u_I(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt -$$
$$- \frac{2i}{\pi m}\int_0^\pi (\pi-t)u_R(t)u_I(t)\sin(2mt)dt + \rho(\lambda_n) \tag{63}$$

Остается последний шаг: возвести полученный результат в степень (-1) и перемножить составные части

$$
\begin{aligned}
&v_n(x) = \overline{y_n(x)}\big((y_n(x), \overline{y_n(x)})\big)^{-1} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big[\sin(mx)\left(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt - \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right) + \\
&+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\Bigg(-\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt + \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Bigg) + \\
&+ \cos(mx)\Bigg(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt + 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&- \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\Bigg) + \\
&+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\Bigg(\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt - \\
&- \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\Bigg) + \rho(x,\lambda_n)\big]\cdot \\
&\cdot\big[1 + \frac{2i}{\pi}\int_0^\pi u_I(t)\cos(2mt)(\pi - t)dt + \frac{2i}{\pi m}(\pi - t)u_R(t)u_I(t)\sin(2mt)dt + \rho(\lambda_n)\big]
\end{aligned}
$$

Откуда и получим формулу (51). Теорема 2.1 доказана. □

2.2. Случай граничных условий Неймана–Дирихле

Теорема 2.2.

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2$, и краевыми условиями Неймана–Дирихле $y^{[1]}(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ систему собственных и присоединенных функций оператора L, через $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — биортогональную систему (причем собственные функции мы нормируем условием

$||y_n||_{L_2} = 1$). *Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) = \cos(mx)\biggl(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt +$$
$$+ \int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\biggr) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\biggl(\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\biggr) +$$
$$+ \sin(mx)\biggl(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt -$$
$$- \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\biggr) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\biggl(-\int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt +$$
$$+ \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \rho(x, \lambda_n). \tag{64}$$

Здесь и далее через $\rho(x, \lambda_n)$ *будем обозначать функции, удовлетворяющие оценке* $\sup\limits_{0 \le x \le \pi} \sum_{n=1}^\infty |\rho(x, \lambda_n)| \le C$, $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$; $u_R(x)$ *и* $u_I(x)$ *обозначают вещественную и мнимую части функции* $u(x)$ *соответственно.*

Соответствующие функции биортогональной системы имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = \\
= \cos(mx)\left(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R(t) + 2iu_I(t))\cos(2mt)dt + \right.\\
\left. + \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right) + \\
+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt - \right.\\
\left. - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t) + 4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right) + \\
+ \sin(mx)\left(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - \right.\\
- 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
\left. - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) + \\
+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt + \right.\\
\left. + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \rho(x,\lambda_n).
\end{gathered}
\tag{65}
$$

Доказательство

Для представления собственных и присоединенных функций будем использовать формулу

$$y_n(x,\lambda_n) = r(c,x,\lambda_n)\sin\theta(c,x,\lambda_n), \tag{66}$$

справедливость которой для данной задачи показана во введении ко второй главе. Подставим в (66) асимптотические формулы для функций $r(c,x,\lambda)$ и $\theta(c,x,\lambda)$, в которых, согласно Леммам 1 и 2, при $c = \pi/2$,

$$
\begin{aligned}
&r(\pi/2,x,\lambda_n) = 1 + \int_0^x u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt + \\
&+\frac{1}{2}\lambda_n^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\sin(2\lambda_n^{1/2}t)dt + \rho(\pi/2,x,\lambda_n), \\
&\theta(\pi/2,x,\lambda_n) = \lambda_n^{1/2}x + v(\pi/2,x,\lambda_n) + \rho(\pi/2,x,\lambda_n), \\
&|\rho(\pi/2,x,\lambda_n)| \le M\gamma^2(\pi/2,x,\lambda_n).
\end{aligned}
\tag{67}
$$

При доказательстве этой теоремы как и ранее будем обозначать $\rho(\pi/2,x,\lambda_n) = \rho(x,\lambda_n)$, $\gamma(\pi/2,x,\lambda_n) = \gamma(x,\lambda_n)$, $\mu_n = (-1/\pi)v(\pi/2,\pi,m^2)$, а $m = n - 1/2$.

Применим тригонометрическое тождество $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ и воспользуемся асимптотической формулой для собственных значений, выведенной для случая краевых условий Неймана-Дирихле в Главе 1. Получим, что

$$
\begin{aligned}
&\sin(\theta(\pi/2,x,\lambda_n)) = \cos(\lambda_n^{1/2}x + v(\pi/2,x,\lambda_n) + \rho(x,\lambda_n)) = \\
&= \cos(\mu_n x + mx + v(x,\lambda_n) + \rho(x,\lambda_n)) = \\
&= \cos(mx)\cos(\mu_n x + v(x,\lambda_n) + \rho(x,\lambda_n)) - \\
&- \sin(mx)\sin(\mu_n x + v(x,\lambda_n) + \rho(x,\lambda_n)) = \\
&= \cos(mx)(1 + (\mu_n x + v(\pi/2,x,\lambda_n) + \rho(x,\lambda_n))^2) - \\
&- \sin(mx)(\mu_n x + v(\pi/2,x,\lambda_n) + \rho(x,\lambda_n)) + \rho(x,\lambda_n) = \\
&= \cos(mx) + \sin(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt - \frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)dt - \\
&- 2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&- \frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt + \\
&+ \frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt + \\
&+ \frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt + \\
&+ \frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n).
\end{aligned}
\tag{68}
$$

В результате, с учетом (67) и (68), выражение для функций $y_n(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{aligned}
y_n(x,\lambda_n) &= r(\pi/2,x,\lambda_n)\sin(\theta(\pi/2,x,\lambda_n)) = \cos(mx)+\\
&+\sin(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt-\\
&-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)dt-\\
&-2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\\
&-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt-\frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt+\\
&+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt+\\
&+\frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+\\
&+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt+\cos(mx)\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt+\\
&+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt+\rho(x,\lambda_n),
\end{aligned}
\tag{69}
$$

при этом $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum_{n=1}^\infty|\rho(x,\lambda_n)|\le C$ в силу Замечания 1 (см. Глава 1).

Произведем нормировку собственных функций, для этого полученную формулу (69) необходимо домножить на $\left(\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx\right)^{-1/2}$. Вычислим последнее выражение, выделив вещественную и мнимую части функции $u(x)$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \int_0^\pi & \Big[\cos(mx) + \sin(mx)\int_0^x (u_R(t)+iu_I(t))\sin(2mt)dt- \\
& -\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))dt- \\
& -2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t)+iu_I(t))(u_R(s)+iu_I(s))\cdot \\
& \cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt- \\
& -\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt- \\
& -\frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R(t)+iu_I(t))\sin(2mt)dt+ \\
& +\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))dt+ \\
& +\frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)+iu_I(t))(u_R(s)+iu_I(s))\cdot \\
& \cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+ \\
& +\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt+ \\
& +\cos(mx)\int_0^x (u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)dt+ \\
& +\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt+\rho(x,\lambda_n)\Big]\cdot \\
& \cdot\Big[\cos(mx) + \sin(mx)\int_0^x (u_R(t)-iu_I(t))\sin(2mt)dt- \\
& -\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))dt- \\
& -2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t)-iu_I(t))(u_R(s)-iu_I(s))\cdot \\
& \cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt- \\
& -\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt- \\
& -\frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R(t)-iu_I(t))\sin(2mt)dt+ \\
& +\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))dt+ \\
& +\frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)-iu_I(t))(u_R(s)-iu_I(s))\cdot \\
& \cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^{\pi}\left(u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t)\right)\cos(2mt)dt+$$
$$+\cos(mx)\int_0^{x}\left(u_R(t)-iu_I(t)\right)\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^{x}\left(u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t)\right)\sin(2mt)dt+\rho(x,\lambda_n)\big]dx$$

Здесь можно выделить те же 7 типов слагаемых, что и при доказательстве Теоремы 2.1, которые образуют последовательности, лежащие в l_1:

1) $\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$;

2) $\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$;

3) $\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{t} u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt$;

4) $\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi} u^2(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$;

5) $\frac{1}{m}\int\limits_0^{\pi} u^2(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$;

6) все интегралы с сомножителем $1/m^2$, а также всевозможные произведения $\int\limits_0^{\pi} u^2(t)dt$, $\int\limits_0^{\pi} u^2(t)\sin(2mt)dt$, $\int\limits_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt$, $\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{t} u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt$, где в формулах встречаются три знака интеграла;

7) все шесть пунктов в случае, когда появляются интегралы с $\overline{u(x)}$.

Продолжим вычисление нормировочного сомножителя, приводя подобные слагаемые и, по возможности, аккумулируя остаточные последовательности в $\{\rho(x,\lambda_n)\}\in l_1$.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \int_0^\pi \cos^2(mx)dx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x u_R(t)\sin{(2mt)}dtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t))dtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t(u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cdot\\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)dtdx-\\
&-2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u_R(t)\sin{(2mt)}dtdx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))dtdx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t(u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cdot\\
&\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdtdx+\\
&+2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)dtdx+\\
&+2\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^x u_R(t)\cos(2mt)dtdx+\\
&+2\int_0^\pi \frac{1}{2m}\cos^2(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin{(2mt)}dtdx+\rho(\lambda_n)
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Снова подчеркнем, что m не является целым числом, а $m = n - 1/2$, где n — целое. Уменьшим количество интегралов в каждом слагаемом, пользуясь следующими равенствами:

$$
\int_0^\pi \cos^2(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi(1+\cos(2mx))dx = \frac{\pi}{2} + \left.\frac{\sin(2mx)}{4m}\right|_0^\pi = \frac{\pi}{2}; \tag{71}
$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x F(t)dtdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2mx)\int_0^x F(t)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \sin(2mx)dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\frac{\cos(2mx)}{2m}\bigg|_t^\pi dt = \\
&= \frac{1}{4m}\int_0^\pi F(t)(1+\cos(2mt))dt;
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2mx)\int_0^x\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \sin(2mx)\int_0^t F(s)dsdxdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\int_t^\pi \sin(2mx)dxdsdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\frac{-\cos(2mx)}{2m}\bigg|_t^\pi dsdt = \\
&= \frac{1}{4m}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)(1+\cos(2mt))dsdt;
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi x\sin(mx)\cos(mx)\int_0^\pi F(t)dtdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin(2mx)\int_0^\pi F(t)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_0^\pi x\sin(2mx)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\Big(\frac{-x\cos(2mx)}{2m}\bigg|_0^\pi + \\
&+ \frac{1}{2m}\int_0^\pi \cos(2mx)dx\Big)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\Big(\frac{\pi}{2m}+\frac{1}{2m}\frac{\sin(2mx)}{2m}\bigg|_0^\pi\Big)dt = \\
&= \frac{\pi}{4m}\int_0^\pi F(t)dt;
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\int_0^\pi x\sin(mx)\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\int_0^\pi x\sin(2mx)dxdsdt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\Big(\frac{-x\cos(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2m}\int_0^\pi \cos(2mx)dx\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\Big(\frac{\pi}{2m} + \frac{1}{2m}\frac{\sin(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi\Big)dsdt = \frac{\pi}{4m}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)dsdt; \tag{75}$$

$$\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^x F(t)dtdx = \int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \cos^2(mx)dxdt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi (1+\cos(2mx))dxdt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)[(\pi - t) + \int_t^\pi \cos(2mx)dx]dt = \tag{76}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)[(\pi - t) + \frac{\sin(2mx)}{2m}\Big|_t^\pi]dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)(\pi - t)dt + \frac{1}{4m}\int_0^\pi F(t)\sin(2mt)dt;$$

где $F(t)$ и $F(s)$ — соответствующие подынтегральные функции в правой части (70).

Пользуясь приведенными равенствами (71) — (76) продолжим вычисление

(70):

$$\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\sin(2mt)(1+\cos(2mt))dt-$$
$$-\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))(1+\cos(2mt))dt-$$
$$-\frac{1}{m}\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cos(2mt)\sin(2ms)(1+\cos(2mt))dsdt-$$
$$-\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)(1+\cos(2mt))dt-$$
$$-\frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\sin(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))dt+$$
$$+\frac{1}{m}\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)dt+$$
$$+\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt + \frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)\sin(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2m}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin^2(2mt)dt + \rho(\lambda_n) \tag{77}$$

Большая часть слагаемых (77) образуют последовательность, лежащую в l_1 (аналогично тому, как показано в доказательстве Теоремы 2.1). В результате, получим следующий вид нормировочного сомножителя:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx &= \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi (\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt+\\ &+\frac{1}{2m}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt + \rho(\lambda_n) =\\ &= \frac{\pi}{2}\Bigg(1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt+\\ &+\frac{1}{\pi m}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Bigg) + \rho(\lambda_n),\end{aligned}$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho(\lambda_n)| \le C$.

