МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

mmlbl.bmp

Механико-математический факультет

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том IX

Математика

Выпуск 3

К 80-летию механико-математического факультета МГУ
Дифференциальные уравнения

2014 год

УДК
ББК
С

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ. Том IX. Математика. Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета. Дифференциальные уравнения / Под редакцией И.В. Асташовой и И.Н. Сергеева. — М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2014. — X с.

ISBN

Выпуск посвящается

80-летию Механико-математического факультета МГУ

ISBN

Предисловие

31 мая 2013 года механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова отмечает своё 80-летие.

В настоящем сборнике представлены работы сотрудников и воспитанников кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, посвященные этому юбилею.

Кафедра Дифференциальных уравнений

Козлов В.В.[1], **Чечкин Г.А.**[2]

История кафедры дифференциальных уравнений Механико–математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова начинается в конце 1935 года. Здесь мы вкратце излагаем историю кафедры, пишем о людях, работавших на кафедре, рассказываем о делах кафедры.

Если математику разделить условно на три большие этапа (элементарную, высшую и современную), то дифференциальные уравнения возникают в самом начале второго этапа в середине XVII века одновременно с возникновением понятия производная и, как следствие этого, дифференциального и интегрального исчисления. Непосредственными родоначальниками теории дифференциальных уравнений можно считать И.Ньютона, Г.Лейбница, Д.Бернулли, Ж. Даламбера и Л.Эйлера. Теория дифференциальных уравнений с одной стороны зарождалась как прикладная наука, которая описывает реальные явления природы, многие процессы промышленного производства, а с другой – многочисленные приложения нового исчисления в физику, химию, биологию, инженерное дело шли также через дифференциальные уравнения. В настоящее время теория дифференциальных уравнений является важным и бурно развивающимся разделом математики, тесно связанным с ее другими разделами (алгеброй, топологией, теорией функций, функциональным анализом, теорией вероятности), идеи и методы которых она использует и при этом оказывает влияние на их развитие, поставляя эти разделам новые задачи, возникающие как внутри самой теории, так и в связи с потребностями практики.

Днем рождения кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ можно считать 4 декабря 1935 г., когда был подписан приказ №0123 по Механико-математическому факультету МГУ. Параграф 1 этого приказа гласит:

“В соответствии с приказами по управлению университетов и НИУ Наркомпроса за №131, 144, 145 (октябрь – ноябрь 1935 г.) объявляю об утверждении изменений в составе кафедр факультета.

1. Вместо двух кафедр анализа утверждаются три кафедры: анализа и теории функций, дифференциальных уравнений, функционального анализа. Заведующим кафедрой дифференциальных уравнений утверждается профессор В.В. Степанов[3]” .

[1]Козлов В.В., профессор, академик РАН, заведующий кафедрой, кафедра дифференциальных уравнений, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[2]Чечкин Григорий Александрович, chechkin@mech.math.msu.su, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Текст этого приказа и другие архивные материалы предоставлены в распоряжение авторов сотрудниками кабинета истории математики и механики МГУ Л.А. Сорокиной и др. Авторы приносят им свою искреннюю благодарность.

Деканом Механико-математического факультета МГУ в те годы был Л.А. Тумаркин. Сохранилось мало архивных документов о деятельности кафедры в первые годы ее существования. Большой интерес представляет находящийся в архиве МГУ "Отчет комиссии о проверке работы кафедры дифференциальных уравнений по поручению дирекции МГУ 15–29 декабря 1936 г.", подписанный профессором А.Н. Несмеяновым и преподавателем А.Ю. Ишлинским[4]. Как указано в отчете, в состав кафедры в то время входили: профессора, доктора наук: В.В. Степанов, Д.Е. Меньшов, В.В. Немыцкий, И.Г. Петровский, С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов; профессора, но не доктора наук: В.А. Кудрявцев, Д.Ю. Панов, кандидаты наук: С.А. Гальперн, Н.С. Пискунов, А.Н. Черкасов.

В ведении кафедры состояли следующие курсы:

1. Дифференциальные уравнения с упражнениями, III курс (В.В. Степанов, С.А. Гальперн, Н.С. Пискунов, А.Н. Черкасов – I поток; И.Г. Петровский, С.А. Гальперн, А.Н. Черкасов – II поток).

2. Уравнения теплопроводности (А.Н. Тихонов).

3. Специальные функции (В.А. Кудрявцев).

4. Дифференциальные уравнения математической физики (Д.Е. Меньшов), IV курс.

5. Качественные методы интегрирования дифференциальных уравнений (В.В. Немыцкий).

6. Интегральные уравнения (Д.Ю. Панов).

Кафедра руководила семинарами:

1. Качественные методы интегрирования уравнений (В.В. Степанов, В.В. Немыцкий).

2. Уравнения в частных производных (И.Г. Петровский, С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов).

В отчете отмечается, что "все курсы, находящиеся в ведении кафедры, обеспечены лекторами высокой научной квалификации. Содержание ведущих курсов интересно, оригинально и отражает современное состояние теории дифференциальных уравнений и позднейшие работы самих членов кафедры. Работа специальных семинаров качественно высока и четко налажена. Членами кафедры ведется большая научно-исследовательская работа. Научная работа членов кафедры часто имеет прикладной характер (работы А.Н.Тихонова, Д.Ю. Панова). К кафедре нередко обращаются за консультациями прикладники, окончившие Механико-математический факультет. Поддерживается связь с трестом "Фундаментстрой", Институтом сооружений, ЦАГИ, Технологическим институтом и другими".

Интересны выводы комиссии: "Комиссия считает, что кафедра дифференциальных уравнений, руководимая В.В. Степановым, представляет сильный, в значительной мере научно спаянный коллектив, обеспечивающий высокое качество лекций, упражнений, семинаров, докладов членов кафедры и других видов научной работы. Кафедра высоко держит научное знамя, приобщает студентов к вершинам науки, не прерывает связи с окончившими университет и помогает в разрешении конкретных вопросов практики социалистического строительства".

[4] А.Н. Несмеянов (1899–1980) — академик с 1943 г., президент АН СССР с 1951 г., А.Ю. Ишлинский (1913–2003) — академик с 1960 г.

Как недостаток работы кафедры отмечается “пренебрежение к заседаниям кафедры” (в 1936–1937 учебном году не было ни одного заседания кафедры), следствием этого являлось “отсутствие коллективного обсуждения вопросов, а также отсутствие какой-либо документации работы”. В другом месте отчета указывается, что “руководство кафедрой осуществляется В.В. Степановым путем живой связи со всеми членами кафедры. Преподаватели и лекторы отчитываются В.В. Степанову о состоянии работы и получают от В.В. Степанова необходимые указания и советы”.

В.В. Степанов (1889–1950), ученик Д.Ф. Егорова, был человеком разносторонних интересов. Он был одним из самых уважаемых и любимых профессоров на Механико-математическом факультете. Степанов обладал необычайной эрудицией, глубоко владел самыми различными разделами математической науки. Его первые исследования относятся к теории функций многих действительных переменных и теории почти периодических функций. Он ввел новый класс обобщенных почти-периодических функций, названных в его честь. Его основные интересы концентрировались вокруг качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем. Фундаментальным результатом является доказанная им общая эргодическая теорема для пространств с бесконечной мерой. Степанов создал многочисленную и разветвленную научную школу. Он преподавал дифференциальные уравнения, читал обязательные и специальные курсы. В 1936 г. вышло первое издание его учебника “Курс дифференциальных уравнений”, который неоднократно переиздавался. Более 10 лет он возглавлял Институт математики МГУ, был вице-президентом Московского математического общества. В 1947 году вышла в свет его книга, написанная совместно с В.В. Немыцким, “Качественная теория дифференциальных уравнений”, подводившая итог многолетней деятельности возглавляемого им семинара.

Мысль об организации семинара по качественной теории дифференциальных уравнений возникла у В.В. Степанова в 1929–1930 гг. Организации этого семинара способствовали два обстоятельства. У молодых топологов, группировавшихся вокруг П.С. Александрова, возник интерес к работам Г.Д. Биркгофа по общей динамике. Эти работы открывали новые возможности применения теории множеств и топологии к решению общих проблем механики и физики. С другой стороны, в школе Л.И. Мандельштама стала разрабатываться теория нелинейных колебаний с помощью методов качественной теории. Степанов был близок к топологам и физикам и интересовался вопросами небесной механики. В 1930 г. состоялось первое заседание семинара по качественной теории дифференциальных уравнений, на котором был заслушан доклад А.А. Маркова об абстрактной теории динамических систем. Эта тематика была основной в течении долгого периода работы семинара. Общая теория динамических систем, развитая Г.Д. Биркгофом в своих идейных основах, получила дальнейшее развитие в работах участников семинара. Одним из активнейших участников семинара был ученик Степанова – М.И. Бебутов, погибший на фронте Великой Отечественной войны. Война прервала работу семинара, которая возобновилась только в 1943/1944 учебном году после возвращения МГУ из эвакуации. В послевоенный период тематика семинара расширилась и охватила все вопросы классической качественной теории и общей теории динамических систем и ее приложений. Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ, руководимый В.В. Степановым, служил центром, объединяющим математиков всей страны, занимающихся вопросами качественной теории.

После смерти Степанова в 1950 г. семинар возглавил В.В. Немыцкий (1900–1967), который ранее на протяжении многих лет являлся соруководителем этого семинара. Немыцкий – ученик П.С. Александрова и В.В. Степанова. Первые его работы относятся к теории множеств и топологии. Они послужили отправным пунктом для исследований по теории нелинейных интегральных уравнений. Немыцкий разработал ряд новых направлений в теории динамических систем (теория вполне неустойчивых систем, теория общих динамических систем, метод вращающихся функций Ляпунова, классификация установившихся режимов систем автоматического регулирования и др.). Он уделял большое внимание вопросам, связанным с теорией автоматического управления и теорией нелинейных колебаний. Немыцким совместно с его учениками Б.Ф. Быловым, Р.Э. Виноградом, Д.М. Гробманом написана монография "Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости", вышедшая в 1966 году. Заметим, что Немыцкий увлеченно занимался туризмом, имел несколько опубликованных работ по географии.

С самого начала возникновения кафедры дифференциальных уравнений работал семинар по уравнениям с частными производными, которым руководили И.Г. Петровский, С.Л. Соболев и А.Н. Тихонов. Вокруг этого семинара, руководимого крупнейшими специалистами в области дифференциальных уравнений, концентрировались все исследования по теории уравнений с частными производными, проводившиеся в Москве и других городах страны. Работа этого семинара была прервана во время Великой Отечественной войны и возобновилась в 1943/1944 учебном году. На этом семинаре реферировались наиболее интересные работы по уравнениям с частными производными, появлявшиеся в советских и зарубежных математических журналах, а также докладывались законченные исследования студентов, аспирантов, самих руководителей семинара и других его участников. В частности, в 1950 году на этом семинаре М.В. Келдыш впервые рассказывал свою знаменитую работу о спектральных свойствах несамосопряженных операторов. Обычно работы докладывались подробно, с полными доказательствами, и каждая из них занимала несколько заседаний. Этот семинар сыграл выдающуюся роль в развитии теории уравнений с частными производными в нашей стране и в воспитании нового поколения специалистов в этой области математики. Его заседания (обычно проходившие по вторникам) были праздником для молодых математиков.

Научно-исследовательские, а также студенческие семинары всегда играли особую роль на Механико-математическом факультете. Они создавали творческую атмосферу, активно влияли на развитие творческих способностей у студентов, вовлекали их в серьезную научную работу. Замечательные традиции работы семинаров кафедра дифференциальных уравнений бережно хранит и в настоящее время.

С 1951 по 1973 г. кафедрой дифференциальных уравнений руководил И.Г. Петровский (1901–1973). С 1940 по 1944 г. он был деканом Механико-математического факультета, а с мая 1951 г. и до последнего дня своей жизни – ректором Московского университета. Несмотря на большую административную и научно-организационную работу в МГУ и АН СССР (с 1953 г. он был членом Президиума АН СССР), Петровский всегда уделял большое внимание работе кафедры. Его выдающаяся научная деятельность оказывала большое влияние на характер научных исследований в области дифференциальных уравнений на факультете. Петровскому принадлежат фундаментальные результаты во многих областях математики: в теории функций, алгебраической геометрии, теории вероятностей, теории уравнений с частными производными, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математической физике. Его теоремы о топологии действительных алгебраических многообразий дают ответы на ряд вопросов, поставленных в 16 проблеме Гильберта (в 1948–1949 гг. эти исследования были продолжены в совместных работах с О.А. Олейник); им дана классификация систем уравнений, которые теперь принято называть соответственно эллиптическими, гиперболическими и параболическими по Петровскому. Для гиперболических систем им доказана корректная разрешимость задачи

Коши. Работа по эллиптическим системам дает в наиболее полном виде ответ на вопрос, поставленный в 19 проблеме Гильберта, относительно аналитичности всех достаточно гладких решений таких систем. Для решений параболических систем Петровским установлен ряд свойств, аналогичных свойствам решений уравнения теплопроводности. Им исследован вопрос о лакунах и диффузии волн для гиперболических уравнений. Продолжение этого исследования содержится в статье известных математиков М. Атьи, Р. Ботта, Л. Гординга "Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами", имеющей посвящение "Ивану Георгиевичу Петровскому с уважением и восхищением", (УМН, 1971). За работу по лакунам и диффузии для гиперболических уравнений Петровскому была присуждена в 1946 году Государственная премия. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений им изучено поведение интегральных кривых в окрестности особых точек. Также И.Г. Петровским предложены новые методы исследования задач теории вероятностей.

Работы Петровского заложили основы теории уравнений с частными производными и оказали решающее влияние на все последующее развитие этой теории. Большое значение для развития теории уравнений с частными производными в нашей стране и за рубежом имела его обзорно-проблемная статья "О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными", (УМН, 1946), наметившая основные пути развития теории на многие годы.

И.Г. Петровский неоднократно читал курсы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, интегральных уравнений. Эти лекции легли в основу трех широко известных учебников: "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений", первое издание вышло в 1939 г., "Лекции по теории интегральных уравнений", первое издание выпущено в 1947 г., "Лекции об уравнениях с частными производными", первое издание появилось в 1950 г. Эти книги переиздавались в СССР и были переведены на многие иностранные языки. Для многих математиков изучение этих книг положило начало их собственным исследованиям. Это особенно относится к книге по уравнениям с частными производными, в каждой главе которой имеется обзор современного состояния исследований по рассматриваемым вопросам и указываются нерешенные проблемы. В 1952 г. эти три учебника Петровского удостоены Государственной премии.

Начиная с 1945 г. и до конца своей жизни, Петровский вел семинар по уравнениям с частными производными для студентов и аспирантов. На этом семинаре выросло и воспиталось послевоенное поколение учеников Петровского. Из огромного множества работ, публиковавшихся в советских и зарубежных журналах, он умел выбрать для обсуждения на семинаре наиболее важные и перспективные. Поставленные им вопросы часто приводили к возникновению новых научных направлений. Здесь зарождались и развивались многие новые теории (теория разрывных решений нелинейных уравнений, теория уравнений с запаздывающим аргументом, уравнения с малым параметром при старших производных, теория устойчивости конечно-разностных схем, теория краевых задач и многие другие).

В течение многих лет И.Г. Петровский был депутатом Верховного Совета СССР, членом Президиума Верховного Совета СССР. Ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда. И.Г. Петровский – действительный член АН СССР с 1946 г.

С.Л. Соболев (1908–1989) работал на кафедре дифференциальных уравнений с 1935 г. по 1952 г. С 1952 г. по 1958 г. он заведовал кафедрой вычислительной математики Механико-математического факультета МГУ, а с 1958 г. переходит на работу в Сибирское отделение АН СССР в качестве директора Института математики. В период работы в МГУ Соболев неоднократно читал курс "Уравнения математической физики", и на основе этого курса им был написан учебник с тем же названием. Этот учебник, первое издание которого появилось в 1947 г., во многом способствовал повышению научного уровня преподавания этого предмета в университетах нашей страны и за рубежом. Он много раз переиздавался в СССР и переведен на иностранные языки. В 1950 г. вышла книга С.Л. Соболева “Некоторые применения функционального анализа в математической физике”, написанная на основе прочитанных им спецкурсов. Трудно оценить роль, которую сыграла эта книга в развитии уравнений с частными производными и, особенно, в развитии методов, связанных с применением функционального анализа в теории уравнений с частными производными. В 1988 г. вышло новое издание этой книги под редакцией О.А. Олейник, переработанное и дополненное. Работы Соболева обогатили математическую науку новыми идеями и понятиями, создали новый аппарат исследования, положили начало важным теориям и направлениям в математике. Такие понятия, как обобщенная производная и обобщенное решение в смысле Соболева, соболевское пространство, прочно вошли в науку. Теория обобщенных функций и теория вложения функциональных пространств, начало которым положено в работах Соболева, составляют важную часть современной математики.

С 1943 по 1952 г. работу на кафедре дифференциальных уравнений С.Л. Соболев совмещал с работой в Институте атомной энергии им. И.В.Курчатова. Он работал над проблемами использования атомной энергии. Значительная часть этих проблем относилась к уравнениям математической физики. Это был период напряженной творческой работы коллектива Института над созданием новой техники. Эта работа спасла советский народ от угрозы новой войны. Соболеву в 1952 г. было присвоено звание Героя Социалистического Труда за исключительные заслуги перед государством по выполнению специального задания Советского Правительства. В 1956 г. он явился одним из инициаторов создания Сибирского отделения АН СССР. С.Л. Соболев – действительный член АН СССР с 1939 г.

С 1934 по 1970 г. А.Н. Тихонов (1906–1993) возглавлял кафедру высшей математики физического факультета МГУ и создал там большую научную школу по дифференциальным уравнениям и математической физике. С 1958 г. он одновременно руководил кафедрой вычислительной математики Механико-математического факультета МГУ, а с 1970 г. – декан факультета вычислительной математики и кибернетики. Тихонов — ученик П.С. Александрова. Ему принадлежат замечательные открытия в общей топологии. В 1933–1936 гг. он обращается к математической физике, точнее – сначала к вопросам геофизики, а затем, к задачам электродинамики, вопросам распространения волн, сорбции газов, теории теплопроводности, теории численных методов решения уравнений с частными производными, асимптотическим методам теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Им создана теория некорректных задач.

С 1979 г. Тихонов – директор Института математики им. М.В. Келдыша АН СССР. Он избран в действительные члены АН СССР в 1966 г. Написанный им совместно с А.А. Самарским учебник “Уравнения математической физики” (первое издание вышло в 1951 г.) является одним из наиболее широко известных руководств по этому предмету. В нем большое внимание уделяется приложениям математических методов к исследованию физических задач.

Согласно архивным данным в марте 1945 г. кафедра дифференциальных уравнений имела следующий состав: профессора В.В. Степанов, В.В. Немыцкий, И.Г. Петровский, С.Л. Соболев, Н.Н. Лузин, доцент С.А. Гальперн, ассистент А.Д. Мышкис.

В последние годы жизни Н.Н. Лузин (1938–1950) несколько раз объявлял специальные курсы и специальные семинары для студентов Механико-математического факультета.

Он читал лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также прочел курс “Избранные главы теории комплексного переменного”. Этот курс вызвал интерес студентов к теории функций двух действительных переменных, в результате появился ряд интересных научных работ студентов в этой области. В эти годы он интересовался дифференциальными уравнениями в связи с его работой в некоторых институтах АН СССР над задачами прикладного характера.

С.А. Гальперн (1904–1977) работал на Механико-математическом факультете с 1932 г. и до конца своей жизни, с 1935 г. по приглашению В.В. Степанова он работал на кафедре дифференциальных уравнений. Гальперн всегда много сил отдавал организации текущей работы на кафедре. За годы своей работы в МГУ он прочел большое число основных и специальных курсов по самым различным разделам дифференциальных уравнений. Много лет читал обязательный курс обыкновенных дифференциальных уравнений, вел упражнения по этому предмету. Исключительно большой была роль Гальперна в постановке на факультете практических занятий по всем разделам уравнений с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное их содержание сохраняется на факультете и сейчас. Гальперну принадлежит исследование эволюционных уравнений и систем, неразрешенных относительно старшей производной по времени. Такие уравнения часто называют уравнениями Соболева—Гальперна. Для некоторого класса таких систем им указаны необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задач Коши. Он ввел классы квазигиперболических и p-квазигиперболических систем, исследовал вопрос о лакунах для квазигиперболических уравнений.

А.Д. Мышкис (1920–2009) работал на кафедре дифференциальных уравнений с 1945 по 1947 г. Он вел практические занятия в группах, выполнил ряд интересных исследований по единственности решения задачи Коши и разрешимости задачи Неймана, внес вклад в развитие качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

В 1945/1946 учебном году курс уравнений математической физики читал И.М. Гельфанд.

В 1952 г. И.Г. Петровский пригласил для работы на кафедре дифференциальных уравнений И.Н. Векуа (1907–1977), которому принадлежат фундаментальные результаты по теории сингулярных интегральных уравнений и ее применении к граничным задачам для аналитических функций, для исследования уравнений эллиптического типа. В период своей работы в Московском университете Векуа построил теорию обобщенных эллиптических функций, которые определяются с помощью системы дифференциальных уравнений, обобщающей систему Коши–Римана. Он нашел общее представление для обобщенных эллиптических функций и доказал для них основные факты теории аналитических функций, построил интеграл Коши, установил принцип компактности, указал аналогии рядов Тейлора и Лорана и др. Векуа изучил краевые задачи для обобщенных аналитических функций, указал применение своих результатов в теории упругости, теории оболочек и геометрии. За монографию “Обобщенные аналитические функции” он удостоен Ленинской премии в 1963 г.

С 1952 г. Векуа стал одним из руководителей семинара, который вели И.Г. Петровский, С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов. Этот семинар продолжал работать до 1959 г. В 1959 г. И.Н. Векуа и С.Л. Соболев уезжают на работу в Новосибирск, где Векуа занимает пост ректора Новосибирского университета. В 1958 г. он был избран действительным членом АН СССР.

В 1953 г. Московский университет переехал в новые здания на Ленинских горах. Расширен прием студентов на Механико-математический факультет, пополняется состав кафедры дифференциальных уравнений.

По предложению И.Г. Петровского были зачислены на кафедру дифференциальных уравнений О.А. Олейник в 1950 г., А.Ф. Филиппов и Р.С.Гусарова в 1953 г., Е.М.Ландис в 1954 г., Т.Д. Вентцель в 1957 г., А.С. Калашников в 1959 г., В.А. Кондратьев в 1960 г., С.Н.Кружков и Н.Х. Розов в 1961 г., В.М. Миллионщиков в 1964 г., Ю.С. Ильяшенко в 1968 г., Н.Н. Нехорошев в 1972 г.

После смерти И.Г. Петровского с февраля 1973 г. по октябрь 2001 г. кафедрой дифференциальных уравнений руководила О.А. Олейник. В этот период состав кафедры пополнили И.Н. Сергеев в 1988 г., А.Ю. Горицкий в 1990 г., Г.А. Чечкин в 1991 г., М.В.Туваев в 1992 г., Е.В. Радкевич, Т.А. Шапошникова в 1993 г., А.С. Шамаев в 1994 г., А.А. Болибрух в 1996 г., А.Н.Ветохин, А.В.Филиновский в 1999 г., В.В.Жиков в 2000 г., Т.О.Капустина, А.А.Коньков, И.В.Матросов и Э.Р.Розендорн в 2001 г.

Далее, с 2005 г. по настоящее время кафедрой руководит академик, вице-президент РАН В.В.Козлов, директор Математического института им. В.А. Стеклова РАН. На кафедру были приняты О.С.Розанова в 2003 г., В.В.Быков в 2004 г., А.В.Боровских в 2005 г., Н.В.Денисова в 2006 г., И.В.Филимонова в 2006 г., И.В.Асташова в 2008 г., В.В.Палин в 2008 г., М.С.Романов в 2009 г., Н.А.Раутиан в 2012 г.

В новом здании МГУ на кафедре работали также Р.С. Гусарова с 1953 по 1988 г., Л.С. Понтрягин, Р.В. Гамкрелидзе и Е.Ф. Мищенко – все с 1954 по 1962 г., С.К. Годунов с 1955 по 1959 и затем с 1965 по 1969 г., А.М. Ильин с 1957 по 1963 г., В.П. Михайлов с 1957 по 1963 г., В.И. Арнольд с 1961 по 1986 г., Ю.В. Егоров с 1961 по 1992 г., Б.Р. Вайнберг с 1963 по 1990 г., В.В. Грушин с 1963 по 1971 г., М.И. Вишик с 1965 по 1991 г., Д.В. Аносов с 1968 по 1973 г., М.А. Шубин с 1969 по 1989 г., А.И. Комеч с 1972 по 1993 г., А.Г. Беляев с 1989 по 1992 г., А.И.Нейштадт с 1999 по 2007 г.

О.А. Олейник (1925–2001) на протяжении многих лет читала курс уравнений с частными производными, а также различные специальные курсы. Научные работы О.А. Олейник относятся к топологии алгебраических многообразий, уравнениям с частными производными, математической физике, теории пограничного слоя, теории упругости, теории усреднения. В этих работах даны ответы на ряд вопросов, поставленных в 16-й проблеме Гильберта, о взаимном расположении и числе связных компонент вещественных алгебраических кривых и поверхностей, построена теория разрывных решений задачи Коши для широкого класса квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка, изучены нелинейные уравнения теории нестационарной фильтрации, создана математическая теория системы уравнений пограничного слоя Прандтля, исследованы общие уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, доказаны теоремы о свойствах решений краевых задач теории упругости, решен ряд задач об усреднении дифференциальных операторов математической физики. В 1991 г. О.А. Олейник была избрана действительным членом РАН.

Р.С. Гусарова (1922–1990) читала курсы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики и вечернем отделении и вела практические занятия на дневном отделении. Она получила условия, гарантирующие равномерную асимптотическую устойчивость в среднем решений задачи Коши для широких классов параболических и гиперболических систем.

А.Ф. Филиппов (1923–2006) читал курс обыкновенных дифференциальных уравнений и ряд специальных курсов. Большинство его научных работ относится к теории распространения и дифракции волн, оптимальному управлению, дифференциальным уравнениям с разрывными правыми частями, дифференциальными включениям и приближенным методам решения дифференциальных уравнений. Понятие “решения в смысле Филиппова” для уравнения с разрывной правой частью систематически используется в многочисленных теоретических и прикладных исследованиях.

Л.С. Понтрягин (1908–1988) в 1954/1955 учебном году читал курс обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом оригинальном курсе много внимания уделялось приложениям, указывались связи физических и технических задач с вопросами теории дифференциальных уравнений. В 1955 г. эти лекции были изданы в МГУ на ротапринте, а в 1962 г. вышел учебник Л.С. Понтрягина "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Л.С. Понтрягин и его сотрудники Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко в годы их работы на кафедре интенсивно развивали (совместно с В.Г. Болтянским) теорию оптимального управления, основы которой были изложены в их монографии "Математическая теория оптимальных процессов", изданной в 1961 г.

С 1954 г. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе и Е.Ф. Мищенко вели семинар по теории колебаний, на котором изучались различные аспекты теории динамических систем и их приложения к теории колебаний, а также основы задач теории оптимального управления. Семинар работал с большим успехом, ряд ныне видных ученых начали свою научную работу в студенческие годы в этом семинаре, и тематика семинара определила их научные интересы на многие годы. Кроме того, Понтрягин и Мищенко занимались в те годы асимптотическими методами в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.

Е.М. Ландис (1921–1997) читал курс уравнений с частными производными и ряд специальных курсов. Большинство научных работ Е.М. Ландиса относится к качественной теории уравнений с частными производными. Он показал, что решения общих линейных эллиптических уравнений второго порядка обладают свойствами, сходными со свойствами аналитических функций комплексного переменного. Е.М. Ландис ввел важное понятие обобщенной емкости, в терминах которого получил "лемму о возрастании", нашедшую затем многочисленные применения. Аналогичные результаты были им установлены для линейных параболических уравнений.

Е.М. Ландису принадлежат также интересные результаты о свойствах решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений, в частности он исследовал условия возникновения "мертвых зон" и доказал серию интересных теорем об устранимых особенностях.

С.К. Годунов в 1965–1968 гг. читал курс уравнений математической физики для студентов отделения механики Механико-математического факультета МГУ. На основе этих лекций им написана книга "Уравнения математической физики", вышедшая в 1971 г. В этой книге большое внимание уделяется приложениям уравнений с частными производными к задачам механики сплошной среды, а также разностным методам решения задач. На основе прочитанных в МГУ спецкурсов возникла книга С.К. Годунова и В.С. Рябенького "Введение в теорию разностных схем".

А.М. Ильин (1932–2013) читал курс уравнений математической физики и ряд специальных курсов. Им получены тонкие результаты об асимптотике решений различных краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типов. В соавторстве с О.А.Олейник и А.С.Калашниковым им была написана широко известная работа "Линейные уравнения второго порядка параболического типа", в которой были систематически изложены основы теории линейных параболических уравнений.

В.П. Михайлов читал курс уравнений математической физики и различные специальные курсы. Им был выполнен ряд интересных исследований краевых задач для параболических уравнений и систем, для гипоэллиптических уравнений.

Т.Д. Вентцель (1931–2012) читала курсы уравнений с частными производными и уравнений математической физики. Она доказала ряд теорем существования для квазилинейных параболических уравнений и систем.

А.С. Калашников (1934–2000) читал курсы уравнений математической физики и уравнений с частными производными. Большинство его научных работ относится к качественной теории нелинейных неявно вырождающихся параболических уравнений.

В.А. Кондратьев (1935–2010) читал курсы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, специальные курсы. Ранние исследования В.А.Кондратьева, начатые им еще в студенческие годы, посвящены изучению свойств колеблемости и неколеблемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Для линейных уравнений высокого порядка были доказаны аналоги теорем Штурма и получена оценка роста числа нулей колеблющегося решения при бесконечном возрастании аргумента решения. Эти результаты явились одним из первых в мире исследований в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Круг научных интересов В.А.Кондратьева в области дифференциальных уравнений с частными производными составляли следующие основные вопросы: эллиптические уравнения в областях с угловыми и коническими точками, в том числе нелинейные эллиптические уравнения типа Эмдена — Фаулера, качественные и асимптотические свойства решений линейных и нелинейных эллиптических и параболических уравнений и систем; спектральные задачи для дифференциальных операторов, в частности оценки минимального собственного значения; качественные и асимптотические свойства слабых решений эллиптических краевых задач; исследование математических проблем теории упругости; исследование задач квантовой механики.

В.А.Кондратьевым положено начало систематическому изучению эллиптических и параболических задач в областях с негладкими границами. Первый основополагающий результат в этом направлении – критерий разрешимости в весовых пространствах Соболева краевых задач для параболических уравнений в нецилиндрической области и асимптотика решений вблизи характеристической точки. Другое значительное достижение в этом направлении — теория эллиптических уравнений в областях с коническими точками на границе. В.А.Кондратьев ввел и изучил понятие емкости для эллиптических уравнений высокого порядка. Это исследование определило новое направление не только в теории дифференциальных уравнений, но и в других областях анализа, емкость нашла применение в теоремах вложения пространств Соболева, а для эллиптических уравнений высокого порядка – в вопросах однозначной разрешимости первой краевой задачи, гладкости решений вблизи границы, устранимых особенностей решений.

Многие работы В.А.Кондратьева выполнены им в соавторстве с другими математиками. Большие циклы совместных работ В.А. Кондратьева и О.А. Олейник посвящены изучению краевых задач в областях с негладкими границами для уравнений различных типов, а также качественному исследованию решений системы уравнений теории упругости. В совместных работах В.А. Кондратьева и Е.М. Ландиса выполнен качественный анализ решений полулинейных эллиптических уравнений, в частности, эллиптических уравнений второго порядка с негладкими коэффициентами, была доказана теорема об устранимости изолированной сингулярности. Совместно с Ю.В.Егоровым В.А.Кондратьевым исследовалась задача с косой производной, и проблема оценки минимальных собственных значений задачи Штурма – Лиувилля, в частности, известная задача Лагранжа об устойчивости колонны, возникающая в теории упругости в процессе поиска наиболее прочных конструкций из данного материала. Проблеме отсутствия целых нетривиальных решений (“blow-up”) уравнений эллиптического и параболического типа посвящены совместные исследования В.А. Кондратьева с В.А. Галактионовым, Ю.В. Егоровым и С.И. Похожаевым. Совместно с А.А.Коньковым В.А.Кондратьевым исследовалась проблема “blow-up” для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений второго порядка с нелинейностью общего вида. Совместно с Г.А.Чечкиным В.А.Кондратьев получил результаты по усреднению в полуперфорированных областях для уравнений смешанного типа.

Н.Х. Розов читал курс обыкновенных дифференциальных уравнений и специальные курсы. Он построил общую асимптотическую теорию релаксационных колебаний, описываемых сингулярно возмущенными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для сингулярно возмущенных уравнений с частными производными параболического и гиперболического типов он изучил широкий круг вопросов, связанных с периодическими движениями и бифуркационными процессами. Н.Х. Розовом выполнен также ряд работ по истории и методологии математики, методике преподавания математики в средней школе. С 1997 г. он является первым деканом созданного в МГУ факультета педагогического образования, продолжая работать на кафедре дифференциальных уравнений в качестве штатного совместителя.

В.И. Арнольд (1937–2010) читал оригинальный курс обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которого написал получивший широкую известность учебник "Обыкновенные дифференциальные уравнения". В.И. Арнольдом были прочитаны также нетрадиционно построенный курс теоретической механики и ряд специальных курсов. В научных работах В.И. Арнольда представлен широкий спектр актуальных проблем современной математики и ее приложений. Продолжая исследования А.Н. Колмогорова, он получил окончательное решение 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях функций. В.И. Арнольду принадлежат фундаментальные результаты относительно проблемы малых знаменателей, созданная им совместно с А.Н. Колмогоровым и Ю. Мозером "теория КАМ" широко используется во всем мире. Значительный вклад внесен В.И. Арнольдом в теорию особенностей дифференцируемых отображений. Он является одним из создателей симплектической топологии. Им открыта связь между 16-й проблемой Гильберта об овалах вещественных алгебраических кривых и четырехмерной топологией, доказаны фундаментальные соотношения, получившие широкую известность как "неравенства Арнольда" и "сравнения Арнольда". В.И. Арнольдом создана качественная теория динамических систем с комплексным временем. В 1990 г. В.И. Арнольд избран действительным членом РАН.

