

ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СРЕДЕ С НЕСБАЛАНСИРОВАННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ИСТОЧНИКОВ

Профессор Быков А. А.

1. Введение. Представлены результаты исследования контрастных структур(КС), возникающих при моделировании двумерных задач реакции--адвекции--диффузии. Найдена скорость дрейфа дисбаланса, градиентного дрейфа, дрейфа кривизны. Дано обоснование с использованием метода дифференциальных неравенств.

Мы изучаем КС, возникающие при моделировании процессов реакции-адвекции-диффузии (РАД) в двумерной неоднородной среде. В соответствии с методикой А.Н.Тихонова [1], рассматриваем сингулярно возмущенную задачу с малым параметром для уравнения РАД:

$\varepsilon u'_t + \varepsilon V_x u'_x + \varepsilon V_y u'_y = \varepsilon^2 (\kappa u'_x)'_x + \varepsilon^2 (\kappa u'_y)'_y - f(u, x, y), \quad (x, y) \in D, \quad t > t_0 = 0,$ с граничными условиями второго рода на ∂D (граница D) и с начальным условием $u(x, y, t_0) = \psi_0(x, y)$.

Определим поверхность равновесия $S_j(x, y)$ как множество точек (u, x, y) , для которых $f(\varphi_j(x, y), x, y) = 0$. Предположим, что выполнены

У1. В области $(u, x, y) \in (-\infty, +\infty) \times D$ имеется ровно три поверхности равновесия: $u(x, y) = \varphi_{1;2;3}(x, y)$. **У2.** В окрестности корня ФПИ представляется в виде

$f(u, x, y) = F_j(u - \varphi_j(x, y), x, y)$ при $(u, x, y) \in \Omega(S_j)$, $j \in \{1; 2; 3\}$, $F_{1;2;3}(\omega, x, y)|_{\omega=0} = 0$ и $\left. \frac{dF_{1;3}(\omega, x, y)}{d\omega} \right|_{\omega=0} > 0$, $\left. \frac{dF_2(\omega, x, y)}{d\omega} \right|_{\omega=0} < 0$. Здесь $\Omega(...)$ есть окрестность указанного объекта.

У3. Пусть $J(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_3(x, y)} f(u, x, y) du$. Мы рассмотрим ФПИ такую, что внутри D есть замкнута гладкая кривая $\tilde{\Upsilon}_0$, ограничивающая область G_0 с границей $\tilde{\Upsilon}_0 = \partial G_0$ такая, что

$J(x, y)|_{\tilde{\Upsilon}_0} = 0$, $J(x, y) > 0$ внутри G_0 и $J(x, y) < 0$ вне G_0 , $\left. \frac{\partial J(x, y)}{\partial \vec{n}} \right|_{\tilde{\Upsilon}_0} > 0$, $\vec{n}$ есть внешняя

нормаль к $\tilde{\Upsilon}_0$. Начальные условия зададим в виде G_{start} - связная область с гладкой границей Υ_{start} , $G_{start} \subset D$, расстояние от Υ_{start} до ∂D больше нуля.

2. Эволюция ВПС. Частичную сумму асимптотического ряда для решения задачи РАД будем искать в соответствии с [2], форму ВПС зададим в виде $\Upsilon(t) = \Upsilon_0(t) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \Upsilon_k(t)$, функции

$x(\theta, t) = \phi(\theta, t)$, $y(\theta, t) = \psi(\theta, t)$, есть ряды по степеням параметра ε .

3. Локальные координаты. Пусть замкнутая гладкая кривая $\Upsilon(t)$ есть граница области $D(t)$ (пятно контрастной структуры). Зададим $\Upsilon(t)$ в параметрической форме: $x = x(\theta, t)$, $y = y(\theta, t)$, θ -параметр, $\theta \in (\theta_a, \theta_b)$. Рассмотрим уравнение РАД в окрестности $\hat{\Upsilon}$, которую обозначим $\Omega(\hat{\Upsilon})$. На $\hat{\Upsilon}$ введем координату θ , равную длине дуги, отсчитываемую от некоторой точки $\hat{M}_0 \in \hat{\Upsilon}$. В каждой точке $\hat{\Upsilon}$ построим внутреннюю нормаль $\vec{n}$. На нормали введем координату s так, что $ds^2 = dx^2 + dy^2$, и на $\hat{\Upsilon}$ было верно $s = \hat{s}$. Ось s направлена вдоль градиента (u'_x, u'_y) функции $u(x, y, \hat{t})$ наружу по отношению к $D(\hat{t})$, ось θ направлена вдоль $\hat{\Upsilon}$ в положительном направлении. Пусть верно **У4. Функция баланса** $J(s, \theta)$ для любого θ есть монотонная вдоль переменной s в некоторой окрестности (s_0, θ) для всех θ , имеющая противоположные знаки.