Возведем полученное выражение в степень $(-1/2)$:

$$\Big(\int_0^{\pi} y_n(x)\overline{y_n(x)}dx\Big)^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bigg(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt - \\ - \frac{1}{2\pi m}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\bigg) + \rho(\lambda_n), \tag{78}$$

Теперь перемножим соотношения (69) и (78). Получим асимптотическую формулу для нормированных собственных функций:

$$y_n(x,\lambda_n) = \big[\cos(mx) + \sin(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt - \\ - \frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)dt - 2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\ - \frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt + \\ + \frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^{\pi} u^2(t)dt + \\ + \frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^{\pi}\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt + \\ + \frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^{\pi} u^2(t)\cos(2mt)dt + \cos(mx)\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt + \\ + \frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n)\big]\cdot \\ \cdot\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bigg(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt - \\ - \frac{1}{2\pi m}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\bigg) + \rho(\lambda_n)\Big],$$

Отметим, что при перемножении слагаемых правой части (69) на второе и третье слагаемое правой части (78) почти все (кроме первого) образуют последовательности из l_1, которые пойдут в остаток. В результате после раскрытия скобок и приведения подобных получим равенство (64).

Переходим к вычислению функций биортогональной системы. Как мы знаем, они задаются равенством $v_n(x) = \overline{y_n(x)}\big((y_n(x), \overline{y_n(x)})\big)^{-1}$. Второй сомножитель можно записать в виде $(y_n(x), \overline{y_n(x)}) = \int_0^{\pi} y_n^2(x)dx$. Учитывая перечисленные выше типы слагаемых, которые входят в остаточную последовательность, получим, что

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi y_n^2(x)dx = \cos(mx)\Bigg(1-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt+$$
$$+\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\Bigg(\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Bigg)+$$
$$+\sin(mx)\Bigg(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt-2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt+\frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{2m}\sin(mx)\Bigg(-\int_0^x u^2(t)dt-\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt\Bigg)+\rho(\lambda_n)$$

Теперь обратим внимание на слагаемые с косинусами, так как слагаемые с синусами пойдут в остаток. Будем пользоваться следующими равенствами:

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^x (u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)dtdx=\\&=\frac{1}{2}\int_0^\pi (u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)(\pi-t)dt+\\&+\frac{1}{4m}\int_0^\pi (u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)\sin(2mt)dt;\end{aligned}\tag{79}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)dtdx=\frac{1}{2}\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt;\tag{80}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dtdx=\\&=\frac{1}{2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt+\\&+\frac{1}{4m}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin^2(2mt)dt;\end{aligned}\tag{81}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(mx)\int_0^{\pi}(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt.
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Из (79) — (82) следует, что

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} y_n^2(x)dx = 1 + \frac{2i}{\pi}\int_0^{\pi} u_I(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt + \\
+ \frac{2i}{\pi m}\int_0^{\pi}(\pi-t)u_R(t)u_I(t)\sin(2mt)dt + \rho(\lambda_n)
\end{aligned}
$$

Остается последний шаг: возвести полученный результат в степень (-1) и перемножить составные части

$$
\begin{aligned}
&v_n(x) = \overline{y_n(x)}\big((y_n(x), \overline{y_n(x)})\big)^{-1} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big[\cos(mx)\left(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt + \int_0^{x}\overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right) + \\
&+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^{x}\overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\right) + \\
&+ \sin(mx)\left(\int_0^{x}\overline{u}(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^{x}\int_0^{t}\overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \right.\\
&\left. - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t}\overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) + \\
&+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^{x}\overline{u}^2(t)dt - \int_0^{x}\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt + \right.\\
&\left. + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \rho(x,\lambda_n)\big] \\
&\big[1 - \frac{2i}{\pi}\int_0^{\pi}u_I(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt - \\
&- \frac{2i}{\pi m}\int_0^{\pi}(\pi-t)u_R(t)u_I(t)\sin(2mt)dt + \rho(\lambda_n)\big]
\end{aligned}
$$

Откуда и получим формулу (65). Теорема 2.2 доказана. □

2.3. Случай граничных условий Неймана

Теорема 2.3.

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2$, и краевыми условиями Неймана $y^{[1]}(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0$. Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ систему собственных и присоединенных функций оператора L, через $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональную систему (причем собственные функции мы нормируем условием $||y_n||_{L_2} = 1$). Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) &= \cos(mx)\biggl(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt + \\
&+ \int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \\
&+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\biggl(\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt - \\
&- \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\biggr) + \\
&+ \sin(mx)\biggl(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&- \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\biggr) + \\
&+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\biggl(-\int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt + \\
&+ \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\cos(2mt)dt\biggr) + \rho(x, \lambda_n).
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Здесь и далее через $\rho(x, \lambda_n)$ будем обозначать функции, удовлетворяющие оценке $\sup\limits_{0 \le x \le \pi} \sum_{n=1}^{\infty} |\rho(x, \lambda_n)| \le C$, $m \in \mathbb{N}$; $u_R(x)$ и $u_I(x)$ обозначают вещественную и мнимую части функции $u(x)$ соответственно.

Соответствующие функции биортогональной системы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = \\
&\quad = \cos(mx)\left(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R(t) + 2iu_I(t))\cos(2mt)dt + \right.\\
&\quad \left. + \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt - \right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t) + 4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right) + \\
&\quad + \sin(mx)\left(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \right.\\
&\quad \left. - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt + \right.\\
&\quad \left. + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \rho(x, \lambda_n).
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Доказательство

Отметим, что при нахождении собственных функций для граничных условий Неймана главный член асимптотик для собственных значений является целым числом (см. Глава 1, Теорема 1.3), поэтому в наших расчетах в этой теореме m — целое.

Для вычисления собственных и присоединенных функций будем использовать формулу

$$y_n(x, \lambda_n) = r(c, x, \lambda_n)\sin\theta(c, x, \lambda_n), \tag{85}$$

Подставим в (85) асимптотические формулы для функций $r(c, x, \lambda)$ и

$\theta(c,x,\lambda)$, где, согласно Леммам 1 и 2, при $c=\pi/2$,

$$\begin{aligned}
&r(\pi/2,x,\lambda_n)=1+\int_0^x u(t)\cos(2\lambda_n^{1/2}t)dt+\\
&+\frac{1}{2}\lambda_n^{-1/2}\int_0^x u^2(t)\sin(2\lambda_n^{1/2}t)dt+\rho(\pi/2,x,\lambda_n),\\
&\theta(\pi/2,x,\lambda_n)=\lambda_n^{1/2}x+v(\pi/2,x,\lambda_n)+\rho(\pi/2,x,\lambda_n),\\
&|\rho(\pi/2,x,\lambda_n)|\le M\gamma^2(\pi/2,x,\lambda_n).
\end{aligned}\tag{86}$$

При доказательстве для краткости обозначим $\rho(\pi/2,x,\lambda_n)=\rho(x,\lambda_n)$, $\gamma(\pi/2,x,\lambda_n)=\gamma(x,\lambda_n)$, $\mu_n=(-1/\pi)v(\pi/2,\pi,m^2)$, а $m=n-1/2$.

Применяя тригонометрическое тождество $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$ и используя асимптотическую формулу для собственных значений, полученную для граничных условий Неймана в Главе 1, можно вывести, что

$$\begin{aligned}
&\sin(\theta(\pi/2,x,\lambda_n))=\cos(\lambda_n^{1/2}x+v(\pi/2,x,\lambda_n)+\rho(x,\lambda_n))=\\
&\quad=\cos(\mu_n x+mx+v(x,\lambda_n)+\rho(x,\lambda_n))=\\
&\quad=\cos(mx)\cos(\mu_n x+v(x,\lambda_n)+\rho(x,\lambda_n))-\\
&\quad-\sin(mx)\sin(\mu_n x+v(x,\lambda_n)+\rho(x,\lambda_n))=\\
&\quad=\cos(mx)(1+(\mu_n x+v(\pi/2,x,\lambda_n)+\rho(x,\lambda_n))^2)-\\
&\quad-\sin(mx)(\mu_n x+v(\pi/2,x,\lambda_n)+\rho(x,\lambda_n))+\rho(x,\lambda_n)=\\
&=\cos(mx)+\sin(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)dt-\\
&\quad-2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\\
&\quad-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt-\frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt+\\
&\quad+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt+\\
&\quad+\frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+\\
&\quad+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt+\rho(x,\lambda_n).
\end{aligned}\tag{87}$$

В результате, с учетом (86) и (87), выражение для функций $y_n(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$y_n(x,\lambda_n) = r(\pi/2,x,\lambda_n)\sin(\theta(\pi/2,x,\lambda_n)) = \cos(mx)+$$
$$+\sin(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)dt - 2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt+$$
$$+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt+$$
$$+\frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+$$
$$+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt + \cos(mx)\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n), \tag{88}$$

где $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(x,\lambda_n)| \le C$.

Произведем нормировку собственных функций, для этого полученную формулу (88) необходимо домножить на $\left(\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx\right)^{-1/2}$. Вычислим последнее выражение, выделив вещественную и мнимую части функции $u(x)$.

$$\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \int_0^\pi \big[\cos(mx) + \sin(mx)\int_0^x (u_R(t) + iu_I(t))\sin(2mt)dt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t) + 2iu_R(t)u_I(t))dt-$$
$$-2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t) + iu_I(t))(u_R(s) + iu_I(s))\cdot$$
$$\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t) + 2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt-$$
$$-\frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R(t) + iu_I(t))\sin(2mt)dt+$$
$$+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t) - u_I^2(t) + 2iu_R(t)u_I(t))dt+$$
$$+\frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t) + iu_I(t))(u_R(s) + iu_I(s))\cdot$$
$$\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+$$
$$+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t) - u_I^2(t) + 2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt+$$
$$+\cos(mx)\int_0^x (u_R(t) + iu_I(t))\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t) + 2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n)\big]\cdot$$
$$\cdot\big[\cos(mx) + \sin(mx)\int_0^x (u_R(t) - iu_I(t))\sin(2mt)dt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t) - 2iu_R(t)u_I(t))dt-$$
$$-2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t) - iu_I(t))(u_R(s) - iu_I(s))\cdot$$
$$\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t) - 2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt-$$
$$-\frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R(t) - iu_I(t))\sin(2mt)dt+$$
$$+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t) - u_I^2(t) - 2iu_R(t)u_I(t))dt+$$

$$+\frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t) - iu_I(t))(u_R(s) - iu_I(s))\cdot$$
$$\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+$$

$$+\frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))\cos(2mt)dt+$$
$$+\cos(mx)\int_0^x (u_R(t)-iu_I(t))\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t)-2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt+\rho(x,\lambda_n)\big]dx$$

Здесь можно выделить те же 7 типов слагаемых, что и при доказательстве Теоремы 2.1, которые образуют последовательности, лежащие в l_1: 1) $\int\limits_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt$;

2) $\frac{1}{m}\int\limits_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt$;

3) $\frac{1}{m}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt$;

4)$\frac{1}{m}\int\limits_0^\pi u^2(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt$;

5) $\frac{1}{m}\int\limits_0^\pi u^2(t)\sin(2mt)dt\int\limits_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt$;

6) все интегралы с сомножителем $1/m^2$, а также всевозможные произведения $\int\limits_0^\pi u^2(t)dt$, $\int\limits_0^\pi u^2(t)\sin(2mt)dt$, $\int\limits_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt$, $\int\limits_0^\pi\int\limits_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt$, где в формулах встречаются три знака интеграла;

7) все шесть пунктов в случае, когда появляются интегралы с $\overline{u(x)}$. Продолжим вычисление нормировочного сомножителя, приводя подобные слага-

емые.

$$\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \int_0^\pi \cos^2(mx)dx +$$
$$+ 2\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x u_R(t)\sin(2mt)dtdx -$$
$$- 2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t))dtdx -$$
$$- 2\int_0^\pi \sin(mx)2\cos(mx)\int_0^x\int_0^t (u_R(t)u_R(s) - u_I(t)u_I(s))\cdot$$
$$\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdtdx -$$
$$- 2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t))\cos(2mt)dtdx -$$
$$- 2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi u_R(t)\sin(2mt)dtdx + \tag{89}$$
$$+ 2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t) - u_I^2(t))dtdx +$$
$$+ 2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{2x}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s) - u_I(t)u_I(s))\cdot$$
$$\cdot\cos(2mt)\sin(2ms)dsdtdx +$$
$$+ 2\int_0^\pi \sin(mx)\frac{x}{2m\pi}\cos(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t) - u_I^2(t))\cos(2mt)dtdx +$$
$$+ 2\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^x u_R(t)\cos(2mt)dtdx +$$
$$+ 2\int_0^\pi \frac{1}{2m}\cos^2(mx)\int_0^x (u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dtdx + \rho(\lambda_n),$$

где $\sum_{n=1}^\infty |\rho(\lambda_n)| \le C$.