Ю.В. Егоров читал курс уравнений с частными производными и специальные курсы. Одним из первых он приступил к распространению теории оптимального управления на процессы, описываемые уравнениями с частными производными. Позднее он доказал общую теорему об условиях субэллиптичности псевдодифференциальных операторов, в большом цикле работ исследовал проблему локальной разрешимости псевдодифференциальных (в частности дифференциальных) уравнений. Ю.В. Егоровым получен ряд результатов об устранимых особенностях решений общих краевых задач. Он построил новую алгебру обобщенных функций, нацеленную на применение к нелинейным уравнениям с частными производными.

С.Н. Кружков (1936–1997) читал курс уравнений с частными производными и специальные курсы. Одним из его наиболее значительных научных достижений является построение глобальной теории задачи Коши для многомерных квазилинейных уравнений первого порядка общего вида. Предложенное им определение обобщенного решения вошло в число фундаментальных понятий как "энтропийное решение в смысле Кружкова" и нашло многочисленные применения. С.Н. Кружкову принадлежат также важные результаты о полностью нелинейных уравнениях первого порядка, о нелинейных параболических системах высокого порядка на плоскости. При непосредственном участии С.Н.Кружкова был модифицирован обязательный курс уравнений в частных производных. Курс семинаров был увеличен с одного до двух семестров, а в перечень тем лекций и семинаров были добавлены квазилинейные уравнения первого порядка (классическая локальная теория, обобщённые решения, распад разрыва и т.п.).

Б.Р. Вайнберг читал курс уравнений математической физики на вечернем отделении и специальный курс по асимптотическим методам в теории уравнений с частными производными для аспирантов отделения механики. Б.Р. Вайнбергом построены асимптотические разложения многих задач математической физики.

В.В. Грушин читал специальные курсы по теории обобщенных функций и ее приложениям, получил интересные результаты по этой тематике.

В.М. Миллионщиков (1939–2009) читал курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Научные результаты В.М. Миллионщикова связаны с теорией показателей Ляпунова и их обобщений, теорией устойчивости и смежными проблемами.

М.И. Вишик (1921–2012) читал курс уравнений с частными производными и различные специальные курсы. Он построил теорию краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в ограниченных областях. Совместно со своими учениками А.В. Фурсиковым и А.И. Комечем он изучил статистические решения квазилинейных параболических уравнений, системы Навье—Стокса, некоторых других нелинейных уравнений и систем. Большой цикл работ М.И. Вишика, выполненных в соавторстве с его учеником А.В. Бабиным, посвящен исследованию аттракторов различных нелинейных уравнений с частными производными. Знаменитый метода М.И.Вишика и Л.А.Люстерника до сих пор является одним из основополагающих при асимптотическом анализе сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

Д.В. Аносов читал специальный курс “Динамические системы” и руководил специальным семинаром под тем же названием. Ему принадлежат пионерские фундаментальные работы по теории гиперболических динамических систем и по обоснованию метода осреднения. Д.В.Аносов также является специалистом в области дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и топологии. Сейчас Д.В.Аносов возглавляет им созданную кафедру динамических систем.

Ю.С.Ильяшенко читает курс обыкновенных дифференциальных уравнений и ряд специальных курсов. Он описал типичные свойства фазовых портретов полиномиальных дифференциальных уравнений на комплексной плоскости, получил положительное решение проблемы Дюлака о конечности числа предельных циклов у полиномиального векторного поля на плоскости, совместно со своим учеником С.И. Яковенко решил проблему Гильберта–Арнольда для элементарных сепаратрисных многоугольников, исследовал нелинейное явление Стокса.

М.А. Шубин читал оригинальный курс уравнений с частными производными для студентов “экспериментального потока” и различные специальные курсы. Тематика научных работ М.А. Шубина охватывает целый ряд разделов теории уравнений с частными производными, функционального анализа, математической физики. Основные результаты Н.Н. Нехорошева (1946–2008) относятся к проблеме устойчивости гамильтоновых систем, а также их полной и частичной интегрируемости. Он получил экспоненциально большую по сравнению с величиной, обратной к величине возмущения, оценку снизу времени устойчивости по переменным действия. Аналогичная оценка выведена для времени устойчивости некоторых замкнутых кривых, лежащих в фазовом пространстве, соответствующем нелинейному уравнению колебаний струны с закрепленными концами. Нехорошеву принадлежат обобщения теоремы Лиувилля–Арнольда о полной интегрируемости и теоремы Пуанкаре—Ляпунова о продолжении замкнутых траекторий по параметру, которым является значение энергии.

А.И. Комеч изучал эллиптические краевые задачи в областях с негладкими границами, статистические решения уравнений с частными производными, свойства решений нелинейного уравнения колебаний струны и близкие вопросы.

И.Н. Сергеев читает курс обыкновенных дифференциальных уравнений на вечернем отделении, а затем и на дневном отделении для студентов второго курса. Его основные научные результаты относятся к теории показателей Ляпунова и смежной тематике. Он занимается также вопросами методики преподавания математики. В настоящее время И.Н.Сергеев является заместителем заведующего кафедрой и заместителем по научной работе декана Механико-математического факультета.

А.Г. Беляев исследовал асимптотику решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка в периодически перфорированных областях с мелкими полостями, а также некоторые другие вопросы теории усреднения.

А.Ю. Горицкий читает курс уравнений математической физики, уравнений с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений. Он изучал асимптотику при больших значениях времени решений различных нелинейных автономных и неавтономных эволюционных уравнений с частными производными в ограниченных областях.

Г.А. Чечкин читает курсы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и уравнений в частных производных, специальные курсы по теории усреднения. Г.А.Чечкин ведёт научный семинар по уравнениям математической физики, руководит студентами и аспирантами. Он является специалистом в области граничного усреднения. Им была проведена полная классификация предельного поведения решений задач с быстро меняющимся типом граничных условий, дана классификация типов влияния концентрированных масс на собственные частоты колебания тел, выписаны точные константы в неравенствах типа Фридрихса, Пуанкаре, Харди, тем самым доказаны тонкие теоремы вложения функциональных пространств. Г.А.Чечкиным также получены результаты для задач в областях с быстро осциллирующими границами, в перфорированных областях, в областях типа соединений, в микронеоднородных областях, для задач на бесконечно тонких конструкциях. Последнее время он занимается гидродинамикой, в частности исследует системы уравнений пограничного слоя типа Прандтля для жидкостей с различной реологией и поведение жидких кристаллов.

М.В. Туваев (1967–1998) рассмотрел некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Он получил условия возникновения “мертвых зон”, доказал ряд утверждений об устранимости особых множеств.

Е.В. Радкевич читает курсы уравнений с частными производными и уравнений математической физики, специальные курсы. Он построил асимптотические представления для решений ряда нелинейных задач с малым параметром, возникающих в приложениях.

Т.А. Шапошникова читает курс уравнений математической физики и уравнений с частными производными. Она исследовала краевые задачи для уравнений Лапласа и теплопроводности в частично перфорированных областях, выполнила асимптотический анализ решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в областях, перфорированных вдоль многообразий.

А.С. Шамаев читает курс уравнений математической физики, уравнений с частными производными и специальные курсы. А.С.Шамаев также ведёт несколько научных семинаров. Ему принадлежит ряд важных результатов по теории усреднения (частично в соавторстве с О.А. Олейник и Г.А. Иосифьяном). Он занимался также некоторыми прикладными вопросами: исследовал границы применимости и точность нескольких приближенных и асимптотических методов в задаче о дифракции волн на неровной поверхности, рассмотрел проблему идентификации параметров отражающей поверхности по отраженным радиоволнам, изучил некоторые задачи, связанные с поведением больших космических антенн на орбитах. А.С. Шамаев на кафедре дифференциальных уравнений является штатным совместителем, заместителем заведующего кафедрой. Основное место его работы — Институт проблем механики имени А.Ю.Ишлинского РАН.

А.А. Болибрух (1950–2003) (действительный член РАН с 1997 г., заместитель директора Математического института им. В.А. Стеклова РАН) также работал на кафедре по совместительству. Он читал специальные курсы, руководил курсовыми работами студентов. Ему принадлежат фундаментальные результаты по теории обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. В частности им получено окончательное решение проблемы Римана—Гильберта.

А.В.Филиновский читает курс уравнений с частными производными, специальный курс естественно-научного содержания и специальный курс по теории оператора Шредингера. Он является специалистом по асимптотическим и спектральным методам в теории эволюционных краевых задач. Им были разработаны подходы, позволяющие изучать влияние некомпактной границы области на характер распространения волн, а также исследовать задачи коротковолновой и длинноволновой дифракции в неограниченных областях.

А.Н.Ветохин читает курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Он является специалистом по качественной теории дифференциальных уравнений, в том числе в области теории показателей Ляпунова.

В.В.Жиков ведёт на кафедре специальный научный семинар. Он является широко известным специалистом в области асимптотических методов, теории усреднения дифференциальных операторов, функциональном анализе. И.В.Матросов ведёт занятия по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Он является специалистом в теории разрывных систем алгебродифференциальных уравнений.

А.А.Коньков читает курс по уравнениям математической физики и по уравнениям в частных производных, ведёт занятия по уравнениям математической физики, уравнениям в частных производных, специальные курсы. А.А.Коньков получил теорему сравнения для квазилинейных эллиптических неравенств, а также достаточные условия “blow-up” и существования мёртвых зон.

Т.О.Капустина ведёт занятия по уравнениям математической физики, уравнениям в частных производных по обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также читает курс уравнений с частными производными на экономическом потоке. Т.О.Капустина является специалистом в асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

О.С.Розанова читает лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям с частными производными, уравнениям математической физики. Она является специалистом в области нелинейных уравнений математической физики, в финансовой математике, математической метеорологии.

А.И.Нейштадт является специалистом по динамическим системам, теории возмущений, теории адиабатических инвариантов, теории бифуркаций, небесной механике, теории движения заряженных частиц, гидродинамике.

В.В.Быков ведёт занятия по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Областью его научных интересов является качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе исследования в области теории показателей Ляпунова.

А.В.Боровских читает лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Он является специалистом в области групповых методов для задач распространения волн в неоднородных средах.

Н.В.Денисова ведёт занятия по уравнениям математической физики и обыкновенным дифференциальным уравнениям. Она является специалистом в области гамильтоновой механики и теории интегрируемых систем.

И.В.Филимонова ведёт занятия по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. Она является специалистом по качественной теория нелинейных уравнений с частными производными, в том числе проблемам, связанным с отсутствием решений ряда квазилинейных уравнений в областях определенного вида, и асимптотике решений нелинейных уравнений.

И.В.Асташова читает курс уравнений математической физики, уравнения с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений, спецкурс по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ей разработаны новые методы исследования асимптотических и качественных свойств решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, в том числе, содержащих младшие члены.

В.В.Палин ведёт занятия по дифференциальным уравнениям, как обыкновенным, так и в частных производных. Им получен ряд новых результатов в области обоснования физических принципов неравновесной термодинамики.

М.С.Романов ведёт занятия по обыкновенным дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики, уравнениям в частных производных. Он является специалистом, как в гидродинамике, включая теории пограничного слоя типа Прандтля, так и в теории усреднения дифференциальных операторов.

Н.А.Раутиан ведёт занятия как по обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и по уравнениям с частными производными. Ей получены результаты о поведении неоднородных сред, состоящих из нескольких фаз, а также по теории интегральных и интегро-дифференциальных операторов.

Э.Р.Розендорн (1936–2012) читал специальный курс по метеорологии и вёл занятия по дифференциальным уравнениям. Он – признанный специалист по теории поверхностей.

В.В. Козлов ведёт на кафедре научно - исследовательский семинар. В 1989 – 1998 гг. В.В.Козлов являлся Проректором МГУ им. М.В.Ломоносова, 1998–2001 гг. В.В.Козлов – заместитель министра образования РФ — Главный ученый секретарь ВАК России, с 2001 г. является вице-президентом РАН, с 2004 г. – директор Математического института им. В.А.Стеклова РАН, а с 2005 г. руководит кафедрой. В.В. Козлов является членом редколлегий и возглавляет редакции нескольких десятков известных научных изданий и журналов, является иностранным и почётным членом нескольких академий наук и научных сообществ. В.В.Козлов занимается вопросами, связанными с теоретической и статистической механикой, смежными вопросами качественной теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и топологии, вариационного исчисления. В.В.Козловым проводились исследования по теории устойчивости, эргодической теории, проблеме точного интегрирования уравнений динамики, теории управления, теории равномерного распределения, квантовой механике.

И.Г. Петровский придавал большое значение ознакомлению студентов с приложениями теории дифференциальных уравнений в технике, физике, механике и других разделах естествознания. Он пригласил Г.И. Баренблатта читать курс “Механика сплошной среды”, обязательный для студентов кафедры дифференциальных уравнений. Этот курс пользовался большим успехом у студентов.

И.Г. Петровский считал, что изучение вопросов, которые ставит перед математиками физика, механика и другие естественные науки, имеет первостепенное значение, что именно задачи естествознания могут придать правильную ориентацию теоретическим исследованиям, всегда советовал своим ученикам и сотрудникам заниматься прикладными задачами, вступать в научные контакты с механиками, физиками.

В 1970–1973 гг. на кафедре дифференциальных уравнений работали физики: И.Е. Дзялошинский, А.И. Поляков, А.Н. Бродский, А.И. Наумов. Они принимали участие в работе семинара по математическим задачам теоретической физики, который организовал И.Г. Петровский осенью 1972 г. Руководили этим семинаром Петровский и физик И.М. Лифшиц. Этому семинару Петровский уделял особое внимание. Несмотря на чрезвычайную занятость ректорскими делами и ухудшавшееся здоровье, он сам выслушивал докладчика накануне каждого заседания семинара и в деликатной форме давал рекомендации: как построить доклад, чтобы он был интересен и для физиков, и для математиков. Последнее заседание семинара состоялось за четыре дня до смерти Петровского.

После смерти И.Г. Петровского в 1973 г. был организован семинар имени И.Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики под руководством В.И. Арнольда, М.И. Вишика, С.П. Новикова и О.А. Олейник. Этот семинар можно рассматривать как продолжение семинара по математическим задачам теоретической физики, которым руководил И.Г. Петровский. В 1976 г. по инициативе кафедры дифференциальных уравнений состоялась Всесоюзная конференция по уравнениям с частными производными, посвященная 75-летию со дня рождения И.Г. Петровского. Начиная с 1978 г. ежегодно проводились совместные сессии семинара имени И.Г. Петровского и Московского математического общества, приуроченные ко дню рождения И.Г. Петровского. Эти сессии фактически являлись научными конференциями широкого профиля с участием многих известных иногородних и зарубежных ученых. С 1991 года такие конференции стали масштабнее и шире по географии участников. Начиная с 2001 конференция имени И.Г.Петровского проводится раз в 3–4 года и собирает более 500 участников. Начиная с 1975 г. в Издательстве Московского университета ежегодно выходили сборники научных статей “Труды семинара имени И.Г. Петровского”, редколлегию которых возглавляла О.А. Олейник, а в последствии возглавил В.А.Садовничий.

Кафедра дифференциальных уравнений ежегодно обслуживает 12 обязательных лекционных курсов на Механико-математическом факультете в Москве, а также курсы дифференциальных уравнений и уравнений математической физики в филиалах МГУ в городах Астана, Душанбе и Баку.

Преподаватели кафедры сотрудничали и продолжают активно сотрудничать с другими университетами и научно-исследовательскими коллективами. В.А.Кондратьев с 1991 г. по 2010 г. преподавал курсы дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных в МАТИ—РГТУ им.К.Э.Циолковского, являлся одним из создателей и руководителей научной школы этого вуза, в создании и работе которой в 1991–2000 принимали активное участие И.В.Асташова, А.В.Филиновский, в 2003–2007 гг. – И.В.Филимонова. И.В.Асташова читает курсы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, функционального анализа, качественной теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, автором учебных пособий по всем читаемым курсам в Московском государственном университете экономики, статистики и информатики (МЭСИ) и является организатором и руководителем научной школы по качественной теории дифференциальных уравнений этого университета. А.В.Филиновский читает курсы математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, вариационного исчисления, специальный курс по методам функционального анализа в математической физике, является автором учебных пособий в Московском государственном техническом университете им.Н.Э.Баумана. На базе кафедры высшей математики МЭСИ с 2001 года работает Межвузовский научный семинар (МГУ – МГТУ им.Н.Э.Баумана – МЭСИ) по качественной теории дифференциальных уравнений и смежным вопросам под руководством И.В.Асташовой, А.В.Филиновского, В.А.Никишкина. Г.А.Чечкин с 1999 по 2011 гг. преподавал курсы "Теории упругости" и "Метод конечных элементов" в Университетском колледже города Нарвик (Норвегия).

В разные годы на кафедре работал ряд научно-исследовательских семинаров.

- Следует особо отметить семинар под руководством В.А. Кондратьева, В.М. Миллионщикова и Н.Х. Розова, организованный в 1971 г. и работающий по настоящее время под руководством Н.Х.Розова, И.Н.Сергеева, И.В.Асташовой, А.В.Боровских (ученым секретарем семинара является В.В.Быков). После смерти В.В. Немыцкого в 1967 г. семинар по качественной теории дифференциальных уравнений, основанный в 1930 г. В.В. Степановым, несколько лет продолжал функционировать под руководством Б.П. Демидовича, ныне покойного. Семинар, руководимый Н.Х. Розовым, И.Н.Сергеевым, И.В.Асташовой и А.В.Боровских призван играть ту роль, которая принадлежала семинару В.В. Степанова. Хроника семинара два раза в год печатается в журнале "Дифференциальные уравнения".

- Также на кафедре работает семинар под руководством В.В.Жикова, Е.В.Радкевича, А.С.Шамаева и Т.А.Шапошниковой, который впитал в себя традиции нескольких семинаров, включая семинар, основанный В.А.Кондратьевым и Е.М.Ландисом, а также семинар по асимптотическим методам В.В.Жикова, А.С.Шамаева и Т.А.Шапошниковой.

- Начиная с 1995 года на кафедре функционирует семинар по уравнениям математической физики под руководством Г.А.Чечкина, начинавший свою работу, как семинар по теории усреднения, а теперь включающий в себя широкий спектр вопросов теории уравнений с частными производными. Совет семинара состоит из профессора Самохина В.Н. и доцента Романова М.С.

- Давно работает, ставший уже классическим, семинар по динамическим системам классической механики под руководством В.В.Козлова и Д.В.Трещева.

На кафедре дифференциальных уравнений создано большое число учебников, учебных пособий и монографий. Укажем некоторые из них.

О.А. Олейник написала монографии "Математические задачи теории пограничного слоя" (1969 г., США), "Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой" (1971 г., совместно с Е.В. Радкевичем), "Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред" (1990 г., совместно с Г.А. Иосифьяном и А.С. Шамаевым), "Усреднение дифференциальных операторов" (1993 г., совместно с В.В. Жиковым и С.М. Козловым), "Некоторые асимптотические задачи теории уравнений с частными производными" (1996 г., Великобритания), "Математические методы в теории пограничного слоя" (1997 г., совместно с В.Н. Самохиным). На основе неоднократно читавшегося О.А. Олейник курса лекций издан ее учебник "Лекции об уравнениях с частными производными" (1976 г.), который выдержал несколько переизданий (2005, 2009 гг.).

Р.С. Гусарова написала учебное пособие "Дифференциальные уравнения" (1980 г.) на основе лекционного курса, который она читала для вечернего отделения.

А.Ф. Филипповым написаны монографии "Об устойчивости разностных уравнений" (1956 г., совместно с В.С. Рябеньким) и "Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью" (1985 г.), а также учебное пособие "Дифференциальные уравнения" (1960 г., совместно с Л.Э. Эльсгольцем), получивший широкую известность "Сборник задач по дифференциальным уравнениям" (1961 г. с неоднократным переизданием в последующие годы) и учебник "Введение в теорию дифференциальных уравнений" (2004 г. с неоднократным переизданием в последующие годы).

Е.М. Ландису принадлежит монография "Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов" (1971 г.).

Н.Х. Розовым написаны монографии "Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания" (1975 г., совместно с Е.Ф. Мищенко), "Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах" (1995 г., совместно с Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесовым и А.Ю. Колесовым), "Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений" (1998 г., совместно с А.Ю. Колесовым и Е.Ф. Мищенко). Он является одним из авторов "Французско-русского математического словаря" (1970 г., переиздан в 1994 г., совместно с М.В. Драгневым и М.И. Жаровым). Многократно переиздавались книги Н.Х. Розова "Пособие по математике для поступающих в вузы. Избранные вопросы элементарной математики" и "Краткое пособие по математике для поступающих в Московский университет", написанные в соавторстве с Г.В. Дорофеевым и М.К. Потаповым.

Книги В.И. Арнольда "Обыкновенные дифференциальные уравнения" (1971 г.), "Математические методы классической механики" (1974 г.), "Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений" (1978 г.), написанные на основе прочитанных им лекционных курсов, пользуются большой популярностью в нашей стране и за рубежом. В.И. Арнольду принадлежит также ряд монографий, в числе которых "Теория катастроф" (1981 г.), "Особенности дифференцируемых отображений" части 1 и 2 (1982 г. и 1984 г., совместно с А.Н. Варченко и С.М. Гусейн-Заде), "Обыкновенные дифференциальные уравнения" (1985 г., совместно с Ю.С. Ильяшенко), "Математические аспекты классической и небесной механики" (1985 г., совместно с В.В. Козловым и А.И. Нейштадтом), "Симплектическая геометрия" (1985 г., совместно с А.Б. Гивенталем), "Теория бифуркаций" (1986 г., совместно с В.А. Афраймовичем, Ю.С. Ильяшенко и Л.П. Шильниковым) и другие.

Ю.В. Егоровым написаны книги "Линейные дифференциальные уравнения главного типа" (1984 г.), "Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы" (1985 г.), "Микролокальный анализ" (1988 г.), "Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории" (1987 г., совместно с М.А. Шубиным), "Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории" (1988 г., совместно с М.А. Шубиным).

С.Н. Кружков является автором монографии "Нелинейные уравнения с частными производными" в двух частях (1969–1970 гг.), составленной на основе прочитанных им спецкурсов. В 1997 г. опубликовано краткое учебное пособие А.Ю. Горицкого, С.Н. Кружкова и Г.А. Чечкина "Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщенные решения, ударные волны, центрированные волны разрежения". В 1999 г. вышло существенно расширенное и переработанное учебное пособие А.Ю. Горицкого, С.Н. Кружкова и Г.А. Чечкина "Уравнения с частными производными первого порядка".

В 1982 г. издана книга Б.Р. Вайнберга "Асимптотические методы в уравнениях математической физики".

М.И. Вишиком написаны монографии “Математические задачи статистической гидродинамики” (1980 г., совместно с А.В. Фурсиковым) и “Аттракторы эволюционных уравнений” (1989 г., совместно А.В. Бабиным), которые были переведены на английский язык и изданы в известных издательствах в 1988 и 1992 годах, соответственно. В соавторстве с Чепыжовым В.В. вышла монография “Аттракторы уравнений математической физики” в издательстве Американского математического общества AMS (2002 г., США).

Ю.С. Ильяшенко опубликовал монографии “Теоремы конечности для предельных циклов” (1991 г., США), “Нелокальные бифуркации” (1999 г., совместно с Ли Вейгу).

М.А. Шубиным написаны книги “Лекции по квантовой механике” (1972 г., совместно с Ф.А. Березиным), “Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория” (1978 г.).

А.И. Комеч написал учебное пособие “Практическое решение уравнений математической физики” (1986 г.), впоследствии переизданное.

И.Н. Сергеев является автором ряда книг по элементарной математике и пособий для поступающих в высшие учебные заведения, а также автором учебника по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

А.С. Шамаев написал монографию “Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли” (1996 г., совместно с коллективом соавторов).

Г.А.Чечкин, А.С.Шамаев и А.Л.Пятницкий являются авторами монографии “Теория усреднения. Методы и приложения” (2007 г.), которая была также переведена на английский язык и издана Американским математическим обществом AMS (2007 г., США).

Коллектив авторов (Т.Д.Вентцель, А.Ю.Горицкий, Т.О.Капустина, В.А.Кондратьев, Е.В.Радкевич, О.С.Розанова, Г.А.Чечкин, А.С.Шамаев, Т.А.Шапошникова) подготовил и издал сборник задач под редакцией А.С.Шамаева по уравнениям с частными производными, по материалам письменных экзаменов, проводимых на кафедре на протяжении ряда лет. Задачник выдержал несколько переизданий (2005, 2010 гг.) и был переведён на китайский язык (2009 г.)

Г.А.Чечкин, Т.О.Капустина и Т.П.Чечкина являются авторами учебного пособия по дифференциальным уравнениям “Конспекты лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям” (2012 г.)

Э.Р.Розендорн являлся победителем Всесоюзного конкурса на лучший учебник для естественно – научных факультетов.

В.А.Кондратьевым совместно с сотрудниками кафедры изданы следующие монографии: а) Кондратьев В.А., Ландис Е.М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 32, 1988, с. 99 – 215. б) Egorov U.V., Kondratiev V.A. On Spectral Theory of Elliptic Operators. Operator Theory: Advances and Applications, V. 89, Birkhauser, 1996, 325 p. в) Astashova I., Filinovskii A., Kondratiev V., Muravey L. Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations, J. of Natural Geometry, V. 23, №1–2, London, Jnan Bhawan Publishers, 2003, 126 p. г) Borsuk M., Kondratiev V. Elliptic Boundary Value Problems of Second Order Piecewise Smooth Domains. North–Holland Mathematical Library, v. 69, 2006, 531 p.

В 2012 г. сотрудниками кафедры опубликована монография “Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа”, под ред. Асташовой И.В. Часть 1. (Асташова И.В.) Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Часть II. (Филиновский А.В.) Стабилизация и спектр в задачах распространения волн. Часть III. (Никишкин В.А.)

Асимптотика решений эллиптических краевых задач. Часть IV. (Ежак С.С., Карулина Е.С., Тельнова М.Ю.) Оценки первого собственного значения некоторых задач Штурма –Лиувилля с интегральным условием на потенциал. Научное издание, 647 с. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012.

Научные достижения сотрудников кафедры дифференциальных уравнений получили широкое признание.

В.В. Козлов был награждён в 1977 г. Премией Ленинского комсомола; в 1986 г. Ломоносовской премией 1-ой степени; в 1988 г. Премией С. А. Чаплыгина АН СССР; в 1994 г. Государственной премией Российской Федерации; в 2000 г. Премией имени С. В. Ковалевской РАН; в 2004 г. Золотой медалью Анри Пуанкаре Международной федерации нелинейных аналитиков (IFNA); в 2007 г. Золотой медалью им. Леонарда Эйлера РАН; в 2009 г. Премией им. К. Агостинелли Туринской академии наук; в 2010 г. Премией "Триумф". В.В. Козлов имеет государственные награды: в 1999 г. – Орден Почета; в 2005 г. – Орден "За заслуги перед Отечеством" IV степени; в 2009 г. — Орден "За заслуги перед Отечеством" III степени; в 2010 г. Премия Правительства Российской Федерации в области образования.

В.И. Арнольд был удостоен в 1965 г. Ленинской премии, в 1982 г. Крафордской премии Королевской Шведской Академии наук, в 1992 г. премия им. Лобачевского, в 2007 г. Государственной премии Российской Федерации, награждён в 1999 г. – Орденом "За заслуги перед Отечеством" IV степени, избран почетным членом Лондонского математического общества, иностранным членом Национальной Академии наук США, Парижской Академии наук, национальной Академии деи Линчеи, почетным доктором университетов Пьера и Мари Кюри (Париж), Уорика (Ковентри), Утрехта, Болоньи, Торонто, Комплутенсе (Мадрид).

О.А. Олейник являлась лауреатом Государственной премии, а также премий имени М.В. Ломоносова, Н.Г. Чеботарева, И.Г. Петровского. Она избрана иностранным членом Итальянской национальной Академии деи Линчеи, Академии в Палермо, Академии наук и искусств в Милане, Саксонской Академии наук, почетным членом Эдинбургского Королевского общества, членом Европейской Академии наук, Международной Академии наук высшей школы, почетным доктором Римского университета. О.А. Олейник награждена орденом Почета Российской Федерации, а также именной медалью Коллеж де Франс, медалью первой степени Карлова университета в Праге, Международной золотой медалью "Дайдилон в области математических наук" Международного Олимпийского Форума в Афинах.

В 1988 году Ю.В. Егорову, В.А. Кондратьеву, Л.Д. Кудрявцеву и О.А. Олейник за цикл работ "Исследования краевых задач для дифференциальных операторов и их приложения в математической физике", опубликованных в 1959 – 1985 г.г., была присуждена Государственная премия. В.А.Кондратьев и Ю.В.Егоров в 1998 г. награждены премией имени И.Г.Петровского, в 2009 году В.А.Кондратьев признан лучшим преподавателем МГУ. Ю.В. Егорову и Э.Р. Розендорну присуждена премия имени М.В.Ломоносова. Лауреатом этой премии является также А.Ф. Филиппов.

М.И.Вишик был удостоен премии имени И.Г.Петровского и Международной премии Гумбольдта.

Д.В. Аносов, В.И. Арнольд, Б.Р. Вайнберг, М.И. Вишик, Ю.В. Егоров, Н.Н. Нехорошев – лауреаты премий Московского математического общества.

Последние годы многие члены кафедры получают научные гранты: гранты РФФИ, гранты Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, молодых кандидатов и докторов наук, гранты INTAS, ISF, Университеты России, а также Мегагрант Правительства РФ. Регулярно проводятся заседания научного семинара Лаборатории Бернулли, созданной в рамках Мегагранта, при ИМИСС МГУ им. М.В.Ломоносова, под руководством ведущего учёного Т.С.Ратью, а также С.С. Лемака, Г.А. Чечкина и А.И. Шафаревича (учёный секретарь семинара – Н.В. Денисова).

Состояние покоя, возмущённое граничным условием типа Стеклова

Абдуллазаде Н.Н.[1], **Чечкин Г.А.**[2]

В работе рассматривается задача в фиксированной двумерной области с условием типа Стеклова на малом участке границы. Исследуется вопрос исчезновения спектра (стремления собственных значений к бесконечности) такой задачи при стремлении длины малого участка к нулю.

Введение

Сингулярные возмущения краевых и спектральных задач на малых участках области, в том числе на границе, изучались многими авторами (см., например, [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9]). В работе [1] приведена оценка собственного значения для оператора Лапласа в трёхмерной области с малым отверстием. Плное асимптотическое разложение построено в [4]. В [5], [7] рассмотрена задача, где условие Дирихле возмущается однородным условием Неймана на малом участке границы. В работе [8] аналогичная задача рассмотрена для кратного собственного значения. В статье [9] рассмотрены случаи возмущения условия Неймана условием Дирихле и наоборот.

История исследования задачи Стеклова восходит к работам, появившимся на рубеже XIX–XX веков (см., например, [10]). Далее появились такие работы, как [11], [12], [13], [14] и [15].

В работе [14] исследуется сингулярно возмущённая задача типа Стеклова с малым параметром в ограниченной двумерной области. Изучается асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций такой задачи при стремлении малого параметра к нулю в случае невырожденной предельной задачи. Постановка задачи включает в себя быструю смену типа граничных условий. В работе [15] рассматривается вырождающаяся задача типа Стеклова, возмущённая чередованием условий Дирихле и условий Стеклова в случае предельной задачи Дирихле.

В настоящей статье рассматривается однородная краевая задача Дирихле для оператора Лапласа, возмущённая спектральным условием типа Стеклова на одном малом участке

[1]Абдуллазаде Наджафгулу Натиг оглы, n-abdu@mail.ru, студент, математический факультет Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в городе Баку.

[2]Чечкин Григорий Александрович, chechkin@mech.math.msu.su, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

границы. Известно, что спектральная задача с условиями Стеклова на малом фиксированном участке имеет счётный набор собственных значений. При стремлении малого параметра, определяющего длину участка границы, где выставлено условие Стеклова, к нулю, все собственные функции стремятся к нулю, а собственные значения стремятся к бесконечности. Наша задача определить скорость сходимости собственных значений к бесконечности.

1 Описание области

Пусть Ω — прямоугольная область в $\mathbb{R}^2$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис. 1), причём её граница $\partial\Omega$ является кусочно–гладкой и состоит из нескольких частей: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, часть Γ_2 состоит из отрезков $[(-\frac{1}{2}, 0); (-\frac{1}{2}, 1)]$, $[(-\frac{1}{2}, 1); (\frac{1}{2}, 1)]$ и $[(\frac{1}{2}, 1); (\frac{1}{2}, 0)]$. Также предполагаем, что $\Gamma_1 = \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$ и $C^-\varepsilon \le |\gamma_\varepsilon| \le C^+\varepsilon$, где $0 < C^- < C^+ < +\infty$. Здесь и далее ε — малый положительный параметр.

Рис. 1: Область Ω

2 Краевая задача и сходимость решений

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} \Delta U_\varepsilon = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega, \\ U_\varepsilon = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial n} = g(x) \qquad \text{на} \qquad \gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $n = (n_1, n_2)^t$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Решение задачи (1) ищем в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) = \{v(x) \mid v(x) \in H^1(\Omega),\ v(x)\big|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon} = 0\}$ с нормой $\|v\|_{H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)} = \left(\int\limits_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Определение 1. Функцию $U_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ будем называть обобщённым решением (см. [16]) задачи (1), если для любого $\varphi \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) dx = \int\limits_{\gamma_\varepsilon} g\, \varphi\, ds. \tag{2}$$

Будем исследовать поведение решений U_ε при ε, стремящемся к нулю.

2.2 Основная теорема

Далее мы используем следующее неравенство типа Фридрихса, доказанное в [17].

Лемма 1. *Пусть* $u \in H^1(\Omega), u = 0$ *на* $\Gamma \subset \partial\Omega$*, где* $mes\,\Gamma > 0$*. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x)\,dx \le C \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx, \tag{3}$$

где постоянная C *зависит от* Ω*,* $mes\,\Gamma$ *и не зависит от функции* u*, т.е.* $C \le C_1(\Omega) + \frac{C_2(\Omega)}{mes\,\Gamma}$*.*

В силу неравенства (3) мы можем в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ ввести новое скалярное произведение $[u, \varphi] = \int\limits_{\Omega} (\nabla u, \nabla\varphi)\,dx$, которому соответствует норма $\|u\| = [u, u]^{\frac{1}{2}}$.