Уравнение РАД запишем в системе координат (s, θ) в виде $\varepsilon u'_t + \varepsilon(A_1 V_s u'_s + A_2 V_\theta u'_\theta) = \kappa \varepsilon^2 (A_{11} u''_{ss} + 2A_{12} u''_{s\theta} + A_{22} u''_{\theta\theta} + B_1 u'_s + B_2 u'_\theta) - f(u, s, \theta)$, $(s, \theta) \in \Omega(\Upsilon)$. Здесь $A_{11} = (s'_x)^2 + (s'_y)^2$, $A_{12} = s'_x \theta'_x + s'_y \theta'_y$, $A_{22} = (\theta'_x)^2 + (\theta'_y)^2$, $B_1 = s''_{xx} + s''_{yy}$, $B_2 = \theta''_{xx} + \theta''_{yy}$, $V_\theta(s, \theta) = V \sin \alpha$, $V_s(s, \theta) = V \cos \alpha$, где $v = V(x(s, \theta), y(s, \theta))$, α -угол между Ox и Os в точке (s, θ) .

4. Разделение медленной и быстрой координат. Пусть $(\tilde{s}, \tilde{\theta})$ есть некоторая точка на $\hat{\Upsilon}$.

Выполним замену $s = \tilde{s} + \varepsilon \xi$, $\theta = \tilde{\theta} + \eta$, $t = \varepsilon \tau$, $\varepsilon u'_t = u'_\tau$, $\varepsilon u'_s = u'_\xi$, получим уравнение

$$u'_\tau + V_s u'_\xi + \varepsilon V_\theta u'_\eta = \kappa (A_{11} u''_{\xi\xi} + 2\varepsilon A_{12} u''_{\xi\eta} + \varepsilon^2 A_{22} u''_{\eta\eta}) + \varepsilon \kappa B_1 u'_\xi + \varepsilon^2 \kappa B_2 u'_\eta - f(u, \tilde{s} + \varepsilon \xi, \tilde{\theta} + \eta).$$

Задача нулевого приближения: $u'_\tau + V_s(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta) A_1 u'_\xi = \kappa A_{11} u''_{\xi\xi} - f(u, \tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta)$, $u(-\infty, \eta) = \varphi_1(\tilde{s}, \tilde{\theta})$,

$u(+\infty, \eta) = \varphi_3(\tilde{s}, \tilde{\theta})$. Рассмотрим "сопутствующую" задачу в точке $M_0 = (\tilde{s}, \tilde{\theta}) \in \tilde{\Upsilon}_0$:

$$v'_\tau + V_s(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta) A_1 v'_\xi = \kappa A_{11} v''_{\xi\xi} - f(v, \tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \quad v(-\infty) = \varphi_1(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta), \quad v(+\infty) = \varphi_3(\tilde{s}, \tilde{\theta} + \eta).$$

5. Решение в виде бегущей квазиволны. Решение будем искать в виде бегущей квазиволны:

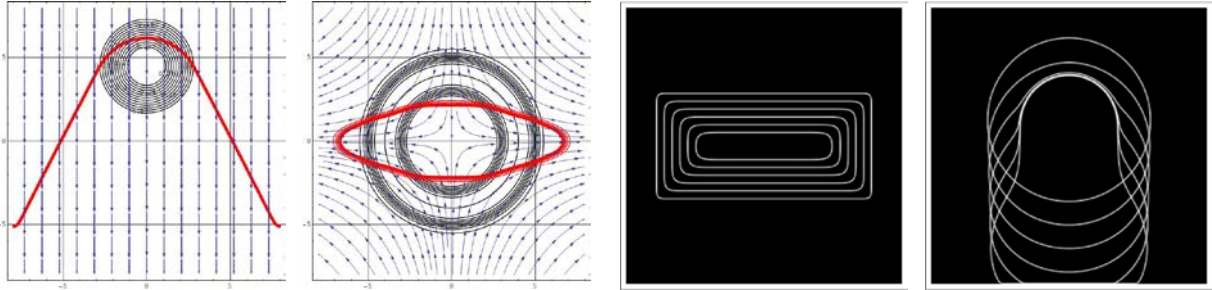
$$v(\xi, \tau) = w(\chi), \quad \text{где } \chi = \xi - W\tau: -\hat{U} w'_\chi = \kappa A_{11} w''_{\chi\chi} - f(w), \quad w(-\infty) = \varphi_1 + 0, \quad w(+\infty) = \varphi_3 - 0, \quad \text{где}$$

$$\hat{U} = W - A_1 V_s, \quad \text{Найдем } (\dagger) \quad \hat{U} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (w'_\chi)^2 d\chi \right]^{-1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} f(w) dw. \quad \text{Значение } \hat{U} \text{ однозначно находится}$$

[4], для этого $\hat{U}$ задача разрешима, значение $\hat{U}$ находится из $(\dagger)$.

6. Стационарная линия ВПС нулевого порядка. Пусть $\vec{r}(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t))$ есть

решение задачи Коши $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -\vec{n}(x, y)(\hat{U}(x, y) + (\vec{V}, \vec{n}(x, y)))$, $\vec{n}(x, y) = (-\frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \theta})[(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2]^{-1/2}$, $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \Omega$, $\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \Omega$, где $\Omega = [(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2]^{-1/2}$ $(\hat{U}(x, y) + (-V_x \frac{\partial y}{\partial \theta} + V_y \frac{\partial x}{\partial \theta})[(\frac{\partial x}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \theta})^2]^{-1/2})$. Стационарное решение определяет линию равновесия нулевого порядка. Приведем найденные численно линии равновесия для случая неоднородной среды со знакоопределенной функцией баланса (рис. 1, 2):



7. Уравнение эйконала. Пусть θ есть геометрическая длина пути вдоль траектории квазилуча, $(\star) (\nabla S)^2 = W^{-2}(x, y)$, $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = W(x, y)\nabla S$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = W^2(x, y)\nabla S$, $\frac{dx}{dt} = 2p_1$, $\frac{dy}{dt} = 2p_2$ $\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial W^{-2}}{\partial x}$, $\frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial W^{-2}}{\partial y}$, $S(x, y) = S_0 + \int_{L[t_0, t_1]} \langle p, dx \rangle = S_0 + \int_{L[t_0, t_1]} W^{-1} dl$ $S|_{\vec{r}_0} = 0$. Приведем два примера эволюции линии ВПС для нестационарного решения (рис. 3, 4).

8. Гладкий фронт в среде без адвекции. Для задачи РАД в этом случае можно записать точное явное решение уравнений нулевого порядка. **Теорема.** При сформулированных условиях **У 1-4** найдется промежуток $t \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$, такой, что семейство $(\star)$ разрешимо на $[0, T_0]$, каждая функция семейства $\vec{r}_\theta(t) = (x(s, t), y(s, t))$ гладкая от t , при каждом $t \in [0, T_0]$ функция семейства $\vec{r}(s)|_t = (x(s, t), y(s, t))$ гладкая периодическая. Точная оценка для значения T_0 : $T_0 = W/R_0$, R_0 есть наименьшее значение радиуса кривизны фронта ВПС в начальный момент времени. Доказательство основано на уравнениях эйконала.

Литература

1. Тихонов А. Н. // Матем. сборник. 1948. **22(64)**, №.2. С. 193-204.
2. Нефедов Н. Н. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. **61**, №.12. С. 2074-2094 .
3. Бутузов В. Ф. // Дифференциальные уравнения . 2015 . **51** , №. 12 . С. 1593 -- 1605 .
4. Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. **50**, №.2. С. 276-285 .