Для того чтобы уменьшить количество интегралов в каждом слагаемом, мы можем использовать следующие равенства (обращаем внимание, что здесь m — целое):

$$\int_0^\pi \cos^2(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos(2mx))dx = \frac{\pi}{2} + \left.\frac{\sin(2mx)}{4m}\right|_0^\pi = \frac{\pi}{2}; \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x F(t)dtdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2mx)\int_0^x F(t)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \sin(2mx)dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\frac{\cos(2mx)}{2m}\Big|_t^\pi dt = \\
&= \frac{1}{4m}\int_0^\pi F(t)(-1+\cos(2mt))dt;
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin(mx)\cos(mx)\int_0^x\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2mx)\int_0^x\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \sin(2mx)\int_0^t F(s)dsdxdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\int_t^\pi \sin(2mx)dxdsdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\frac{-\cos(2mx)}{2m}\Big|_t^\pi dsdt = \\
&= \frac{1}{4m}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)(-1+\cos(2mt))dsdt;
\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi x\sin(mx)\cos(mx)\int_0^\pi F(t)dtdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin(2mx)\int_0^\pi F(t)dtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_0^\pi x\sin(2mx)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\Big(\frac{-x\cos(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi + \\
&+ \frac{1}{2m}\int_0^\pi \cos(2mx)dx\Big)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\Big(-\frac{\pi}{2m}+\frac{1}{2m}\frac{\sin(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi\Big)dt = \\
&= -\frac{\pi}{4m}\int_0^\pi F(t)dt;
\end{aligned} \tag{93}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi x\sin(mx)\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)dsdtdx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\int_0^\pi x\sin(2mx)dxdsdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\big(\frac{-x\cos(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2m}\int_0^\pi \cos(2mx)dx\big) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)\big(-\frac{\pi}{2m} + \frac{1}{2m}\frac{\sin(2mx)}{2m}\Big|_0^\pi\big)dsdt = \\
&= -\frac{\pi}{4m}\int_0^\pi\int_0^t F(t)F(s)dsdt;
\end{aligned}
\tag{94}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^x F(t)dtdx = \int_0^\pi F(t)\int_t^\pi \cos^2(mx)dxdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)\int_t^\pi (1+\cos(2mx))dxdt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)[(\pi - t) + \int_t^\pi \cos(2mx)dx]dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)[(\pi - t) + \frac{\sin(2mx)}{2m}\Big|_t^\pi]dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi F(t)(\pi - t)dt + \frac{1}{4m}\int_0^\pi F(t)\sin(2mt)dt;
\end{aligned}
\tag{95}
$$

где $F(t)$ и $F(s)$ — соответствующие подынтегральные функции правой части (89). Пользуясь приведенными равенствами (90) — (95) продолжим вычисление (89):

$$\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\sin{(2mt)}(-1+\cos(2mt))dt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))(-1+\cos(2mt))dt+$$
$$+\frac{1}{m}\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cos(2mt)\sin(2ms)(-1+\cos(2mt))dsdt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^x (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)(-1+\cos(2mt))dt-$$
$$-\frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\sin{(2mt)}dt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))dt+$$
$$+\frac{1}{m}\int_0^\pi\int_0^t (u_R(t)u_R(s)-u_I(t)u_I(s))\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\cos(2mt)dt+$$
$$+\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt+\frac{1}{2m}\int_0^\pi u_R(t)\cos(2mt)\sin(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2m}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt+$$
$$+\frac{1}{4m^2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin^2(2mt)dt+\rho(\lambda_n) \tag{96}$$

Большая часть слагаемых (96) образуют последовательности, лежащие в l_1 (аналогично тому, как показано в доказательстве Теоремы 2.1). Таким образом, мы получим, что нормировка в этой теореме будет совпадать с Теоремой 2.2:

$$\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx = \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt +$$
$$+ \frac{1}{2m}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n) =$$
$$= \frac{\pi}{2}\biggl(1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi m}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\biggr) + \rho(\lambda_n),$$

где $\sum_{n=1}^\infty |\rho(\lambda_n)| \le C$.

Возведем полученное выражение в степень $-1/2$:

$$\Bigl(\int_0^\pi y_n(x)\overline{y_n(x)}dx\Bigr)^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\biggl(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt -$$
$$- \frac{1}{2\pi m}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\biggr) + \rho(x,\lambda_n), \tag{97}$$

Теперь перемножим (88) и (97) и получим асимптотическую формулу для нормированных собственных функций:

$$
\begin{aligned}
y_n(x,\lambda_n) = \big[&\cos(mx) + \sin(mx)\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt - \\
&- \frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)dt - \\
&- 2\sin(mx)\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \\
&- \frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \frac{x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt + \\
&+ \frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)dt + \\
&+ \frac{2x}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt + \\
&+ \frac{x}{2m\pi}\sin(mx)\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt + \cos(mx)\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt + \\
&+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt + \rho(x,\lambda_n)\big]\cdot \\
&\cdot\Big[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt - \\
&- \frac{1}{2\pi m}\int_0^\pi(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\Big) + \rho(\lambda_n)\Big],
\end{aligned}
$$

Отметим, что при перемножении слагаемых правой части (88) на второе и третье слагаемое (78) все (кроме первого) образуют последовательности из l_1, которые пойдут в остаток. В результате после раскрытия скобок и приведения подобных получим равенство (83).

Переходим к вычислению функций биортогональной системы: $v_n(x) = \overline{y_n(x)}\big((y_n(x),\overline{y_n(x)})\big)^{-1}$. Учитывая перечисленные выше типы слагаемых, которые входят в остаточную последовательность, получим, что

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} y_n^2(x)dx = \cos(mx)\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt+\int_0^{x}u(t)\cos(2mt)dt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^{x}u^2(t)\sin(2mt)dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\right)+$$
$$+\sin(mx)\left(\int_0^{x}u(t)\sin(2mt)dt-2\int_0^{x}\int_0^{t}u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right.$$
$$\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\sin(2mt)dt+\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t}u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^{x}u^2(t)dt-\int_0^{x}u^2(t)\cos(2mt)dt+\right.$$
$$\left.+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}u^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}u^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(\lambda_n)$$

Теперь обратим внимание на слагаемые с косинусами, так как слагаемые с синусами пойдут в остаток. Посмотрим, какие равенства мы здесь можем использовать с учетом того, что m — целое.

$$\int_0^{\pi}\cos^2(mx)\int_0^{x}(u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)dtdx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)(\pi-t)dt+$$
$$+\frac{1}{4m}\int_0^{\pi}(u_R(t)+iu_I(t))\cos(2mt)\sin(2mt)dt;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(mx)\int_0^{\pi}u_R(t)\cos(2mt)dtdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}u_R(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt;$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2(mx)\int_0^{x}(u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dtdx=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt+$$
$$+\frac{1}{4m}\int_0^{\pi}(u_R^2(t)-u_I^2(t)+2iu_R(t)u_I(t))\sin^2(2mt)dt;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(mx)\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dtdx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)(\pi-t)dt.$$

В результате получим, что

$$\int_0^\pi y_n^2(x)dx = 1+\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi u_I(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt+$$
$$+\frac{2i}{\pi m}\int_0^\pi (\pi-t)u_R(t)u_I(t)\sin(2mt)dt+\rho(\lambda_n)$$

Осталось возвести полученный результат в степень (-1) и перемножить составные части:

$$v_n(x) = \overline{y_n(x)}\big((y_n(x),\overline{y_n(x)})\big)^{-1} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big[\cos(mx)\left(1-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt+\int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\right)+$$
$$+\sin(mx)\left(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt-2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right.$$
$$\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt+\frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x \overline{u}^2(t)dt-\int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt+\right.$$
$$\left.+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(x,\lambda_n)\big]$$
$$\big[1-\frac{2i}{\pi}\int_0^\pi u_I(t)\cos(2mt)(\pi-t)dt-\frac{2i}{\pi m}\int_0^\pi(\pi-t)u_R(t)u_I(t)\sin(2mt)dt+\rho(\lambda_n)\big]$$

Откуда и получим формулу (84). Теорема 2.3 доказана. □

2.4. Обобщенная теорема

Объединим результаты, полученные в этой главе и работе Савчука А.М. [30] в одну итоговую теорему.

Теорема 2.4

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2$. Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ систему собственных и присоединенных функций оператора L, через $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональную систему (причем собственные функции мы нормируем условием $||y_n||_{L_2} = 1$). Тогда

1) Для граничных условий Дирихле ($y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$): $m = n, n \in \mathbb{N}$ и справедливы следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) = {}& \sin(mx)\cdot \\
&\cdot\left(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt - \int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\right) + \\
&+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\cdot \\
&\cdot\left(-\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\right) + \\
&+ \cos(mx)\left(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt + 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \right. \\
&\left. - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) + \\
&+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt - \right. \\
&\left. - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \rho(x, \lambda_n),
\end{aligned}
\tag{98}
$$

Соответствующие функции биортогональной системы имеют вид:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = \sin(mx)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)(u_R(t)+2iu_I(t))\cos(2mt)dt-\int_0^x\overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x\overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t)+4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right)+$$
$$+\cos(mx)\left(\int_0^x\overline{u}(t)\sin(2mt)dt+2\int_0^x\int_0^t\overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right.$$
$$\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\overline{u}(t)\sin(2mt)dt-\frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t\overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x\overline{u}^2(t)dt-\int_0^x\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt-\right.$$
$$\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\overline{u}^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(x,\lambda_n);\tag{99}$$

2) Для граничных условий Дирихле–Неймана ($y(0)=0,\ y^{[1]}(\pi)=0$)*:* $m=n-\frac{1}{2}, n\in\mathbb{N}$ *и выполнены равенства* (98) *и* (99)*;*

3) Для граничных условий Неймана ($y^{[1]}(0)=0,\ y^{[1]}(\pi)=0$)*:*

$m = n, n \in \mathbb{N} \bigcup 0$ и верны формулы:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) = \cos(mx)\cdot$$
$$\cdot\left(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt + \int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\right) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\right) +$$
$$+ \sin(mx)\left(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \right.$$
$$\left. - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt + \right.$$
$$\left. + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \rho(x, \lambda_n), \tag{100}$$

При этом соответствующие функции биортогональной системы имеют *вид:*

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = {} & \cos(mx)\cdot \\
& \cdot\left(1-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R(t)+2iu_I(t))\cos(2mt)dt+\int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right)+ \\
& +\frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt-\right. \\
& \left.-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t)+4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right)+ \\
& +\sin(mx)\left(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt-2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right. \\
& \left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt+\frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right)+ \\
& +\frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x \overline{u}^2(t)dt-\int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt+\right. \\
& \left.+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(x,\lambda_n);
\end{aligned}
\tag{101}
$$

4) Для граничных условий Неймана–Дирихле ($y^{[1]}(0)=0,\ y(\pi)=0$)*:* $m=n-\frac{1}{2}, n\in\mathbb{N}$ *и имеют место равенства* (100) *и* (101).

Здесь при любом $x\in[0,\pi]$ $\{|\rho(x,\lambda_n)|\}\in l_1$ *и* $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum_{n=1}^\infty |\rho(x,\lambda_n)|\le C$*;* $u_R(x)$ *и* $u_I(x)$ *обозначают вещественную и мнимую части функции* $u(x)$ *соответственно.*

Глава 3. Применение полученных асимптотик в решении задач равносходимости

Рассматривается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимости разложений в ряд функции $f \in L_2$ по системе собственных и присоединенных функций оператора L с ее разложением в тригонометрический ряд Фурье.

В статье Садовничей [34] был получен положительный ответ на поставленный вопрос в случае граничных условий Дирихле $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$. В настоящей главе анализируются остальные типы граничных условий и формулируется теорема, обобщающая полученные результаты. Помимо решения задачи о равносходимости также в работе получена оценка ее скорости. История этого вопроса подробно изложена в статье [33].

Для доказательства обобщающей теоремы необходимо рассмотреть все виды граничных условий.

1. Случай граничных условий Дирихле–Неймана

Рассмотрим случай граничных условий Дирихле—Неймана $y(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0$, где $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x)$ — первая квазипроизводная (см. Главу 1). Здесь нам потребуется асимптотика собственных функций оператора L, полученная в Главе 2.

Теорема 3.1.