Лемма 2. *Обобщённое решение* U_ε *задачи* (1) *существует и единственно.*

Существование и единственность обобщённого решения задачи (1) доказывается стандартным путём на основе леммы Лакса—Мильграма (см., например, [18]).

Получим теперь оценки для решения, равномерные по ε. Для решения U_ε задачи (1) в нашем случае константа C в неравенстве (3) не зависит от ε, т.к. $mes\,\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon \ge const\,|\partial\Omega|$, где константа не зависит от ε.

Далее будем использовать неравенство для следов: пусть $v \in H^1(\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} \in L_2(\partial\Omega)$, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} v^2 ds \le C_3 \int\limits_{\Omega} (v^2 + |\nabla v|^2) dx \tag{4}$$

Подставляя в интегральное тождество (2) $\varphi = U_\varepsilon$ в качестве пробной функции, используя неравенства (3) и (4), неравенство Коши-Буняковского и условие эллиптичности оператора L, получим

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2\,dx = \|U_\varepsilon\|^2 \le M,$$

где M не зависит от ε.

По теореме Реллиха (см., например, [18]) существуют такие функция U и подпоследовательность ε^k, стремящаяся к нулю, что

1. $U_\varepsilon \to U \in H^1(\Omega)$ при $\varepsilon^k \to 0$ в норме $L_2(\Omega)$,
2. $\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \dfrac{\partial U}{\partial x_j}$ при $\varepsilon^k \to 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Покажем теперь, что $U = 0$ на границе $\partial\Omega$. Сделаем локальное преобразование координат $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ в окрестности точки c_i, являющейся концом куска Γ_ε^i такое, что граница $\partial\Omega$ в этой окрестности перейдёт в прямую $y_2 = 0$, а точка c_i в начало координат. Рассмотрим полосу шириной ω в окрестности точки c_i (см. рис. 2).

Рис. 2: Области интегрирования

Положим $\gamma_1 = \{(y_1, y_2) \ : \ y_2 = \omega, k_1\varepsilon < y_1 < 0\}$, $\gamma_2 = \{(y_1, y_2) \ : \ y_2 = \omega, 0 < y_1 < k_1\varepsilon\}$, где k_1 — постоянная, не зависящая от ε (по условию).

При $y_1 \in \gamma_1$ имеем: $U_\varepsilon(y_1,\omega) = \int\limits_0^\omega \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\,dy_2$. Возведём это равенство в квадрат, применим неравенство Коши–Буняковского и проинтегрируем по γ_1. Получим

$$\int\limits_{\gamma_1} U_\varepsilon^2(y_1,\omega)\;dy_1 \le \omega \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_0^\omega \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\right)^2\;dy_2\,dy_1 \le \omega \int\limits_{Q_1} |\nabla U_\varepsilon|^2\;dy_1\,dy_2.$$

Оценим теперь $U_\varepsilon(y_1,\omega)$, где $y_1 \in \gamma_2$. Имеем: $U_\varepsilon(y_1,\omega) = \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\;dl$, где b_1 и b_2 — точки, лежащие, соответственно, на $\Gamma\varepsilon$ и γ_2 и принадлежащие прямой l, параллельной стороне параллелограмма, вершинами которого являются концы отрезков $\Gamma\varepsilon$ и γ_2. Отсюда получим

$$U_\varepsilon^2(y_1,\omega) \le C_4\omega \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\right)^2\;dl.$$

Проинтегрируем это неравенство по γ_2. Сделаем обратное преобразование координат $(y_1,y_2) \to (x_1,x_2)$. Получим

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U_\varepsilon^2(x)\;ds \le \omega C_5 \int\limits_{Q} |\nabla U_\varepsilon|^2\;dx \le \omega C_5 \int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2\;dx \le \omega C_5 M, \tag{5}$$

где $\widetilde{\gamma}$ — кривая, все точки которой отстоят от $\partial\Omega$ на расстояние порядка ω, а Q — слой между $\widetilde{\gamma}$ и $\partial\Omega$; постоянные C_5, M не зависят от ε.

Имея в виду компактность вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\widetilde{\gamma})$ (см. [19]), перейдем к пределу в неравенстве (5) при ε^k, стремящемся к нулю. Имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U^2\;ds \le \omega M C_5. \tag{6}$$

В силу того, что ω – произвольно малое положительное число и $U \in H^1(\Omega)$ из (6) следует, что $U = 0$ на границе $\partial\Omega$. Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Последовательность решений U_ε задачи (1) сходится при ε, стремящемся к нулю, в норме $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$ к решению задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{в } \Omega, \\ U = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Выше это утверждение доказано для подпоследовательности ε^k. Сходимость U_ε при $\varepsilon \to 0$, следует из единственности решения задачи (7). Из неё же следует, что $U \equiv 0$.

2.3 Постановка задачи Стеклова

Рассмотрим следующую спектральную задачу типа Стеклова, которая соответствует краевой задаче (1):

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{8}$$

Определение 2. Функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}$ называется собственной функцией задачи (8), соответствующей собственному значению λ_ε, если для любой функции $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ справедливо следующее интегральное тождество:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx = \lambda_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon\, v\, ds. \tag{9}$$

2.4 Оценка собственных значений

Известно, что все собственные значения задачи (8) — действительные и, кроме того, положительные числа, и для них справедливо: $0 \le \lambda_\varepsilon^1 \le \lambda_\varepsilon^2 \le \dots, \quad \lambda_\varepsilon^k \to \infty$ при $k \to \infty$. Здесь мы считаем, что собственные значения λ_ε^k подсчитываются с учётом кратности.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Первое собственное значение задачи* (8) *имеет порядок* $\frac{1}{\varepsilon^2}$, *т.е. удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\frac{K_1}{\varepsilon^2} \le \lambda_\varepsilon^1 \le \frac{K_2}{\varepsilon^2},$$

где K_1 *и* K_2 *— некоторые положительные константы. Более того, первая собственная функция* $u_\varepsilon^1 \to 0$ *сильно в* $L^2(\Omega)$ *и слабо в* $H^1(\Omega)$.

Оценки собственного значения сверху и снизу доказываются по-разному. Для оценки сверху, имея в виду вариационное определение собственного значения (см., например, [20]), используем специально построенную функцию из пространства $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$. Для оценки снизу мы рассматриваем вспомогательную задачу в полупространстве в растянутых (быстрых) координатах $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. Находим на бесконечности асимптотику её решения, с помощью которой оцениваем константу в неравенстве для следов типа (4).

Доказательство сходимости собственных функций доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 1.

Благодарности

Работа написана при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00445)

Список литературы

[1] *Самарский А.А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объёмов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63, №6. С. 631–634.

[2] *Swanson C.A.* Asymptotic Variational Formulae for Eigenvalues // Canad. Math. Bul. 1963. V.6, №1. P. 1525.

[3] *Ozawa Sh.* Singular Hadamard's Variation of Domains and Eigenvalues of Laplacian 1 // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1981. V. 57, №5. P. 242–246.

[4] *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, №2. С. 347–371.

[5] *Гадыльшин Р.Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметорм в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, №4. С. 640–652.

[6] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

[7] *Гадыльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Матем. заметки. 1992. Т. 52, №:4, С. 42–55.

[8] *Гадыльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны, закрепленной на малом участке границы // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34, №3, С. 43–61.

[9] *Гадыльшин Р.Р.* О возмущении спектра лапласиана при смене типа граничного условия на малой части границы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36, №7. С. 77–88.

[10] *Стеклов В.А.* Общие методы решения основных задач математической физики. Диссертация на соискание учёной степени д.ф.-м.н., Харьков: Харьковский Императорский университет, 1901.

[11] *Mel'nyk T.A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // Nonlinear Oscillations. 2001. Vol. 4. №1. P. 91–105.

[12] *Pérez M.E.* On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2007. Vol. 7. №4. P. 859–883.

[13] *Назаров С.А., Таскинен Я.* О спектре задачи Стеклова в области с пиком // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2008. Сер. 1. №1. С. 56–65.

[14] *Чечкина А.Г.* О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи типа Стеклова с быстро меняющимся типом граничных условий // Проблемы Мат. Анализа. 2009. Вып. 42. С. 129–143.

[15] *Чечкина А.Г.* О сингулярном возмущении задачи типа Стеклова с вырождающимся спектром // Докл. Академии наук. 2011. Т. 440, №5. С. 603–606.

[16] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[17] *Chechkin G.A., Koroleva Yu.O. and Persson L.-E.* On the Precise Asymptotics of the Constant in the Friedrichs Inequality for Functions Vanishing on the Part of the Boundary with Microinhomogeneous Structure // Journal of Inequalities and Applications. Vol. 2007. Article ID 34138, 13 pages.

[18] *Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С.* Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике Т. 3. Новосибирск: Изд-во “Тамара Рожковская”, 2007.

[19] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

[20] *Садовничий В.А.* Теория операторов, 5-е изд. (Класс. ун. учебник) М.: Изд-во Мос. ун-та, “Дрофа”, 2004.

Студенческие олимпиады по дифференциальным уравнениям на механико–математическом факультете МГУ

Асташова И.В.[1], Капустина Т.О.[2], Шамаев А.С.[3]

Кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова представляет опыт проведения студенческих олимпиад по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными.

Цель данной статьи — поделиться опытом сотрудников кафедры дифференциальных уравнений механико–математического факультета МГУ в проведении студенческих олимпиад по дифференциальным уравнениям. Они проводятся кафедрой с 2003 года и пользуются неизменной популярностью среди студентов.

Каждый год в весеннем семестре проводятся две олимпиады по дифференциальным уравнениям: олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов 2–го курса и олимпиада по дифференциальным уравнениям с частными производными для студентов 3–го курса. Цели, которые ставят организаторы, состоят прежде всего в привлечении интереса студентов к предмету и в повышении творческой активности студентов, которым представляется возможность проявить себя при решении нестандартных задач.

Вариант олимпиады состоит из большого количества задач (около десяти). Каждая задача, в зависимости от сложности, оценивается определенным количеством баллов (эти баллы указаны в вариантах). Задача студента — набрать максимальное количество баллов. Варианты составляются так, что необходимые для решения методы охватывают все основные понятия курса.

С каждым годом интерес студентов к олимпиадам возрастает. Число участников олимпиад за 10 лет удвоилось по сравнению с первыми олимпиадами. Уже несколько лет в каждой из олимпиад и по ОДУ, и по УрЧП принимают участие около 100 студентов. Причем это студенты не только МГУ, но и других институтов Москвы и даже из других городов. Например, в олимпиадах регулярно и успешно участвуют студенты Московского

[1]Асташова Ирина Викторовна, iastashova@mesi.ru, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[2]Капустина Татьяна Олеговна, kapustina-tatiana@yandex.ru, доцент, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Шамаев Алексей Станиславович, sham@rambler.ru, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

государственного строительного университета и Тульского государственного университета.

Результаты студентов также приятно удивляют организаторов олимпиад. Вопреки ожиданиям организаторов, находятся студенты, решившие более двух третей всего задания. Также интересно отметить, что многие студенты, занявшие призовые места на втором курсе, через год становятся победителями олимпиады третьего курса. Более того, есть старшекурсники, которые, даже закончив изучение ОДУ и УрЧП, сохраняют интерес к нашим олимпиадам, участвуют и побеждают.

Олимпиады по ОДУ и УрЧП, наряду с олимпиадами по другим предметам, являются этапом всемехматовской олимпиады. Победители этих олимпиад обычно получают отличные оценки по соответствующему предмету. Кроме этого, победители и призеры приглашаются на отборочный тур для формирования команды МГУ на международную студенческую математическую олимпиаду.

Организаторы олимпиад по дифференциальным уравнениям предполагают и в дальнейшем проводить подобные конкурсы на механико–математическом факультете МГУ, считая, что они способствуют улучшению подготовки студентов по данной специальности и развитию самостоятельного творческого мышления студентов мех–мата — будущих математиков.

Приведем результаты нескольких олимпиад.

2011 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Царьков А.; II премия: Антропов А., Бочкарев М., Косов Е., Логачева Е., Облакова А., Брагин В., Фадеев А.; III премия: Селезнева Л., Осинцев М., Радонец А., Рогачев В., Рощенко С., Лисовский Д., Сапунов, Лушникова Н., Немиро В., Якимец К., Ярославцев И.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Калачев Г., Ромаскевич Е.; II премия: Асташов Е., Буднинский М., Давлетшин М., Заурбек И., Гилев С., Горинов Е., Калиниченко А., Карпухин М., Коновалов А., Корчагин А., Манита О., Токмаков П.; III премия: Андреев М., Селиверстов В., Вьюн С., Гусак Ю., Романов Е., Безухов Д., Войнов А., Шульчевский Д., Ишкина Ш., Бурлаков Д.

2012 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Иванов Д., Салиев, Логинов, Омельяненко В., Горбань С.; II премия: Букин Д., Городков Д., Елистратов Н., Боголюбский, Шачнев, Лавров П.; III премия: Абрамкин Б., Кульков И., Подкорытов М., Шейпак С., Солоницын, Епанчинцев, Викторова, Степанова А., Самолюк, Кулагин Н.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Немиро В.; II премия: Ярославцев И., Брагин В., Царьков О., Рогуленко С., Виноградова О., Троицкая; III премия: Хрульков В., Герасимов К., Васюкова О., Левин.

2013 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Великанов Д., Гаража А., Почеревин Р.; II премия: Горденко, Тузов К., Саркисян Г., Корчемкина Т., Брюхова Н.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Попова С.; II премия: Горбань С., Степанова А., Алешкин, Солоницын А., Колесникова, Покровский Ф., Высоканов.

2014 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Феоктистов А., Рухович А., Тильга С.; II премия: Назаров В., Саитбаталов И., Фомин Д., Иванов А., Бережной А., Болотников А., Первых С., Степанова М., Запрягаев А., Ахмедов М., Московский Б.; III премия: Кибкало В., Трифонов А., Давыдов А., Шкарина А., Горячкин В., Крохмаль Н., Коробко Е., Новиков В., Кравцов Д., Назмутдинов А., Дуков А.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Богданов Д., Подольский А., Еремин Д., Великанов Д.; II премия: Царегородцев, Гаража А., Новиков Г., Леонов, Почеревин Р., Лукина А., Мелихян М.; III премия: Абель Т., Толмачева О., Торосян А., Ермишкина, Семенова Н., Черная Т., Волобой, Тугова Е., Филатов Д., Потапова Е., Стасюк Т., Толстов И., Дулясов А.

2015 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Туров; II премия: Хазиева Л., Кузнецова А., Заславский О., Стасенко Р., Васильев М., Алексеев Г.; III премия: Фадеева А., Полещук М., Карпов, Злобина А.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Почеревин Р., Ахмедов М., Зозуленко М., Дуков А., Горячкин В.; II премия: Коробко Е., Тихонова М., Каданер А., Крохмаль Н., Иванов А., Насибян С., Рухович А., Кравцов Д., Феоктистов А., Джуган А.; III премия: Степанова М., Сагдеев А., Мусабаева А., Саакян В., Дмитриев Н., Шеховцов А., Смирнова А., Земцова Е., Чеботаева В.

В данной статье мы приводим варианты олимпиад по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными за 2009—2015 годы. Авторы задач этих олимпиад — сотрудники кафедры дифференциальных уравнений механико–математического факультета МГУ И.В.Асташова, А.В.Боровских, В.В.Быков, А.Ю.Горицкий, Т.О.Капустина, А.А.Коньков, О.С.Розанова, Н.Х.Розов, М.С.Романов, И.Н.Сергеев, И.В.Филимонова, А.В.Филиновский, А.С.Шамаев.

Олимпиады по ОДУ и УРЧП 2003—2008 года приведены в [3], [4]. Некоторые варианты с указаниями к решениям приведены в [2]. Олимпиады по УрЧП с решениями некоторых задач приведены в [1].

ОЛИМПИАДЫ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2009 г.

1. Решить задачу $\dot{x} = \frac{t-\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\, x, \quad t > 0, \qquad \lim\limits_{t\to+0} x(t) = e.$

2. До какой максимальной амплитуды можно раскачать маятник за время от 0 до 1 из положения равновесия силой $f(t)$, имеющей нулевое среднее по отрезку времени $[0,1]$?

3. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ — произвольная неограниченная последовательность чисел. Может ли она быть последовательностью нулей некоторого решения какого-либо уравнения $\ddot{x} + a(t)\, x = 0$, где $a(t)$ — гладкая функция?

4. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + \omega^2(t)\, x = 0$, где $\omega(t)$ — гладкая функция. Пусть $x(t)$ — некоторое решение этого уравнения. Определим множество $X = \{\tilde{x} \in \mathbb{R} \mid \exists\, t:\ x(t) = \tilde{x}\}$, т. е. множество точек, через которые проходит траектория $x(t)$. Предположим, что мы можем измерить функцию $\omega(t)$ с любой степенью точности $\varepsilon > 0$ (но не абсолютно точно), а начальные условия $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$ нам известны. Можно ли по этим данным построить множество $X_{\delta(\varepsilon)}$, представляющее собой $\delta(\varepsilon)$-окрестность множества X, где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$?

5. Существует ли линейное однородное уравнение 2009-го порядка, некоторая фундаментальная матрица которого удовлетворяет равенству $Y(t,0) = E$:

   (a) при всех $t \in \mathbb{Q}$;

   (b) при всех $t \in \mathbb{Z}$?

6. Можно ли найти общее решение уравнения Риккати $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$, если известны три его различных частных решения y_1, y_2, y_3?

7. (*Вычисление экспоненты методом А. Ф. Филиппова*) Найдите скалярные функции p и q от двух переменных каждая, удовлетворяющие для любой квадратной матрицы A второго порядка с собственными значениями λ_1, λ_2 равенству
$$e^A = p(\lambda_1, \lambda_2) \cdot E + q(\lambda_1, \lambda_2) \cdot A.$$

8. Докажите, что если какое-либо решение уравнения $\ddot{y} + r(t)y = 0$ $(t \geq 0)$ с непрерывным ограниченным коэффициентом r ограничено на полупрямой, то его производная — тоже.

9. Есть предположение, что *переживаемое* человеком время вблизи настоящего момента t воспринимается им не как абсолютное, а как его отношение ко всему времени $x(t)$, *прожитому* этим человеком к настоящему моменту. Исходя из этого предположения, составьте дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ и решите его.

10. Рассматривается система дифференциальных уравнений, записанная в полярной системе координат:
$$r' = rf(r^2), \quad \varphi' = 1,$$
где f— гладкая функция. Предполагается, что эта система имеет предельный цикл. Будет ли решение, отвечающее этому предельному циклу:
— устойчиво по Ляпунову?
— асимптотически устойчиво?

11. Доказать, что каждое решение уравнения $y'' + e^x\, y = 0$ ограничено при $x \to \infty$.

12. Привести пример уравнения $y' = f(x, y)$, с непрерывной $f(x, y)$ на всей плоскости, такой, чтобы какова бы ни была $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, существовало бы только одно решение в окрестности x_0, такое, что $y(x_0) = y_0$, и чтобы существовало бы по крайней мере два решения такие, что $y(0) = 0$.

13. Пусть нулевое решение системы $\dot{x} = A\,x$ устойчиво по Ляпунову. Что можно сказать об устойчивости нулевого решения системы $\dot{x} = \left(A + \frac{1}{1+t^2}\,E\right)\,x$?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2010 г.

1. Для уравнения
$$\left(x^2 + 2x + 1\right) y'' + (x+1)y' + y = 0$$
найти первый положительный корень решения, удовлетворяющего условию $y(0) = 0$.

2. Устойчивы ли нулевые решения уравнений
$$2a) \quad y'' + iy' + y = 0,$$
$$2b) \quad y'' + iy' - y = 0?$$

3. Доказать, что все решения уравнения
$$y'' + y^3 = 0$$
— периодические.

4. Доказать, что не существует точки накопления нулей функции $y^{(k)}(x)$, $0 \le k \le n-1$, где $y(x)$ — решение уравнения

$$y^{(n)} + a(x)y = 0,$$

$n \ge 1$, $a(x)$ — непрерывна и имеет не более чем конечное число нулей.

5. Существует ли решение уравнения $y^{IV} + a(x)y = 0$ ($a(x)$ — положительная непрерывная функция), имеющее 2 двукратных нуля, то есть удовлетворяющее для некоторых $x_1 \ne x_2$ условиям $y(x_1) = y'(x_1) = y(x_2) = y'(x_2) = 0$?

6. Исследовать на устойчивость все решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = & -y\sqrt{x^2+y^2} \\ \dot{y} = & x\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

7. Докажите, что если какое-либо решение уравнения

$$\ddot{y} + r(t)y = 0, \quad t \ge 0$$

с непрерывным ограниченным коэффициентом $r(t)$ ограничено на полупрямой, то его производная тоже ограничена.

8. Какое наибольшее количество различных значений может принимать величина

   (a) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$,

   (b) $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$

   на ненулевых решениях системы вида

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2?$$

9. С каждым решением $x(t)$ уравнения $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, не обращающимся в нуль вместе со своей производной, свяжем подвижный луч на фазовой плоскости, начинающийся в точке $(0,0)$ и проходящий через точку $(x(t), \dot{x}(t))$. Существует ли такая функция $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, что все такие лучи, находящиеся в:

   (a) верхней,

   (b) правой

   полуплоскости, с ростом t все время поворачиваются против часовой стрелки?

10. Отклонение математического маятника под действием силы f от положения равновесия описывается уравнением $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$. До какого максимального положения в точке $t = 1$ можно отклонить математический маятник из положения равновесия $t = 0$ за время от 0 до 1 силой $f(t)$, имеющей нулевое среднее по отрезку времени $[0,1]$ $\left(\int_0^1 f(t)dt = 0\right)$, если $x(0) = \dot{x}(0) = 0$?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2011 г.

1. У дифференциального уравнения $\dot{x} = ax$, $a > 0$, все решения, кроме $x \equiv 0$, неограничены при $t > 0$. Можно ли добиться существования ограниченного нетривиального решения, добавив к правой части bx^m, где $b > 0$, $m \in \mathbb{N}$, и рассматривая уравнение $\dot{x} = ax + bx^m$ при $t > 0$?

2. Рассматривается уравнение Ньютона $\ddot{x} = -x^3 + x^n$, $n \in \mathbb{N}$. При каких n положение равновесия $x_0 = 0$ устойчиво по Ляпунову?

3. Оценить снизу количество нулей решения уравнения $\ddot{x}+tx = 0$ на отрезке $[-100, 100]$.

4. Рассматривается математический маятник, управляемый малой силой $u(t)$, $|u(t)| < \varepsilon : \ddot{x}+\omega^2 x = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$. Можно ли привести маятник в положение покоя за конечное время, то есть верно ли, что для любых x_0, x_1, $\varepsilon > 0$, существует такая $u(t)$, $|u| \leq \varepsilon$, что соответствующее решение $x(t)$ удовлетворяет условиям $x(T) = \dot{x}(T) = 0$ при некотором $T > 0$? Если можно, оценить это время через $\varepsilon, \omega, x_0, x_1$.

5. Легко видеть, что все решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ограничены. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая гладкая функция $a(t), |a(t)| < \varepsilon$, что уравнение $\ddot{x} + (\omega^2 + a(t))x = 0$ имеет неограниченные при $t > 0$ решения.

6. Известно, что $x(t, t_0)$ — решение задачи Коши
$$\dot{x} = x - e^{-2t}x^3 + e^t, \quad x|_{t=t_0} = 1,$$
— в случае $t_0 = 0$ имеет вид $x(t, 0) = e^t$. Найдите производную $u(t)$ решения $x(t, t_0)$ по начальному моменту t_0 при $t_0 = 0$ (зная, что она существует).

7. Пусть система $\dot{x} = f(x)$ ($f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$) на плоскости имеет изолированную особую точку $(0, 0)$, причем тем же свойством обладает и ее линеаризация $\dot{u} = Au$ в этой точке. Является ли какое-либо из следующих двух утверждений следствием другого:
а) все фазовые кривые исходной системы — циклы, окружающие особую точку;
б) все фазовые кривые линеаризованной системы — циклы, окружающие особую точку?

8. Можно ли систему $\dot{x_1} = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2$, $\dot{x_2} = a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2$, заменой переменных $y_1 = h_{11}(t)\,x_1 + h_{12}(t)\,x_2$, $y_2 = h_{21}(t)\,x_1 + h_{22}(t)\,x_2$, привести к виду $\dot{y_1} = 0$, $\dot{y_2} = 0$?

9. Опишите все возможные типы поведения при $t \to +0$ решений уравнения $t^2\,\ddot{x}+at\dot{x}+bx = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Найти решение уравнения $\dot{x}(t) = x(\pi)x(t)$.

11. Является ли неограниченным непродолжаемое (максимально продолженное) вправо решение задачи Коши: $\dot{x} = x^2 + 2yz$, $\dot{y} = y^2 + 2xz$, $\dot{z} = z^2 + 2xy$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$?

12. Известно, что некоторая фундаментальная матрица системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

при всяком $t \in \mathbb{R}$ ортогональна. Верно ли, что при всяком $t \in \mathbb{R}$ матрица $A(t)$ кососимметрична?

13. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y''' + p(x)y = 0$, где $p(x) < 0$. Пусть $y(x)$ – такое его решение, что $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) > 0$ в некоторой точке $x_1 \in \mathbb{R}$. Доказать, что $y(x)$ возрастает при всех $x > x_1$.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2012 г.

1. Докажите, что для одного (какого именно?) из двух уравнений $y' = \pm y^2 + x^2$ решение с начальным условием $y(0) = 0$ продолжается на всю полуось $x \geq 0$, а для другого — нет.

2. Известно, что *если все коэффициенты нормированного (т. е. с единичным старшим коэффициентом) линейного уравнения непрерывны на некотором интервале, то все его решения продолжаются на весь этот интервал.* Верно ли аналогичное утверждение для отрезка?

3. Найдите матрицу A системы $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, если некоторого ее решение $x(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Для изолированной особой точки неизвестной линейной автономной системы на плоскости нарисованы все ее n собственных (определяемых собственными векторами) прямых (при $n = 2$ — седло или узел, при $n = 1$ — вырожденный узел, а при $n = 0$ — центр или фокус соответственно), а также вектор фазовой скорости в некоторой не лежащей на них точке плоскости. При каких значениях n по этому рисунку можно однозначно определить, каков тип особой точки и является ли она устойчивой?

5. Докажите, что уравнение

$$y'' - (1 + e^{-x})y = 0$$

имеет два ненулевых решения y_1 и y_2, удовлетворяющие условиям $\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \to 1$ и $\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \to -1$ при $x \to \infty$.

6. При $n = 1$ для любого векторного поля $f \in \mathrm{C}(G)$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ верно следующее:

а) *если* $f(x_0) \neq 0$
или

б) *если* $f(x_0) = 0$ *и существует производная* $f'(x_0)$,
то для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ *через точку* (t_0, x_0) *проходит локально единственная интегральная кривая.* Верны ли эти признаки локальной единственности при $n > 1$?

7. При любом ли $n \in \mathbb{N}$ верно, что: *если данные n скалярных n раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на общем интервале, не являются линейно зависимыми ни на каком меньшем интервале, то их определитель Вронского хотя бы в одной точке отличен от нуля*?

8. Пусть $\frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования в пространстве многочленов от переменной x степени меньше 2012. Найдите все собственные значения оператора $\exp\left(\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}\right)$ и их кратности.

9. Все собственные значения матрицы $A(t)$, непрерывно зависящей от t, действительны и не превосходят -1 при всех $t \in \mathbb{R}$. Следует ли отсюда, что нулевое решение линейной неавтономной системы $\dot{x} = A(t)\,x$

   а) асимптотически устойчиво?

   б) устойчиво?

10. Можно ли так подобрать правую часть уравнения

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R},$$

чтобы из любой начальной точки $(x(0), \dot{x}(0))$ фазовая траектория приходила бы в точку (0,0):

   a) за бесконечное время;

   b) за конечное время?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2013 г.

1. Могут ли все ненулевые решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0,$$

быть неустойчивыми по Ляпунову, если нулевое решение этой системы

   1) неустойчиво;

   2) устойчиво;

   3) асиптотически устойчиво

по Ляпунову?

2. Часы с маятником (совершающим малые колебания, без трения) спешили на 2 ч в сутки. Когда грузик на маятнике опустили на 1 см, часы стали спешить на 1 ч в сутки. На сколько см еще нужно опустить грузик, чтобы часы шли точно?

3. Найти кривую, у которой длина отрезка любой ее касательной, заключенного между координатными осями, равна фиксированному числу $a > 0$.

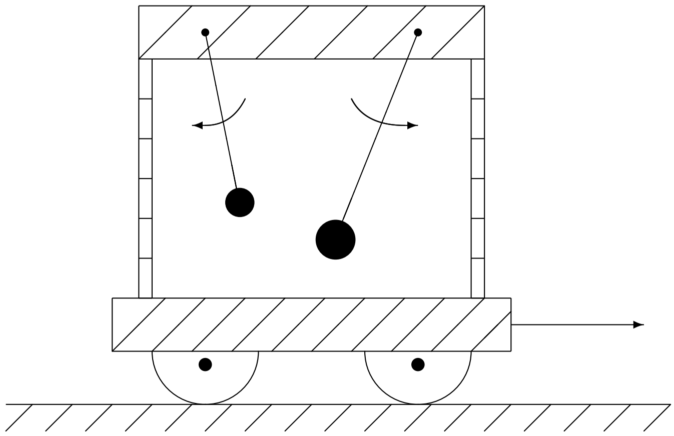
4. Существует ли у уравнения $\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$ такое решение ϕ, для которого функция $t \mapsto \sin\phi(t)$ была бы непериодической?

5. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^∞. Векторнозначная функция $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ является решением уравнения $y' = f(y)$ с начальными условиями $y(0) = 0$ и удовлетворяет условию $|y(x)| \to \infty$ при $x \to 1 - 0$. Следует ли отсюда, что при достаточно малых y_0 решение рассматриваемого уравнения с начальными условиями $y(0) = y_0$ не может быть определено для всех $x > 0$?

6. Можно ли так двигать тележку с двумя маятниками

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = u(t), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = u(t), \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0 \end{cases}$$

(правильно подобрать общую функцию $u(t)$), чтобы остановить оба маятника, т.е. можно ли для заданных чисел $\omega_i > 0$, x_i^0, $\dot{x}_i^0$, $i = 1, 2$, указать функцию $u(t)$ такую, чтобы для некоторого $T > 0$ было выполнено $x_1(T) = x_2(T) = 0$, $\dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) = 0$? Рассмотрите два случая: $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$.



7. Решите уравнение $\frac{\partial u}{\partial x} + (2y - u)\frac{\partial u}{\partial y} = y + 2u$.

8. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую гладкую функцию $|a(t)| < \varepsilon$, что уравнение

$$\ddot{x} + (1 + a(t))x = 0, \quad t > 0,$$

имеет неограниченное решение.

9. Решите уравнение $\frac{du}{dx} - u^2 = \frac{1}{x^4}$.

10. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y''' + p(x)y = 0$, где $p(x)$— непрерывная функция, $p(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть y — такое его решение, что $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) = y_0$ в некоторой точке $x_1 \in \mathbb{R}$. При каких значениях y_0 это решение обращается в ноль хотя бы в одной точке $x_2 > x_1$?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2014 г.

1. Имеется ли среди решений уравнения

$$y' + |y| + 1 = 0$$

такое, которое определено на всей числовой прямой?

2. Решить задачу Коши для уравнения

$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 4\,x + 4\,y} - x - 2\right)$$

с начальным условием

а) $y(-1) = 3$; b) $y(-2) = 1$.

3. Решить задачу Коши

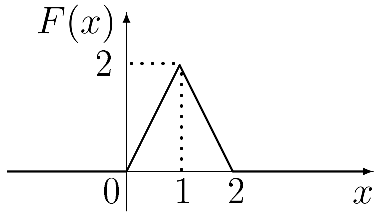
$$y'' + 4\,y = F(x),$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

где

$F(x) = 0, \quad x \in (-\infty,\, 0] \cup (2,\, \infty);$

$F(x) = 2\,x, \quad 0 < x \le 1;$

$F(x) = 4 - 2\,x, \quad 1 < x \le 2.$



4. Исследовать на устойчивость особые точки уравнения колебаний маятника, к которому приложен вращающий момент L:

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\sin x = L, \qquad \text{где } |L| < b.$$

5. Зная функцию $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, нигде не равную нулю, найдите какую-нибудь функцию $g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ с определителем Вронского $W_{f,g}(t) \ne 0$, $t \in \mathbb{R}$, а также выпишите уравнение $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$, $p, q \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, которому удовлетворяют обе эти функции.

6. Для каких значений $n > 1$ некоторое ненулевое решение некоторого уравнения вида $y^{(n)} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на интервале $(0;1)$ при: а) $p, q \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$; б) $p, q \in \mathrm{C}(0;1)$?

7. а) Можно ли продолжить на $[0, \infty)$ решение задачи Коши

$$y'' = y^3,$$

$$y(0) = y_0 > 0,$$
$$y'(0) = y_1 > 0?$$

б) Существует ли заданное на $(-\infty, \infty)$ решение этого уравнения, не равное тождественно нулю?

8. Пусть функция $u(x)$ является решением уравнения

$$u(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x) - x\int_0^3 u(s)ds\right),$$

удовлетворяющим условию $u(0) = 3$.

Найти значение выражения

$$u(3) + \frac{47 - 19e^3}{5 - e^3}.$$

9. Найти множество поверхностей, ортогональных ко всем поверхностям следующего семейства:
$$z^2 - pxy = 0,$$
где p – вещественный параметр.

10. Для задачи Коши
$$y' = y^2 + \mu t y^4, \quad y(0) = 1 + \mu$$
найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2015 г.

1. Для каждого значения $m = 0, 1, \ldots$ укажите наименьшее значение k, при котором любое линейное уравнение
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = t^m \cos t$$
(с постоянными действительными коэффициентами) имеет частное решение вида
$$y = p_1(t)\cos(t + \varphi_1) + \ldots + p_k(t)\cos(t + \varphi_k),$$
где p_i — многочлены, а φ_i — числа.

2. Верно ли, что у любой системы
$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$
оператор A которой имеет собственные значения $\lambda_i[A]$ $(i = 1, \ldots, n)$, для всякого $T > 0$ найдется ненулевое решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее оценке:
$$1)\ |x(T)| \geq |x(0)|\, e^{T \cdot \min\limits_i |\lambda_i[A]|}, \qquad 2)\ |x(T)| \geq |x(0)|\, e^{T \cdot \max\limits_i \mathrm{Re}\lambda_i[A]},$$
где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$?

3. Верно ли, что решения семейства задач Коши
$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad x \in J \subset \mathbb{R}, \quad f \in \mathrm{C}^1(I \times J),$$
непрерывно зависят от начального значения $x_0 \in J$ равномерно по t на заданном ограниченном интервале I, если известно, что все они определены на нем и имеют конечные пределы на его концах?

4. Существует ли такая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что все решения уравнения $y'' = f(y, y')$ являются ограниченными и имеют ограниченную область определения?

5. Решить уравнение
$$y'^3 + x\, y'^2 - (2x + 3)y' + y = 0.$$
Будет ли единственным решение с начальным условием
а) $y(-1) = 1$; б) $y(-2) = 0$.

6. Исследовать характер особых точек и построить фазовый портрет системы

$$\dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2,$$

$$\dot{y} = \arctan(x^2 + xy)$$

на квадрате $[-5,\ 5] \times [-5,\ 5]$.

7. Может ли уравнение

$$y'' + f(y') + y = 0,$$

с непрерывной функцией $f(y)$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $yf(y) > 0$ при $y \neq 0$, иметь периодические решения, отличные от $y = 0$?

8. Пусть $y(x)$—решение уравнения

$$y''' + p(x)y = 0$$

с непрерывной положительной на $[x_0, \infty)$ функцией $p(x)$, удовлетворяющее условиям $y(x_1) = y'(x_1) = 0, y''(x_1) > 0$ в некоторой точке $x_1 > x_0$. Доказать, что $y(x)$ убывает на $(x_0,\ x_1)$.

9. Можно ли продолжить на $[0, \infty)$ решение задачи Коши

$$y^{(n)} = y^{2015} + x^{2014},$$

$$y(0) = y_0 > 0,\ y'(0) = y_1 > 0,\ \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1} > 0$$

при а) $n = 1$, б) $n = 2$, в) любом n?

10. Найти число решений следующей задачи:

$$a(a^2 - 3a - 4)\, y''' + a(a-1)\, y'' - (a-4)\, y' + 4y = x^2 + a,$$

$$y(0) = -1,\ y'(0) = 1,$$

в зависимости от параметра a. Ответ пояснить.

ОЛИМПИАДЫ ПО УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2009 г.

1. Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ в полуплоскости $y > 0$.

2. Имеет ли решение (при произвольной непрерывной функции φ на ∂K, K— единичный квадрат на плоскости $\mathbb{R}^2$) задача Дирихле

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{в} \quad K, \qquad u\big|_{\partial K} = \varphi(x,y), \qquad u \in C^2(\overline{K})?$$

3. Пусть $v_n(x,y)$— последовательность решений задачи Дирихле

$$\Delta v_n = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad v_n\big|_{\partial\Omega} = \varphi_n(x,y),$$

Ω— ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\varphi_n \in C(\partial\Omega)$, $\|v_n\|_{L_2(\partial\Omega)} \to 0$. Можно ли утверждать, что $\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \to 0$?

4. Рассмотрим уравнения
$$u_{tt} = -u_{xx}, \qquad u_{tt} = u_{xx}, \qquad u_t = u_{xx}.$$
Какие из этих уравнений имеют двоякопериодические и отличные от $const$ решения, определенные на всей плоскости?

5. Решите в явном виде задачу Коши
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u, \qquad u\Big|_{t=0} = 1.$$

6. Докажите, что для решения задачи
$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0,\ x \in (0, \pi), \\ u\big|_{x=0} = 0, \qquad u\big|_{x=\pi} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{array}$$
выполняется оценка
$$\int\limits_0^\pi (\alpha u^2 + \beta u_x^2 + \gamma u_t^2)\, dx \le C \int\limits_0^\pi (\varphi_x^2 + \psi^2)\, dx,$$
где $C = \max(\alpha + \beta, \gamma)$, α, β, γ— положительные постоянные.

7. Пусть $u(x, y)$— решение задачи
$$u_{xx} + u_{yy} = 1 \quad \text{в} \quad K = [0, 2] \times [0, 2], \qquad u\Big|_{\partial K} = 0.$$
а) Укажите такое целое N, что $N < u(1, 1) < N + 1$.

б) Укажите вещественное R, что $|u_x^{(2009)}(1, 1)| < R$.

8. Рассматривается решение уравнения
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \qquad \text{в} \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$
такое, что
$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \qquad u \not\equiv 0.$$
Доказать, что $u(t, x, y)$ меняет знак при сколь угодно больших t.

9. Рассматривается уравнение
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \qquad u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = 0.$$
Может ли $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t, x) = 0$ равномерно на $0 \le x \le 1$?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2010 г.

1. Найти общее решение уравнения $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$.

2. Найти в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L} = \frac{d^4}{dx^4} + 16$.

3. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$, где $u(x,t)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \\ u(x,0) = \operatorname{arctg} x. \end{cases}$

4. Найти решение задачи Коши:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} - u_x \\ u(x,y,0) = \sin^2(x-2y). \end{cases}$$

5. Может ли нетривиальное решение краевой задачи
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$
иметь при некотором $x^* \in (0,\pi)$ счетное множество нулей при $t \in (0,+\infty)$.

6. При каких A существует нетривиальное решение в виде многочлена задачи Дирихле
$$\begin{cases} \Delta u = A, \quad \text{где } A = \mathrm{const} \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$
где Ω — равносторонний треугольник на плоскости XOY (см. рис. 1).

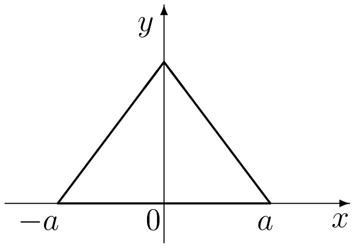


Рис. 1: Ω

7. Имеет ли решение краевая задача и единственно ли оно?

a) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x<0 \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a>0, \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x<0 \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a>0. \end{cases}$

8. Рассмотрим задачу Дирихле

a) $\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ где $f(x) \in F$, F — множество функций, плотное в $\mathcal{L}_2(\Omega)$;

b) $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \end{cases}$ где $\varphi(x) \in \Phi$, Φ — множество функций, плотное в $\mathcal{L}_2(\partial\Omega)$.

Плотно ли в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ множество решений?

9. Пусть

$w(y)$ — решение задачи $\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ w|_{\partial G_0} = 1, \\ w \to 0 \text{ при } |y| \to \infty, \end{cases}$

$\theta(y)$ — решение задачи $\begin{cases} \Delta \theta = 0 \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\big|_{\partial G_0} = 1, \\ \theta \to 0 \text{ при } |y| \to \infty, \end{cases}$

Докажите, что $\int\limits_{\partial G_0} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma \cdot \int\limits_{\partial G_0} \theta d\sigma \geq S^2(\partial G_0)$. Когда достигается равенство?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2011 г.

1. Решить задачу Коши–Гурса, построив область на плоскости, где это решение определяется однозначно: $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = 2x$, $u(x,6x) = 49x^2 + x$, $0 < x < 7$, $0 < t < 6$.

2. Можно ли "раскачать" ограниченную струну до сколь угодно большой амплитуды, прилагая к одному из ее концов стремящуюся к нулю силу? (Другой конец закреплен.)

3. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция, заданная вне шара $|x| < 1$. Может ли она убывать быстрее любого $|x|^{-m}$ при $|x| \to \infty$, где m — произвольное положительное число, и не быть тождественно равной нулю?

4. Корректна ли задача Дирихле для уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в круге?

5. Даны уравнения

   а) $u_{tt} - u_{xx} = 0$,

   б) $u_{tt} + u_{xx} = 0$,

   в) $u_{tt} + u_{xx} + u = 0$,

   г) $u_{tt} + u_{xx} - u = 0$

   на плоскости (x,t) и равносторонний треугольник T на плоскости (x,t) со стороной a. Рассматриваются решения указанных уравнений, равные нулю на границе T. Какое из этих решений может быть отлично от 0 в T?

6. Постройте последовательность гладких функций, сходящихся к $\delta''(x)$ в $D'(\mathbb{R}^1)$.

7. Рассматривается решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, $t \geq 0$, $x \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$ и граничному условию $u(0,t) = \mu(t)$. Необходимо вычислить значение решения в точке (x,t). На каких интервалах необходимо знать значения данных $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, чтобы можно было вычислить значение решения

   а) в точке $(x,t) = (10,15)$,

   б) в точке $(x,t) = (15,10)$?

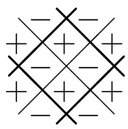
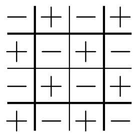
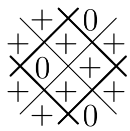
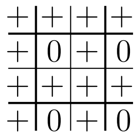
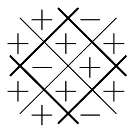
8. Единственно ли решение задачи $u_{xx} + u_{yy} - u_x - 3u_y = f(x,y)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Omega = [0,1] \times [0,3]$?

9. Рассматривается ограниченное решение уравнения $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = \left(1 + \frac{1}{|x|+1}\right)^x$. Найти $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

10. Существует ли в $\mathbb{R}^2$ решение задачи $u_{xy} + u = 1$, $u|_\Gamma = 2$, $u_y|_\Gamma = 0$, $\Gamma = \{(x,y) : y = x^2\}$?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2012 г.

1. Может ли классическое решение уравнения струны $u_{tt} = u_{xx}$ на $\mathbb{R}^2$ иметь знаки, как изображено на рисунках а)—д)? (Везде плоскость замощена квадратами 2 клетки × 2 клетки. Оси координат параллельны знакам +.)

   а)  б)  в)  г)  д) 

2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + f(t,x), \quad t \in [0,\infty), \quad x \in [0,\pi], && (1)\\ &u\Big|_{t=0} = \varphi(x), && (2)\\ &u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0. && \end{aligned}$$

   Пусть $f \to 0$ при $t \to \infty$.

   а) Верно ли, что $u(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$?

   б) Тот же вопрос для задачи (1),(2) с краевыми условиями $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = 0$.

   в) Тот же вопрос для задачи (1),(2) с краевыми условиями

$$(u_x - \alpha u)\big|_{x=0} = (u_x + \alpha u)\big|_{x=\pi} = 0,\ \alpha > 0.$$

3. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \alpha\ u_t = u_{xx},\ \alpha > 0,\\ &u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \end{aligned}$$

   а) Убывает ли амплитуда решения при $t \to \infty$, если начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ финитны?

   б) Справедлива ли экспоненциальная оценка скорости убывания решения при $t \to \infty$?

4. Может ли решение уравнения теплопроводности с "памятью"

$$u_t = u_{xx} - C \int\limits_0^t u_{xx} e^{-(t-\tau)} d\tau.$$

   неограниченно возрастать при $t \to +\infty$?

5. Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения

$$\Delta u = 0 \quad \text{в полуполосе} \quad [0,\infty) \times [0,\pi],$$

   удовлетворяющее условиям $u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0$.

   а) Докажите, что если $|u| < M$, то $u(x,y)$ экспоненциально убывает при $x \to +\infty$.

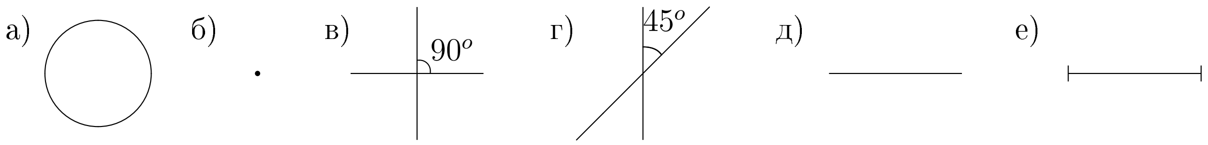
   б) Пусть $u(x,y)$ убывает по x быстрее любой экспоненты. Верно ли, что $u(x,y) \equiv 0$?

6. Пусть $\Omega = (0,1)^n$ – куб в n-мерном пространстве. Докажите, что задача

$$\begin{cases} \Delta u + x_n^{-\frac{1}{2}} u = f, \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

имеет не более одного решения.

7. Пусть $u(x,y)$ — гармоническая функция на плоскости. Может ли ее линия уровня иметь одну из следующих форм:



8. Может ли у неограниченной струны $(-\infty < x < \infty)$ целый отрезок находиться в покое в процессе движения струны, начиная с некоторого момента? Одна точка?

   Тот же вопрос для ограниченной струны с закрепленными концами.

9. Решить в D' уравнение
$$y''' + 2y'' + y' = \delta(x).$$

10. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = x(1-x)^2.$$

    Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^1 \left[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right]\, dx.$

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2013 г.

1. Найти решение $y'' + y = \delta^{(2013)}(x)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Рассматривается задача Коши
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_x u, \quad t \in (0,\infty), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2,3. \\ u\Big|_{t=0} = 0, \ \ u_t\Big|_{t=0} = f(x). \end{cases}$$

   Функция f неотрицательна, и отлична от нуля в серповидной области: расположенной внутри шара радиуса 1, и вне шара радиуса 2, таких, что граничные сферы этих шаров пересекаются в диаметрально противоположных точках сферы радиуса 1. Указать все те значения t, при которых сумма значений u, вычисленных в центрах этих шаров, отлична от нуля. Рассмотреть задачу в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

3. Пусть $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ — шар в $\mathbb{R}^3$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к D. Функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x, y, z) = x^{2013} + y^{2013} + z^{2013} + 2013 \qquad \text{в} \;\; D$$

и условию $u(0, 0, 0) = 0$.

а) При каких значениях параметра a эта функция может удовлетворять краевому условию $u\Big|_{\partial D} = a$?

б) Тот же вопрос про краевое условие $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial D} = a$.

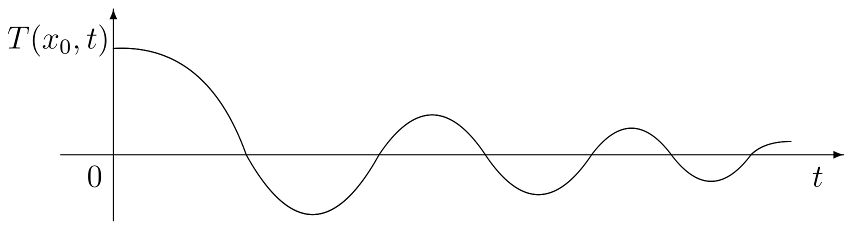
4. Рассмотрим колебания ограниченной струны с закрепленной границей:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad t \in (0, \infty), \;\; x \in (0, l), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Некоторый отрезок $[a, b] \subset (0, l)$ находится в покое в процессе колебаний струны, то есть $u(x, t) \equiv 0$ при $(x, t) \in [a, b] \times [0, \infty)$. Можно ли утверждать, что $u(x, t) \equiv 0$ в $(x, t) \in [0, l] \times [0, \infty)$, то есть что вся струна покоится?

5. Хорошо известно, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области единственно. Будет ли оно единственно в полосе $(x_1, x_2) \in (-\infty, \infty) \times (0, l)$ на плоскости? А если рассматривать только ограниченные решения?

6. Пусть $T(x, t)$ — температура ограниченного тела с нулевыми условиями на границе.
$T_t = T_{xx}, \;\; t \in (0, \infty), \;\; x \in (0, 1)$,
$T\big|_{t=0} = \varphi(x)$,
$T\big|_{x=0} = T\big|_{x=1} = 0$.
Может ли температура колебаться в некоторой внутренней точке x_0 тела, именно, может ли $T(x_0, t)$ иметь такой график:



7. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u + f(t, x), \quad t \in (0, \infty), \;\; x \in \Omega, \qquad |f(t, x)| < \varepsilon, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega \times [0, \infty)} = 0. \end{cases}$$

а) Можно ли за конечное время остудить тело до нулевой температуры $u(\tau, x) \equiv 0$, $x \in \Omega$?

б) Можно ли за конечное время нагреть тело в заданной точке $x_0 \in \Omega$ с нулевой температуры $\varphi(x) \equiv 0$ до заданной температуры $u(\tau, x_0)$, $|u(\tau, x_0)| > M$?

8. Найти общее решение уравнения $u_{xy} + x u_x + y u_y + (1 + xy)u = 0$.

9. Найти множество на плоскости (x, t), в котором однозначно определено решение задачи Гурса, и получить явный вид решения:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \;\; x \geq 0, \qquad u(x, x) = x, \;\; 0 \leq x \leq 1.$$

10. Построить функцию Грина для дифференциального оператора $Lu = u'' - \frac{2}{x^2}\, u$, $u(1) = 0$, $u(x)$ ограничена на интервале $(0, 1)$.

11. Можно ли произвольную функцию из $L_2(\Omega)$ (Ω–ограниченная область) приблизить в $L_2(\Omega)$ решениями

    а) уравнения Лапласа;

    б) уравнения колебаний струны;

    в) уравнения теплопроводности?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2014 г.

1. Найти решение $y'' - 2y' + 5y = \delta^{(2014)}(x)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Пусть $u(x_1, x_2, x_3)$ — решение задачи Дирихле в шаре $\{|x| < 2\}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\Delta u = 0 \;\text{ при }\; |x| < 2, \quad u\Big|_{|x|=2} = x_1^2.$$

   Найти $u(0, 0, 0)$.

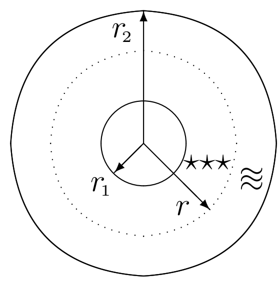
3. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(t, x, y)$, где $u(t, x, y)$ — решение задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \;\; t > 0, \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u\Big|_{t=0} = \frac{\big(x^2 + x|x|\big)\, \cos^2 y}{1 + x^2}$$

4. Сечение трубки представляет собой кольцо с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2, между ними находится вода. Изнутри трубка охлаждается до температуры $-T_1 < 0$, снаружи поддерживается температура $T_2 > 0$. Какой толщины лед появится на внутренней стенке? Теплопроводности льда и воды будем считать равными.

$$\begin{cases} u_t(t, \vec{x}) = \Delta_x u(t, \vec{x}), \quad t > 0, \;\; r_1 < |x| < r_2, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \\ u\Big|_{|x|=r_1} = -T_1, \;\; u\Big|_{|x|=r_2} = T_2, \end{cases}$$

$$r : \lim_{t\to\infty} u(t, \vec{x})\Big|_{|x|=r} = 0.$$



5. На плоскости (x, t) найти область определенности решения задачи Коши-Гурса и само решение:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = e^x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_x(0, t) = 1, \quad 0 < t < 1.$$

6. Корректна ли задача
$$\mathcal{L}u = 0 \text{ в } K, \qquad u\big|_{\partial K} = \varphi(t, x),$$
$\varphi(t, x)$ — непрерывная функция, $K = (0, \pi) \times (0, \pi)$, если

а) $\mathcal{L} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$,

б) $\mathcal{L} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$?

7. Рассматривается краевая задача для уравнения колебаний струны
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < t < T, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \;\; u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 < x < \pi,$$
$$u\big|_{x=\pi} = \varphi(t), \;\; \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=\pi} = \psi(t), \quad 0 < t < T.$$
Корректна ли эта задача?

8. Пусть $\varphi(x)$ — заданная финитная функция. Можно ли найти такую непрерывную функцию $f(x)$, чтобы решение задачи
$$u_t = u_{xx} \text{ при } x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = f(x)$$
удовлетворяло условию $u(T, x) = \varphi(x)$? (Иначе говоря, можно ли так нагреть стержень, что в момент времени $t = T$ распределение температуры станет $\varphi(x)$?)

9. Могут ли семейства кривых
$$y = x^3 + C_1, \quad y = -x^5 + C_2, \quad -\infty < C_1, C_2 < \infty$$
быть характеристиками гиперболического на плоскости уравнения?

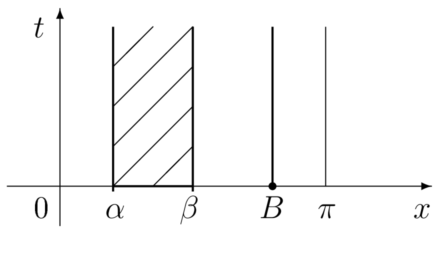
Олимпиада по уравнениям с частными производными 2015 г.

1. Найти решение уравнения $y'' + 4y = \delta'(x - 1)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Найти общее решение уравнения $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - 2u_y = 0$.

3. Сколько решений имеет задача
$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 1, \qquad |x| < 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{|x|=1} = a + x_1^3 + x_2^5 + x_3^7$$
в зависимости от параметра a?

4. Рассматривается задача в полуполосе $\Pi = (0, \pi) \times (0, \infty)$:
$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0.$
Может ли нетривиальное решение этой задачи быть равно нулю
а) в полуполосе $(x, t) \in (\alpha, \beta) \times (0, \infty)$;
б) на полупрямой $x = B, \; t > 0$?



5. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad t > 0, \ \ x \in \mathbb{R}, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x) \geqslant 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \geqslant 0,$$

и известно, что $u(x,T) = 0$ при $|x| > 2015$ при некотором $T > 0$. Указать T_0 такое, что если $T > T_0$, то $u \equiv 0$, иначе, если $T < T_0$, то возможно нетривиальное решение $u \neq 0$.

6. Пусть

$$u_t = u_{xx} + \sin t, \quad x \in (0,\pi), \ \ t > 0, \qquad u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0.$$

Докажите, что существует $u_0(x,t)$ — периодическая по t функция, такая что $\|u(x,t) - u_0(x,t)\|_C \longrightarrow 0$ при $t \to \infty$.

7. Пусть $u(t,x)$— решение задачи Коши

$$u_t = \Delta u + u, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ — финитная функция. Может ли соответствующее решение $u(t,x)$ быть при некотором $t > 0$ финитной функцией?

8. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} = -u_t + u_{xx}, \qquad u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = 0,$$

$\varphi(x)$ — финитная функция.

а) Докажите, что $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[(u_x)^2 + (u_t)^2\Big]\, dx \to 0$ при $t \to \infty$.

б) Имеет ли решение *передний фронт* или *задний фронт*?

9. Будет ли решение задачи

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),$$

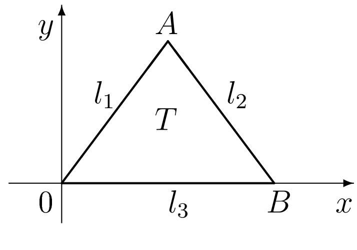
где $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция, непрерыно зависеть от начальных условий?

10. Пусть $u(x,y)$– гармоническая функция в $\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|\, dx < C$, где C не зависит от y. Верно ли, что $u \equiv 0$?

11. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа в равностороннем треугольнике T,

$u\Big|_{l_1} = u\Big|_{l_2} = 0, \ \ u\Big|_{l_3} = \varphi(x),$

$\varphi(x)$— гладкая функция, $\varphi(0) = \varphi(B) = 0$.
Докажите, что $|u(x,y)| \leqslant Cr^{\alpha}$, $\alpha > 1$,
r — расстояние от точки A до точки (x,y).



Список литературы

[1] Сборник задач по уравнениям с частными производными под редакцией А.С.Шамаева М.: Бином, 2005.

[2] *Шамаев А.С.*, Олимпиады по дифференциальным уравнениям для студентов 2, 3 курсов механико–математического факультета МГУ // Математика в высшем образовании, 2003, с. 77–83.

[3] *Шамаев А.С., Капустина Т.О.*, Педагогическая деятельность кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова. Олимпиады и письменные экзамены по дифференциальным уравнениям // Математика в высшем образовании, 2008, №6, с. 11–32.

[4] *Шамаев А.С., Капустина Т.О.*, Студенческие олимпиады по дифференциальным уравнениям // Современные проблемы математики и механики, 2009, Т.5, выпуск 1 "Дифференциальные уравнения", Изд-во Московского Университета, с. 156—176.

О новых результатах в качественной теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Асташова И.В.[1]

Приводится обзор результатов по качественной теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных с 2012 года на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Предлагаемая работа является продолжением и развитием многолетних исследований коллектива авторов, начатого под руководством профессора д.ф.-м.н. В. А. Кондратьева. Для исследования решений нелинейных уравнений не существует общих подходов и методов. Тем не менее результаты о поведении их решений существенно используются для исследования нелинейных эллиптических и параболических задач, в том числе, возникающих в приложениях. В связи с этим как теоретическая, так и практическая составляющие полученных результатов актуальны в теории дифференциальных уравнений, спектрального анализа и приложениях.

1 Уравнения со степенной нелинейностью

1.1 Существование решений с нестепенной асимптотикой

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} = |y|^k \operatorname{sgn} y, \qquad n \ge 1, \quad k > 1. \tag{1}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для любого $x^* \in \mathbb{R}$ уравнение (1) имеет решение

$$Y(x) = C(x^* - x)^{-\alpha}, \qquad \alpha = \frac{n}{k-1}, \quad C = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha + j)\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{2}$$

[1]Асташова Ирина Викторовна, ast@diffiety.ac.ru, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

В работе [1] при $n = 2$ и в работах [2] и [3] при $n = 3$ и $n = 4$ доказано, что все положительные решения уравнения (1) с вертикальной асимптотой $x = x^*$ имеют вид

$$y(x) = Y(x)(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0. \tag{3}$$

Из результатов работы [4] следует, что для любого $N > 1$ существуют такие $n > N$, $k > 1$, что уравнение (1) имеет также положительные решения другого вида с вертикальной асимптотой $x = x^*$:

$$y(x) = (x^* - x)^{-\alpha}\, h(\,\ln(x^* - x)\,), \tag{4}$$

где h — непостоянная непрерывная положительная периодическая функция. При этом оставался открытым вопрос, насколько маленьким может быть $n \geq 5$, для которого при некотором $k > 1$ существует решение вида (4).

Теорема. *При $n = 12, 13, 14$ существует такое $k > 1$, что уравнение (1) имеет решение, для которого*

$$y^{(j)}(x) = (x^* - x)^{-\alpha - j}\, h_j(\,\ln(x^* - x)\,), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

где h_j — непостоянные непрерывные положительные периодические функции.

В работе [3] также доказано, что при $n = 3$ и $n = 4$ все кнезеровские решения (см. определение в [1]) уравнения

$$z^{(n)} = (-1)^n |z|^k \operatorname{sgn} z, \;\; n \geq 1, \;\; k > 1, \tag{6}$$

имеют вид

$$z(x) = C(x - x^*)^{-\alpha}. \tag{7}$$

Отметим, что если $y(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5), то функция $z(x) = y(-x)$ является кнезеровским решением уравнения (6). Таким образом, имеет место

Следствие. *При $n = 12, 14$ и существует такое $k > 1$, что уравнение (6) имеет отличное от (7) кнезеровское решение $z(x) = x^{-\alpha}\, h(\ln x\,)$, $\;x > 0$, где h — непостоянная непрерывная положительная периодическая функция.*

Замечание. При доказательстве Теоремы 1, как и результатов работы astKoz, применяется метод, использующий бифуркационную теорему Хопфа ([5], гл.5). Этот метод не позволяет получить результат при $n < 12$, что не означает, впрочем, отсутствия решений вида (4) при $5 \leq n \leq 11$.

1.2 О существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнений типа Эмдена–Фаулера высокого порядка

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + p_0\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n > 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p_0 \neq 0. \tag{8}$$

Многие результаты об асимптотическом поведении решений (8) подробно описаны в [1] и [5]. Другие результаты о существовании решений этого уравнения с асимптотикой специального вида содержатся в [2]–[4], [6], [7].

Приведем результаты о существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнения (8). При этом будет использоваться обозначение $\alpha = \frac{n}{k-1}$.

Теорема 1. *Для любого целого* $n > 2$ *и любого действительного* $k > 1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* $h(s)$, *что для любых* $p_0 > 0$ *и* $x^* \in \mathbb{R}$ *функция*

$$y(x) = p_0^{\frac{1}{k-1}}(x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x)), \qquad -\infty < x < x^*, \tag{9}$$

является решением уравнения (8).

Следствие 1. *Для любого четного* $n > 2$ *и любого действительного* $k > 1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* $h(s)$, *что для любых* $p_0 > 0$ *и* $x^* \in \mathbb{R}$ *функция*

$$y(x) = p_0^{\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\log(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{10}$$

является решением уравнения (8).

Следствие 2. *Для любого нечетного* $n > 2$ *и любого действительного* $k > 1$ *существует такая знакопеременная периодическая функция* $h(s)$, *что для любых* $p_0 < 0$ *и* $x^* \in \mathbb{R}$ *функция*

$$y(x) = |p_0|^{\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\log(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{11}$$

является решением уравнения (8).

Замечание. Отметим, что ранее в работе [4] было доказано существование решений вида (11) с положительной периодической функцией $h(s)$ для уравнения (8) с достаточно большим n и $p_0 = (-1)^{n+1}$. Аналогичный результат для $n = 12, 13, 14$ был доказан в работе [7].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00989).

Литература.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

2. *Асташова И. В.* Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №12. С. 2185.

3. *Кигурадзе И. Т.* Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравне- ний // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. №2. С. 207–219.

4. *Kozlov V. A.* On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. 1999. V. 37. №2. P. 305–322.

5. *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. С. 22–288.

6. *T. Kusano, J. Manojlovic.* Asymptotic behavior of positive solutions of odd order Emden-Fowler type differential equations in the framework of regular variation // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2012. №45. P. 1–23.

7. *Astashova I.V.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. 2013. DOI: 10.1186/10.1186/1687-1847-2013-220

1.3 Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad 0 < k < 1, \tag{1}$$

с непрерывной функцией $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$.

Заметим, что в этом случае условия классической теоремы единственности решения задачи Коши не выполняются. Тем не менее имеет место следующее утверждение [2, **7.3**]:

Теорема 1. *Пусть функция $p(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y_0, …, y_{n-1}. Тогда для любого набора чисел $x_0, y_0^0, \dots, y_{n-1}^0$, в котором не все y_i^0 равны 0, соответствующая задача Коши для уравнения (1) имеет единственное решение.*

Положим $\gamma = \dfrac{n}{1-k}\ (> 0)$.

Теорема 2. (См. рис. 3) *Пусть $n = 3$ и $p(x, y_0, \dots, y_{n-1}) = p(x)$, где $p(x)$ — определенная на всей числовой прямой положительная непрерывная функция, имеющая конечные положительные пределы p^* и p_* при $x \to \pm\infty$ соответственно.*

Тогда любое максимально продолженное решение уравнения (1) — это или

(i) *тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ на $(-\infty, +\infty)$, или*

(ii$_\pm$) *решение, равное нулю на полуоси $(-\infty,\ x^*]$ и знакопостоянное с асимптотически степенным поведением на $(x^*,\ +\infty)$, а именно*

$$y(x) = \pm C(p(x^*))\ (x - x^*)^\gamma\ (1 + o(1)) \quad \textit{при}\ \ x \to x^* + 0, \tag{2}$$

$$y(x) = \pm C(p^*)\ x^\gamma\ (1 + o(1)) \quad \textit{при}\ \ x \to +\infty, \tag{3}$$

где $C(p) = \left(\dfrac{(1-k)^3\, p}{3(k+2)(2k+1)} \right)^{\frac{1}{1-k}}$, *или*

(iii) *решение, равное нулю на полуоси $[x_*,\ +\infty)$ и колеблющееся на интервале $(-\infty,\ x_*)$, причем для точек его локального экстремума x_j, $j \in \mathbb{Z}$, выполняются условия*

$$x_j \to -\infty, \quad |y(x_j)| = |x_j|^{\gamma + o(1)} \quad \textit{при}\ \ j \to -\infty, \tag{4}$$

$$x_j \to x_* - 0, \quad |y(x_j)| = |x_* - x_j|^{\gamma + o(1)} \quad \textit{при}\ \ j \to +\infty, \tag{5}$$

или

(iv$_\pm$) *решение, равное нулю на отрезке $[x_*,\ x^*]$, $x_* \leq x^*$,*

колеблющееся на полуоси $(-\infty,\ x_*)$ так, что выполняются соотношения (4)–(5), и знакопостоянное на $(x^*,\ +\infty)$ так, что выполняются соотношения (2)–(3), или

(v$_\pm$) *решение, удовлетворяющее (3) при $x \to +\infty$, удовлетворяющее (4) при $x \to -\infty$, и ни в одной точке не обращающееся в ноль вместе с y' и y''.*

Замечание 1. Если $p(x) = p_0 > 0$, то любое решение вида (iii) может быть записано на интервале $(-\infty, x^*)$ в виде

$$y(x) = (x^* - x)^\gamma\ h\,(\log(x^* - x)\,)$$

с некоторой непостоянной колеблющейся периодической функцией $h(s)$.

Рис. 3:

Теорема 3. *Для любого целого $n > 2$ и любого положительного $k < 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любого p_0, удовлетворяющего неравенству $(-1)^n p_0 > 0$, и любого $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = | p_0 |^{-\frac{1}{k-1}} (x^* - x)^\gamma h(\log(x^* - x)), \qquad -\infty < x < x^*,$$

является решением уравнения (1), в котором $p(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) = p_0$.

Замечание 2. Асимптотическая классификация решений уравнения (1) при $n = 3$ и $n = 4$ с регулярной нелинейностью (k>1) и некоторые результаты об асимптотическом поведении решений с сингулярной нелинейностью (0<k<1) содержатся в [2, глава 7], и [3]. Результаты об асимптотическом поведении решений уравнений (1) произвольного порядка n содержатся в [1] и [2]. Аналог Теоремы 3 для $k > 1$ приведен в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

2. Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012. С. 22–288.

3. I. V. Astashova. On Asymptotic Behavior of Solutions to a Forth Order Nonlinear Differential Equation. Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Pure Mathematics (PUMA '14), Tenerife, Spain, January 10-12, 2014, ISBN: 978-960-474-360-5, WSEAS Press, 2014. P. 32-41.

4. Асташова И. В. О существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнений типа Эмдена–Фаулера высокого порядка // Дифференц.уравнения. 2014. Т.50. No 6. С. 847–848.

1.4 Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена – Фаулера четвертого порядка с постоянным положительным потенциалом

Приводится асимптотическая классификация решений уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}(x) + p_0 \, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad 0 < k < 1, \ p_0 > 0. \tag{12}$$

Асимптотическая классификация решений сингулярного уравнения ($0 < k < 1$) вида (15) третьего порядка приведена в [1], регулярного уравнения ($k > 1$) вида (15) третьего порядка — в [3, глава 7], четвертого порядка — в [3, глава 7, и 5]. В [2] и [3] содержатся результаты об асимптотическом поведении решений уравнений (1) произвольного порядка n.