Рассмотрим оператор L_{DN}, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2$, и краевыми условиями Дирихле-Неймана $y(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0$. Обозначим через $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ систему собственных и присоединенных функций оператора L, через $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональную систему (причем собственные функции мы нормируем условием $||y_n||_{L_2} = 1$). Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) = &\sin(mx)\cdot \\
&\cdot\left(1+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)u_R(t)\cos(2mt)dt-\int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\right)+ \\
&+\frac{1}{2m}\sin(mx)\cdot \\
&\cdot\left(-\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t))\sin(2mt)dt\right)+ \\
&+\cos(mx)\left(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt+2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right. \\
&\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi u(t)\sin(2mt)dt-\frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right)+ \\
&+\frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x u^2(t)dt-\int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt-\right. \\
&\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi u^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(x,\lambda_n),
\end{aligned}
\tag{102}
$$

где $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum_{n=1}^{\infty}|\rho(x,\lambda_n)|\le C$, $m=n-1/2, n\in\mathbb{N}$, $u_R(x)$ *и* $u_I(x)$ *обозначают вещественную и мнимую части функции* $u(x)$ *соответственно.*

Соответствующие функции биортогональной системы имеют вид:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\; v_n(x) = \sin(mx)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)(u_R(t)+2iu_I(t))\cos(2mt)dt-\int_0^x\overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x\overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t)+4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right)+$$
$$+\cos(mx)\left(\int_0^x\overline{u}(t)\sin(2mt)dt+2\int_0^x\int_0^t\overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right.$$
$$\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\overline{u}(t)\sin(2mt)dt-\frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t\overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x\overline{u}^2(t)dt-\int_0^x\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt-\right.$$
$$\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\overline{u}^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(x,\lambda_n). \tag{103}$$

Для дальнейшего изучения будет удобно перегруппировать слагаемые в полученных формулах следующим образом:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(mx)+\phi_n(x),\quad v_n(x) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(mx)+\psi_n(x), m=n-1/2,\ n\geq N_u, \end{aligned} \tag{104}$$

при этом $\phi_n(x)$, $\psi_n(x)$ таковы, что

$$\sup_{0\leq x\leq\pi}||\{\phi_n(x)\}||_{l_2}\leq C_u,\ \sup_{0\leq x\leq\pi}||\{\psi_n(x)\}||_{l_2}\leq C_u. \tag{105}$$

Кроме того, последовательности $\{||\phi_n(x)||_{L_2}\}=\{\phi_n\}$ и $\{||\psi_n(x)||_{L_2}\}=\{\psi_n\}$ принадлежат пространству l_2 (см. [39]), и

$$||\phi_n||_{l_2}\leq C_u, ||\psi_n||_{l_2}\ \leq C_u. \tag{106}$$

Вернемся к слагаемым (104). Распишем более детально функции $\psi_n(x)$, участвующие в выражении для $v_n(x)$. Из Теоремы 2.1 получаем, что

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = \sin(mx)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R(t)+2iu_I(t))\cos(2mt)dt - \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right)+$$
$$+\frac{1}{2m}\sin(mx)\Bigg(-\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t)+4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\Bigg)+$$
$$+\cos(mx)\Bigg(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt + 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{2m}\cos(mx)\Bigg(\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt-$$
$$-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\Bigg) + \rho(x,\lambda_n) =$$
$$=\sin(mx)\Bigg(1+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R(t)+2iu_I(t))\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi m}\int_0^\pi (\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t)+4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\Bigg)-$$
$$-\sin mx\int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt + \cos(mx)\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt-$$
$$-\frac{1}{2m}\sin(mx)\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt+$$
$$+\cos(mx)\Bigg(2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-$$
$$-\frac{x}{2\pi m}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{2\pi m}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt+$$
$$+\frac{1}{2m}\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \frac{1}{2m}\int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\Bigg) + \rho(x,\lambda_n) \tag{107}$$

Таким образом, $\psi_n(x)$ можно разбить на три группы слагаемых:

$$\psi_n(x) = \psi_{n,0} + \psi_{n,1} + \psi_{n,2}$$

$$\psi_{n,0} = \alpha_n \sin(mx) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \overline{u(t)} \sin(m(x-2t))dt, \text{где} \{|\alpha_n|\} \in l_2;$$

$$\begin{aligned} \psi_{n,1}(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx)(-\frac{1}{2m} \int_0^x \overline{u}^2(t) \sin(2mt)dt) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(mx) \Bigg(-\frac{x}{\pi} \int_0^\pi \overline{u}(t) \sin(2mt)dt + \\ & + \frac{x}{2m\pi} \int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt(\cos(2mt) - 1)dt - \\ & - \frac{2x}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s) \cos(2mt) \sin(2ms)dsdt + \\ & + \frac{1}{2m} \int_0^x \overline{u}^2(t)dt(1 - \cos(2mt))dt + \\ & + 2 \int_0^x \int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s) \cos(2mt) \sin(2ms)dsdt \Bigg); \end{aligned} \tag{108}$$

$$\sup_{0 \le x \le \pi} ||\{\psi_{n,2}(x)\}||_{l_2} \le C_u, \ \{||\psi_{n,2}(x)||_{L_2}\} = \{\psi_{n,2}\} \in l_2, \ ||\psi_{n,2}||_{l_2} \le C_u.$$

Переходим теперь непосредственно к исследованию равносходимости.

Теорема 3.1.

Рассмотрим оператор L_{DN}, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2[0,\pi]$, и краевыми условиями Дирихле-Неймана $y(0) = 0$, $y^{[1]}(\pi) = 0$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система собственных и присоединенных функций оператора L_{DN}, причем для собственных функций $||y_n(x)||_{L_2} = 1$, а $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$— биортогональная к ней. Для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ обозначим за $c_n = (f(x), v_n(x))$, $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin((n-1/2)x))$. Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и по системе $\{\sin((n-1/2)x)\}_{n=1}^\infty$. При этом скорость равносхо-

димости характеризуется следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big|\sum_{n=1}^{l} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin((n-1/2)x)\Big|\Big|_C \leq \\
&\leq C_u\Big(\sum_{n \geq l^{1/2-\varepsilon}} |c_{n,0}|^2\Big)^{1/2} + ||f||_{L_2}(p_u([l^{1/2-\varepsilon}]) + C_u l^{-\varepsilon}),
\end{aligned}
\tag{109}
$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *— произвольное малое положительное число,* $l^{1/2-\varepsilon} > N_u$, *а*

$$
p_u(k) = C_u((\sum_{n \geq k} ||\psi_n(x)||_{L_2}^2)^{1/2} + (\sum_{n \geq k} ||\phi_n(x)||_{L_2}^2)^{1/2}), \quad k \geq N_u. \tag{110}
$$

Доказательство

Рассмотрим операторы $B_{l,N} : L_2[0, \pi] \to C[0, \pi]$, действующие на функции $f \in L_2[0, \pi]$ следующим образом:

$$
(B_{l,N})f(x) = \sum_{n=N}^{l} c_n y_n(x) - \sum_{n=N}^{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin((n-1/2)x), \text{где } N = N_u. \tag{111}
$$

Здесь и далее будем обозначать $m = n - 1/2, n = 1, 2, ...$ Тогда с учетом (104) и (108) для любой функции $f \in L_2[0, \pi]$ верно представление:

$$
\begin{aligned}
(B_{l,N})f(x) = &\sum_{n=N}^{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \psi_{n,0}(t)) \sin(mx) + \\
+ &\sum_{n=N}^{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \psi_{n,1}(t)) \sin(mx) + \\
+ &\sum_{n=N}^{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \psi_{n,2}(t)) \sin(mx) + \\
+ &\sum_{n=N}^{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \sin(mx)) \phi_n(x) + \\
+ &\sum_{n=N}^{l} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (f(t), \psi_n(t)) \phi_n(x).
\end{aligned}
\tag{112}
$$

Оценим норму оператора $B_{l,N}$. Условимся при $N = 1$ для упрощения записи обозначать $B_{l,1} = B_l$.

Будем рассматривать по очереди слагаемые правой части (112). Наиболее сложной является оценка первого слагаемого. Для первой его части справедливо неравенство:

$$||\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\overline{\alpha_n}(f(t),\sin(mx))\sin(mx)||_C \le C_u||f||_{L_2},$$

так как $\sum_{n=N}^{l}|\overline{\alpha_n}|^2 \le C_u$.

Теперь необходимо оценить выражение:

$$\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\sin(m(t-2s))dsdt\sin(mx). \tag{113}$$

Преобразуем произведение синусов:

$$\sin(m(t-2s))\sin(mx) = 1/2(\cos(m(t-2s-x)) - \cos(m(t-2s+x)))$$

и подставим результат в (113):

$$\begin{aligned}&\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\sin(m(t-2s))dsdt\sin(mx) = \\ &= 1/2\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(m(t-2s-x))dsdt- \\ &- 1/2\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(m(t-2s+x))dsdt\end{aligned} \tag{114}$$

Рассмотрим подробно первое слагаемое в правой части (114) (второе исследуется аналогично).

$$\begin{aligned}&1/2\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(m(t-2s-x))dsdt = \\ &1/2\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(n(t-2s-x))\cos(t/2-s-x/2)dsdt+ \\ &+1/2\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\sin(n(t-2s-x))\sin(t/2-s-x/2)dsdt\end{aligned} \tag{115}$$

Далее в (115) отдельно обратим внимание на слагаемое с косинусами.

$$\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi f(t)\int_0^t u(s)\cos(n(t-2s-x))\cos(t/2-s-x/2)dsdt =$$
$$= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{l}\int_0^\pi f(t)\int_0^t u(s)\cos(n(t-2s-x))\cos(t/2-s-x/2)dsdt-$$
$$-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{N-1}\int_0^\pi f(t)\int_0^t u(s)\cos(n(t-2s-x))\cos(t/2-s-x/2)dsdt =$$
$$= \int_0^\pi f(t)\int_0^t u(s)D_l(t-x-2s)\cos(t/2-s-x/2)dsdt-$$
$$-\int_0^\pi f(t)\int_0^t u(s)D_{N-1}(t-x-2s)\cos(t/2-s-x/2)dsdt \tag{116}$$

Здесь $D_l(\xi)=1/2+\sum_{n=1}^{l}\cos(n\xi)$ — ядро Дирихле. Так как t и s лежат на отрезке $[0,\pi]$, то для второго слагаемого (116) получаем оценку:

$$||\int_0^\pi f(t)\int_0^t u(s)D_{N-1}(t-x-2s)\cos(t/2-s-x/2)dsdt||_C \le C_u||f||_{L_2}$$

Оценим теперь первое слагаемое (116). Для этого, следуя приему, описанному в [34], определим оператор $A_{l,-x}$, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$ по правилу:

$$(A_{l,-x}u)(t)=\int_0^t u(s)D_l(t-2s-x)ds$$

Далее будем обозначать $A_l=A_{l,0}$. Нам необходимо оценить нормы операторов $A_{l,-x}$ равномерно по $l\in N$ и $x\in[0,\pi]$.

Покажем, что оператор $A_{l,-x}$ унитарно эквивалентен сумме оператора A_l и некоторого оператора $\widetilde{A}_{l,x}$, норму которого в $l_2[0,\pi]$ оценить легко. Пусть $T_xg(t)=g(t+x)$ — оператор сдвига в пространстве $L_2[0,\pi]$ (считаем, что все функции продолжены за отрезок $[0,\pi]$ периодически). тогда можем записать

$$(T_{-x}A_{l,-x}T_x)(u(\cdot))=(T_{-x}A_{l,-x})(u(x+\cdot))=T_{-x}\int_0^t u(x+s)D_l(t-2s-x)ds=$$

$$=\int_0^{t-x}u(x+s)D_l(t-2s-2x)ds=\int_x^t u(s)D_l(t-2s)ds=(A_lu)(t)-(\widetilde{A}_{l,x}u)(t),$$

где $\widetilde{A}_{l,x}u(t) = \int_0^x u(s)D_l(t-2s)ds$. Несложно видеть, что оператор $\widetilde{A}_{l,x}$ представляет собой композицию оператора срезки $H_x u(t) = \chi_[0,x]u(t)$ и оператора F_l, действующего по правилу

$$(F_l v)(t) = \sum_{n=1}^{l}\Big(\int_0^\pi v(s)\cos(2ns)ds\cos(nt) + \int_0^\pi v(s)\sin(2ns)ds\sin(nt)\Big) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^\pi v(s)ds. \tag{117}$$

Очевидно, что $||H_x||_{L_2} \le 1$,

$||F_m v||_{L_2}^2 = ||\sum_{n=1}^{l}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) + 1/2a_0||_{L_2}^2 \le C||v||_{L_2}^2$, где $a_n = \int_0^\pi v(s)\cos(2ns)ds$, $b_n = \int_0^\pi v(s)\sin(2ns)ds$ — коэффициенты Фурье функции $v(t)$. Таким образом, норма оператора $\widetilde{A}_{l,x}$ в $L_2[0,\pi]$ ограничена равномерно по $l \in N$ и $x \in [0,\pi]$.

Теперь докажем равномерную по $l \in N$ ограниченность оператора A_l в пространстве $L_2[0,\pi]$. Заметим, что

$$(A_l u)(t) = \int_0^t u(s)D_l(t-2s)ds = \int_0^\pi u(s)D_l(t-2s)ds - \int_t^\pi u(s)D_l(t-2s)ds = \\ = (F_l u)(t) - (E_l^* u)(t),$$

где оператор F_l опеределен в (117), а E_l^* является сопряженным к оператору E_l, опеределенному равенством $(E_l u)(t) = \int_0^t u(s)D_l(2t-s)ds$. Таким образом, задача сводится к проверке равномерной ограниченности оператора E_l.