В случае регулярной нелинейности, $k > 1$, рассматриваются только максимально продолженные решения, так как решения могут вести себя особым образом только вблизи границ области определения. Если $k < 1$, то особое поведение может проявляться и во внутренней точке области определения. Поэтому будем рассматривать *максимально продолженные единственным образом* решения, то есть решения $y : (a,\, b) \to \mathbb{R}$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, для которых выполняются следующие два условия:

(i) уравнение не имеет других решений, равных y на некотором подынтервале интервала $(a,\, b)$ и не равных y в некоторой точке из $(a,\, b)$;

(ii) уравнение либо не имеет решений, определеннных на другом интервале, содержащем $(a,\, b)$, и равных y на $(a,\, b)$, либо имеет по крайней мере два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе интервала $(a,\, b)$.

Теорема 1. *Пусть $0 < k < 1$ и $p_0 > 0$. Тогда все максимально продолженные единственным образом решения уравнения (15) делятся на 3 типа в соответствии с их асимптотическим поведением.*

1. Колеблющиеся решения, определенные на полуоси $(-\infty, b)$. Расстояние между их соседними нулями бесконечно возрастает при $x \to -\infty$ и стремится к нулю при $x \to b$. Решения и их производные $y^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют соотношениям $\lim\limits_{x\to b} y^{(j)}(x) = 0$ и $\overline{\lim\limits_{x\to-\infty}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty$. В точках локального экстремума имеют место следующие оценки:

$$C_1 \left|x-b\right|^{-\frac{4}{k-1}} \leqslant \left|y(x)\right| \leqslant C_2 \left|x-b\right|^{-\frac{4}{k-1}} \tag{13}$$

с положительными константами C_1 и C_2, зависящими только от k и p_0.

2. Колеблющиеся решения, определенные на полуоси $(b, +\infty)$. Расстояние между их соседними нулями стремится к нулю при $x \to b$ и бесконечно возрастает при $x \to +\infty$. Решения и их производные $y^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют соотношениям $\lim\limits_{x\to b} y^{(j)}(x) = 0$ и $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty$. В точках локального экстремума имеют место оценки (13) с положительными константами C_1 и C_2, зависящими только от k и p_0.

3. Колеблющиеся решения, определенные на $(-\infty,\, +\infty)$. Все их производные $y^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют соотношениям

$$\overline{\lim_{x\to-\infty}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|y^{(j)}(x)\right| = \infty.$$

В точках локального экстремума, в окрестности $-\infty$ или $+\infty$, имеют место оценки

$$C_1 \left|x\right|^{-\frac{4}{k-1}} \leqslant \left|y(x)\right| \leqslant C_2 \left|x\right|^{-\frac{4}{k-1}} \tag{14}$$

с положительными константами C_1 и C_2, зависящими только от k и p_0.

Замечание. Отметим, что решения, определенные с пунктах 1 и 2, имеют вид

$$y(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}} |b-x|^{-\frac{4}{k-1}} h(\log|b-x|)$$

с некоторой непостоянной колеблющейся периодической функцией h.

Для уравнений (15) произвольного порядка n, у которых $(-1)^n p_0 > 0$, теорема о существовании колеблющихся решений вида

$$y(x) = |p_0|^{-\frac{1}{k-1}} (b-x)^{-\frac{n}{k-1}} h(\log(b-x)), \qquad -\infty < x < b,$$

в случае сингулярной нелинейности приводится в [1], а в случае регулярной нелинейности $k > 1$ доказывается в [4].

Литература.

1. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью. // Дифференц.уравнения. - 2014. - Т. 50, №11. - С. 847–848. **2.** *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, (1990) 432 с. **3.** *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой, с. 22–288, 2012, М.: ЮНИТИ-ДАНА. **4.** *Astashova I.* On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden-Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. - 2014. №2014:174. P. 1–8. **5.** *I. V. Astashova,* On Asymptotic Behavior of Solutions to a Forth Order Nonlinear Differential Equation. Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Pure Mathematics (PUMA '14), Tenerife, Spain, January 10-12, 2014, ISBN: 978-960-474-360-5, WSEAS Press, 2014. P. 32-41.

1.5 Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена – Фаулера четвертого порядка с постоянным отрицательным потенциалом

Приводится асимптотическая классификация решений уравнения

$$y^{\mathrm{IV}}(x) - p_0\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad 0 < k < 1,\ p_0 > 0. \tag{15}$$

Асимптотическая классификация решений сингулярного уравнения ($0 < k < 1$) вида (15) третьего порядка приведена в [1], четвертого порядка в случае постоянного положительного потенциала - в [6], регулярного уравнения ($k > 1$) вида (15) третьего порядка — в [3, глава 7], четвертого порядка — в [3, глава 7, и 5]. В [2] и [3] содержатся результаты об асимптотическом поведении решений уравнений (1) произвольного порядка n.

В случае регулярной нелинейности, $k > 1$, рассматриваются только максимально продолженные решения, так как решения могут вести себя особым образом только вблизи границ области определения. Если $k < 1$, то особое поведение может проявляться и во внутренней точке области определения. Поэтому, как было отмечено в [6], будем рассматривать *максимально продолженные единственным образом* решения, то есть решения $y : (a,\, b) \to \mathbb{R}$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, для которых выполняются следующие два условия:

(i) уравнение не имеет других решений, равных y на некотором подынтервале интервала $(a,\, b)$ и не равных y в некоторой точке из $(a,\, b)$;

(ii) уравнение либо не имеет решений, определеннных на другом интервале, содержащем $(a,\, b)$, и равных y на $(a,\, b)$, либо имеет по крайней мере два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе интервала $(a,\, b)$.

Теорема 1. *Пусть $0 < k < 1$ и $p_0 > 0$. Тогда все максимально продолженные единственным образом решения уравнения (1) делятся на 13 типов в соответствии с их асимптотическим поведением.*

1–2. Определенные на полуоси $(b, +\infty)$ решения со степенным асимптотическим поведением вблизи границ области определения (с одинаковыми знаками $\pm$):

$$y(x) \sim \pm C_{4k}\,(x-b)^{-\frac{4}{k-1}},\ x \to b+0, \ \ y(x) \sim \pm C_{4k}\,x^{-\frac{4}{k-1}},\ x \to +\infty,$$

где

$$C_{4k} = \left(\frac{4(k+3)(2k+2)(3k+1)}{p_0\,(k-1)^4} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

3–4. Определенные на полуоси $(-\infty, b)$ решения со степенным асимптотическим поведением вблизи границ области определения (с одинаковыми знаками $\pm$):

$$y(x) \sim \pm C_{4k}\,|x|^{-\frac{4}{k-1}},\ x \to -\infty, \quad y(x) \sim \pm C_{4k}\,(b-x)^{-\frac{4}{k-1}},\ x \to b-0.$$

5. Определенные на всей прямой периодические колеблющиеся решения. Все они могут быто получены из одного, скажем, $z(x)$, при помощи соотношения $y(x) = \lambda^4 z(\lambda^{k-1}x + x_0)$ с произвольными $\lambda > 0$ и x_0. Таким образом, существуют такие решения с произвольным максимумом $h > 0$ и с произвольным периодом $T > 0$, но не с произвольной парой (h, T).

6–7. Определенные на $(-\infty, +\infty)$ решения, являющиеся колеблющимися на $x \to -\infty$, и имеющие степенное асимптотическое поведение на $+\infty$: $y(x) \sim \pm C_{4k}\ x^{-\frac{4}{k-1}}$, $x \to +\infty$. Для каждого решения этого типа существует конечный предел модулей его локальных экстремумов при $x \to -\infty$.

8–9. Определенные на $(-\infty, +\infty)$ решения, являющиеся колеблющимися на $x \to +\infty$, и имеющие степенное асимптотическое поведение на $-\infty$: $y(x) \sim \pm C_{4k}\ |x|^{-\frac{4}{k-1}}$, $x \to -\infty$. Для каждого решения этого типа существует конечный предел модулей его локальных экстремумов при $x \to +\infty$.

10–13. Определенные на $(-\infty, +\infty)$ имеющие степенное асимптотическое поведение на $-\infty$ и $+\infty$ (с четырьмя возможными парами знаков $\pm$): $y(x) \sim \pm C_{4k}(p(b))\ |x|^{-\frac{4}{k-1}}$, $x \to \pm\infty$.

Замечание. Отметим, что периодические решения, определенные в пункте 5, существуют у уравнения (15) и в случае регулярной нелинейности [1].

Литература.

1. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью. // Дифференц.уравнения. - 2014. - Т. 50, №11. - С. 847–848. **2.** *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, (1990) 432 с. **3.** *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой, с. 22–288, 2012, М.: ЮНИТИ-ДАНА. **4.** *Astashova I.* On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden-Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. - 2014. №2014:174. P. 1–8. **5.** *I. V. Astashova,* On Asymptotic Behavior of Solutions to a Forth Order Nonlinear Differential Equation. Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Pure Mathematics (PUMA '14), Tenerife, Spain, January 10-12, 2014, ISBN: 978-960-474-360-5, WSEAS Press, 2014. P. 32-41. **6.** Асташова И. В. Асимптотическая классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена – Фаулера четвертого порядка с постоянным положительным потенциалом. // Дифференц.уравнения. - 2015. - Т. 51, №6. - С. ??????.

2 Уравнения с нелинейностью общего вида

Рассматриваются решения уравнений

$$w^{(m)} = Q(r, w, \dots, w^{(m-1)}), \quad r > a, \tag{16}$$

порядка $m \geq 2$, удовлетворяющие одному из следующих условий:

$$(-1)^i w^{(i)}(r) \geq 0 \quad \text{для всех } r \in [a, \infty),\ i = 0, \dots, m-1, \tag{17}$$

— так называемые кнезеровские решения, либо

$$w^{(m-i)}(a) > \frac{\delta}{(i-1)!} a^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{18}$$

где $\delta > 0$ — некоторое вещественное число.

Для кнезеровских решений были получены следующие результаты. Пусть на множестве $\{(r, t_0, \dots, t_{m-1}) : r \geq a,\ t_0 > 0,\ (-1)^i t_i \geq 0,\ i = 0, \dots, m-1\}$ выполнено неравенство

$$(-1)^m Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) \geq p(r) g(|t_0|),$$

где $p : [a, \infty) \to [0, \infty)$ принадлежит $L_{loc}([a, \infty))$, а $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — измеримая функция такая, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Gamma} g > 0 \tag{19}$$

для любого компакта $\Gamma \subset (0, \infty)$ ненулевой меры.

Для некоторых (вообще говоря, произвольных) вещественных чисел $\sigma > 1$ и $\theta > 1$ обозначим

$$\mu(\xi) = 1 + \sup_{h \in (\xi/\sigma, \xi) \cap (a, \infty)} \frac{1}{\xi - h} \int_h^\xi \zeta^m p(\zeta)\, d\zeta$$

и

$$H_0(\xi) = \int_\xi^1 g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt,$$

где

$$g_\theta(t) = \operatorname*{ess\,inf}_{(t/\theta, t\theta)} g. \tag{20}$$

В случае

$$\int_0^1 g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt < \infty, \tag{21}$$

положим также

$$G_0(\xi) = \int_0^\xi g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt.$$

Теорема 1. Пусть

$$\int_a^\infty \xi^{m-1} p(\xi) \mu^{\frac{1}{m}-1}(\xi)\, d\xi = \infty \tag{22}$$

и при этом имеет место (21). Тогда любое нетривиальное решение (16), (17) является сингулярным первого рода.

Теорема 2. Пусть

$$\int_a^\infty \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi = \infty, \tag{23}$$

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{r^m p(r)}{\int_a^r \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi} < c < \infty \tag{24}$$

и при этом

$$\int_0^1 g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt = \infty.$$

Тогда любое решение (16), (17) удовлетворяет неравенству

$$w(r) \le H_0^{-1}\left(A\left(\int_a^r \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi \right)^{\frac{1}{m}} \right)$$

для всех достаточно больших r, где постоянная $A > 0$ зависит только от m, c и θ.

Теорема 3. Пусть

$$\int_a^\infty \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi < \infty, \tag{25}$$

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{r^m p(r)}{\int_r^\infty \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi} < c < \infty \tag{26}$$

и при этом справедливо (21). Тогда любое правильное решение (16), (17) удовлетворяет неравенству

$$w(r) \ge G_0^{-1}\left(A\left(\int_r^\infty \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi \right)^{\frac{1}{m}} \right)$$

для всех достаточно больших r, где постоянная $A > 0$ зависит только от m, c и θ.

В свою очередь, для решений (16), (18) удалось показать следующее. Пусть на множестве $\{(r, t_0, \ldots, t_{m-1}) : r \ge a,\ t_{m-i} > \delta r^{i-1}/(i-1)!,\ i = 1, \ldots, m\}$ справедливо неравенство

$$Q(r, t_0, \ldots, t_{m-1}) \ge r^{m-1} p(r) g(t_0/r^{m-1}), \tag{27}$$

где $p : [a, \infty) \to [0, \infty)$, как и ранее, принадлежит пространству $L_{loc}([a, \infty))$, а $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — измеримая функция со свойством (19).

Предположим на этот раз, что

$$\mu(\xi) = 1 + \sup_{\xi < h < \sigma\xi} \frac{1}{h - \xi} \int_\xi^h t^m p(t)\, dt \tag{28}$$

и

$$H_\infty(\xi) = \int_1^\xi g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt,$$

где g_θ задано с помощью (20), а $\sigma > 1$ и $\theta > 1$, как и в предыдущем разделе, некоторые фиксированные вещественные числа.

В случае, когда

$$\int_1^\infty g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt < \infty, \tag{29}$$

обозначим также

$$G_\infty(\xi) = \int_\xi^\infty g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt.$$

Теорема 4. Пусть выполнены соотношения (22) и (29). Тогда любое непродолжаемое решение задачи (16), (18) является сингулярным второго рода.

Теорема 5. Пусть

$$\int_1^\infty g_\theta^{-\frac{1}{m}}(t)\, t^{\frac{1}{m}-1}\, dt = \infty$$

и при этом справедливы условия (23) и (24). Тогда любое правильное решение задачи (16), (18) удовлетворяет неравенству

$$w(r) \geq r^{m-1} H_\infty^{-1} \left(A \left(\int_a^r \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi \right)^{\frac{1}{m}} \right)$$

для всех достаточно больших r, где постоянная $A > 0$ зависит только от m, c и θ.

Теорема 6. Предположим, что имеют место (25), (26) и (29). Тогда любое правильное решение задачи (16), (18) в некоторой окрестности бесконечности допускает оценку

$$w(r) \leq r^{m-1} G_\infty^{-1} \left(A \left(\int_r^\infty \xi^{m-1} p(\xi)\, d\xi \right)^{\frac{1}{m}} \right),$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m, c и θ.

Исследование решение (16), (18) было продолжено в работе

[2] *Коньков А. А.* О решениях обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих вертикальную асимптоту // Матем. сб. 2008. Т. 199. №1. С. 3-14.

В этой работе, в частности, было показано, что отсутствие правильных решений задачи (16), (18) зависит от свойств некоторой нелинейной емкости. Именно, для всякого компакта $K \subset [a, \infty)$ положим

$$_{f,m}(K) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(1 - \frac{\xi}{r_i} \right)^{m-1} \chi_K(\xi) f(\xi)\, d\xi \right)^{1/m},$$

где χ_K — характеристическая функция K, а infimum в правой части берется по всем возрастающим последовательностям r_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, таким, что

$$r_0 = a \quad \text{и} \quad \lim_{i \to \infty} r_i = \infty. \tag{30}$$

Емкость произвольного замкнутого множества $E \subset [a, \infty)$ определим равенством

$$_{f,m}(E) = \sup_{K \Subset E} {}_{f,m}(K).$$

Теорема 7. Пусть $_{f,m}([a, \infty)) = \infty$, имеет место (27) и при этом

$$\int_1^\infty g_\theta^{-1/m}(t) t^{1/m-1}\, dt < \infty$$

для некоторого $\theta > 1$. Тогда любое непродолжаемое решение (16), (18) является сингулярным второго рода.

В работе

[3] *Kon'kov A. A.* On global solutions of the radial p-Laplace equation // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Appl. 2009. T. 70. C. 3437-3451

рассматривалась задача

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\left|\frac{du}{dr}\right|^{p-2}\frac{du}{dr}\right)=c(r,u), \quad u(a)>0, \quad \frac{du}{dr}(a)\geq 0 \tag{31}$$

для радиального оператора p-Лапласа размерности $n \geq 1$, где $p > 1$ — некоторое вещественное число, а $c : [a,\infty)\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ — функция из класса Каратеодори $K_{loc}([a,\infty)\times\mathbb{R})$, $a > 0$.

Для этой задачи также были получены условия сингулярности второго рода. Пусть $\theta > 1$ некоторое вещественное число. Будем предполагать, что

$$\inf_{\zeta\in(t/\theta,\theta t)} c(r,\zeta)\geq f(r)g(t)$$

для почти всех $r \geq a$ и всех $t > 0$, где $f : [a,\infty)\to[0,\infty)$ принадлежит $L_{1,loc}([a,\infty))$, а $g : (0,\infty)\to(0,\infty)$ — непрерывная функция. Под емкостью компакта $K \subset [a,\infty)$ по отношению к упорядоченной тройке $\mathcal{F} = (f, p, n)$ будем подразумевать величину

$$_{\mathcal{F}}(K)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{r_{i-1}}^{r_i}dt\left(\frac{1}{t^{n-1}}\int_{r_{i-1}}^{t}\xi^{n-1}f(\xi)\chi_K(\xi)\,d\xi\right)^{1/(p-1)}\right)^{(p-1)/p},$$

где infimum в правой части берется по всем возрастающим последовательностям $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющим соотношениям (30). Емкость произвольного замкнутого множества $E \subset [a,\infty)$ определим равенством

$$_{\mathcal{F}}(E)=\sup_{K\Subset E}{}_{\mathcal{F}}(K).$$

Теорема 8. Пусть $_{\mathcal{F}}([a,\infty))=\infty$ и при этом

$$\int_1^{\infty}(g(t)t)^{-1/p}\,dt<\infty,$$

Тогда любое непродолжаемое решение (31) является сингулярным второго рода.

В случае $p < n$ для целого ряда примеров приведенные выше результаты являются неулучшаемыми. В случае $p \geq n$, как было показано в работе

[4] *Kon'kov A. A.* On global solutions of the radial p-Laplace equation. The case of large p // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Appl. 2010. T. 72. C. 2047-2062,

эти результаты могут быть уточнены. Именно, обозначим

$$\mathcal{E}(r)=\begin{cases}\log r, & n=p,\\ \frac{p-1}{p-n}r^{(p-n)/(p-1)}, & n<p.\end{cases}$$

Для всякого компактно множества $K \subset [a, \infty)$ положим

$$
{}_{\mathcal{Q}}(K) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathcal{E}(r_i)} \int_{r_{i-1}}^{r_i} dt \left(\frac{1}{t^{n-1}} \int_{r_{i-1}}^{t} \xi^{n-1} q(\xi) \chi_K(\xi)\, d\xi \right)^{1/(p-1)} \right)^{(p-1)/p},
$$

где $\mathcal{Q} = (q, \mathcal{E}, p, n)$, а infimum в правой части берется по всем возрастающим последовательностям $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющим соотношениям (30). Как и выше, емкость произвольного замкнутого множества $E \subset [a, \infty)$ определим равенством

$$
{}_{\mathcal{Q}}(E) = \sup_{K \Subset E} {}_{\mathcal{Q}}(K).
$$

Будем, далее, предполагать, что правая часть уравнения (31) удовлетворяет условию

$$
c(r, \mathcal{E}(r)t) \geq q(r)h(t)
$$

для почти всех $r \geq a$ и всех $t > 0$, где $q : [a, \infty) \to [0, \infty)$ принадлежит $L_{1,loc}([a, \infty))$, а $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — непрерывная функция.

Теорема 9. Пусть ${}_{\mathcal{Q}}([a, \infty)) = \infty$ и при этом

$$
\int_1^{\infty} (h_\theta(t)t)^{-1/p}\, dt < \infty
$$

для некоторого вещественного числа $\theta > 1$, где

$$
h_\theta(t) = \inf_{(t/\theta, t\theta)} h. \tag{32}
$$

Тогда любое непродолжаемое решение (31) является сингулярным второго рода.

Введенные выше емкости трудновычислимы, если речь идет о точном их значении. Однако, их несложно оценить, что было, в частности, продемонстрировано в работах [2–4]. Этого вполне достаточно, чтобы установить равняется ли бесконечности емкость интервала $[a, \infty)$.

В работе

[5] Kon'kov A.A. On the behavior of Kneser solutions of nonlinear ordinary differential equations // Ann. Mat. Pura Appl. (в печати, электронная версия доступна на сайте http://link.springer.com/article/10.1007/s10231-015-0500-4)

рассматривались кнезеровские решения уравнения (16) с правой частью, удовлетворяющей условию

$$
(-1)^m Q(r, t_0, \ldots, t_{m-1}) \geq q(r)h(t_0) - \sum_{i=1}^{m-1} b_i(r)|t_i| \tag{33}
$$

на множестве $\{(r, t_0, \ldots, t_{m-1}) : r \geq a,\ t_0 > 0,\ (-1)^i t_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m-1\}$, где $q : [a, \infty) \to [0, \infty)$ и $b_i : [a, \infty) \to [0, \infty)$, $i = 1, \ldots, m-1$, принадлежат $L_{\infty,loc}([a, \infty))$, а $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — непрерывная функция.

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$
w^{(m)} + z_{m-1}(r)w^{(m-1)} + \ldots + z_1(r)w' = z(r, w),
$$

правая часть которого удовлетворяет неравенству

$$(-1)^m z(r,t) \geq q(r)h(t)$$

для всех $r \geq a$ и $t > 0$. Условие (33) будет, очевидно, выполнено, если взять

$$Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) = z(r, t_0) - \sum_{i=1}^{m-1} z_i(r) t_i$$

и

$$b_i = |z_i|, \ i = 1, \dots, m-1.$$

Теорема 10. Предположим, что

$$\int_0^1 h_\theta^{-1/m}(t) t^{1/m-1}\, dt < \infty$$

для некоторого вещественного числа $\theta > 1$, где h_θ определено с помощью (32). Пусть также найдутся вещественное число $\sigma > 1$ и измеримая функция $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ такие, что

$$f(r) \leq \frac{q(r)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m-1} r^{m-i} \operatorname{ess\,sup}_{(r/\sigma, r\sigma)\cap[a,\infty)} b_i}$$

для почти всех $r \in [a, \infty)$ и при этом

$$\int_a^\infty r^{m-1} f(r) \mu^{1/m-1}(r)\, dr = \infty,$$

где

$$\mu(r) = 1 + r^m \operatorname*{ess\,sup}_{(r/\sigma, r)\cap[a,\infty)} f.$$

Тогда любое нетривиальное решение (16), (17) является сингулярным первого рода.

Приведенные в работе [5] примеры свидетельствуют о точности полученных результатов для широкого класса уравнений.

Список литературы

[1] *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, (1990) 432 с.

[2] *Асташова И. В.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И. Н. Векуа. Тбилиси. 1985. т. 1. No 3, с. 9–11.

[3] *Асташова И. В.* Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения, 2003, т. 8, с. 3–33.

[4] *Kozlov V. A.* On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations.// Ark. Mat., 1999, v. 37, No 2, p. 305–322.

[5] *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980, 368 с.

Точный бэровский класс некоторых ляпуновских показателей на пространстве линейных систем с компактно-открытой и равномерной топологиями

Ветохин А.Н.[1]

В работе доказано, что конструктивный показатель, индекс условной экспоненциальной устойчивости, размерность пространства решений показатель которых меньше заданного действительного числа, рассматриваемые как функционалы на пространстве линейных дифференциальных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями, принадлежат в точности второму классу Бэра. Размерность пространства решений показатель которых не превосходит заданного действительного числа, рассматриваемая как функционал на пространстве линейных дифференциальных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями, принадлежит в точности третьему классу Бэра.

Постановка задачи. Для заданного натурального числа n рассмотрим линейное пространство M_n систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

где $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ — непрерывная ограниченная оператор-функция. Обозначим через M_n^u метрическое пространство, точками которого являются системы вида (1) (или просто оператор-функции, которыми эти системы определяются), с метрикой

$$\varrho(A, B) = \sup_{t \in [0,\infty)} \|A(t) - B(t)\|, \tag{2}$$

которая определяет топологию равномерной сходимости коэффициентов на $\mathbb{R}^+$.

Наделим пространство M_n системой полунорм

$$\rho_k(A, B) \sup_{t \in [0,k]} \|A(t) - B(t)\|, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

которая определяет на пространстве M_n компактно-открытую топологию. Получившееся топологическое пространство, обозначим через M_n^c. Отметим, что топологическое пространство M_n^c можно превратить в полное метрическое пространство [1, стр. 221].

[1]Ветохин Александр Николаевич, vetokhin@front.ru, доцент, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, доцент, кафедра математики и информационных технологий в туризме РГУТИС

Заметим, что, хотя метрика (2) и система полунорм (3) зависят от нормы $\|\cdot\|$, которая определена в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$, но топологии, задаваемые ими, не зависят от этой нормы. В дальнейшем, для определенности, будем считать, что норма в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ определена следующей формулой

$$\|A\| = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(Ax,Ax)}, \quad (x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Развитие теории линейных систем привело к созданию целого ряда новых показателей: все они или определяются непосредственно через показатели Ляпунова, или являются их модификациями, а потому также могут, в широком смысле, называться *ляпуновскими* (во избежание путаницы для каждого из них, как правило, предусмотрено и свое собственное название). Большинство ляпуновских показателей, рассматриваемых как функционалы на пространстве линейных дифференциальных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями, являются разрывными функциями, а поэтому естественно возникает вопрос о точной бэровской классификации этих показателей. Напомним, что функциями *нулевого* класса Бэра на метрическом пространстве называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями *p-го класса* Бэра называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса Бэра [2].

В частности В. М. Миллионщиков в работе [3] установил, что показатели Ляпунова системы (1), рассматриваемые как функционалы на пространстве M_n^c, принадлежат второму бэровскому классу. М.И. Рахимбердиев [4] установил, что показатели Ляпунова не принадлежат первому классу Бэра на M_n^u (а тем более на M_n^c).

В данной работе индекс условной экспоненциальной устойчивости, размерность пространства решений характеристический показатель которых меньше (не превосходит) заданного действительного числа, конструктивный показатель рассматриваются как функционалы на пространстве линейных дифференциальных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями. Для каждого из этих функционалов установлен точный бэровский класс на пространствах M_n^u, M_n^c.

Вспомогательные результаты. Отметим, что компактно-открытая топология слабее равномерной, следовательно из принадлежности функции p-му классу Бэра на пространстве M_n^c следует ее принадлежность тому же классу Бэра на пространстве M_n^u; если же функция не принадлежит p-му классу Бэра на пространстве M_n^u, то она не принадлежит этому классу на M_n^c.

Докажем теорему о непрерывной зависимости решений систем линейных уравнений от коэффициентов системы в удобной для дальнейшего использования форме. Обозначим $X_A(t,\tau)$ — оператор Коши системы (1).

Лемма 1. *Пусть $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Тогда функция $A \mapsto X_A(t,\tau)$ является непрерывной на пространстве M_n^c.*

Доказательство. При помощи метода вариации произвольной постоянной для оператора Коши системы (1) получаем

$$X_A(t,\tau) = E + \int_{\tau}^{t} A(s)X_A(s,\tau)\,ds.$$

Отсюда

$$\|X_A(t,\tau)\| \leqslant \|E\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|A(s)\| \cdot \|X_A(s,\tau)\|\, ds.$$

Используя оценку $a = \sup\limits_{t\geqslant 0} \|A(t)\| < \infty$ и лемму Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|X_A(t,\tau)\| \leqslant e^{a(t-\tau)}. \tag{4}$$

Представим систему $\dot{x} = B(t)x$ в виде $\dot{x} = A(t)x + (B(t) - A(t))x$. При помощи метода вариации произвольной постоянной для оператора Коши этой системы получаем

$$X_B(t,\tau) = X_A(t,\tau) + + \int\limits_{\tau}^{t} X_A(t,s)(B(s) - A(s))X_B(s,\tau)\, ds. \tag{5}$$

Отсюда, используя оценку (4), имеем

$$\|X_B(t,\tau)\| \leqslant \|X_A(t,\tau)\| + \int\limits_{\tau}^{t} \|X_A(t,s)\|\|B(s) - A(s)\|\|X_B(s,\tau)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{a(t-\tau)} + \int\limits_{\tau}^{t} e^{a(t-s)}\|B(s) - A(s)\|\|X_B(s,\tau)\|\, ds.$$

По лемме Гронуолла-Беллмана, имеем

$$\|X_B(t,\tau)\| \leqslant e^{a(t-\tau)} e^{\int\limits_{\tau}^{t} \|B(s)-A(s)\|\, ds}.$$

Из этого неравенства и формулы (5) следует

$$\begin{gathered}
\|X_B(t,\tau) - X_A(t,\tau)\| \leqslant \int\limits_{\tau}^{t} \|X_A(t,s)\|\|B(s) - A(s)\|\|X_B(s,\tau)\|\, ds \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{\tau}^{t} e^{a(t-s)}\|B(s) - A(s)\| e^{a(s-\tau)} e^{\int\limits_{\tau}^{s} \|B(q)-A(q)\|\, dq}\, ds = \\
= \int\limits_{\tau}^{t} e^{a(t-\tau)} e^{\int\limits_{\tau}^{s} \|B(q)-A(q)\|\, dq} \|B(s) - A(s)\|\, ds \leqslant \\
\leqslant e^{at} \int\limits_{\tau}^{t} e^{\int\limits_{\tau}^{s} \|B(q)-A(q)\|\, dq} \|B(s) - A(s)\|\, ds = e^{at}\left(e^{\int\limits_{\tau}^{t} \|B(s)-A(s)\|\, ds} - 1\right).
\end{gathered} \tag{6}$$

Пусть последовательность систем $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к системе A, тогда, в силу (6), получаем

$$\lim_{k\to\infty} \|X_{B_k}(t,\tau) - X_A(t,\tau)\| = 0.$$

Следовательно функция $A \mapsto X_A(t,\tau)$ является непрерывной на пространстве M_n^c. Лемма 1 доказана. □

Для заданного натурального числа n рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{y} = B(t)y, \qquad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

где $B : \mathbb{R}^+ \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная ограниченная оператор-функция. Напомним, что система (7) ляпуновски эквивалентна линейной дифференциальной системе (1), если существуют фундаментальные матрицы $Y_B(t)$, $X_A(t)$ этих систем, для которых выполнено неравенство [5, стр. 227]

$$\sup_{t\geqslant 0}(\|Y_B(t)X_A^{-1}(t)\| + \|X_A(t)Y_B^{-1}(t)\|) < \infty.$$

В книге [6] приведен целый ряд достаточных условий ляпуновской эквивалентности линейных систем, но, для дальнейшего изложения, нам потребуется достаточное условие ляпуновской эквивалентности линейных систем в следующей форме.

Лемма 2. *Если интеграл*

$$K = \int\limits_0^{+\infty} e^{\tau^2}\|A(\tau) - B(\tau)\|\, d\tau \tag{8}$$

сходится, то системы (7) и (1) ляпуновски эквивалентны.

Доказательство. Обозначим

$$a = \sup_{t\geqslant 0}\|A(t)\|, \quad b = \sup_{t\geqslant 0}\|B(t)\|.$$

В силу сходимости интеграла (8), найдется такое $t_0 \geqslant \max\{2\sqrt{a}, 2\sqrt{b}\}$, что

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{\tau^2}\|A(\tau) - B(\tau)\|\, d\tau < \frac{1}{2}. \tag{9}$$

На пространстве W_{t_0} — непрерывных ограниченных матричных функций, заданных на $[t_0, +\infty)$, наделенном метрикой

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|Z_1(t) - Z_2(t)\|,$$

рассмотрим интегральный оператор

$$F(Z(t)) = E + \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s) - A(s))X_A(s,0)Z(s)\, ds, \tag{10}$$

где $X_A(t,0)$ — оператор Коши системы $\dot{x} = A(t)x$.

Докажем, что оператор F, определяемый формулой (10), сжимает W_{t_0}.

1. Покажем, что $F : W_{t_0} \to W_{t_0}$. Используя оценки

$$\|X_A(t,0)\| \leqslant e^{at}, \quad \|X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant e^{at},$$

для любой функции $Z \in W_{t_0}$, получаем

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|F(Z(t))\| \leqslant \|E\| + \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\|Z(s)\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{2as}\|(B(s)-A(s))\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2}\|(B(s)-A(s))\|\,ds \leqslant 1 + \tfrac{1}{2}\sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| < +\infty.$$

Далее, для любых $t_1,\ t_2 : t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$ получаем

$$\|F(Z(t_1)) - F(Z(t_2))\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| \int\limits_{t_1}^{t_2} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0}\|Z(t)\| e^{2at_2}(a+b)(t_2-t_1).$$

Таким образом, функция $F(Z(\cdot))$ непрерывна на $\mathbb{R}^+$. Следовательно $F : W_{t_0} \to W_{t_0}$.

2. Покажем, что для любых $Z_1,\ Z_2 \in W_{t_0}$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{t\geqslant t_0}\|Z_2(t) - Z_1(t)\|.$$

В силу неравенства (9), имеем

$$\|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\|Z_2(s)-Z_1(s)\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0}\|Z_2(t)-Z_1(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{2as}\|(B(s)-A(s))\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant t_0}\|Z_2(t)-Z_1(t)\| \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2}\|(B(s)-A(s))\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\sup_{t\geqslant t_0}\|Z_2(t)-Z_1(t)\|,$$

беря супремум по $t \geqslant t_0$ от левой части неравенства, получаем

$$\sup_{t\geqslant t_0}\|F(Z_2(t)) - F(Z_1(t))\| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{t\geqslant t_0}\|Z_2(t) - Z_1(t)\|.$$

Итак, мы доказали, что оператор F сжимает W_{t_0}. Применяя принцип сжатых отображений, получаем, что уравнение

$$Z(t) = E + \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)Z(s)\,ds \qquad (11)$$

имеет решение $\widetilde{Z}(t)$, непрерывное и ограниченное на полуоси $[t_0, +\infty)$ и притом единственное.