Рассмотрим билинейную форму $(E_l f, g)$, где $f, g \in L_2[0,\pi]$ и докажем ее ограниченность. В силу известной оценки $|D_l(x)| \le \frac{C}{|x|}$, где C - абсолютная постоянная (см., например, [55], Гл.1 §32), имеем

$$|(E_l f,g)| = \Big|\int_0^\pi\int_0^t f(s)\overline{g(t)}D_l(2t-s)dsdt\Big| \le \int_0^\pi\int_0^t |f(s)||g(t)||D_l(2t-s)|dsdt \le$$

$$\le C\int_0^\pi\int_0^t |f(s)||g(t)|\frac{1}{2t-s}dsdt \le 2C\int_0^\pi\int_0^t |f(s)||g(t)|\frac{1}{t+s}dsdt \le$$

$$\le 2C\int_0^\pi\int_0^\pi |f(s)||g(t)|\frac{1}{t+s}dsdt \le 2\pi C||f||_{L_2}||g||_{L_2}$$

При переходе к последнему неравенству мы воспользовались известным фактом (см. [56], Гл. 9, п. 3), что оператор Гильберта с ядром $1/(t+s)$ является ограниченным в $L_2[0,\infty)$. В результате, мы получили оценку первого слагаемого (115). С учетом того, что второе слагаемое также ограничено

$$||\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi f(t)\int_0^t u(s)\sin(n(t-2s-x))\sin(t/2-s-x/2)dsdt||_C\le C_u||f||_{L_2},$$

мы доказали оценку $||\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_{n,0}(t))\sin(mx)||_C\le C_u||f||_{L_2}$.

Возвращаемся к основному равенству (112). Убедимся, что

$$||\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=N}^{l}(f(t),\psi_{n,1}(t))\sin(mx)||_{L_2}\le C_u||f||_{L_2}.$$

Применим полученные выше асимптотические формулы для функции $\psi_{n,1}(x)$.

$$\begin{aligned}
&(f(t),\psi_{n,1}(t))=-\frac{1}{2m}\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\int_0^t u^2(s)\sin(2ms)dsdt)-\\
&-\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\frac{t}{\pi}\int_0^\pi u(s)\sin(2ms)dsdt+\\
&+\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\frac{t}{2m\pi}\int_0^\pi u^2(s)(\cos(2ms)-1)dsdt-\\
&-\frac{1}{2m}\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\int_0^t u^2(s)\cos(2ms)dsdt+\frac{1}{2m}\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\int_0^t u^2(s)dsdt-\\
&-\int_0^\pi \frac{2tf(t)}{\pi}\cos(mt)\int_0^\pi\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau dsdt+\\
&+2\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\int_0^t\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau dsdt
\end{aligned}\tag{118}$$

Последовательно оценим все слагаемые (118). Первое слагаемое:

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=N}^{l}\frac{\sin(mx)}{2m}\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\int_0^t u^2(s)\sin(2ms)dsdt|\le\\
&\le\int_0^\pi|u(s)|^2\sup_{0\le x\le\pi}|\sum_{n=N}^{l}\frac{\sin(mx)}{2m}\sin(2ms)\int_0^\pi f(t)\sin(mt)dt|ds\le\\
&\le\int_0^\pi|u(s)|^2\sum_{n=N}^{l}\frac{1}{2m}|\int_0^\pi f(t)\sin(mt)dt|ds\le C_u||f||_{L_2},
\end{aligned}\tag{119}$$

последнее неравенство выполняется, так как $\{\int_0^\pi f(t)\sin(mt)dt\}_{n=N}^\infty$ принадлежит l_2 и ее норма не превосходит $||H_s f||_{L_2} \le ||f||_{L_2}$, где H_s – оператор срезки в пространстве $L_2[0,\pi]$.

Второе слагаемое (118):

$$\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi \frac{t}{\pi} f(t)\cos(mt)\int_0^\pi u(s)\sin(2ms)dsdt\sin(mx)\Big| \le$$
$$\le \frac{1}{\pi}\big(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi tf(t)\cos(mt)dt|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi u(s)\sin(2ms)ds|^2\big)^{\frac{1}{2}} \le C_u||f||_{L_2}. \tag{120}$$

Третье слагаемое (118):

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi \frac{tf(t)}{2\pi m}\cos(mt)\int_0^\pi u^2(s)(\cos(2ms)-1)dsdt\sin(mx)\Big| \le\\ &\le C_u(\sum_{n=N}^{l}\frac{1}{m^2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi tf(t)\cos(mt)dt|^2)^{\frac{1}{2}} \le C_u||f||_{L_2}.\end{aligned} \tag{121}$$

Четвертое слагаемое: аналогично первому.

Пятое слагаемое: обозначим $U(t) = \int_0^t u^2(s)dt$ (эта функция будет абсолютно непрерывной), интегрируем $u^2(s)$:

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\frac{\sin(mx)}{2m}\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\int_0^t u^2(s)dsdt\Big| \le\\ &\le \sum_{n=N}^{l}\frac{1}{2m}|\int_0^\pi f(t)U(t)\cos(mt)dt| \le\\ &\le C(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi f(t)U(t)\cos(mt)dt|^2)^{\frac{1}{2}} \le C||f(t)U(t)||_{L_2} \le C_u||f||_{L_2}.\end{aligned} \tag{122}$$

Для оценки шестого слагаемого введем функцию $\xi(s,\tau)$, действующую по правилу: $\xi(s,\tau) = 1$, если $\tau \le s$, в остальных случаях $\xi(s,\tau) = 0$. Тогда функция $u(s)u(\tau)\xi(s,\tau) \in L_2[0,\pi]$. Получим:

$$|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi \frac{2tf(t)}{\pi}\cos(mx)\int_0^\pi\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds dt\sin(mx)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\sup_{0\leq x\leq\pi}(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi tf(t)\cos(mx)dt|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds|^2)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C||f||_{L_2}(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi\int_0^\pi u(s)u(\tau)\xi(s,\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_u||f||_{L_2}. \tag{123}$$

Переходим к последнему слагаемому (118). Обозначим за $\widetilde{H}_s$ оператор срезки $\widetilde{H}_s f(t) = \xi_{[s,\pi]}f(t)$. Тогда

$$|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi f(t)\cos(mx)\int_0^t\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds dt\sin(mx)| =$$

$$= \sup_{0\leq x\leq\pi}|\int_0^\pi u(s)\sum_{n=N}^{l}\cos(2ms)\sin(mx)(\widetilde{H}_s f(t),\cos(mt))(H_s u(\tau),\sin(2m\tau))ds| \leq$$

$$\leq \int_0^\pi |u(s)|\cdot|\sum_{n=N}^{l}(\widetilde{H}_s f(t),\cos(mt))(H_s u(\tau),\sin(2m\tau))|ds \leq$$

$$\leq C\int_0^\pi |u(s)|\cdot||\widetilde{H}_s f(t)||_{L_2}\cdot||H_s u||_{L_2} \leq C_u||f||_{L_2} \tag{124}$$

В результате приведенных оценок (119) — (124) получаем, что для (118) выполняется:

$$||\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=N}^{l}(f(t),\psi_{n,1}(t))\sin(mx)||_C \leq C_u||f||_{L_2}. \tag{125}$$

Вернемся снова к оценке слагаемых из основного равенства (112).

Оценка третьего слагаемого получается с учетом (108) довольно просто:

$$\begin{aligned}\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_{n,2}(t))\sin(mx)\Big| &\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=N}^{l}\Big|\int_0^\pi f(t)\cdot\overline{\psi_{n,2}(t)}dt\Big| \\ &\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{l}||f||_{L_2}\int_0^\pi|\psi_{n,2}(t)|^2dt \le C_u||f||_{L_2}.\end{aligned} \tag{126}$$

Что касается четвертого слагаемого (112), в силу (106) выполняется неравенство:

$$\begin{aligned}||\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\sin(mt))\phi_n(x)||_C \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sup_{0\le x\le\pi}\sum_{n=N}^{l}(|(f(t),\sin(mt))|\cdot|\phi_n(x)|) \le \\ \le C_u||f||_{L_2}.\end{aligned} \tag{127}$$

Для последней части (112) в силу (105) верно следующее:

$$\begin{aligned}||\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_n(t))\phi_n(x)||_C \le \sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}||f(t)||_{L_2}\cdot||\psi_n(t))||_{L_2}\cdot\phi_n(x)\Big| \\ \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}||f||_{L_2}\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}||\psi_n(t)||_{L_2}\phi_n(x)\Big| \le C_u||f||_{L_2}.\end{aligned} \tag{128}$$

В результате, мы получили оценку основного равенства (112). Оператор B_l можно представить в виде суммы $B_l = B_{N-1} + B_{l,N}$, а так как $||B_{N-1}||_{L_2\to C} \le C_u$ (сумма конечного числа слагаемых), то и

$$||B_l||_{L_2\to C} \le C_u$$

.

Таким образом, мы доказали равномерную ограниченность операторов B_l для любой функции $u \in L_2[0,\pi]$.

Рассмотрим действие оператора B_l на собственные и присоединенные функции оператора L:

$$(B_l y_k)(x) = \sum_{n=1}^{l}(y_k(x),v_n(x))y_n(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{l}(y_k(x),\sin(mx))\sin(mx). \tag{129}$$

Первое слагаемое (129) равно 0 при $m < k$ и равно $y_k(x)$ при $m \geq k$. Второе слагаемое представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции y_k. Все функции $y_k \in W_2^1[0,\pi]$, поэтому ряд Фурье функции y_k сходится к ней равномерно на отрезке $[0,\pi]$, и мы получаем, что

$$\lim_{l\to\infty} ||B_l y_k||_C = 0. \tag{130}$$

Далее воспользуемся вспомогательной теоремой

Теорема ([15], теорема 2.7)

Пусть $u \in L_2[0,\pi]$. Тогда система $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$.

Отсюда следует, что любую функцию $f(x)$ можно приблизить линейными комбинациями функций системы $\{y_k(x)\}$, и верно равенство:

$$\lim_{l\to\infty} ||B_l f||_C = 0. \tag{131}$$

Таким образом, мы доказали равносходимость разложения в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L_{DN} и системе $\{\sin((n-1/2)x)\}_{n=1}^{\infty}$. Остался нерешенным вопрос о скорости этой равносходимости.

Обозначим за $g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} c_n y_n(x)$ для любого $k \geq N_u$ (где $c_n = (f(x), v_n(x))$). Тогда для любой функции $f \in L_2[0,\pi]$ и для любого натурального l выполнено:

$$||B_l f||_C \leq ||B_l(f-g_k)||_C + ||B_l g_k||_C. \tag{132}$$

Оценим нормы первого слагаемого правой части (132) в пространстве $C[0,\pi]$.

$$||B_l(f-g_k)||_C \leq C_u\Big(\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_{n,0}|^2\Big)^{1/2} + ||f||_{L_2} p_u(k+1), \tag{133}$$

где $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin(mx))$, а числа $p_u(k)$ определены в (110).

Подставим асимптотические формулы (104):

$$||f(x) - g_k(x)||_{L_2} \leq ||\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{\pi}(f(x), \sin(mx))\sin(mx)||_{L_2} +$$

$$+||\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(f(x),\psi_n(x))\sin(mx)||_{L_2}+$$

$$+||\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(f(x),\sin(mx))\phi_n(x)||_{L_2}+||\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(f(x),\psi_n(x))\phi_n(x)||_{L_2}\leq$$

$$\leq C_u(\sum_{n=k+1}^{\infty}|c_{n,0}|^2)^{1/2}+$$

$$+||f||_{L_2}\big((\sum_{n=k+1}^{\infty}||\psi_n||_{L_2}^2)^{1/2}+(\sum_{n=k+1}^{\infty}||\phi_n||_{L_2}^2)^{1/2}+\sum_{n=k+1}^{\infty}||\psi_n||_{L_2}\cdot||\phi_n||_{L_2}\big)=$$

$$=C_u(\sum_{n=k+1}^{\infty}|c_{n,0}|^2)^{1/2}+v_u(k+1)||f||_{L_2}.$$

Так как норма оператора B_l не превосходит константу C_u, отсюда вытекает неравенство (133).

Перейдем к оценке второго слагаемого в (132).

Пусть $l > k$. Обозначим через S_l оператор, действующий из пространства $W_2^1[0,\pi]$ в пространство $C[0,\pi]$ по правилу: $S_l h(x) = 2/\pi\sum_{n=l+1}^{\infty}(h(t),\sin mt)\sin mx$. Все собственные и присоединенные функции оператора L_{DN} принадлежат пространству $W_2^1[0,\pi]$, значит действие оператора S_l на них корректно определено, следовательно, верно:

$$B_l g_k(x) = g_k(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{l}(g_k(t),\sin(mt))\sin(mx) = S_l g_k(x)$$

Откуда:

$$||B_l g_k||_C \leq ||S_l(g_k - g_N)||_C + ||S_l g_N||_C \tag{134}$$

Пусть $m > k \geq N_u$. Получаем, что

$$||S_l(g_k-g_N)||_C = ||\sum_{n=N+1}^{k}c_n S_l y_n(x)||_C = ||\sum_{n=N+1}^{k}c_n S_l\phi_n(x)||_C,$$

так как $y_n(x) = \sqrt{2/\pi}\sin mx + \phi_n(x)$, (см. (104)). Далее воспользуемся тем, что

$$\sum_{n=N+1}^{k}|c_n|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|^2 \leq$$

$$\leq 2\ \Big(\frac{2}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}|(f(x),\sin(mx))|^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}|(f(x),\psi_n(x))|^2\Big)\leq C_u||f||^2_{L_2}$$

.