Дифференцируя по t тождество

$$X_A(t,0)\widetilde{Z}(t) = X_A(t,0)(\int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\,ds),$$

получаем, что матричная функция $Y_B(t) = X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)$ является решением системы уравнений $\dot{y} = B(t)y$. В силу оценок

$$0 \leqslant \lim_{t\to+\infty} \|\widetilde{Z}(t) - E\| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{t\to+\infty} \sup_{t\geqslant t_0} \|\widetilde{Z}(t)\| \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|(B(s)-A(s))\|\|X_A(s,0)\|\,ds = 0,$$

для любого $t \geqslant t_0$, получаем

$$\det(Y_B(t)) = \det(X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)) \neq 0.$$

Таким образом, матричная функция $Y_B(t)$ является фундаментальной матрицей для системы уравнений $\dot{y} = B(t)y$.

Пусть

$$N = \sup_{t\geqslant t_0} \|\widetilde{Z}(t)\| < \infty.$$

В силу (11), для матрицы $Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)$, при $t \geqslant t_0$, получаем

$$Y_B(t)X_A^{-1}(t,0) = X_A(t,0)\widetilde{Z}(t)X_A^{-1}(t,0) =$$
$$= X_A(t,0)(E + \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\,ds)X_A^{-1}(t,0) =$$
$$= E + X_A(t,0)(\int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(s,0)(B(s)-A(s))X_A(s,0)\widetilde{Z}(s)\,ds)X_A^{-1}(t,0).$$

Следовательно, имеем

$$\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant 1 + e^{2at} \int\limits_t^{+\infty} \|X_A^{-1}(s,0)\|\|B(s)-A(s)\|\|X_A(s,0)\|\|\widetilde{Z}(s)\|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant 1 + Ne^{2at} \int\limits_t^{+\infty} e^{2as}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant 1 + N \int\limits_t^{+\infty} e^{4as}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant 1 + N \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{s^2}\|B(s)-A(s)\|\,ds \leqslant 1 + \tfrac{N}{2}.$$

При $t < t_0$, найдется такое $C > 0$, что

$$\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| \leqslant Ce^{bt}e^{at} \leqslant Ce^{(a+b)t_0} < \infty. \tag{13}$$

Таким образом, из (12) и (13) следует

$$\|Y_B(t)X_A^{-1}(t,0)\| < \infty, \text{при } t \geqslant 0.$$

Меняя в предыдущих рассуждениях системы A и B местами, получаем

$$\|X_A(t)Y_B^{-1}(t,0)\| < \infty, \text{при } t \geqslant 0.$$

Лемма 2 доказана. □

Точный класс Бэра индекса условной экспоненциальной устойчивости на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями. Напомним, что система (1), называется *условно экспоненциально устойчивой* с индексом $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, если существует такое k-мерное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$, что всякое решение рассматриваемой системы, удовлетворяющее условию $x(0) \in L$ имеет отрицательный характеристический показатель

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| < 0,$$

считаем, что характеристический показатель нулевого решения равен $-\infty$. *Индексом условной экспоненциальной устойчивости* $\mathrm{ind}_{es}(A)$ системы (1) назовем максимальное число k, для которого система (1) условно экспоненциально устойчива с индексом k [7].

Теорема 1 ([8])**.** *Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $A \mapsto \mathrm{ind}_{es}(A)$ принадлежит второму классу Бэра на пространствах M_n^c и M_n^u. При $n \geq 2$ она не принадлежит первому классу на пространствах M_n^c и M_n^u.*

Доказательство. В работе [3], для $k \in \{1, \dots, n\}$, получены формулы для показателей Ляпунова

$$\lambda_k(A) = \lim_{m\to\infty} a_m^k(A), \text{ где } a_m^k(A) = \lim_{s\to\infty} \min_{L\in G_k(\mathbb{R}^n)} \max_{j\in\{m,\dots,s\}} \frac{1}{j} \ln \|X_A(j,0)|_L\|, \tag{14}$$

где $G_k(\mathbb{R}^n)$ — грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств $\mathbb{R}^n$, $X_A(t,0)|_L$ — сужение оператора Коши системы (1) на подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$. Поскольку в формуле (14) для показателей Ляпунова последовательность функций $(a_m^k(\cdot))_{m=1}^{\infty}$ является невозрастающей на пространстве M_n, то множество

$$\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\}$$

можно представить в виде

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{A \in M_n : a_m^k(A) \geqslant 0\}.$$

Так как функции $a_m^k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежат первому классу Бэра на пространстве M_n^c, то множества $\{A \in M_n : a_m^k(A) \geqslant 0\}$ являются множествами типа $\mathcal{G}_\delta$ в пространстве M_n^c (см. [1, стр. 382]), следовательно множество

$$\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\}$$

является множеством типа $\mathcal{G}_\delta$ в том же пространстве. Множество $\{A \in M_n : \mathrm{ind}_{es}(A) \geqslant k\}$ совпадает с множеством

$$M_n \setminus \{A \in M_n : \lambda_k(A) \geqslant 0\},$$

которое является множеством F_σ. Следовательно функция $\mathrm{ind}_{es}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.

Пусть $n \geq 2$. Докажем, что функция $A \mapsto \mathrm{ind}_{es}(A)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Для принадлежности функции первому классу Бэра на пространстве M_n^u, в силу [9, 10], необходимо, чтобы для любых систем A и B, удовлетворяющих свойству

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0,$$

было выполнено равенство
$$\mathrm{ind}_{es}(A) = \mathrm{ind}_{es}(B). \tag{15}$$
С другой стороны, рассмотрим исходную систему
$$\dot{x} = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, A(t), 3, \ldots, 3\}x,$$
$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & 0 \\ 0 & -0{,}51 \end{pmatrix} x, \quad t \geqslant 1,$$
с показателями Ляпунова
$$\lambda_1(A) = -1, \ldots, \lambda_{k-1}(A) = -1,$$
$$\lambda_k(A) = -0{,}51,$$
$$\lambda_{k+1}(A) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}(t\sin(\ln t) - 1,02t + 1,02) = -0,02,$$
$$\lambda_{k+2}(A) = 3, \ldots, \lambda_n(A) = 3,$$
и возмущенную систему
$$\dot{y} = \mathrm{diag}\{\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k-1}, B(t), 3, \ldots, 3\}y,$$
$$B(t) = \begin{pmatrix} \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 1,02 & e^{-0{,}51t} \\ 0 & -0,51 \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 1.$$
Эта система имеет решения
$$x_k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{t\sin(\ln t) - 1{,}02t + 1{,}02} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_{k+1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{t\sin(\ln t) - 1{,}02t - 0{,}51} \int\limits_1^t e^{-\tau\sin(\ln\tau)}\, d\tau \\ e^{-0{,}51t + 0{,}51} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Рассмотрим две последовательности $e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}$ и $e^{2\pi m - \frac{2\pi}{3}}$. Для любого
$$\tau \in [e^{2\pi m - \frac{2\pi}{3}}; e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}]$$
справедливы неравенства
$$2\pi m - \frac{2\pi}{3} \leqslant \ln\tau \leqslant 2\pi m - \frac{\pi}{2},$$
$$\sin\ln\tau \leqslant \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$-\tau\sin(\ln\tau) \geqslant \frac{\sqrt{3}\tau}{2}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}^{e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin(\ln\tau)}\,d\tau \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} - e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}}\right)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}}.$$

Используя последнее неравенство, получаем

$$e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}\sin\ln e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\int\limits_{1}^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin\ln\tau}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\int\limits_{e^{2\pi m-\frac{2\pi}{3}}}^{e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}} e^{-\tau\sin\ln\tau}\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant e^{e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-1{,}02e^{2\pi m+\frac{\pi}{2}}-0{,}51}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}}\right)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi m-\frac{\pi}{2}}}.$$

Следовательно характеристический показатель решения x_{k+1} не менее $-0,02+e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi}$, а решения x_k равен $-0,02$. Таким образом, показатели возмущенной системы удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_1(B)=,\ldots,\lambda_{k-1}(B)=-1,$$

$$\lambda_k(B)=-0{,}02,\quad \lambda_{k+1}(B)\geqslant -0,02+e^{\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi},$$

$$\lambda_{k+2}(B)=3,\ldots,\lambda_n(B)=3.$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\|A(t)-B(t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{-0{,}51t}=0,$$

то получаем противоречие с (15). Таким образом, функция $\mathrm{ind}_{es} : M_n^u \to \{0,\ldots,n\}$ не принадлежит первому классу Бэра. Теорема 1 доказана. $\square$

Точный класс Бэра размерности векторных подпространств, определяемых показателями Ляпунова, на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями. Пусть дано $\lambda\in\mathbb{R}$. Обозначим $D_\lambda(A)$ $(d_\lambda(A))$ — размерность пространства начальных значений тех решений системы (1), показатели Ляпунова которых не превосходят λ (меньше λ), считаем, что показатель Ляпунова нулевого решения равен $-\infty$. Изучение свойств отображений $D_\lambda(\cdot) : M_n \to \{0,\ldots,n\}$, $d_\lambda(\cdot) : M_n \to \{0,\ldots,n\}$ на пространствах M_n^c и M_n^u представляет определенный интерес с точки зрения теории условной устойчивости. Из исследований Перрона известно, что эти отображения не во всякой точке непрерывны [11].

Теорема 2 ([12]). *Для любого $n\in\mathbb{N}$ и каждого $\lambda\in\mathbb{R}$ функция $A\mapsto d_\lambda(A)$ принадлежит второму классу Бэра на пространствах M_n^c и M_n^u. При $n\geq 2$ для каждого $\lambda\in\mathbb{R}$ она не принадлежит первому классу на пространствах M_n^c и M_n^u.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (14). Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку последовательность функций $\{a_m^k(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ является невозрастающей на пространстве M_n, то множество $\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geq \lambda\}$ можно представить в виде

$$\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geq \lambda\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{A \in M_n : a_m^k(A) \geq \lambda\}.$$

Так как функции $a_m^k(\cdot) : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежат первому классу Бэра на M_n^c, то множества $\{A \in M_n : a_m^k(A) \geq \lambda\}$ являются множествами типа $\mathcal{G}_\delta$ в пространстве M_n^c [1, стр. 382], следовательно множество $\{A \in M_n : \lambda_k(A) \geq \lambda\}$ является множеством типа $\mathcal{G}_\delta$. Так как для каждого $k \in \{0, \ldots, n\}$ множество $\{A \in M_n : d_\lambda \geq k\}$ совпадает со множеством

$$\{A \in M_n : \lambda_k(A) < \lambda\} = M_n \setminus \{A \in M_n^u : \lambda_k(A) \geq \lambda\},$$

которое является множеством F_σ в пространстве M_n^c, то функция $d_\lambda(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра [1, стр. 382].

Пусть $n \geq 2$. Докажем, что функция $d_\lambda(\cdot) : M_n \to \{0, \ldots, n\}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Для принадлежности функции первому классу Бэра на пространстве M_2^u необходимо, чтобы для любых систем A и B, удовлетворяющих свойству

$$\lim_{t \to \infty} \|A(t) - B(t)\| = 0,$$

было выполнено равенство $d_\lambda(A) = d_\lambda(B)$ [9, 10]. Рассмотрим исходную систему

$$\dot{x} = \mathrm{diag}\{\underbrace{\lambda - 1, \ldots, \lambda - 1}_{k-1}, A(t), \lambda + 3, \ldots, \lambda + 3\}x,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \lambda - 0,5 & 0 \\ 0 & \pi \sin \pi\sqrt{t} + \lambda - 0,5 \end{pmatrix},$$

с показателями Ляпунова [13, стр. 187]

$$\lambda_1(A) = \lambda - 1, \ldots, \lambda_{k-1}(A) = \lambda - 1,$$

$$\lambda_k(A) = \lambda_{k+1}(A) = \lambda - 0,5,$$

$$\lambda_{k+2}(A) = \lambda + 3, \ldots, \lambda_n(A) = \lambda + 3,$$

и возмущенную систему

$$\dot{y} = \mathrm{diag}\{\underbrace{\lambda - 1, \ldots, \lambda - 1}_{k-1}, B(t), \lambda + 3, \ldots, \lambda + 3\}y,$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \lambda - 0,5 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & \pi \sin \pi\sqrt{t} + \lambda - 0,5 \end{pmatrix}.$$

с показателями Ляпунова [13, стр. 187]

$$\lambda_1(A) = \lambda - 1, \ldots, \lambda_{k-1}(A) = \lambda - 1,$$

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_{k+1}(A) = \lambda + 0,5,$$

$$\lambda_{k+2}(A) = \lambda + 3, \ldots, \lambda_n(A) = \lambda + 3,$$

Следовательно для первой системы $d_\lambda = k + 1$, а для второй — $d_\lambda \leq k$. Таким образом, функция $d_\lambda(\cdot) : M_n \to \{0, \ldots, n\}$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3 ([12]). *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $A \mapsto D_\lambda(A)$ принадлежит третьему классу Бэра на пространствах M_n^c и M_n^u. При $n \geq 2$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ она не принадлежит второму классу на пространствах M_n^c и M_n^u.*

Доказательство. Докажем, что функция $D_\lambda : M_n \to \{0, 1, \dots, n\}$ принадлежит третьему классу Бэра на пространстве M_n^c. Рассмотрим функцию $\delta(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } \tau \leq \lambda; \\ 0, & \text{при остальных } \tau. \end{cases}$$

Эта функция принадлежит первому классу Бэра на $\mathbb{R}$. Из определения функции D_λ получаем $D_\lambda(A) = \delta(\lambda_1(A)) + \dots + \delta(\lambda_n(A))$. Функции $\lambda_k : M_n \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ принадлежат второму классу Бэра на пространстве M_n^c [3], следовательно, функция D_λ принадлежит третьему классу Бэра.

Пусть $n \geq 2$. Докажем, что функция $D_\lambda : M_n \to \{0, 1, \dots, n\}$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^u. Построим метрическое пространство $\mathcal{B}$ следующим образом: точками пространства $\mathcal{B}$ являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots)$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m, \dots)$ определяется как

$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha = \beta; \\ \frac{1}{\min\{m : \alpha_m \neq \beta_m\}}, & \text{при } \alpha \neq \beta \ . \end{cases}$$

Для любого натурального числа q обозначим через P_q множество тех последовательностей из $\mathcal{B}$, у которых все члены, кроме, быть может, конечного числа, больше q. Обозначим через P_ω пересечение всех множеств P_q, т. е. множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности. Р. Бэр доказал, что характеристическая функция множества P_ω не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}$ [14, 15].

Допустим, что функция $D_\lambda(\cdot) : M_n \to \{0, \dots, n\}$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^u. Тогда для любого непрерывного отображения $\Phi : \mathcal{B} \to M_n^u$ композиция $D_\lambda(\Phi(\cdot)) : \mathcal{B} \to \{0, \dots, n\}$ принадлежит второму классу Бэра [1, стр. 386].

Рассмотрим следующую последовательность положительных чисел

$$t_m = e^{2\pi m - \frac{\pi}{2}}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Каждому $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие систему уравнений

$$\dot{x} = U_\alpha(t) x \tag{16}$$

с кусочно-непрерывной функцией

$$U_\alpha(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\ln t) - \cos(\ln t) & 0 \\ e^{-u_\alpha(t)} & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \end{pmatrix},$$

где $u_\alpha(t) = (1 + \frac{\alpha_m}{1+\alpha_m})t$, при $t \in [t_m; t_{m+1})$. Показатель любого нетривиального решения диагональной системы

$$\mathrm{diag}\{U_\alpha(t)(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\ln t) - \cos(\ln t) & 0 \\ 0 & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) \end{pmatrix}$$

равен 1, а коэффициент неправильности Гробмана равен 2 [13, стр. 67].

Пусть $\alpha \in \mathcal{P}\omega$, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = \infty$, тогда имеет место равенство

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |U_\alpha(t) - \operatorname{diag}\{U_\alpha(t)(t)| = \overline{\lim_{t\to\infty}} -\frac{u_\alpha(t)}{t} = \overline{\lim_{m\to\infty}} (-1 - \frac{\alpha_m}{1+\alpha_m}) = -2$$

а значит по [16]

$$\lambda_1(U_\alpha) = \lambda_1(\operatorname{diag}\{U_\alpha(t)) = 1, \quad \lambda_2(U_\alpha) = \lambda_2(\operatorname{diag}\{U_\alpha(t)) = 1.$$

Пусть $\alpha \notin \mathcal{P}\omega$ т. е. $\underline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \alpha_m < \infty$, тогда существует бесконечная подпоследовательность $\{\alpha_{m'}\} \subset \{\alpha_m\}$ и натуральное число q такие, что $\alpha_{m'} = q$. Произвольное решение системы (16) определяется формулами

$$\begin{gathered} x_1(t) = x_1 e^{-t\sin(\ln t)} \\ x_2(t) = x_2 e^{t\sin(\ln t)} + x_1 e^{t\sin(\ln t)} \int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u_\alpha(\tau)} d\tau, \\ x_1,\, x_2 \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{17}$$

Рассмотрим две последовательности $t_{m'} = e^{2\pi m' - \frac{\pi}{2}}$ и $t^*_{m'} = e^{-\varepsilon} t_{m'}$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ и $\cos\varepsilon > \frac{1}{2}(1 + \frac{q}{1+q})$. Из определения функции $u_\alpha(\cdot)$ имеем

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u_\alpha(\tau)}\, d\tau \geqslant \int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - (1+\frac{1}{1+q})\tau}\, d\tau.$$

При $\tau \in [t^*_{m'};\, t_{m'}]$ справедливы неравенства

$$2m' - \frac{\pi}{2} - \varepsilon \le \ln\tau \le 2m' - \frac{\pi}{2},$$

$$-\cos\varepsilon = \sin(-\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \ge \sin(\ln\tau),$$

$$2\tau\cos\varepsilon \le -2\tau\sin(\ln\tau).$$

Поэтому

$$\int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - (1+\frac{1}{1+q})\tau}\, d\tau. \ge \int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{(2\cos\varepsilon - (1+\frac{1}{1+q}))\tau}\, d\tau.$$

Так как при $r = 2\cos\varepsilon - 1 - \frac{1}{1+q} > 0$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{t^*_{m'}}^{t_{m'}} e^{r\tau}\, d\tau = \frac{1}{r} e^{rt_{m'}} (1 - e^{r(t^*_{m'} - t_{m'})}) > C e^{rt_{m'}},\ \text{где } C = \frac{1}{r}(1 - e^{-re^{\frac{3\pi}{2}}(1-e^{-\varepsilon})}) > 0,$$

то тем более при $t_{m'} \ge e^{\frac{3\pi}{2}}$

$$\int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{t_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u_\alpha(\tau)}\, d\tau > C e^{rt_{m'}}.$$

Если положить $T_{m'} = t_{m'} e^{\pi}$, то получим

$$e^{T_{m'}\sin(\ln T_{m'})} \int\limits_{e^{\frac{3\pi}{2}}}^{T_{m'}} e^{-2\tau\sin(\ln\tau) - u_\alpha(\tau)}\, d\tau \geq C e^{(1+re^{-\pi})T_{m'}}. \tag{18}$$

Рассмотрим решение $x(\cdot)$ системы (16) с начальным условиями $x_1(t_1) = 1, \quad x_2(t_1) = 0$. Из формулы (17) для решений системы и неравенства (18) получаем, что характеристический показатель этого решения не меньше, чем $1 + re^{-\pi}$. Итак, если $\alpha \in P_\omega$, то у системы уравнений $\dot{x} = U_\alpha(t)x$ есть решение с показателем большим 1. Таким образом, при $\alpha \in P_\omega$ получаем $\lambda_1(U_\alpha) = 1$, $\lambda_1(U_\alpha) < \lambda_2(U_\alpha)$.

По кусочно-непрерывной функции $U_\alpha(\cdot)$ и последовательности положительных чисел $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ такой, что

$$\varepsilon_m < \min\{t_m - t_{m-1},\, 1\}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 1$$

построим функцию $A_\alpha(\cdot)$ следующим образом

$$A_\alpha(t) = \begin{cases} K_m \cdot (t - t_m - \varepsilon_m) + U_\alpha(t_m + \varepsilon_m), & \text{при } t \in [t_m - \varepsilon_m; t_m + \varepsilon_m]; \\ U_\alpha(t), & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$K_m = \frac{U_\alpha(t_m + \varepsilon_m) - U_\alpha(t_m - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m}.$$

Эта функция непрерывна по $t \in \mathbb{R}^+$. Действительно, в точках непрерывности функции $U_\alpha(\cdot)$, которые не принадлежат объединению отрезков $\bigcup\limits_m [t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$ функция $A_\alpha(\cdot)$ совпадает с функцией $U_\alpha(\cdot)$, а на любом из отрезков $[t_m - \varepsilon_m, t_m + \varepsilon_m]$ график функции $U_\alpha(\cdot)$ представляет собой отрезок прямой, который соединяет точку с координатами $(t_m - \varepsilon_m, U_\alpha(t_m - \varepsilon_m))$ и точку с координатами $(t_m + \varepsilon_m, U_\alpha(t_m + \varepsilon_m))$. Так как

$$\int\limits_0^{\infty} e^{t^2}\|A_\alpha(t) - U_\alpha(t)\|\, dt = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{t_m-\varepsilon_m}^{t_m+\varepsilon_m} e^{t^2}\|A_\alpha(t) - B_\alpha(t)\|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{t\geqslant 0}\|A_\alpha(t) - U_\alpha(t)\| \sum_{m=1}^{\infty} e^{(t_m+\varepsilon_m)^2}\varepsilon_m \leqslant 4,$$

в силу леммы 2, то система $\dot{y} = A_\alpha(t)y$ ляпуновски эквивалентна системе $\dot{x} = U_\alpha(t)x$, а следовательно для любого $\alpha \in \mathcal{B}$ верно равенство $D_\lambda(A_\alpha(\cdot)) = D_\lambda(U_\alpha(\cdot))$.

Отображение $\alpha \mapsto A_\alpha(\cdot)$ является непрерывным. Действительно, пусть $d(\alpha, \beta) = \frac{1}{m+1}$, т. е. $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m$, тогда на отрезке $[0; t_m]$ выполнено равенство $U_\alpha(t) = U_\beta(t)$, а следовательно $A_\alpha(t) = A_\beta(t)$ на отрезке $[0; t_m - 1]$. Так как

$$\sup_{t\geq t_m-1}\|A_\alpha(t) - \mathrm{diag}\,\{A_\alpha(t)\}\| \leq e^{-(t_m-1)},$$

то получаем

$$\sup_{t\geq 0}\|A_\alpha(t) - A_\beta(t)\| = \sup_{t\geq t_m-1}\|A_\alpha(t) - \mathrm{diag}\,\{A_\alpha(t)\} - A_\beta(t) + \mathrm{diag}\,\{A_\beta(t)\}\| \leq 2e^{-(t_m-1)}$$

Из последнего неравенства следует

$$\lim_{\alpha\to\beta}\sup_{t\geq 0}\|A_\alpha(t)-A_\beta(t)\|=0.$$

Завершение доказательства теоремы 3. Рассмотрим отображение $\Phi:\mathcal{B}\to M_n^u$ определяемое формулой

$$\alpha\mapsto \dot x=P_\alpha(t)x,\ P_\alpha(t)=\{3,\ldots,3,A_\alpha(t),\underbrace{0,\ldots,0}\}+(\lambda-1)E.$$

Это отображение непрерывно и

$$0=\lambda_1(P_\alpha)=\cdots=\lambda_{k-1}(P_\alpha)<\lambda_k(P_\alpha)=\lambda_{k+1}(P_\alpha)<\lambda_{k+2}(P_\alpha)=\lambda_n(P_\alpha)=3,\text{при } \alpha\in P_\omega,$$
$$0=\lambda_1(P_\alpha)=\cdots=\lambda_{k-1}(P_\alpha)<\lambda_k(P_\alpha)<\lambda_{k+1}(P_\alpha)<\lambda_{k+2}(P_\alpha)=\lambda_n(P_\alpha)=3,\text{при } \alpha\notin P_\omega.$$

Следовательно

$$D_\lambda(\Phi(\alpha))=k+1,\text{при } \alpha\in P_\omega$$
$$D_\lambda(\Phi(\alpha))=k,\text{при } \alpha\notin P_\omega.$$

Итак, функция $D_\lambda(\varphi(\alpha))-k$ совпадает с характеристической функцией множества P_ω, а следовательно, не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{B}$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

□

Точный класс Бэра конструктивного показателя на пространстве линейных систем с равномерной и компактно-открытой топологиями. Наряду с линейной системой (1), для фиксированного $m>1$, рассмотрим возмущенную нелинейную систему

$$\dot y=A(t)y+f(t,y),\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0, \tag{19}$$

с непрерывной по $t\geqslant 0$ и непрерывной по

$$y\in U_\rho(f)=\{u\in\mathbb{R}^n:\ \|u\|<\rho(f)<+\infty\}$$

вектор-функцией $f:\mathbb{R}^+\times U_\rho(f)\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию

$$\|f(t,y)\|\leqslant N_f\|y\|^m,\quad (t,y)\in\mathbb{R}^+\times U_\rho(f). \tag{20}$$

Введем обозначения: F_m — множество всех вектор функций, удовлетворяющих условию (20),

$$\chi(y(\cdot,y_0))=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|y(t,y_0)\|$$

— характеристический показатель решения $y(t,y_0)$ системы (19) с начальным условием $y(0)=y_0$.

Рассмотрим величину

$$\sup_{f\in F_m}\overline{\lim_{y_0\to 0}}\,\chi(y(\cdot,y_0)), \tag{21}$$

которая оценивает сверху характеристические показатели всех решений системы (19).

В работе Н. А. Изобова [17] рассмотрен *конструктивный показатель* системы (1)

$$\begin{gathered}\xi_0^\alpha(A)=\alpha,\quad \xi_k^\alpha(A)=\max_{0\leqslant i<k}\{\ln\|X_A(k,i)\|+m\xi_i^\alpha\},\\ \Omega_m(A)=\lim_{\alpha\to-\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\tfrac{1}{k}\xi_k^\alpha(A).\end{gathered} \tag{22}$$

В той же работе [17] доказано, что в случае отрицательности величины (21), она совпадает с конструктивным показателем системы (1).

Теорема 4 ([18])**.** *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и каждого $m > 1$ функция $A \mapsto \Omega_m(A)$ принадлежит второму классу Бэра на пространствах M_n^c и M_n^u. При $n \geq 2$ для каждого $m > 1$ она не принадлежит первому классу на пространствах M_n^c и M_n^u.*

Доказательство. Докажем, что последовательность функций

$$\Psi^\alpha(A) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k}\xi_k^\alpha(A)$$

является неубывающей. Пусть $\alpha \leqslant \beta$ и $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\xi_0^\alpha(A) = \alpha \leqslant \beta = \xi_0^\beta(A),$$

$$\ln\|X_A(1,0)\| + m\xi_0^\alpha(A) \leqslant \ln\|X_A(1,0)\| + m\xi_0^\beta(A) \Rightarrow \xi_0^\alpha(A) \leqslant \xi_0^\beta(A),$$

$$\left.\begin{array}{l}\ln\|X_A(2,0)\| + m\xi_0^\alpha(A) \leqslant \ln\|X_A(2,0)\| + m\xi_0^\beta(A)\\ \ln\|X_A(2,1)\| + m\xi_1^\alpha(A) \leqslant \ln\|X_A(2,1)\| + m\xi_1^\beta(A)\end{array}\right\} \Rightarrow \xi_2^\alpha(A) \leqslant \xi_2^\beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l}\ln\|X_A(k,0)\| + m\xi_0^\alpha(A) \leqslant \ln\|X_A(k,0)\| + m\xi_0^\beta(A)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \ln\|X_A(k,k-1)\| + m\xi_{k-1}^\alpha(A) \leqslant \ln\|X_A(k,k-1)\| + m\xi_{k-1}^\beta(A)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_k^\alpha(A) \leqslant \xi_k^\beta.$$

Таким образом, получаем $\Psi^\alpha(A) \leqslant \Psi^\beta(A)$. Следовательно, формулу (22) можно переписать в виде

$$\Omega_m(A) = \lim_{\alpha\to-\infty} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k}\xi_k^\alpha(A) = \lim_{m\to\infty} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A) =$$

$$= \inf_{m\in\mathbb{N}} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \inf_{s\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant s} \frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \min_{1\leqslant m\leqslant p} \min_{1\leqslant s\leqslant p} \lim_{j\to\infty} \max_{s\leqslant k\leqslant j} \frac{1}{k}\xi_k^{(-m)}(A).$$

Из леммы 1 следует, что функция $A \mapsto \xi_k^{(-m)}(A)$ является непрерывной на пространстве M_n^c. Таким образом, функция $A \mapsto \Omega_m(A)$ принадлежит второму классу Бэра на этом пространстве M_n^c.

Пусть $n \geq 2$. Докажем, что функция $A \mapsto \Omega_m(A)$ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Докажем, что для любой правильной по Ляпунову системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{23}$$

с отрицательным старшим показателем Ляпунова выполнено равенство $\Omega_m(A) = \lambda_n(A)$. Так как система (23) правильная, то существует (см. [19, стр. 77]) оператор-функция $Q(\cdot)$ такая, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln\|Q(t)\| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\| = 0,$$

и оператор Коши системы (23) имеет вид

$$X_A(t,0) = Q(t)\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)t}, \ldots, e^{\lambda_n(A)t}\}.$$

Можно считать, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln\|Q^{-1}(t)\| = 0,$$

так как, в силу неравенства

$$\|Q^{-1}(t)\| \geqslant \|Q(t)\|^{-1},$$

имеем

$$0 = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q^{-1}(t)\| \geqslant -\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|Q(t)\| = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon > 1$, что для любого $t \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$\|Q^{-1}(t)\| \leqslant \sqrt{C_\varepsilon} e^{\varepsilon t}, \quad \|Q(t)\| \leqslant \sqrt{C_\varepsilon} e^{\varepsilon t}.$$

Таким образом, для для оператора Коши системы (23) имеем

$$\|X_A(t,\tau)\| = \|X_A(t,0)X_A^{-1}(\tau,0)\| =$$

$$= \|Q(t)\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1(A)(t-\tau)}, \ldots, e^{\lambda_n(A)(t-\tau)}\}Q^{-1}(\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon e^{\lambda_n(A)(t-\tau)+\varepsilon t+\varepsilon\tau} = C_\varepsilon e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(t-\tau)+\varepsilon\tau}.$$

При помощи метода вариации произвольной постоянной для решения $y(t,\cdot)$ системы (19) получаем

$$y(t,y_0) = X_A(t,0)y_0 + \int\limits_0^t X_A(t,\tau) f(\tau, y(\tau,y_0))\, d\tau.$$

Отсюда

$$\|y(t,y_0)\| \leqslant \|X_A(t,0)\|\|y_0\| + \int\limits_0^t \|X_A(t,\tau)\|\|f(\tau,y(\tau,y_0))\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t}\|y_0\| + C_\varepsilon N_f \int\limits_0^t e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(t-\tau)+\varepsilon\tau}\|y(\tau,y_0)\|^m\, d\tau,$$

а следовательно, для

$$u(t) = \|y(t,y_0)\|e^{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)t},$$

получаем неравенство

$$u(t) \leqslant C_\varepsilon\|y_0\| + C_\varepsilon N_f \int\limits_0^t e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau} u^m(\tau)\, d\tau.$$

В силу леммы Бихари [20, стр. 198], при $\varepsilon < \frac{-\lambda_n(A)(m-1)}{m}$ и y_0, удовлетворяющем неравенству

$$(m-1)\|y_0\|^{m-1} C_\varepsilon^m N_f \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau}\, d\tau < 1,$$

для нормы решения $y(t,y_0)$ получаем

$$\|y(t,y_0)\| = u(t)e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_\varepsilon\|y_0\|e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)t}}{\left(1-(m-1)\|y_0\|^{m-1}C_\varepsilon^m N_f \int\limits_0^{+\infty} e^{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-1)\tau+\varepsilon\tau}\, d\tau\right)^{\frac{1}{m-1}}}.$$

Следовательно, получаем

$$\chi(y(\cdot, y_0)) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \|y(t, y_0)\| \leqslant \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $\lambda_n(A) = \Omega_m(A)$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x,$$

$$A(t) = \mathrm{diag}\{\begin{pmatrix} \pi\sin(\pi\sqrt{t}) - 2 & 0 \\ 0 & -\pi\sin(\pi\sqrt{t}) - 2 \end{pmatrix}, \underbrace{-3, \ldots, -3}_{n-2}\}.$$

Установлено [13, стр. 187], что показатели Ляпунова системы A удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1(A) = \cdots = \lambda_{n-2}(A) = -3,$$

$$\lambda_{n-1}(A) = \lambda_n(A) = -2,$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau = (-3)(n-2) - 4.$$

Следовательно, система A является правильной. Верхний центральный показатель этой системы удовлетворяет равенству $\Omega(A) = -1$, а нижний центральный показатель — равенству $\omega(A) = -3$. Установлено [21, стр. 85], что существует система $\dot{y} = B(t)y$ такая, что

$$\lim_{t\to\infty} \|A(t) - B(t)\| = 0,\ \lambda_{n-1}(B) = \omega(A) = -3.$$

В силу неравенства Ляпунова получаем

$$-1 = \Omega(A) \geqslant \lambda_n(B) \geqslant \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}B(\tau)d\tau + 3(n-2) - \lambda_1(B) = -1,$$

следовательно, система $\dot{y} = B(t)y$ является правильной. Допустим, что функция $\Omega_m : M_n \to \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве M_n^u. Тогда, в силу [9, 10], получаем $\Omega_m(A) = \Omega_m(B)$. С другой стороны, $\Omega_m(A) = \lambda_n(A) = -2$ и $\Omega_m(B) = \lambda_n(B) = -1$. Полученное противоречие доказывает теорему 4. □

Список литературы

[1] *Куратовский К.* Топология. Т. 1 // М.: Мир. 1966.

[2] *Бэр Р.* Теория разрывных функций // М.-Л.: ГТТИ. 1932.

[3] *Миллионщиков В. М.* Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. 1986. Т. 39, № 1. С. 29—51.

[4] *Рахимбердиев М. И.* О бэровском классе показателей Ляпунова // Математические заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 925–931.

[5] *Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука. 1970.

[6] *Мазаник С. А.* Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. Мн.: БГУ, 2008.

[7] *Миллионщиков В. М.* Указатели и символы условной устойчивости линейных систем // Дифференциальные уравнения 1991. Т. 27, № 8. С. 1464.

[8] *Ветохин А. Н.* О характеристиках условной экспоненциальной устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 9. С. 1601.

[9] *Ветохин А. Н.* О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 909–910.

[10] *Ветохин А.Н.* К бэровской классификации остаточных показателей // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 8. С. 1039–1042.

[11] *Perron O.* Ordnungszahlen linearer Differentialgleichugssysteme // Math. Z. 1930. Bd. 31. S. 748—766.

[12] *Ветохин А. Н.* О векторных пространствах, определяемых показателями Ляпунова и характеристиках условной экспоненциальной устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1995, Т. 31, № 12, С. 2095.

[13] *Былов Б. Ф., Виноград Г. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1968.

[14] *Baire R.* Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1906. V. 30. P. 1—48.

[15] *Baire R.* Sur la representation des functions discontinues // Acta. Math. 1909. V. 32. P. 97—176.

[16] *Изобов Н. А., Степанович О. П.* Об экспоненциально убывающих возмущениях, сохраняющих характеристические показатели линейной диагональной системы // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 934–943.

[17] *Изобов Н. А.* О старшем показателе системы с возмущениями порядка выше первого // Вестник Белорусского университета. Серия 1. 1969, № 3. С. 6–9.

[18] *Ветохин А. Н.* Некоторые свойства конструктивного показателя // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 6. С. 853.

[19] *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.

[20] *Беккенбах Э., Беллман Э.* Неравенства // М.: Мир. 1965.

[21] *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006.

Спектральный анализ и представление решений интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

Власов В.В.[1], Раутиан Н.А.[2], Шамаев А.С.[3]

Проведен спектральный анализ и получены представления решений интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Приводятся задачи, возникающие в теплофизике, теории вязкоупругости и акустике, естественно приводящие к исследованию указанных интегродифференциальных уравнений.

1 Введение.

Ряд задач из областей теории гетерогенных сред, вязкоупругости, кинетической теории газов, нестандартных моделей теплопроводности и многих других приводят необходимости исследования интегродифференциальных уравнений с нелокальными членами типа свертки. Таким уравнениям и системам уравнений посвящено большое число работ российских и зарубежных авторов. Условно, такие работы можно разделить на два класса.

К первому классу можно отнести работы, в которых выводятся уравнения и системы указанного типа. При этом в ряде работ вывод осуществляется строгими математическими методами на основе моделей, которые уже не подвергаются критике и рассматриваются как аксиомы (см. [32]). Например, рассматривается гетерогенная среда, состоящая из упругой и жидкой фаз. Первая фаза описывается системой уравнений теории упругости, а вторая фаза описывается системой, характеризующей вязкую сжимаемую жидкость. Предельный переход осуществляется по малому параметру - характерному размеру включений жидкости в упругую фазу, вязкость также может быть малым параметром, связанным определенным образом с линейными размерами включений.

В ряде работ системы уравнений с интегральными слагаемыми типа свертки появляются в результате обработки экспериментальных данных, как модели тех или иных

[1]Власов Виктор Валентинович, vikmont@yandex.ru, профессор, кафедра математического анализа, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[2]Раутиан Надежда Александровна, nrautian@mail.ru, доцент, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Шамаев Алексей Станиславович, sham@rambler.ru, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №11-01-00790а, проект №13-01-00384а)

механических и физических явлений (см. [20], [39]). В качестве примера, здесь можно привести задачи вязкоупругости, а также проблемы построения моделей теплопроводности с конечной скоростью распространения теплового фронта.

Ко второму классу следует отнести работы, в которых математическими методами осуществляется анализ указанных интегродифференциальных уравнений: доказываются теоремы существования и единственности решений, проводится спектральный анализ, изучаются качественные свойства решений и др.

Наиболее простым для изучения в данном классе, с нашей точки зрения, является интегродифференциальное уравнение следующего вида:

$$\dot{u}_t = \alpha u''_{xx} + K(t) * u''_{xx} \tag{1}$$

где $\alpha = const \geqslant 0$, $K(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\gamma_i t}$, $c_i \geqslant 0$, $\gamma_{i+1} > \gamma_i \geqslant 0$, $\gamma_i \to +\infty$, с начальными условиями $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$.

В работах [36], [37], [45], [38], [35] установлено, что решения уравнения (1) обладают новыми интересными свойствами, которые существенно зависят от свойств ядра свертки и не имеют места для „классических“ дифференциальных уравнений, не содержащих интегральных слагаемых. Поведение решений, а также спектральные свойства указанной начально-краевой задачи в значительной степени зависит от асимптотического поведения последовательностей $\{c_i\}$ и $\{\gamma_i\}$ при $i \to +\infty$. Кроме того, качественное различие в спектральных свойствах и поведении решений существует при $\alpha = 0$ и $\alpha > 0$. Интересной особенностью данного типа уравнений является наличие у него одновременно свойств, характерных как для гиперболического, так и для параболического типа уравнений, причем, в зависимости от поведения последовательностей $\{c_i\}$, $\{\gamma_i\}$ и значений параметра α, „гиперболические“ и „параболические“ свойства присутствуют в „большей“ или „меньшей“ степени. Поэтому естественно отнести данный класс уравнений к некоторому промежуточному „парабо-гиперболическому“ типу. В случае $\alpha = 0$ уравнение (1) более тяготеет к уравнениям гиперболического типа, в то время как в случае $\alpha > 0$ – к уравнениям параболического типа, причем в том и в другом случае в множестве решений присутствуют экспоненциально-затухающие без колебаний решения, а также осциллирующие решения, но в случае $\alpha > 0$ пространство осциллирующих решений конечномерно.

Уравнение вида (1) представляет собой простейший одномерный вариант моделей, распространения звука в смеси двух слабовязких жидкостей (в этом случае $\alpha = 0$ см. [49]), распространения волн в жидкости, находящейся в упругой пористой среде ($\alpha = 0$ для слабовязкой жидкости и $\alpha > 0$ для жидкости конечной вязкости, см. [50]), при этом представляют интерес следующие частные случаи:
если $\alpha = 0$ и $K(t)$ - гладкая функция (не обязательно, являющаяся суммой экспонент), то уравнение (1) отвечает модели теплопроводности с конечной скоростью распространения волнового фронта (так называемое уравнение Гуртина-Пипкина, см. [11], [20] –[21], [39]);
если $\alpha > 0$ и $K(t)$ - функция, принадлежащая некоторому классу (не обязательно, являющаяся суммой экспонент), то уравнение (1) отвечает модели вязкоупругости (см. [22] –[25]).

Интересен также случай, когда

$$K(t) = \int e^{\lambda t} d\mu(\lambda)$$

где $\mu(\lambda)$ - мера с компактным носителем на отрицательной полуоси. Ядра свертки указанного вида возникают, в частности, при построении усредненных моделей среды, состоящей из упругого каркаса и вязкой жидкости (см. [28] –[31], [40]).

Методы, используемые в данной работе, применимы также для исследования уравнений более высокого порядка, аналогичных (1) с интегральными слагаемыми типа вольтерровой свертки, также представляющих большой интерес. Так, например, уравнение пятого порядка указанного вида описывает поперечные колебания трубопроводов с вязкой, движущейся жидкостью [42], [48].

В связи с тем, что интегродифференциальные уравнения возникают в многочисленных приложениях, целесообразнее и естественней рассматривать интегродифференциальные уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве (абстрактные интегродифференциальные уравнения), которые при необходимости могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения с частными производными по пространственным переменным. Самосопряженный положительный оператор A, фигурирующий в дальнейшем, может быть реализован, в частности, как $A^2y = -y''(x)$, где $x \in (0,\pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $A^2y = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области G. Также, возможен случай $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0,\pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, или $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области G. В общем случае, оператор A может быть реализован как эллиптический самосопряженный оператор в ограниченной области G в пространстве $L_2(G)$. В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных изучению разрешимости и асимптотического поведения решений интегродифференциальных уравнений в банаховых и, в частности, в гильбертовых пространствах (см. [1] –[18], [21] –[25], [1] –[18], [35] –[38], [43], [44]), а также библиографию этих работ).

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения решений интегродифференциальных уравнений на основе спектрального анализа их символов. Для этого мы получаем представления сильных решений указанных уравнений в виде суммы слагаемых отвечающим вещественной и невещественной частям спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений. Полученные представления являются новыми для данного класса интегродифференциальных уравнений. Большая часть известных результатов связана с задачей корректной разрешимости и оценках решений интегродифференциальных уравнений.

Здесь уместно отметить работы и указанную в них библиографию, посвященные исследованию интегродифференциальных уравнений, главной частью которых является абстрактное параболическое уравнение (см. [1] –[16]). Интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное гиперболическое уравнение, изучены в меньшей степени (см. [13] –[18] [22] –[25], [35] –[38], [43], [44]).

На протяжении всей работы выражение вида $D \lesssim E$ подразумевает неравенство $D \leq cE$, выполненное с некоторой положительной константой c, выражение $D \approx E$ означает $D \lesssim E \lesssim D$. Мы используем символы := и =: для введения новых величин.

2 Постановка задачи.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Превратим область определения $Dom(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $Dom(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

Обозначим $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям a_n: $Ae_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Собственные значения a_n упорядочены по возрастанию с учетом кратности: $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n ...$; $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

В дальнейшем будет использоваться следующее обозначение:

$$u^{(n)}(t) := \frac{d^n u(t)}{dt^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\left\| u^{(n)}(t) \right\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$. Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. гл. I монографии [19].

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \int_0^t \mathcal{K}(t-s) A^2 v(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

$$v(+0) = \psi_0. \tag{3}$$

Предполагается, что скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление

$$\mathcal{K}(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu(\tau), \tag{4}$$

где $d\mu$ — положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Мы предполагаем, что выполнено следующее условие:

$$\mathcal{K}(0) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \infty, \tag{5}$$

где носитель μ принадлежит интервалу $(d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$. В ряде случаев будет также существенно использоваться условие

$$-\mathcal{K}^{(1)}(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \operatorname{Var} \mu|_0^\infty < +\infty, \tag{6}$$

Символом уравнения (2) является оператор-функция

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda I + \hat{\mathcal{K}}(\lambda) A^2,$$

где

$$\hat{\mathcal{K}(\lambda)} = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda + \tau)}$$

преобразование Лапласа функции ядра свертки $\mathcal{K}(t)$.

Вначале приведем результат о корректной разрешимости задачи (2), (3).

3 Корректная разрешимость.

Определение 1. Вектор - функцию v назовем сильным решением задачи (2), (3), если она принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (3).

Теорема 1. *Пусть вектор-функция* $Aq'(t) \in L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_1 \geq 0$, $q(0) = 0$ *и выполнено условие* (5). *Тогда,*
1) если выполнено условие (6) *и* $\psi_0 \in H_2$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2), (3) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ *и для ее решения справедлива оценка*

$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|Aq'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^2\psi_0\right\|_H\right) \tag{7}$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0;
2) если условие (6) *не выполнено и* $\psi_0 \in H_3$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2), (3) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ *и для ее решения справедлива оценка*

$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|Aq'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\psi_0\right\|_H\right) \tag{8}$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0.

Доказательство теоремы 1 приведено в недавно опубликованной работе авторов [45]. Следует обратить внимание на то, что наш метод доказательства теорем о корректной разрешимости начально-краевых задач для уравнения (2) существенно отличается от подхода, использованного Л. Пандолфи в работе [21]. Л. Пандолфи изучает разрешимость в функциональных пространствах непрерывных функций, заданных на конечном интервале $(0, T)$ по временной переменной t, в то время как в предлагаемой статье разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ на полуоси $\mathbb{R}_+$. Кроме того, ядро свертки в работах Л. Пандолфи предполагается гладким. В работе рассмотрен также случай, когда ядро свертки имеет особенность в нуле, что существенно для приложений к задачам механики.

При доказательстве теоремы 1 о разрешимости существенно используются полученные в работе оценки оператор-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$, а также структура пространств $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и теорема Пэли-Винера.

Отметим работу [46], в которой изучаются интегродифференциальные уравнения второго порядка. С помощью специально построенных функционалов Ляпунова авторы исследуют асимптотическое поведение решений. В частности, в случае экспоненциального убывания ядра $\mathcal{K}(t)$ устанавливается полиномиальное убывание решений при $t \to +\infty$.

В работах [22]–[23] также исследуется асимптотическое поведение решений интегродифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, авторы приводят ряд задач, возникающих в приложениях (теория вязкоупругости), которые приводят к изучению этого вида уравнений.

4 Спектральный анализ.

Спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами рассматриваемых интегродифференциальных уравнений, проводился в работах [15], [18], [33]–[38] в случае, когда ядро $K(t)$ представимо в виде линейной комбинации или ряда из убывающих экспонент с положительными коэффициентами.

В дальнейшем мы будем использовать следующие утверждения (см. [47]).

Лемма 1. *[Шварц] Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ в себя. Тогда уравнение $z = f(z)$ имеет не более одного решения и, если такое решение существует, то $|f'(w)| < 1$. В противном случае f — эллиптическое дробно-линейное преобразование.*

Теорема 2. *[Denjoy–Wolff] Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ в себя и f не является эллиптическим дробно-линейным преобразованием. Тогда существует единственная точка $\omega \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$ такая, что итерации f^{*n} сходятся равномерно к ω на компактных множествах в $\mathbb{C}^+$. Угловой предел $\lim\limits_{z\to\omega} f(z)$ существует и удовлетворяет уравнению $\omega = f(\omega)$. Более того, угловая производная $f'(\omega)$ существует и удовлетворяет неравенству $|f'(\omega)| \leq 1$.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (5), (6) и мера $d\mu$ имеет компактный носитель, принадлежащий отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2$. Тогда для достаточно больших значений $|\lambda|$ справедливо представление*

$$\hat{\mathcal{K}(\lambda)} = \frac{B}{\lambda} - \frac{C}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to +\infty, \tag{9}$$

где

$$B = \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau}, \quad C = \int_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau).$$

Следующая теорема дает асимптотику невещественной части спектра оператор функции $\mathcal{L}(\lambda)$ в случае, когда мера $d\mu$ имеет компактный носитель.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (5), (6) и мера $d\mu$ имеет компактный носитель, тогда для достаточно больших a_n невещественные собственные значения $\lambda_n^{\pm}$ ($\lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+}$) оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ имеют следующую асимптотику*

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\sqrt{\mathcal{K}(0)}a_n + \frac{\mathcal{K}'(0)}{2\mathcal{K}(0)} + O\left(\frac{1}{a_n}\right), \; a_n \to +\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим сужение $l_n(\lambda) := (\mathcal{L}(\lambda)e_n, e_n) = \lambda + a_n^2\hat{\mathcal{K}}(\lambda)$ оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n. Таким образом, получаем счетный набор мероморфных функций $l_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. Собственные значения оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$\lambda = f_n(\lambda), \tag{11}$$

где $f_n(\lambda) := -a_n^2\hat{\mathcal{K}}(\lambda)$. Функция $f_n(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ в себя и, по лемме Шварца, уравнение имеет не более одного решения. Заметим, что

$$\operatorname{Re}\left(\lambda + a_n^2\hat{K}(\lambda)\right) = \operatorname{Re}\lambda + a_n^2\int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{\tau + \operatorname{Re}\lambda}{\tau|\lambda+\tau|^2} d\mu(t) > 0$$

при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Следовательно, по теореме 2, уравнение (11) имеет корни в левой полуплоскости.

Для того, чтобы найти невещественные корни уравнения (11), используя представление (9), перепишем это уравнение в виде

$$\lambda_n = f_n(\lambda_n) = a_n^2\left(\frac{B}{\lambda_n} - \frac{C}{\lambda_n^2} + o\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\right), \quad |\lambda| \to +\infty.$$

Отсюда, получаем уравнение

$$\lambda_n^3 + a_n^2 B\lambda_n - a_n^2 C + o(1) = 0. \tag{12}$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде

$$\lambda_n = i\sqrt{B}a_n + d + o\left(\frac{1}{a_n}\right), \quad a_n \to +\infty \tag{13}$$

с неизвестным коэффициентом d. Подставим представление (13) в уравнение (12) и, приравнивая коэффициенты при a_n^2, получаем $d = \mathcal{K}'(0)/(2\mathcal{K}(0))$.

Теорема 3 доказана. □

В работе [45] получен также результат о локализации спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ в случае, когда мера $d\mu$ имеет компактный носитель.

Лемма 3. *Пусть мера $d\mu$ имеет компактный носитель, принадлежащий отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2$. Тогда найдется такое $\omega > 0$, что в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -\omega\}$ оператор-функция $\mathcal{L}(\lambda)$ обратима, т.е. спектр этой оператор-функции лежит в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} : -\omega < \operatorname{Re}\lambda < 0\}$.*

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (5) и мера $d\mu$ имеет компактный носитель, принадлежащий отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2$. Тогда спектр оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{L}) := \sigma_R \cup \sigma_I \tag{14}$$

где σ_R и σ_I — вещественная часть и невещественная части спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, соответственно, причем $\sigma_R \in [-d_2, -d_0]$, где $0 \leqslant d_0 < d_2$,

$$\sigma_I = \overline{\left\{\lambda_n^{\pm} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+} | n \in \mathbb{N}\right\}},$$

где $\lambda_n^{\pm}$ — невещественные собственные значения оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, имеющие асимптотическое представление (10), в случае, если выполнено условие (6).

Доказательство. Рассмотрим уравнение (11). Функция $f_n(\lambda) := -a_n^2\hat{\mathcal{K}}(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ в себя и, следовательно, по лемме Шварца, уравнение (11) имеет не более одного решения. Согласно лемме 2, уравнение (11) при достаточно больших a_n имеет корень λ_n^+ в левой верхней полуплоскости. Таким образом, для окончания доказательства теоремы осталось показать, что $\sigma_R \in [-d_2, -d_0]$, где $0 \leqslant d_0 < d_2$. В самом деле, для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\operatorname{Re} l_n(\lambda) = x\left(1 + \frac{a_n^2}{x^2+y^2}\left[\int_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau} - \int_{d_1}^{d_2}\frac{x+\tau}{(x+\tau)^2+y^2}d\mu(\tau)\right]\right),$$

из которого следует, что $\operatorname{Re} l_n(\lambda) > 0$ при $\operatorname{Re}(\lambda) = x > 0$. С другой стороны, при $\operatorname{Re}(\lambda) = x < -d_2$, делая замену переменных $x = -u$ получаем

$$|\operatorname{Re} l_n(\lambda)| = \left|-u\left(1 + \frac{a_n^2}{u^2+y^2}\left[\int_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau} + \int_{d_1}^{d_2}\frac{x-\tau}{(u-\tau)^2+y^2}d\mu(\tau)\right]\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant d_2\left|1 + \frac{a_n^2}{u^2+y^2}\int_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right| > 0.$$

равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4 доказана. □

5 Представление решений.

На основе теоремы 4 о структуре спектра оператор-функции $\mathcal{L}$, получим представление решения задачи (2), (3). Введем следующие обозначения: $u_n(t) = (u(t), e_n)$, $\varphi_n = (\varphi, e_n)$, σ_R — вещественная часть спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$. Рассмотрим такой отрезок $[\beta_0, \beta_1] \subset \mathbb{R}$, что $\sigma_R \subset [-d_2, -d_0] \subset [-\beta_1, -\beta_0]$. На комплексной плоскости рассмотрим следующий контур: $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0 \cup \Gamma^1$, где

$$\Gamma^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, -\beta_1 \leqslant x \leqslant -\beta_0,\, y = y_0,\, y_0 > 0\},$$

$$\Gamma^- = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, -\beta_1 \leqslant x \leqslant -\beta_0,\, y = -y_0,\, y_0 > 0\},$$

$$\Gamma^0 = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x = -\beta_0,\, |y| \leqslant y_0\},$$

$$\Gamma^1 = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x = -\beta_1,\, |y| \leqslant y_0\}.$$

Теорема 5. *Пусть в уравнении* (2) $f(t) \equiv 0$ *и выполнены условия теоремы 4. Тогда сильное решение задачи* (2), (3) *представимо в виде*

$$u(t) = u_I(t) + u_R(t), \tag{15}$$

где

$$u_I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{\exp(\lambda_n^+ t)}{l'_n(\lambda_n^+)}\right] \varphi_n e_n,$$

$$u_R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\Gamma} \mathcal{L}^{-1}(\lambda) \varphi e^{\lambda t} d\lambda.$$

λ_n^+ *— невещественные собственные значения оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$*, имеющие асимптотическое представление* (10).

Доказательство. Доказательство теоремы 5 существенно опирается на теорему 4. Решение задачи (2), (3) представимо в виде

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \hat{u}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} L^{-1}(\gamma) \varphi e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0.$$

Зафиксируем вектор e_n и рассмотрим проекцию вектор-функции $u(t)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \hat{u}_n(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\varphi_n e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda, \tag{16}$$

где $\hat{u}_n(\lambda) = (\hat{u}(\lambda), e_n)$, $\varphi_n = (\varphi, e_n)$. Согласно теореме 4, в левой полуплоскости функция

$$\hat{u}_n(\lambda) = \frac{\varphi_n}{l_n(\lambda)}$$

имеет простые полюсы в точках $\lambda_n^{\pm}$, а также особые точки на отрезке $[-d_2, -d_0]$, где $0 \leqslant d_0 < d_2$.

Покажем, что функция $u_n(t)$ представима в следующем виде:

$$u_n(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{\exp(\lambda_n^+ t)}{l'_n(\lambda_n^+)} \right] \varphi_n + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi_n e^{\lambda t}}{l_n(\lambda)} d\lambda. \tag{17}$$

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим контур, проходимый против часовой стрелки:

$$\Gamma_{R,\gamma} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda = \gamma,\ -R < \operatorname{Im}\lambda < R\} \cup C_R,$$

где $R > 0$,

$$C_R = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = R,\ |\arg\lambda| \geqslant \alpha = \arcsin\frac{\gamma}{R} \right\}.$$

Покажем, что для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{C_R} l_n^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \to 0, \quad t > 0, \quad R \to +\infty. \tag{18}$$

Используя асимптотическое представление (9) функции $\mathcal{K}(\hat{\lambda})$ получаем оценку

$$\left| \mathcal{K}(\hat{\lambda}) \right| \leqslant \frac{const}{|\lambda| + 1}$$

вне круга $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < R\}$ достаточно большого радиуса R. Отсюда, при фиксированном $n \in \mathbb{N}$, получаем следующую цепочку неравенств

$$|l_n(\lambda)| = \left| \lambda + a_n^2 \hat{\mathcal{K}}(\lambda) \right| \geqslant |\lambda| - \frac{a_n^2}{|\lambda| + 1} \geqslant |\lambda| - \frac{1}{2},$$

из которой при $|\lambda| > 2a_n^2$ следует неравенство

$$\frac{1}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{const}{|\lambda|}. \tag{19}$$

Из последнего неравенства и леммы Жордана следует, что

$$\int\limits_{C_R,\, \operatorname{Re}\lambda < 0} l_n^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \to 0, \quad t > 0, \quad R \to +\infty. \tag{20}$$

Теперь покажем, что

$$\int\limits_{C_R, \operatorname{Re}\lambda > 0} l_n^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \to 0, \quad t > 0, \quad R \to +\infty. \tag{21}$$

Используя оценку (19), получаем цепочку неравенств

$$\left| \int\limits_{\substack{\lambda \in C_R, \\ \operatorname{Re}\lambda > 0}} l_n^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda \right| \leqslant 2 \int\limits_{\substack{\lambda \in C_R, \\ \operatorname{Re}\lambda > 0}} \left| l_n^{-1}(\lambda) \right| \left| e^{\lambda t} \right| |d\lambda| \leqslant \frac{2R}{R} \int\limits_{\pi/2 - \alpha}^{\pi/2} e^{R\cos\varphi t} d\varphi =$$

$$= 2 \int\limits_0^{\alpha} e^{R\sin\psi t} d\psi \leqslant 2 \int\limits_0^{\alpha} e^{2R\psi t} d\psi = 2 \left. \frac{e^{2R\psi t}}{2Rt} \right|_0^{\arcsin\frac{\gamma}{R}} = 2 \frac{e^{2R \arcsin\frac{\gamma}{R} t}}{2Rt} \to 0, \quad R \to +\infty.$$

Из соотношений (20), (21) следует (18). Из (18), теоремы 4 о локализации спектра и интегральной теоремы Коши получаем искомое представление (15).

Теорема 5 доказана. $\square$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для вектор-функций* $u_I(t)$ *и* $u_R(t)$ *справедливы следующие оценки*

$$\|u_I(t)\|_H \leqslant Ce^{\kappa t}\|\varphi\|_H, \quad \|u_R(t)\|_H \leqslant C\xi(t)\frac{\theta(y_0)}{|y_0|^4}\left\|A^{-2}\varphi\right\|_H.$$

где $\kappa = \sup\limits_{n\in N}\operatorname{Re}\lambda_n^+$,

$$\xi(t) = \frac{e^{-d_1 t} - e^{-d_2 t}}{t}, \quad \theta(y_0) = \int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau^2 + y_0^2)}.$$

Доказательство. Начнем с оценки нормы вектор-функции $u_I(t)$ в пространстве H. Оценим снизу величину $l'_n(\lambda_n^+)$, используя асимптотику λ_n^+, заданную формулой (10). Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующих неравенств

$$\left|l'_n(\lambda_n^+)\right| = \left|1 - a_n^2\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau + \lambda_n^+)^2}\right| \geqslant \left|1 + \frac{1}{2}\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{(1 - 2\tau^2/a_n^2)\,d\mu(\tau)}{\tau(1 + \tau^2/a_n^2)^2}\right| \geqslant 1.$$

Отсюда получаем

$$\|u_I(t)\|_H^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}\left[\frac{\exp(\lambda_n^+ t)}{l'_n(\lambda_n^+)}\right]\varphi_n e_n\right\|_H^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\exp(\lambda_n^+ t)}{l'_n(\lambda_n^+)}\right|^2|\varphi_n|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(2\operatorname{Re}\lambda_n^+ t)}{|l'_n(\lambda_n^+)|^2}|\varphi_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(2\operatorname{Re}\lambda_n^+ t\right)|\varphi_n|^2 \leqslant C\exp(2\kappa t)\,\|\varphi\|_H^2, \quad (22)$$

где $\kappa = \sup\limits_{n\in N}\operatorname{Re}\lambda_n^+$.

Перейдем к оценке вектор функции $u_R(t)$. Оценим функцию $l_n^{(-1)}(\lambda)$ на контуре Γ. Обозначим $\lambda = s + iy$, $s \in [-d_2, -d_1]$. Для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|l_n(\lambda)|^2 = \left|s + a_n^2\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{(s+\tau)d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)} + iy_0\left(1 - a_n^2\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant y_0 a_n^2\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)}. \quad (23)$$

Введем следующие обозначения

$$D_1 = s + a_n^2\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{(s+\tau)d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)},$$

$$D_2 = y_0\left(1 - a_n^2\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)}\right).$$

Тогда

$$l_n^{-1}(\lambda)\big|_{\lambda=s+iy_0} = \frac{D_1 - iD_2}{D_1^2 + D_2^2}. \tag{24}$$

Для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ справедлива следующая оценка снизу

$$|D_2| = |y_0| \left| 1 - a_n^2 \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)} \right| \geqslant |y_0|\, a_n^2 \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)} \geqslant$$

$$\geqslant |y_0|\, a_n^2 \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau^2 + y_0^2)} = |y_0|\, a_n^2 \theta(y_0), \tag{25}$$

где

$$\theta(y_0) = \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau^2 + y_0^2)} > 0.$$

С другой стороны,

$$|D_2| = |y_0| \left| 1 - a_n^2 \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)} \right| \leqslant |y_0| \left(1 + \frac{a_n^2}{d_1 y_0^2} \int\limits_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau) \right) \leqslant \frac{2\,|y_0|\, a_n^2}{d_1 y_0^2} \int\limits_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau),$$

$$|D_1| = \left| s + a_n^2 \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{(s+\tau)d\mu(\tau)}{\tau((s+\tau)^2 + y_0^2)} \right| \leqslant d_2 + a_n^2 \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d_2 d\mu(\tau)}{d_1 y_0^2} \leqslant \frac{2 d_2 a_n^2}{d_1 y_0^2} \int\limits_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau). \tag{26}$$

Таким образом, получаем следующую оценку числителя в представлении (24)

$$|D_1 + iD_2| \leqslant |D_1| + |D_2| \leqslant 2a_n^2 \frac{(d_2 + y_0)}{d_0 y_0^2} \int\limits_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau). \tag{27}$$

На основании оценок (25), (27) представления (24) получаем

$$\left| l_n^{-1}(\lambda) \right| \leqslant \frac{2a_n^2 (d_2 + y_0)/d_0 y_0^2 \int\limits_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau)}{|y_0|^2 a_n^4 \theta^2(y_0)} = \frac{1}{a_n^2} \left[\frac{2\,(d_2 + y_0)}{d_0 y_0^4 \theta^2(y_0)} \int\limits_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau) \right] = \frac{\theta_1(y_0)}{a_n^2 y_0^4}, \tag{28}$$

где

$$\theta_1(y_0) = \frac{2\,(d_2 + y_0)}{d_0 \theta^2(y_0)} \int\limits_{d_1}^{d_2} d\mu(\tau).$$

Оценим теперь интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} l_n^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad \lambda = s + iy_0, \quad d\lambda = ds.$$

Имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma} l_n^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant 2\int\limits_{-d_2}^{-d_1} e^{st}\left|l_n^{-1}(s+iy_0)\right|ds \leqslant 2\frac{\theta_1(y_0)}{a_n^2 y_0^4}\int\limits_{-d_2}^{-d_1} e^{st}ds =$$
$$= 2\frac{e^{-d_1 t}-e^{-d_2 t}}{t}\frac{\theta_1(y_0)}{a_n^2 y_0^4} = 2\xi(t)\frac{\theta_1(y_0)}{a_n^2 y_0^4}.$$

Таким образом, получаем следующую оценку

$$\|u_R(t)\|_H^2 = \left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\Gamma} L^{-1}(\lambda)\varphi e^{\lambda t}d\lambda\right\|_H^2 = \left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_n e^{\lambda t}}{l_n^2(\lambda)}d\lambda\right)e_n\right\|_H^2 =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi_n e^{\lambda t}}{l_n^2(\lambda)}d\lambda\right|^2 \leqslant C\xi^2(t)\frac{\theta_1^2(y_0)}{y_0^8}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-4}|\varphi_n|^2 \leqslant C\xi^2(t)\frac{\theta_1^2(y_0)}{y_0^8}\left\|A^{-2}\varphi\right\|^2. \quad (29)$$

Теорема 6 доказана. □

Теорема 7. *Пусть в задаче* (2) (3) $\varphi = 0$ *и выполнены условия теоремы 4. Тогда сильное решение задачи* (2), (3) *представимо в виде*

$$u(t) = w_I(t) + w_R(t),$$

где

$$w_I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t\left[\frac{\exp(\lambda_n^+(t-\tau))}{l'_n(\lambda_n^+)} + \frac{\exp(\lambda_n^-(t-\tau))}{l'_n(\lambda_n^-)}\right]f_n(\tau)d\tau\right)\varphi_n e_n,$$

$$w_R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t\left(\int\limits_{\Gamma}\mathcal{L}^{-1}(\lambda)e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\right)f_n(\tau)d\tau,$$

$\lambda_n^{\pm}$ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$, *имеющие асимптотическое представление* (10).

Список литературы

[1] *Di Blasio G.*, Parabolic Volterra equations of convolution type // J. Integral Equations Appl. 1994, V. 6, p. 479–508.

[2] *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* L^2–regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives // J. Math. Anal. Appl. 1984, V. 102, p. 38–57.

[3] *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* Stability for abstract linear functional differential equations // Izrael.J. Mathematics. 1985, V. 50, №3, p. 231–263.

[4] *Kunisch K., Mastinsek M.* Dual semigroups and structual operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays // Differ. Integral Equations, 1990, V.3, №4, p. 733–756.

[5] *Kunisch K., Shappacher W.* Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate l_0–semigroup // J. Differ. Equations, 1983, V.50, p. 49–79.

[6] *Wu J.* Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay // Differ. Integr. Equations, 1991, V.4, №6, p. 1325–1351.

[7] *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations // Appl. Math. Sci. New York: Springer-Verlag, 1996, V.119

[8] *Vlasov V. V.* On the solvability and properties of solutions of functional-differential equations in Hilbert spaces // Sbornik Mathem. 1995, V. 186, №8, p. 67–92.

[9] *Vlasov V. V.* On the solvability and estimates of solutions of functional-differential equations in Sobolev spaces // Proc. Steklov Math. Inst. 1999, V.227, p. 109–121.

[10] *Vlasov V. V.* On the solvability of abstract parabolic equations with aftereffect // Dokl. Ross. Akad. Nauk. 2007, V.415, №2, p. 151–152.

[11] *Miller R. K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory // J. Math. Anal. Appl. 1978, V.66, p. 313–332.

[12] *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces. // Funkcialaj Ekvac. 1978, V.21, p. 279–305.

[13] *Vlasov V. V., Shmatov K. I.* On the solvability of delayed hyperbolic equations in Hilbert spaces // Proc. Steklov Math. Inst. 2003, V.243, p. 127–137.

[14] *Medvedev D. A., Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations // Functional Differential Equations 2008, V.15, №3-4, p. 249–272.

[15] *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and Spectral Analysis of Abstract Hyperbolic equations with delay // Functional Differential Equations 2009, V.16, №4, p. 751–768.

[16] *Vlasov V. V., Medvedev D. A.* Functional-differential equations in Sobilev spaces and related problems of spectral theory // Contemporary Math. Fundamental Directions 2008, V.30, p. 3–173. (English translation Journ. of Math. Sc. 2010, V.164, №5, p. 659 – 841)

[17] *Miller R. K.* Volterra Integral Equation in Banach Space // Funkcialaj Ekvac. 1975, V.18, p. 163–194.

[18] *V. V. Vlasov, Wu J., G. R. Kabirova* Correct Solvability and Spectral Properties of Abstract Hyperbolic Equations with Aftereffect. // Contemporary Math. Fundamental Directions 2010, V.35, p. 44–59.

[19] *J. L. Lions and E. Magenes* Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Applications // Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1972.

[20] *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968, V.31, p. 113–126.

[21] *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin-Pipkin equations: a cosine operator approach. // Appl. Math. Optim. 2005, V.52, p. 143–165.

[22] *Desch W., Miller R. K.* Exponential stabilization of Volterra Integrodifferential equations in Hilbert space. // J. Differential Equations 1987, V.70, p. 366–389.