Тогда

$$||\sum_{n=N+1}^{k}c_nS_l\phi_n(x)||_C\leq(\sum_{n=N+1}^{k}|c_n|^2)^{1/2}(\sum_{n=N+1}^{k}||S_l\phi_n(x)||^2_C)^{1/2}\leq$$

$$C_u||f||_{L_2}(\sum_{n=N+1}^{k}||S_l\phi_n(x)||^2_C)^{1/2}.$$

Оценим норму $||S_l\phi_n(x)||_C$ с учетом того, что $\phi_n(0)=0$.

$$\begin{aligned}||S_l\phi_n(x)||_C &\leq \frac{2}{\pi}\sum_{j=l+1}^{\infty}|(\phi_n(x),\sin((j+1/2)x))|=\\ &=\frac{2}{\pi}\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{|(\phi_n(x)',\cos((j+1/2)x))|}{j+1/2}\leq\\ &\leq\frac{2}{\pi}\Big(\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1/2)^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=l+1}^{\infty}|(\phi_n(x)',\cos((j+1/2)x))|^2\Big)^{1/2}\leq\\ &\leq C_ul^{-1/2}||\phi_n(x)||_{W_2^1}.\end{aligned}\tag{135}$$

Из [39], §2 следует, что $\phi_n(x)'=n\eta_n(x)+u(x)y_n(x),\ ||\phi_n(x)||_{W_2^1}\leq C_un\eta_n$, где $||\{\eta_n\}||_{l_2}\leq C_u$. Отсюда получаем, что

$$||S_l\phi_n(x)||_C\leq C_ul^{-1/2}n\eta_n.$$

В результате, первое слагаемое (134) можно оценить так:

$$||S_l(g_k-g_N)||_C\leq C_u||f||_{L_2}\Big(\sum_{n=1}^{k}l^{-1}n^2\eta_n^2\Big)^{1/2}\leq C_u||f||_{L_2}l^{-1/2}k.$$

Что касается второго слагаемого, действие оператора S_l на функции g_N оценивается так же, как в (135):

$$||S_lg_N(x)||_C\leq C_ul^{-1/2}||g_N(x)||_{W_2^1}.$$

Число N фиксировано и зависит только от первообразной потенциала u, поэтому $||g_N(x)||_{W_2^1} \le C_u||f||_{L_2}$ и

$$||S_l g_N||_C \le C_u l^{-1/2}||f||_{L_2}.$$

В итоге, получаем, что

$$||B_l g_k||_C \le ||f||_{L_2} \cdot C_u k l^{-1/2}. \tag{136}$$

Теперь достаточно взять $k = [l^{1/2-\varepsilon}]$, где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ произвольно, и из (132), (133), (136) будет непосредственно следовать (109). Теорема 3.1 полностью доказана. □

2. Случай граничных условий Неймана–Дирихле и Неймана

Переходим к исследованию оставшихся видов граничных условий Неймана-Дирихле. Нам понадобится (см. Глава 2) вспомогательная

Теорема 2.2.

Рассмотрим оператор L_{ND}, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2$, и краевыми условиями Неймана–Дирихле $y^{[1]}(0) = 0,\ y(\pi) = 0$. Тогда справедливы следующие асимптотические фор-

мулы:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y_n(x) = \cos(mx)\cdot \\
&\quad\cdot \left(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)u_R(t)\cos(2mt)dt + \int_0^x u(t)\cos(2mt)dt\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\cos(mx)\cdot \\
&\quad\cdot \left(\int_0^x u^2(t)\sin(2mt)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t))\sin(2mt)dt\right) + \\
&\quad + \sin(mx)\left(\int_0^x u(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^x\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt - \right.\\
&\quad \left. - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t u(t)u(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x u^2(t)dt - \int_0^x u^2(t)\cos(2mt)dt + \right.\\
&\quad \left. + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} u^2(t)\cos(2mt)dt\right) + \rho(x, \lambda_n),
\end{aligned}
\tag{137}
$$

где $\sup\limits_{0 \le x \le \pi} \sum_{n=1}^{\infty} |\rho(x, \lambda_n)| \le C$, $m = n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$, $u_R(x)$ *и* $u_I(x)$ *обозначают вещественную и мнимую части функции* $u(x)$ *соответственно.*

Соответствующие функции биортогональной системы имеют вид:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) = \cos(mx)\cdot$$
$$\cdot\left(1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R(t) + 2iu_I(t))\cos(2mt)dt + \int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\cos(mx)\Bigg(\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)(u_R^2(t) - u_I^2(t) + 4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\Bigg) +$$
$$+ \sin(mx)\Bigg(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt - 2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt -$$
$$- \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}(t)\sin(2mt)dt + \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\Bigg) +$$
$$+ \frac{1}{2m}\sin(mx)\Bigg(-\int_0^x \overline{u}^2(t)dt - \int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt +$$
$$+ \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)dt + \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\Bigg) + \rho(x,\lambda_n). \tag{138}$$

Снова перегруппируем слагаемые в полученных формулах следующим образом:

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(mx) + \phi_n(x), \quad v_n(x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(mx) + \psi_n(x), m = n - 1/2,\ n \geq N_u, \tag{139}$$

при этом $\phi_n(x)$, $\psi_n(x)$ таковы, что

$$\sup_{0\le x\le\pi} ||\{\phi_n(x)\}||_{l_2} \leq C_u, \ \sup_{0\le x\le\pi} ||\{\psi_n(x)\}||_{l_2} \leq C_u. \tag{140}$$

Кроме того последовательности $\{||\phi_n(x)||_{L_2}\} = \{\phi_n\}$ и $\{||\psi_n(x)||_{L_2}\} = \{\psi_n\}$ принадлежат пространству l_2, и

$$||\phi_n||_{l_2} \leq C_u, ||\psi_n||_{l_2} \ \leq C_u. \tag{141}$$

Вернемся к слагаемым (139). Распишем более детально функции $\psi_n(x)$, участвующие в выражении для $v_n(x)$. Из Теоремы 2.2 получаем, что

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_n(x) &= \cos(mx)\cdot \\
&\cdot\left(1-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R(t)+2iu_I(t))\cos(2mt)dt+\int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt\right)+ \\
&+\frac{1}{2m}\cos(mx)\left(\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt-\right. \\
&\left.-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t)+4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right)+ \\
&+\sin(mx)\left(\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt-2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right. \\
&\left.-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}(t)\sin(2mt)dt+\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt\right)+ \\
&+\frac{1}{2m}\sin(mx)\left(-\int_0^x \overline{u}^2(t)dt-\int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt+\right. \\
&\left.+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)dt+\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(x,\lambda_n)= \\
&=\cos(mx)\left(1-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R(t)+2iu_I(t))\cos(2mt)dt-\right. \\
&\left.-\frac{1}{2\pi m}\int_0^{\pi}(\pi-t)(u_R^2(t)-u_I^2(t)+4iu_R(t)u_I(t))\sin(2mt)dt\right)+ \\
&+\cos mx\int_0^x \overline{u}(t)\cos(2mt)dt+\sin(mx)\int_0^x \overline{u}(t)\sin(2mt)dt+ \\
&+\frac{1}{2m}\cos(mx)\int_0^x \overline{u}^2(t)\sin(2mt)dt+ \\
&+\sin(mx)\left(-2\int_0^x\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt-\right. \\
&-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\overline{u}(t)\sin(2mt)dt+\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^t \overline{u}(t)\overline{u}(s)\cos(2mt)\sin(2ms)dsdt+ \\
&+\frac{x}{2\pi m}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)dt+\frac{x}{2\pi m}\int_0^{\pi}\overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt- \\
&\left.-\frac{1}{2m}\int_0^x \overline{u}^2(t)dt-\frac{1}{2m}\int_0^x \overline{u}^2(t)\cos(2mt)dt\right)+\rho(x,\lambda_n)
\end{aligned} \tag{142}$$

Таким образом, $\psi_n(x)$ можно разбить на три группы слагаемых:

$$\psi_n(x) = \psi_{n,0} + \psi_{n,1} + \psi_{n,2}$$

$$\psi_{n,0} = \alpha_n \cos(mx) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \overline{u(t)} \cos(m(x-2t))dt, \text{где}\{|\alpha_n|\} \in l_2;$$

$$\begin{aligned} \psi_{n,1}(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(mx)(\frac{1}{2m} \int_0^x \overline{u}^2(t) \sin(2mt)dt) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx) \Big(-\frac{x}{\pi} \int_0^\pi \overline{u}(t) \sin(2mt) dt + \\ & + \frac{x}{2m\pi} \int_0^\pi \overline{u}^2(t) dt (\cos(2mt) + 1) dt + \\ & + \frac{2x}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \overline{u}(t) \overline{u}(s) \cos(2mt) \sin(2ms) ds dt - \\ & - \frac{1}{2m} \int_0^x \overline{u}^2(t) dt (1 + \cos(2mt)) dt - \\ & - 2 \int_0^x \int_0^t \overline{u}(t) \overline{u}(s) \cos(2mt) \sin(2ms) ds dt \Big); \end{aligned} \tag{143}$$

$$\sup_{0 \le x \le \pi} ||\{\psi_{n,2}(x)\}||_{l_2} \le C_u, \ \{||\psi_{n,2}(x)||_{L_2}\} = \{\psi_{n,2}\} \in l_2, \ ||\psi_{n,2}||_{l_2} \le C_u.$$

Переходим непосредственно к формулировке и доказательству теоремы о равносходимости.

Теорема 3.2.

Рассмотрим оператор L_{ND}, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2[0, \pi]$, и краевыми условиями Неймана-Дирихле $y^{[1]}(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система собственных и присоединенных функций оператора L_{ND}, причем для собственных функций $||y_n(x)||_{L_2} = 1$, а $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$— биортогональная к ней. Для произвольной функции $f \in L_2[0, \pi]$ обозначим за $c_n = (f(x), v_n(x))$, $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \cos((n-1/2)x))$. Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и по системе $\{\cos((n-1/2)x)\}_{n=1}^\infty$. При этом скорость равнос-

ходимости характеризуется следующим образом

$$\begin{aligned}&\big|\big|\sum_{n=1}^{l} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_{n,0}\cos((n-1/2)x)\big|\big|_C \le\\ &\le C_u\big(\sum_{n\ge l^{1/2-\varepsilon}}|c_{n,0}|^2\big)^{1/2} + ||f||_{L_2}(p_u([l^{1/2-\varepsilon}]) + C_u l^{-\varepsilon}),\end{aligned} \tag{144}$$

где $\varepsilon \in (0,1/2)$ *— произвольное малое положительное число,* $l^{1/2-\varepsilon} > N_u$*, а*

$$p_u(k) = C_u((\sum_{n\ge k}||\psi_n(x)||_{L_2}^2)^{1/2} + (\sum_{n\ge k}||\phi_n(x)||_{L_2}^2)^{1/2}), \quad k \ge N_u. \tag{145}$$

Доказательство

Рассмотрим операторы $B_{l,N} : L_2[0,\pi] \to C[0,\pi]$, действующие на функции $f \in L_2[0,\pi]$ следующим образом:

$$(B_{l,N})f(x) = \sum_{n=N}^{l} c_n y_n(x) - \sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_{n,0}\cos((n-1/2)x), \text{где } N = N_u. \tag{146}$$

Здесь и далее будем обозначать $m = n - 1/2, n = 1, 2, ...$ Тогда с учетом (139) и (143) для любой функции $f \in L_2[0,\pi]$ верно представление:

$$\begin{aligned}(B_{l,N})f(x) = &\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_{n,0}(t))\cos(mx) +\\ &+\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_{n,1}(t))\cos(mx) +\\ &+\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_{n,2}(t))\cos(mx) +\\ &+\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\cos(mx))\phi_n(x) +\\ &+\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_n(t))\phi_n(x).\end{aligned} \tag{147}$$

Оценим норму оператора $B_{l,N}$. Условимся при $N = 1$ для упрощения записи обозначать $B_{l,1} = B_l$.

Будем рассматривать по очереди слагаемые правой части (147). Наиболее сложной является оценка первого слагаемого. Для первой его части справедливо неравенство:

$$||\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\overline{\alpha_n}(f(t),\cos(mx))\cos(mx)||_C \le C_u||f||_{L_2}$$

Теперь необходимо оценить выражение:

$$\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(m(t-2s))dsdt\cos(mx). \tag{148}$$

Преобразуем произведение косинусов:

$$\cos(m(t-2s))\cos(mx) = 1/2(\cos(m(t-2s-x)) + \cos(m(t-2s+x)))$$

и подставим результат в (148):

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(m(t-2s))dsdt\cos(mx) = \\
&= 1/2\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(m(t-2s-x))dsdt+ \\
&+ 1/2\sum_{n=N}^{l}\int_0^{\pi} f(t)\int_0^t u(s)\cos(m(t-2s+x))dsdt
\end{aligned} \tag{149}$$

Пользуясь рассуждениями из Теоремы 3.1, аналогично доказывается, что $\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_{n,0}(t))\cos(mx) \le C_u||f||_{L_2}$.

Далее убедимся, что

$$||\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=N}^{l}(f(t),\psi_{n,1}(t))\cos(mx)||_{L_2} \le C_u||f||_{L_2}.$$

Применим полученные выше асимптотические формулы для функции $\psi_{n,1}(x)$.

$$
\begin{aligned}
(f(t),\psi_{n,1}(t)) = \frac{1}{2m}\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\int_0^t u^2(s)\sin(2ms)dsdt)-\\
-\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\frac{t}{\pi}\int_0^\pi u(s)\sin(2ms)dsdt+\\
+\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\frac{t}{2m\pi}\int_0^\pi u^2(s)(\cos(2ms)+1)dsdt-\\
-\frac{1}{2m}\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\int_0^t u^2(s)\cos(2ms)dsdt-\\
-\frac{1}{2m}\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\int_0^t u^2(s)dsdt+\\
+\int_0^\pi \frac{2tf(t)}{\pi}\sin(mt)\int_0^\pi\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau dsdt-\\
-2\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\int_0^t\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau dsdt
\end{aligned}
\tag{150}
$$

Последовательно оценим все слагаемые (150). Первое слагаемое:

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n=N}^{l}\frac{\cos(mx)}{2m}\int_0^\pi f(t)\cos(mt)\int_0^t u^2(s)\sin(2ms)dsdt\Big| \le\\
&\le \int_0^\pi |u(s)|^2 \sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\frac{\cos(mx)}{2m}\sin(2ms)\int_0^\pi f(t)\cos(mt)dt\Big|ds \le\\
&\le \int_0^\pi |u(s)|^2\sum_{n=N}^{l}\frac{1}{2m}\Big|\int_0^\pi f(t)\cos(mt)dt\Big|ds \le C_u||f||_{L_2},
\end{aligned}
\tag{151}
$$

последнее неравенство выполняется, так как $\{\int_0^\pi f(t)\cos(mt)dt\}_{n=N}^{\infty}$ принадлежит l_2 и ее норма не превосходит $||H_s f||_{L_2} \le ||f||_{L_2}$, где H_s – оператор срезки в пространстве $L_2[0,\pi]$.

Второе слагаемое (150):

$$\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi \frac{t}{\pi}f(t)\sin(mt)\int_0^\pi u(s)\sin(2ms)dsdt\cos(mx)\Big|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\Big(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi tf(t)\sin(mt)dt|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi u(s)\sin(2ms)ds|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le C_u||f||_{L_2}. \tag{152}$$

Третье слагаемое (150):

$$\begin{gathered}\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi \frac{tf(t)}{2\pi m}\sin(mt)\int_0^\pi u^2(s)(\cos(2ms)+1)dsdt\cos(mx)\Big|\le\\ \le C_u(\sum_{n=N}^{l}\frac{1}{m^2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi tf(t)\sin(mt)dt|^2)^{\frac{1}{2}}\le C_u||f||_{L_2}.\end{gathered} \tag{153}$$

Четвертое слагаемое: аналогично первому.

Пятое слагаемое: обозначим $U(t)=\int_0^t u^2(s)dt$ (эта функция будет абсолютно непрерывной), интегрируем $u^2(s)$:

$$\begin{gathered}\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\frac{\cos(mx)}{2m}\int_0^\pi f(t)\sin(mt)\int_0^t u^2(s)dsdt\Big|\le\\ \le\sum_{n=N}^{l}\frac{1}{2m}|\int_0^\pi f(t)U(t)\sin(mt)dt|\le\\ \le C(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi f(t)U(t)\sin(mt)dt|^2)^{\frac{1}{2}}\le C||f(t)U(t)||_{L_2}\le C_u||f||_{L_2}.\end{gathered} \tag{154}$$

Для оценки шестого слагаемого введем функцию $\xi(s,\tau)$, действующую по правилу: $\xi(s,\tau)=1$, если $\tau\le s$, в остальных случаях $\xi(s,\tau)=0$. Тогда функция $u(s)u(\tau)\xi(s,\tau)\in L_2[0,\pi]$. Получим:

$$|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi \frac{2tf(t)}{\pi}\sin(mx)\int_0^\pi\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds dt\cos(mx)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\sup_{0\leq x\leq\pi}(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi tf(t)\sin(mx)dt|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds|^2)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C||f||_{L_2}(\sum_{n=N}^{l}|\int_0^\pi\int_0^\pi u(s)u(\tau)\xi(s,\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_u||f||_{L_2}. \tag{155}$$

Переходим к последнему слагаемому (150). Обозначим за $\widetilde{H}_s$ оператор срезки $\widetilde{H}_s f(t) = \xi_{[s,\pi]}f(t)$. Тогда

$$|\sum_{n=N}^{l}\int_0^\pi f(t)\sin(mx)\int_0^t\int_0^s u(s)u(\tau)\cos(2ms)\sin(2m\tau)d\tau ds dt\cos(mx)| =$$

$$= \sup_{0\leq x\leq\pi}|\int_0^\pi u(s)\sum_{n=N}^{l}\cos(2ms)\cos(mx)(\widetilde{H}_s f(t),\sin(mt))(H_s u(\tau),\sin(2m\tau))ds| \leq$$

$$\leq \int_0^\pi |u(s)|\cdot|\sum_{n=N}^{l}(\widetilde{H}_s f(t),\sin(mt))(H_s u(\tau),\sin(2m\tau))|ds \leq$$

$$\leq C\int_0^\pi |u(s)|\cdot||\widetilde{H}_s f(t)||_{L_2}\cdot||H_s u||_{L_2} \leq C_u||f||_{L_2} \tag{156}$$

В результате приведенных оценок (151) — (156) получаем, что для (150) выполняется:

$$||\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=N}^{l}(f(t),\psi_{n,1}(t))\cos(mx)||_C \leq C_u||f||_{L_2}. \tag{157}$$

Вернемся снова к оценке слагаемых из основного равенства (147).

Оценка третьего слагаемого получается с учетом (143) довольно просто:

$$\begin{aligned} \sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_{n,2}(t))\cos(mx)\Big| &\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=N}^{l}\Big|\int_0^\pi f(t)\cdot\overline{\psi_{n,2}(t)}dt\Big| \\ &\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{l}||f||_{L_2}\int_0^\pi|\psi_{n,2}(t)|^2dt \le C_u||f||_{L_2}. \end{aligned} \tag{158}$$

Что касается четвертого слагаемого (147), в силу (141) выполняется неравенство:

$$||\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\cos(mt))\phi_n(x)||_C \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sup_{0\le x\le\pi}\sum_{n=N}^{l}(|(f(t),\cos(mt))|\cdot|\phi_n(x)|) \le$$
$$\le C_u||f||_{L_2}. \tag{159}$$

Для последней части (147) в силу (140) верно следующее:

$$\begin{aligned} ||\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(f(t),\psi_n(t))\phi_n(x)||_C &\le \sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}||f(t)||_{L_2}\cdot||\psi_n(t))||_{L_2}\cdot\phi_n(x)\Big| \\ &\le \sqrt{\frac{2}{\pi}}||f||_{L_2}\sup_{0\le x\le\pi}\Big|\sum_{n=N}^{l}||\psi_n(t)||_{L_2}\phi_n(x)\Big| \le C_u||f||_{L_2}. \end{aligned} \tag{160}$$

В результате, мы получили оценку основного равенства (147). Оператор B_l можно представить в виде суммы $B_l = B_{N-1} + B_{l,N}$, а так как $||B_{N-1}||_{L_2\to C} \le C_u$ (сумма конечного числа слагаемых), то и

$$||B_l||_{L_2\to C} \le C_u$$

.

Таким образом, мы доказали равномерную ограниченность операторов B_l для любой функции $u \in L_2[0,\pi]$.

Рассмотрим действие оператора B_l на собственные и присоединенные функции оператора L:

$$(B_ly_k)(x) = \sum_{n=1}^{l}(y_k(x),v_n(x))y_n(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{l}(y_k(x),\cos(mx))\cos(mx). \tag{161}$$

Первое слагаемое (161) равно 0 при $m < k$ и равно $y_k(x)$ при $m \geq k$. Второе слагаемое представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции y_k. Все функции $y_k \in W_2^1[0,\pi]$, поэтому ряд Фурье функции y_k сходится к ней равномерно на отрезке $[0,\pi]$, и мы получаем, что

$$\lim_{l\to\infty} ||B_l y_k||_C = 0. \tag{162}$$

Далее воспользуемся вспомогательной теоремой

Теорема ([15], теорема 2.7)

Пусть $u \in L_2[0,\pi]$. Тогда система $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ собственных и присоединенных функций оператора L образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$.

Отсюда следует, что любую функцию $f(x)$ можно приблизить линейными комбинациями функций системы $\{y_k(x)\}$, и верно равенство:

$$\lim_{l\to\infty} ||B_l f||_C = 0. \tag{163}$$

Таким образом, мы доказали равносходимость разложения в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L_{ND} и системе $\{\cos((n-1/2)x)\}_{n=1}^{\infty}$. Остался нерешенным вопрос о скорости этой равносходимости.

Обозначим за $g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} c_n y_n(x)$ для любого $k \geq N_u$ (где $c_n = (f(x), v_n(x))$). Тогда для любой функции $f \in L_2[0,\pi]$ и для любого натурального l выполнено:

$$||B_l f||_C \leq ||B_l(f-g_k)||_C + ||B_l g_k||_C. \tag{164}$$

Оценим нормы первого слагаемого правой части (164) в пространстве $C[0,\pi]$.

$$||B_l(f-g_k)||_C \leq C_u\Big(\sum_{n=k+1}^{\infty} |c_{n,0}|^2\Big)^{1/2} + ||f||_{L_2} p_u(k+1), \tag{165}$$

где $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \cos(mx))$, а числа $p_u(k)$ определены в (145).

Подставим асимптотические формулы (139):

$$||f(x) - g_k(x)||_{L_2} \leq ||\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{\pi}(f(x), \cos(mx))\cos(mx)||_{L_2} +$$

$$+||\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(f(x),\psi_n(x))\cos(mx)||_{L_2}+$$

$$+||\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(f(x),\cos(mx))\phi_n(x)||_{L_2}+||\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(f(x),\psi_n(x))\phi_n(x)||_{L_2}\leq$$

$$\leq C_u(\sum_{n=k+1}^{\infty}|c_{n,0}|^2)^{1/2}+$$

$$+||f||_{L_2}\big((\sum_{n=k+1}^{\infty}||\psi_n||^2_{L_2})^{1/2}+(\sum_{n=k+1}^{\infty}||\phi_n||^2_{L_2})^{1/2}+\sum_{n=k+1}^{\infty}||\psi_n||_{L_2}\cdot||\phi_n||_{L_2}\big)=$$

$$=C_u(\sum_{n=k+1}^{\infty}|c_{n,0}|^2)^{1/2}+v_u(k+1)||f||_{L_2}.$$

Так как норма оператора B_l не превосходит константу C_u, отсюда вытекает неравенство (165).

Перейдем к оценке второго слагаемого в (164).

Пусть $l > k$. Обозначим через S_l оператор, действующий из пространства $W_2^1[0,\pi]$ в пространство $C[0,\pi]$ по правилу: $S_l h(x) = 2/\pi\sum_{n=l+1}^{\infty}(h(t),\cos mt)\cos mx$. Все собственные и присоединенные функции оператора L_{ND} принадлежат пространству $W_2^1[0,\pi]$, значит действие оператора S_l на них корректно определено, следовательно, верно:

$$B_l g_k(x)=g_k(x)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{l}(g_k(t),\cos(mt))\cos(mx)=S_l g_k(x)$$

Откуда:

$$||B_l g_k||_C\leq||S_l(g_k-g_N)||_C+||S_l g_N||_C \tag{166}$$

Пусть $m>k\geq N_u$. Получаем, что

$$||S_l(g_k-g_N)||_C=||\sum_{n=N+1}^{k}c_nS_ly_n(x)||_C=||\sum_{n=N+1}^{k}c_nS_l\phi_n(x)||_C,$$

так как $y_n(x)=\sqrt{2/\pi}\cos mx+\phi_n(x)$, (см. (139)). Далее воспользуемся тем, что

$$\sum_{n=N+1}^{k}|c_n|^2 \le \sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|^2 \le$$
$$\le 2\ \Big(\frac{2}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}|(f(x),\cos(mx))|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty}|(f(x),\psi_n(x))|^2\Big) \le C_u||f||^2_{L_2}$$

.

Тогда

$$||\sum_{n=N+1}^{k} c_n S_l\phi_n(x)||_C \le (\sum_{n=N+1}^{k}|c_n|^2)^{1/2}(\sum_{n=N+1}^{k}||S_l\phi_n(x)||^2_C)^{1/2} \le$$

$$C_u||f||_{L_2}(\sum_{n=N+1}^{k}||S_l\phi_n(x)||^2_C)^{1/2}.$$

Оценим норму $||S_l\phi_n(x)||_C$ с учетом того, что $\phi_n(0)=0$.

$$\begin{aligned}
&||S_l\phi_n(x)||_C \le \frac{2}{\pi}\sum_{j=l+1}^{\infty}|(\phi_n(x),\cos((j+1/2)x))| = \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{|(\phi_n(x)^{'},\sin((j+1/2)x))|}{j+1/2} \le \\
&\le \frac{2}{\pi}\Big(\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1/2)^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=l+1}^{\infty}|(\phi_n(x)^{'},\cos((j+1/2)x))|^2\Big)^{1/2} \le \\
&\le C_u l^{-1/2}||\phi_n(x)||_{W_2^1}.
\end{aligned} \tag{167}$$

Из [39], §2 следует, что $\phi_n(x)^{'} = n\eta_n(x) + u(x)y_n(x)$, $||\phi_n(x)||_{W_2^1} \le C_u n\eta_n$, где $||\{\eta_n\}||_{l_2} \le C_u$. Отсюда получаем, что

$$||S_l\phi_n(x)||_C \le C_u l^{-1/2} n\eta_n.$$

В результате, первое слагаемое (166) можно оценить так:

$$||S_l(g_k - g_N)||_C \le C_u||f||_{L_2}\Big(\sum_{n=1}^{k} l^{-1}n^2\eta_n^2\Big)^{1/2} \le C_u||f||_{L_2} l^{-1/2}k.$$

Что касается второго слагаемого, действие оператора S_l на функции g_N оценивается так же, как в (167):

$$||S_l g_N(x)||_C \leq C_u l^{-1/2} ||g_N(x)||_{W_2^1}.$$

Число N фиксировано и зависит только от первообразной потенциала u, поэтому $||g_N(x)||_{W_2^1} \leq C_u ||f||_{L_2}$ и

$$||S_l g_N||_C \leq C_u l^{-1/2} ||f||_{L_2}.$$

В итоге, получаем, что

$$||B_l g_k||_C \leq ||f||_{L_2} \cdot C_u k l^{-1/2}. \tag{168}$$

Теперь достаточно взять $k = [l^{1/2-\varepsilon}]$, где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ произвольно, и из (164), (165), (168) будет непосредственно следовать (144). Теорема 3.2 полностью доказана. □

Замечание 3.1

Доказательство равносходимости в случае граничных условий Неймана полностью совпадает с рассуждениями Теоремы 3.2 с той лишь разницей, что m будет целым числом. Это следует из доказательства Теоремы 2.3 Главы 2, откуда видно, что начиная с формулы (139) *рассуждения будут повторяться.*

3. Обобщенная теорема о равносходимости с оценкой ее скорости

Сформулируем полученные результаты в виде общей теоремы.

Теорема 3.4

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, где $q(x) = u'(x)$ в смысле распределений, а комплекснозначная функция $u(x) \in L_2[0, \pi]$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система собственных и присоединенных функций оператора L, причем для собственных функций $||y_n(x)||_{L_2} = 1$, а $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$— биортогональная к ней. Для произвольной функции $f \in L_2[0, \pi]$ обозначим за $c_n = (f(x), v_n(x))$, $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), F(mx))$. Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

и по системе $\{F(mx)\}$. *При этом скорость равносходимости характеризуется следующим выражением*

$$\begin{aligned} &\Big|\Big|\sum_{n=1}^{l} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{l}\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_{n,0}F(mx)\Big|\Big|_C \le \\ &\le C_u\Big(\sum_{n\ge l^{1/2-\varepsilon}}|c_{n,0}|^2\Big)^{1/2} + ||f||_{L_2}(v_u([l^{1/2-\varepsilon}]) + C_u l^{-\varepsilon}), \end{aligned} \tag{169}$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *— произвольное малое положительное число,* $l^{1/2-\varepsilon} > N_u$, *а*

$$v_u(k) = C_u((\sum_{n\ge k}||\psi_n||^2_{L_2})^{1/2} + (\sum_{n\ge k}||\phi_n||^2_{L_2})^{1/2}), \quad k \le N_u.$$

Здесь в случае граничных условий

- *Дирихле* $(y(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$ $\ F(\alpha) = \sin(\alpha),\ m \in \mathbb{N}$,
- *Неймана* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$ $\ F(\alpha) = \cos(\alpha)$, $m \in \mathbb{N}\bigcup 0$,
- *Дирихле–Неймана* $(y(0) = 0,\ y^{[1]}(\pi) = 0)$ $\ F(\alpha) = \sin(\alpha)$, $m = n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$,
- *Неймана–Дирихле* $(y^{[1]}(0) = 0,\ y(\pi) = 0)$ $\ F(\alpha) = \cos(\alpha), m = n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство

Доказательство следует из Теоремы 3.1, Теоремы 3.2 и Замечания 3.1. □

Список литературы

[1] Березин Ф.А. О модели Ли // Матем. сборник, 1963, Т.60, Выпуск 4, С. 425-446.

[2] Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечания об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // ДАН СССР, 1961, Т. 137, №7, С. 1011-1014.

[3] Минлос Р.А., Фаддеев Л.Л. О точечном взаимодействии для систем из трех частиц в квантовой механике // ДАН СССР, 1961, Т. 141, №6, С. 1335-1338.

[4] Albeverio S., Gestezy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Some exactly solvable models in quantum mechanics // Springer-Verlag, 1988.

[5] Кошманенко В.Д. Возмещение самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами // Укр. Мат. Журнал, 1989, Т. 41, №1.

[6] Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators // London Math. Society Lecture Note Series №271, Cambridge Univ. Press, 2001.

[7] Крейн М.Г. Об одном обобщении исследований Стильтьеса // ДАН СССР, 87, 1952, №6, С. 365-404.

[8] Кац И.С. О существовании спектральных функций некоторых сингулярных дифференциальных систем второго порядка // ДАН СССР, 106, 1956, №1, С. 15-18.

[9] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи // М.: Мир, 1968.

[10] Жиков В.В. Об обратных задачах Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Серия математика, Т. 31, №5, 1967, С. 965-976.

[11] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего дельта-функции // Дифф. уравнения, Т. 38, №6, 2002, С. 735-751.

[12] Gunson J. Perturbation theory for a Sturm-Liouville problem with an interior singularity // Proc. R. Soc. London, A411, 1987.

[13] Kurasov P. On the Coulomb potentials in one dimension // J. Phys. A 29, 1996, №8, C. 1767-1771.

[14] Atkinson F., Everitt W., Zettl A. Regularization of a Sturm-Liouville problem with an interior singularity using quasi-derivatives // Diff. Integr. Eq., 1, №2, 1988, C. 213-221.

[15] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, Т. 66. №6, 1999, С. 897-912.

[16] Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А.Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // Матем. заметки, Т. 66. №5, 1999.

[17] Савчук А.М. О собственных функциях и собственных значениях операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, Т. 69. №2, 2001, С. 277-295.

[18] Савчук А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Диссертация на соискание ученой степени физ.-мат. наук, Москва, 2001.

[19] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Формула следа для оператора Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, Т. 68. №3, 2000, С. 427-442.

[20] Hriniv R., Mykytyuk Ya. 1D Shredinger operators with singular periodic potentials // Meth. Funct. Anal. Topol., 7, №4, 2001, C. 31-42.

[21] Hriniv R., Mykytyuk Ya. 1D Schredinger operators with singular Gordon potentials // Meth. Funct. Anal. Topol., 8, №1, 2002, C. 36-48.

[22] Hriniv R., Mykytyuk Ya. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems, 19, 2003, P. 665-684.

[23] Hriniv R., Mykytyuk Ya. Transformation operators for Sturm–Liouville operators with singular potentials // Math. Phys. Anal. Geom., 7, 2004, P. 119-149.

[24] Hriniv R., Mykytyuk Ya. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials // J. Funct. Anal., 238, no.1, 2006, P. 27-57.

[25] Savchuk A.M., Shkalikov A.A. Inverse Problem for Sturm-Liouville Operators with Distribution Potentials: Reconstruction from Two Spectra // Russ. J. Math. Phys, Vol. 12, No 4, 2005, P. 507-515.

[26] Савчук А.М., Шкаликов А.А. О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Матем. заметки, 2006, 80:6, 864-884.

[27] Савчук А.М. Метод отображений в обратных задачахШтурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Труды Московского Института им. В.А.Стеклова Российской Академии Наук, Т. 261, 2008, 243-248.

[28] Савчук А.М., Шкаликов А.А. О свойствах отображений, связанных с обратной задачей Штурма-Лиувилля // Труды Московского Института им. В.А.Стеклова Российской Академии Наук, Т. 260, 2008, 227-247.

[29] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость. // Функц. анализ и его прил., 44:4 (2010), 34-53.

[30] Савчук А.М. О собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // arXiv 1003.3172, 2010.

[31] Djakov P.B., Mityagin B.S. Instability zones of periodic 1-dimensional SchroËdinger and Dirac operators // Uspekhi Mat. Nauk, 61:4(370) (2006), 77–182.

[32] Djakov P.B., Mityagin B.S. Equiconvergence of spectral decompositions of Hill operators // Doklady Mathematics July 2012, Volume 86, Issue 1, pp 542-544.

[33] Садовничая И.В. О скорости равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом–распределением // Дифф. уравнения, Т. 44, №5, 2008, С. 656-664.

[34] Садовничая И.В. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями // Матем. сборник, Т. 201, №9, 2010, С. 61-76.

[35] Kostenko A.S., Malamud M.M. 1-D Schrodinger operators with local point interactions on a discrete set // Journal of Differential Equations Volume 249, Issue 2, 15 July 2010, Pages 253–304.

[36] Konechnaya N.N. Asymptotic integration of symmetric second-order quasidifferential equations // Mathematical Notes December 2011, Volume 90, Issue 5-6, pp 850-858.

[37] Konechnaya N.N., Mirzoev K.A. On a class of operators related to second-order differential equations // Russian Journal of Mathematical Physics March 2006, Volume 13, Issue 1, pp 55-63.

[38] Konechnaya N.N. The asymptotic behavior of solutions for a class of differential equations // Journal of Mathematical Sciences November 2007, Volume 147, Issue 1, pp 6430-6434.

[39] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами — распределениями // Труды Московского Мат. Общества, Т.64, 2003, С. 159–219.

[40] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы // М.: Наука, 1969.

[41] Швейкина О.А. Об асимптотике собственных функций операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами — распределениями // Дифф. уравнения, Т. 49, №8, 2013, С. 985–992.

[42] Швейкина О.А. Обобщенные теоремы об асимптотиках собственных функций операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами — распределениями // Дифф. уравнения, Т. 50, №5, 2014, С. 623–632.

[43] Швейкина О.А. Об асимптотике собственных функций операторов Штурма-Лиувилля // Ломоносовские чтения 2011, С. 84-85.

[44] Швейкина О.А. Теоремы о равносходимости для операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами – распределениями // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль-2012), С. 181.

[45] Швейкина О.А. О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Международная конференция, посвященная 90-летию Л.Д. Кудрявцева, С.260.

[46] Everitt W.N. A note on linear ordinary quasi-differential equations // Proc. Math. Soc. Edinburg, Sect. A., 1985, V. 101, №1-2, C. 1-14.

[47] Everitt W.N., Markus L. Controlability of [r]-matrix quasi-differential equations // J. Differential Equations, 1991, V.89, №1, C. 95-109.

[48] Everitt W.N., Zettl A. Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the real line // Proc. London Math. Soc., Ser. 3, 1992, V. 64, №3, C. 524-544.

[49] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения // Киев. Наукова Думка, 1977.

[50] Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения I, II // Матем. сб., Т. 20, 1947, №3, С. 431-490; Т. 21, 1947, №3, С. 365-404.

[51] Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М. Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств // Мариуполь, 2001.

[52] Като Т. Теория возмущений линейных операторов // М.6 Мир, 1972.

[53] Бак Дж.-Г., Шкаликов А.А. Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шредингера с потециалами–распределениями // Матем. заметки, 2002, V. 71, №5, С. 643-651.

[54] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения // М.: Мир. 1970.

[55] Бари Н.К. Тригонометрические ряды // М.: Государственное издательство физ.-мат. литературы, 1961.

[56] Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства // М. : Государственное издательство иностранной литературы, 1948.