[23] *Miloslavskii A.I.* Spectral properties of the operator pencil arising in the visco-elasticity // Available from Ukr. VINITI, No. 1229-UK87 (Kharkov).

[24] *Miloslavskii A.I.* Spectral Analysis of Small Oscillations of Visco-elastic Hereditary Medium // Preprint, Harkov, 1989.

[25] *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to Linear // Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Nonself adjoint Problems for Viscous Fluids. Berlin: Basel-Boston, 2003.

[26] *D. A. Kosmodemyanskiy, A. S. Shamaev* Spectral properties of some problems in mechanics of strongly inhomogeneous media. // Contemporary Math. Fundamental Directions 2006, V.17, p. 88–109 (English translation in Journal of Mathematical Sciences 2008, V.149, №6, p. 1679–1700.)

[27] *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest. // Jornal of Mathematical analysis and applications 2009, V.355, p. 1–11.

[28] *Vlasov V. V., Gavrikov A. A., Ivanov S. A., Knyazkov D. U., Samarin V. A., Shamaev A. S.* Spectral properties of the combined medies // Modern problems of Mathematics and Mechanics 2009, V. 1, p. 134–155.

[29] *Rautian N. A.* On the structure and properties of solutions of integro-differential equations arising in thermal physics and acoustics. // Mathematical Notes 2011, V. 90, №3-4, p. 455 – 459.

[30] *Zhikov V. V.* On an extension of the method of two-scale convergence and its applications. // Sbornik: Mathematics. 2000, V.191, №7, p. 31 – 72.

[31] *Zhikov V. V.* On a method of two-scale convergence. // Tr. Semin. Im. Petrovskogo. 2003, V.23, p. 149 – 187.

[32] *Sanches-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. // New York: Springer-Verlag, 1980.

[33] *S. Ivanov and T. Sheronova* Spectrum of the Heat Equation with Memory // arXiv: math. CV/ 0912.1818v1.

[34] *S. A. Ivanov* Spectrum of the Heat Equation with Memory // arXiv: math. CV/1002.2831

[35] *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Well-Defined Solvability and Spectral Analysis of Abstract Hyperbolic. // Tr. Semin. Im. Petrovskogo. 2011, V. 28, №3, p. 15 — 46. (English translation in Journal of Mathematical Sciences 2011, V. 179, №3, p. 390 — 415.)

[36] *Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S.* Solvability and Spectral Analysis of Integro-Differential Equations Arising in the Theory of Heat Transfer and Acoustics.// Doklady Mathematics 2010, V.82, №2, p. 684– 687.

[37] *Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S.* Spectral Analysis and Correct solubility of an abstract integrodiferential equations Arising in the Theory of Heat Transfer and Acoustics. // Current Problems in Mathematics: Fundamental Directions. 2011, V. 39, p. 36 – 65

[38] *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Correct solvability of integro-differential equations arising in the theory of heat transfer and acoustics. // Functial Differential Equations 2012, V. 19, №1-2, p. 207 – 224.

[39] *Lykov A. V.* Problems of Heat and Mass Transfer // Minsk, 1976

[40] *Sandrakov G. V.* Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters. // Izvestiya: Mathematics. 2007, V.71, №6, p. 119 – 172.

[41] *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin-Pipkin Type Equations. // SIAM J. Math. Anal. 2011, V.43, p. 2296 – 2306.

[42] *Милославский А. И.* О спектре неустойчивости операторного пучка. // Матем. заметки. 1991, Т. 49, №4, С. 88–94.

[43] *Раутиан Н. А.* О структуре и свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике. // Матем. заметки, 2011, Т. 90, №3, С. 470—473

[44] *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ.// Под редакцией В. А. Садовничего. Современные проблемы математики и механики. 2011, Т. VIII. Математика. Выпуск 1. М.: Издательство МГУ имени М.В. Ломоносова.

[45] *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики. // Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14-21 августа, 2011). Часть 1, Современная математика. Фундаментальные направления. 2012, V.45, p. 43 – 61.

[46] *Rivera J. M., Naso M. G., Vegni F. M.* Asymptotic behavior of the energy for a class weakly-dissipative second order systems with memory. // Math. Anal. Appl. 2007, V.286, p. 692 – 704.

[47] *Shapiro J.* Composition operators and classical function theory. // Springer, 1993.

[48] *Акуленко Л. Д., Коровина Л. И., Нестеров С. В.* Собственные колебания участка трубопровода // Изв. РАН. МТТ. 2011, №1, С. 172–187

[49] *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с вязкой жидкостью // Докл. РАН. 2011, Т. 436, №2., С.199 – 202.

[50] *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью // Известия РАН. МЖГ. 2011, №2, С. 92 – 103.

[51] *Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для частично перфорированного вязкоупругого материала с каналами, заполненными жидкостью // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011, Т. 39, С. 185 – 198.

[52] *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для пористого вязкоупругого материала с долговременной памятью, заполненного вязкой жидкостью // Дифференциальные уравнения. 2012, Т. 48, №8, С. 1174-1186.

О колеблемости решений уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с положительным потенциалом

Дулина К.М.[1], Корчемкина Т.А.[2]

В работе рассматривается уравнение

$$y'' + p(x,\, y,\, y')\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0,$$

где $k > 0$, а функция $p\,(x,\, y,\, y')$ положительна. Показано, что все нетривиальные решения рассматриваемого уравнения являются колеблющимися, исследовано их поведение вблизи обеих границ области определения.

1 Постановка задачи

Рассматривается дифференциальное уравнение типа Эмдена-Фаулера второго порядка

$$y'' + p(x,\, y,\, y')\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 0. \tag{1}$$

В работе [1] получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений уравнения (1) в случае $p = p(x)$. С использованием методов, изложенных в работе [2], в случае $p(x,\, y,\, y') < 0$ в работе [3] доказано существование максимально продолженных решений с заданной областью определения, и приведена классификация всех максимально продолженных решений.

Используя методы работы [2], будем исследовать поведение решений уравнения (1) в случае $p(x,\, y,\, y') > 0$.

Везде далее будем предполагать, что функция $p(x,\, y,\, y')$ непрерывна по совокупности переменных, равномерно по x липшицева по последним двум аргументам и удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \le p(x,\, y,\, y') \le M < +\infty. \tag{2}$$

Рассмотрим траектории $\{(y(x),\, y'(x))\} \subset \mathbb{R}^2$, порожденные нетривиальными решениями уравнения (1). Разобьем пространство $\mathbb{R}^2$ на 4 пересекающихся только по границам

[1]Дулина Ксения Михайловна, sun-ksi@mail.ru, аспирант, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[2]Корчемкина Татьяна Александровна, krtaalex@gmail.com, студент, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

замкнутых множества в соответствии со всевозможными комбинациями знаков обеих координат их точек. Введем для этих множеств обозначения

$$\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}.$$

Пересечения границ множеств обозначим через

$$\begin{bmatrix} + \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix}.$$

Например,

$$\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} = \{(y_0,\, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_0 \geq 0,\ y_1 \leq 0\},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix} = \{(y_0,\, y_1) \in \mathbb{R}^2 : y_0 = 0,\ y_1 \geq 0\}.$$

2 Колеблемость решений

Покажем, что траектория, порожденная любым нетривиальным решением уравнения (1), не может при возрастании и убывании аргумента оставаться в одном из введенных выше множеств

$$\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}.$$

Лемма 1. *Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1). Тогда ни само решение, ни его первая производная не могут сохранять постоянный знак в окрестности левой и правой границ области определения.*

Доказательство. Приведем доказательство для самого решения, для первой производной оно аналогично.

Заметим, что при заменах $x \to -x$ и $y(x) \to -y(x)$ уравнение (1) переходит в уравнение того же типа, поэтому достаточно рассмотреть решение вблизи правой границы области определения.

Предположим, что решение $y(x)$ задано на конечном или бесконечном промежутке $(a,\, b)$ и является положительным в некоторой окрестности точки b. Тогда в силу вида уравнения (1) в этой окрестности вторая производная решения отрицательна, а, значит, его первая производная монотонно убывает, и, следовательно, имеет конечный или бесконечный предел при $x \to b - 0$. Это означает, что первая производная является знакопостоянной в некоторой окрестности точки b. Поэтому само решение $y(x)$ монотонно в некоторой окрестности точки b и стремится к некоторому конечному или бесконечному пределу при $x \to b - 0$.

Пусть $b < +\infty$. Если решение $y(x)$ (а, значит, и $y''(x)$) или его первая производная имеет конечный предел, то, интегрируя на конечном промежутке вторую или первую производную соответственно, получим, что в обоих случаях пределы решения и его первой производной должны быть конечными, что противоречит максимальной продолженности решения вправо. Если же пределы решения и его первой производной бесконечны, то они должны иметь одинаковый знак, что противоречит уравнению (1).

Пусть теперь $b = +\infty$. Если решение $y(x)$ (а, значит, и $y''(x)$) или его первая производная имеет ненулевой предел, то, интегрируя на всей области области определения вторую или первую производную соответственно, получим бесконечность всех пределов. В этом случае они должны иметь одинаковый знак, что противоречит уравнению (1). Если же пределы решения и его первой производной равны нулю, то само решение в окрестности плюс бесконечности положительно и монотонно убывает к нулю, а его первая производная отрицательна и монотонно возрастает к нулю. Это означает, что вторая производная, как и само решение, положительна и убывает к нулю в окрестности плюс бесконечности, что противоречит уравнению (1).

Лемма доказана.

Теорема 1. *Все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (1), как и их первые производные, являются колеблющимися при возрастании и при убывании аргумента, причем, нули x_j решения и нули x'_j его первой производной чередуются, то есть,*

$$\dots < x_{j-1} < x'_j < x_j < x'_{j+1} < \dots, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 1, достаточно рассмотреть поведение решений при возрастании аргумента.

Покажем, что траектория, порожденная произвольным нетривиальным решением $y(x)$ уравнения (1), при возрастании аргумента может переходить между введенными выше множествами только по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix} & \longleftarrow & \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \end{array}.$$

Действительно, пусть в некоторый момент точка $(y(x),\, y'(x))$ принадлежит внутренности множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$. Это означает, что $y(x) > 0,\ y'(x) > 0$, и, в силу уравнения (1), $y''(x) < 0$. Следовательно, решение $y(x)$ положительно и возрастает, а его первая производная $y'(x)$ положительна и убывает, пока траектория, порожденная решением $y(x)$, лежит во внутренности множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$. Тогда либо $y'(x)$ обратится в нуль, и соответствующая траектория выйдет на границу $\begin{bmatrix} + \\ 0 \end{bmatrix}$ множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$, либо $y'(x)$ не обратится в нуль, но будет иметь неотрицательный предел при возрастании аргумента, то есть, первая производная будет знакопостоянна. Это противоречит лемме 1. Таким образом, возможен только случай, когда траектория, порожденная решением $y(x)$, выходит на границу $\begin{bmatrix} + \\ 0 \end{bmatrix}$, то есть, решение $y(x)$ положительно и имеет локальный экстремум в некоторой точке x'_0, причем, в силу уравнения (1), $y''(x'_0) < 0$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ при $x \in (x'_0,\, x'_0 + \delta)$ справедливы соотношения $y(x) > 0,\ y'(x) < 0$, то есть, рассматриваемая траектория попадает во внутренность множества $\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}$.

Теперь $y(x) > 0,\ y'(x) < 0$, и, в силу уравнения (1), $y''(x) < 0$. Значит, решение $y(x)$ положительно и убывает, а его производная $y'(x)$ отрицательна и убывает, пока траетория остается во внутренности множества $\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}$. Вновь в силу леммы 1 решение $y(x)$ не может оставаться положительным при возрастании аргумента, а, значит, обратится в нуль в некоторой точке $x_0 > x_0'$, и траектория, порожденная этим решением, выйдет на границу $\begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix}$. Поскольку $y'(x_0) < 0$, то для некоторого $\tilde{\delta} > 0$ при $x \in (x_0,\, x_0 + \tilde{\delta})$ справедливы соотношения $y(x) < 0,\ y'(x) < 0$, и рассматриваемая траектория попадает во внутренность множества $\begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$.

Теперь $y(x) < 0,\ y'(x) < 0$. Аналогично показывается, что траектория, порожденная решением $y(x)$, при возрастании аргумента попадает на границу $\begin{bmatrix} - \\ 0 \end{bmatrix}$, то есть, в некоторой точке $x_1' > x_0 > x_0'$ решение $y(x)$ имеет локальный минимум. Затем при возрастании аргумента траектория попадает во внутренность множества $\begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}$, в силу леммы 1 выходит на границу $\begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix}$ в некоторой точке $x_1 > x_1' > x_0 > x_0'$, после чего переходит во внутренность множества $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$.

Таким образом, любая траектория, порожденная нетривиальным решением уравнения (1), при возрастании аргумента может переходить между множествами

$$\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}$$

только по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix} & \longleftarrow & \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \end{array}.$$

При этом, в силу леммы 1 траектория не может оставаться ни в одном из этих множеств при возрастании аргумента. Таким образом, как и решение $y(x)$, так и его первая производная $y'(x)$ являются колеблющимися, причем нули x_j решения и нули x_j' его первой производной чередуются, то есть,

$$\cdots < x_{j-1} < x_j' < x_j < x_{j+1}' < \ldots, \quad j \in \mathbb{Z}$$

Теорема доказана.

3 Поведение решений

Используя вид уравнения (1) и условие (2) ограниченности функции $p(x,\, y,\, y')$, оценим отношение значений первой производной в последовательных нулях x_j решения уравнения (1) и отношение значений решения уравнения (1) в его последовательных экстремумах x_j'.

Лемма 2. *Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1). Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства*

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \leq \left|\frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)}\right| \leq \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $y'(x_j) < 0$. Заметим, что

$$0 = |y(x_j)|^{k+1} - |y(x_{j+1})|^{k+1} = -(k+1) \int\limits_{y(x_j)}^{y(x_{j+1})} |y|^{k-1} y\, dy,$$

и, в силу уравнения (1)

$$-(k+1) \int\limits_{y(x_j)}^{y(x_{j+1})} |y|^{k-1} y\, dy = (k+1) \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx =$$

$$= (k+1) \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx + (k+1) \int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx. \tag{3}$$

В силу того, что $y'(x_j) < 0$, имеем $y'(x) < 0$ и $y''(x) > 0$ при $x \in (x_j,\, x'_{j+1})$, а при $x \in (x'_{j+1},\, x_{j+1})$ имеем $y'(x) > 0$ и $y''(x) > 0$. То есть, $\frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')} < 0$ при $x \in (x_j,\, x'_{j+1})$, и $\frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')} > 0$ при $x \in (x'_{j+1},\, x_{j+1})$.

Оценим сверху выражение (3):

$$(k+1) \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx + (k+1) \int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} \frac{y''\, y'}{p(x,\, y,\, y')}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{k+1}{M} \int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} y''\, y'\, dx + \frac{k+1}{m} \int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} y''\, y'\, dx =$$

$$= \frac{k+1}{M} \int\limits_{y'(x_j)}^{y'(x'_{j+1})} y'\, dy' + \frac{k+1}{m} \int\limits_{y'(x'_{j+1})}^{y'(x_{j+1})} y'\, dy' = \frac{k+1}{2M} \left(y'\right)^2 \Big|_{x_j}^{x'_{j+1}} + \frac{k+1}{2m} \left(y'\right)^2 \Big|_{x_j}^{x'_{j+1}} =$$

$$= -\frac{k+1}{2M} \left(y'(x_j)\right)^2 + \frac{k+1}{2m} \left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

откуда

$$0 \leq -\frac{k+1}{2M} \left(y'(x_j)\right)^2 + \frac{k+1}{2m} \left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

$$\frac{k+1}{2M} \left(y'(x_j)\right)^2 \leq \frac{k+1}{2m} \left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

и, наконец,

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \left|y'(x_j)\right| \leq \left|y'(x_{j+1})\right|.$$

Теперь оценим выражение (3) снизу:

$$(k+1)\int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} \frac{y''\,y'}{p(x,\,y,\,y')}\,dx + (k+1)\int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} \frac{y''\,y'}{p(x,\,y,\,y')}\,dx \geq$$

$$\geq \frac{k+1}{m}\int\limits_{x_j}^{x'_{j+1}} y''\,y'\,dx + \frac{k+1}{M}\int\limits_{x'_{j+1}}^{x_{j+1}} y''\,y'\,dx =$$

$$= \frac{k+1}{m}\int\limits_{y'(x_j)}^{y'(x'_{j+1})} y'\,dy' + \frac{k+1}{M}\int\limits_{y'(x'_{j+1})}^{y'(x_{j+1})} y'\,dy' = \frac{k+1}{2m}(y')^2\Big|_{x_j}^{x'_{j+1}} + \frac{k+1}{2M}(y')^2\Big|_{x_j}^{x'_{j+1}} =$$

$$= -\frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2 + \frac{k+1}{2M}\left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

откуда

$$0 \geq -\frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2 + \frac{k+1}{2M}\left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

$$\frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2 \geq \frac{k+1}{2M}\left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

и

$$\sqrt{\frac{M}{m}}\left|y'(x_j)\right| \geq \left|y'(x_{j+1})\right|.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\frac{m}{M}}\;\left|y'\left(x_j\right)\right| \leq \left|y'\left(x_{j+1}\right)\right| \leq \sqrt{\frac{M}{m}}\;\left|y'\left(x_j\right)\right|,$$

и, наконец,

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \leq \left|\frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)}\right| \leq \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. *Поскольку нули x_j и экстремумы x'_j нетривиального максимально продолженного решения уравнения (1) чередуются, то $y'\left(x_{j+1}\right)\,y'\left(x_j\right) < 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, и утверждение леммы 2 можно переписать в виде*

$$-\sqrt{\frac{M}{m}} \leq \frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)} \leq -\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Лемма 3. *Пусть $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1). Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства*

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{k+1}} \leq \left|\frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)}\right| \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{k+1}}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $y(x_j') > 0$. Заметим, что

$$|y(x_j')|^{k+1} = |y(x_j')|^{k+1} - |y(x_j)|^{k+1} = -(k+1)\int\limits_{y(x_j')}^{y(x_j)} |y|^{k-1} y\,dy = (k+1)\int\limits_{x_j'}^{x_j} \frac{y''\,y'}{p(x,\,y,\,y')}\,dx.$$

Поскольку $y(x_j') > 0$, то на интервале (x_j', x_j) имеем $y'(x) < 0$ и $y''(x) < 0$, то есть, $\frac{y''\,y'}{p(x,\,y,\,y')} > 0$ при $x \in (x_j', x_j)$. В этом случае полученное выражение можно оценить следующим образом:

$$\frac{k+1}{M}\int\limits_{x_j'}^{x_j} y''\,y'\,dx \le (k+1)\int\limits_{x_j'}^{x_j} \frac{y''\,y'}{p(x,\,y,\,y')}\,dx \le \frac{k+1}{m}\int\limits_{x_j'}^{x_j} y''\,y'\,dx,$$

тогда

$$\frac{k+1}{M}\int\limits_{y'(x_j')}^{y'(x_j)} y'\,dy' \le |y(x_j')|^{k+1} \le \frac{k+1}{m}\int\limits_{y'(x_j')}^{y'(x_j)} y'\,dy',$$

и

$$\frac{k+1}{2M}\left(y'(x_j)\right)^2 \le |y(x_j')|^{k+1} \le \frac{k+1}{2m}\left(y'(x_j)\right)^2. \tag{4}$$

В силу оценок, полученных в лемме 2, имеем

$$\frac{k+1}{2M}\,\frac{m}{M}\left(y'(x_{j+1})\right)^2 \le |y(x_j')|^{k+1} \le \frac{k+1}{2m}\,\frac{M}{m}\left(y'(x_{j+1})\right)^2.$$

Далее, поскольку неравенства (4) справедливы для любого $j \in \mathbb{Z}$, то также справедливы следующие неравенства:

$$\frac{k+1}{2M}\left(y'(x_{j+1})\right)^2 \le |y(x_{j+1}')|^{k+1} \le \frac{k+1}{2m}\left(y'(x_{j+1})\right)^2,$$

$$\frac{2m}{k+1}\,|y(x_{j+1}')|^{k+1} \le \left(y'(x_{j+1})\right)^2 \le \frac{2M}{k+1}\,|y(x_{j+1}')|^{k+1},$$

и тогда

$$\frac{m(k+1)}{2M^2}\,\frac{2m}{k+1}\left|y(x_{j+1}')\right|^{k+1} \le |y(x_j')|^{k+1} \le \frac{M(k+1)}{2m^2}\,\frac{2M}{k+1}\left|y(x_{j+1}')\right|^{k+1},$$

$$\frac{m^2}{M^2}\left|y(x_{j+1}')\right|^{k+1} \le |y(x_j')|^{k+1} \le \frac{M^2}{m^2}\left|y(x_{j+1}')\right|^{k+1},$$

следовательно,

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{k+1}}\left|y(x_{j+1}')\right| \le |y(x_j')| \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{k+1}}\left|y(x_{j+1}')\right|,$$

и

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{k+1}} \le \left|\frac{y\left(x_{j+1}'\right)}{y\left(x_j'\right)}\right| \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{k+1}}.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. *Поскольку нули x_j и экстремумы x'_j нетривиального максимально продолженного решения уравнения (1) чередуются, то $y\left(x'_{j+1}\right) y\left(x'_j\right) < 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, и утверждение леммы 3 можно переписать в виде*

$$-\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{2}{k+1}} \le \frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)} \le -\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{k+1}}.$$

Введем обозначения:

$$M_j = \max_{x\in[x_j,\, x_{j+1}]} p\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right), \quad m_j = \min_{x\in[x_j,\, x_{j+1}]} p\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Из лемм 2 и 3 вытекает следующий результат.

Следствие 1. *Для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства:*

$$-\sqrt{\frac{M_j}{m_j}} \le \frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)} \le -\sqrt{\frac{m_j}{M_j}},$$

$$-\left(\frac{M_j^2}{m_j\, m_{j-1}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \le \frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)} \le -\left(\frac{m_j^2}{M_j\, M_{j-1}}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Следствие 2. *В случае $p(x,\, y,\, y') \equiv p_0 > 0$ все нетривиальные решения уравнения (1) являются периодическими.*

Доказательство. В этом случае $M = m = p_0$, и в силу лемм 2 и 3 для любого $j \in \mathbb{Z}$ справедливо:

$$1 \le \left|\frac{y'\left(x_{j+1}\right)}{y'\left(x_j\right)}\right| \le 1,$$

$$1 \le \left|\frac{y\left(x'_{j+1}\right)}{y\left(x'_j\right)}\right| \le 1,$$

то есть

$$\left|y\left(x'_j\right)\right| = \left|y\left(x'_{j+1}\right)\right|, \quad \left|y'\left(x_j\right)\right| = \left|y'\left(x_{j+1}\right)\right|,$$

и в силу замечаний 1 и 2

$$y\left(x'_j\right) = -y\left(x'_{j+1}\right), \quad y'\left(x_j\right) = -y'\left(x_{j+1}\right).$$

В частности, для любого $j \in \mathbb{Z}$

$$y\left(x_j\right) = y\left(x_{j+2}\right) = 0, \quad y'\left(x_j\right) = y'\left(x_{j+2}\right),$$

и

$$y\left(x'_j\right) = y\left(x'_{j+2}\right), \quad y'\left(x'_j\right) = y'\left(x'_{j+2}\right) = 0,$$

Рассмотрим нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ задачи Коши для уравнения $y'' + p_0|y|^k \operatorname{sgn} y = 0$ с начальными условиями

$$y\left(x_j\right) = 0, \quad y'\left(x_j\right) = B,\ B \ne 0.$$

Обозначим $T = x_{j+2} - x_j$. Поскольку $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y'' + p_0|y|^k \operatorname{sgn} y = 0$, то $y''(x+T) + p_0|y(x+T)|^k \operatorname{sgn} y(x+T) = 0$, следовательно, $y(x+T)$ также является решением этого уравнения.

Так как в точке x_j имеем

$$y\left(x_j + T\right) = y\left(x_{j+2}\right) = 0, \quad y'\left(x_j\right) = y\left(x_j + T\right) = y'\left(x_{j+2}\right) = B,$$

то $y(x)$ и $y(x+T)$ — два решения одной и той же задачи Коши, и в силу теоремы существования и единственности, $y(x) \equiv y(x+T)$. Таким образом, решение $y(x)$ — периодическое.

Следствие доказано.

Используя методы работы [2], исследуем поведение нетривиальных максимально продолженных решений уравнения (1) вблизи обеих границ области определения.

Теорема 2. *Пусть $y(x)$ — нетривиальное решение уравнения (1), функция $p(x, y, y')$ непрерывна по совокупности переменных, равномерно по x липшицева по y, y' и удовлетворяет неравенствам (2), кроме того, равномерно по y, y' стремится к $p_+ > 0$ при $x \to +\infty$ и к $p_- > 0$ при $x \to -\infty$.*

Тогда $y(x)$ определено на всей числовой прямой, и при $j \to \pm\infty$ справедливы соотношения:

1) $\frac{y'(x_{j+1})}{y'(x_j)} \to -1$,

2) $\frac{y(x'_{j+1})}{y(x'_j)} \to -1$,

3) $\frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}} \to 1$.

Доказательство. Осуществляя предельный переход в оценках, приведенных в следствии 1, получаем справедливость первых двух утверждений теоремы. Тогда существует предел $|y'(x_j)|$ при $j \to +\infty$. Обозначим его через $Q = \lim\limits_{j\to+\infty} |y'(x_j)|$.

Последнее утверждение достаточно доказать при $j \to +\infty$. Случай $j \to -\infty$ исследуется аналогично.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} z'' = -(p_+ + \phi(x))|z|^k \operatorname{sgn} z, \\ z(0) = 0, \\ z'(0) = q, \end{cases}$$

где $\phi(x) \in C_0\,[0, +\infty)$ (то есть, $\phi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$), и такая, что $\phi(x) > -p_+$. По теореме существования и единственности решение рассматриваемой задачи Коши $z(q, \phi)$ существует и единственно, и в силу леммы 1 это решение — колеблющееся. Обозначим через $\xi_1(q, \phi)$ первый нуль решения справа от оси ординат, $\xi_2(q, \phi)$ — второй нуль решения справа от оси ординат. По теореме о неявной функции и теореме о непрерывной зависимости решения уравнения от начальных условий и правой части, функции $\xi_1(q, \phi)$ и $\xi_2(q, \phi)$ являются непрерывными.

Возьмем $z_j(x) = l_j\, y(x + x_j)$, $l_j = \pm 1$. Тогда $z_j(x)$ являются решениями уравнения

$$z_j'' = -(p_+ + \phi_j(x))|z_j|^k \operatorname{sgn} z_j,$$

где

$$\phi_j(x) = p(x + x_j,\, y(x + x_j),\, y'(x + x_j)) - p_+,$$

причем, $z_j(x)$ удовлетворяют условиям

$$z_j(0) = l_j\, y(x_j) = 0, \quad z_j'(0) = l_j\, y'(x_j) \neq 0.$$

Обозначим $z_j'(0) = q_j$. Заметим, что в силу условий теоремы $\phi_j(x) \to 0$ при $j \to +\infty$ в пространстве $C_0\,[0, +\infty)$.

Найдем положительные нули $z_j(x)$. Если $z_j(x) = 0$, то $y(x + x_j) = 0$, поэтому первый нуль справа от оси ординат удовлетворяет условию $x + x_j = x_{j+1}$. Обозначим его $\xi_1(q_j, \phi_j)$. Аналогично, второй нуль удовлетворяет условию $x + x_j = x_{j+2}$. Обозначим его $\xi_2(q_j, \phi_j)$. Тогда

$$x_{j+1} = x_j + \xi_1(q_j, \phi_j),$$

$$x_{j+2} = x_j + \xi_2(q_j, \phi_j).$$

Выберем $l_j = \operatorname{sgn} y'(x_j) \neq 0$, тогда

$$q_j = y'(x_j)\, \operatorname{sgn} y'(x_j) = |y'(x_j)| \to Q \text{ при } j \to +\infty,$$

поэтому, используя непрерывность функций $\xi_1(q, \phi)$ и $\xi_2(q, \phi)$, при $j \to +\infty$ получаем

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}} = \frac{\xi_1(q_j, \phi_j)}{\xi_2(q_j, \phi_j) - \xi_1(q_j, \phi_j)} \to \frac{\xi_1(Q, 0)}{\xi_2(Q, 0) - \xi_1(Q, 0)} = \frac{\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j}{\tilde{x}_{j+2} - \tilde{x}_{j+1}} = 1,$$

где $\tilde{x}_j$ — нули колеблющегося периодического решения уравнения

$$y'' + p_+ |y|^k \operatorname{sgn} y = 0,$$

то есть, при $\phi(x) \equiv 0$.

Таким образом, расстояние между соседними нулями решения $y(x)$ стабилизируется при $j \to \pm\infty$, и, значит, рассматриваемое решение уравнения (1) определено на всей числовой прямой.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

[2] *Асташова И.В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

[3] *Дулина К.М., Корчемкина Т.А.* О существовании решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // В сб. тр. миниконф. “Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения”. М.: МЭСИ, 2014. С. 18–27.

Осцилляционная теорема для многоточечной краевой задачи четвертого порядка

Кулаев Р.Ч.[1]

В работе устанавливаются необходимое и достаточное условия положительности функции Грина разрывной краевой задачи для уравнения четвертого порядка, описывающей малые деформации цепочки жестко сочлененных стержней с упругими опорами в местах сочленения и упруго защемленной на краях. В этих условиях определяется множество значений коэффициентов жесткости опор, при которых функция влияния положительна внутри своей области определения и вне которого у нее теряется свойство знакопостоянства. Показывается, что положительность функции Грина эквивалентна ее осцилляционности и не зависит от условий закрепления концов.

В статье рассматривается многоточечная разрывная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнение четвертого порядка, являющаяся моделью стержневой конструкции. Изучается вопрос об осцилляционности функции Грина.

Напомним, что непрерывная на квадрате $[a,b]\times[a,b]$ функция $G(x,s)$ называется *осцилляционным* ядром (или ядром Келлога) интегрального оператора

$$(Gu)(x) = \int\limits_a^b G(x,s)u(s)q(s)\,ds,$$

если при всех $k = 1, 2, \ldots$ выполнены условия

$$G(x,s) > 0, \quad a < x, s < b$$

$$G\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} > 0, \quad a < x_1 < \ldots < x_k < b.$$

$$G\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \begin{matrix} a < x_1 < \ldots < x_k < b; \\ a < s_1 < \ldots < s_k < b. \end{matrix}$$

Осцилляционные ядра примечательны тем, что интегральные операторы с такими ядрами обладают комплексом замечательных спектральных свойств, характерных для классической задачи Штурма–Лиувилля и называемых осцилляционными.

[1]Кулаев Руслан Черменович, kulaev@smath.ru, старший научный сотрудник Южного математического института ВНЦ РАН, доцент СОГУ.

Впервые осцилляционные ядра были исследованы Келлогом [20],[21], и далее теория таких ядер была развита в работах Ф.Р. Гантмахера и М.Г. Крейна [2], [11]. Изучению знакорегулярных и осцилляционных свойств функций Грина двухточечных краевых задач посвящены работы А.Ю. Левина и Г.Д. Степанова [12], [16]–[18], а также, работы С. Карлина и И. Шенберга [19], [22]. Вопросам, связанным с функцией Грина разрывных краевых задач для уравнений четвертого (и большего) порядка посвящен целый цикл работ Ю. В. Покорного, А. В. Боровских и К. П. Лазарева, в которых изучались вопросы о принадлежности функций Грина разрывных краевых задач к классам осцилляционных и знакорегулярных ядер [8]–[10], [13]–[15]. В частности, в [13], [14] установлена квазиосцилляционность функции Грина неклассической задачи Валле–Пуссена, а в работе [15] была доказана осцилляционность функции влияния краевой задачи, моделирующей малые деформации цепочки шарнирно сочлененных стержней. Достаточные условия знакорегулярности функции Грина разрывных краевых задач, обобщающие известный результат Калафати–Гантмахера–Крейна [12], формулируются в работе [7].

В центре внимания настоящей работы модель конструкции растянутой цепочки из жестко соединенных стержней, упруго подпертых в местах сочленения. Для рассматриваемой нами задачи достаточные условия знакорегулярности функции влияния, сформулированные в работе [7], не выполняются. Более того, если коэффициенты жесткости упругих опор достаточно велики, то функция влияния принимает как положительные, так и отрицательные значения.

В данной статье формулируются необходимое и достаточное условия положительности функции влияния, в которых определяется множество значений коэффициентов жесткости опор, при которых функция влияния положительна внутри своей области определения и вне которого у нее теряется свойство знакопостоянства. Указанное множество определяется системой алгебраических неравенств, что позволяет осуществлять эффективную компьютерную проверку знакопостоянства функции Грина. Доказывается, что положительность функции влияния эквивалентна ее осцилляционности. При этом показано, что осцилляционность функции не зависит от коэффициентов условий, задаваемых на границе.

1 Постановка задачи.

Пусть $\Gamma = (a,b) \setminus \{a_i\}_{i=1}^n$, где $a < a_1 < \ldots < a_n < b$. Для единообразия будем считать $a = a_0$, $b = a_{n+1}$. Через $C[\Gamma]$ обозначим пространство кусочно–непрерывных функций, допускающих разрывы только первого рода и только в точках a_i при $i = \overline{1,n}$, тогда для функции $u(x) \in C[\Gamma]$, под $u(a_i \pm 0)$ будем понимать соответствующие пределы. Через $C^k[\Gamma]$ обозначим пространство функций из $C[\Gamma]$, имеющих k производных, также принадлежащих $C[\Gamma]$.

На Γ рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (p(x)u'')'' - (q(x)u')' = f(x), \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

снабженное в точках a и b краевыми условиями

$$u(a) + \alpha(a)D^3u(a) = 0, \quad \beta(a)u''(a) - \vartheta(a)u'(a) = 0, \tag{2_a}$$

$$u(b) - \alpha(b)D^3u(b) = 0, \quad \beta(b)u''(b) + \vartheta(b)u'(b) = 0, \tag{2_b}$$

а в точках a_i $(i=\overline{1,n})$ – условиями согласования

$$\begin{gathered} u(a_i-0)-u(a_i+0)=0, \quad u'(a_i-0)-u'(a_i+0)=0, \\ (pu'')(a_i-0)-(pu'')(a_i+0)=0, \quad D^3u(a_i-0)-D^3u(a_i+0)-\delta_i u(a_i)=0. \end{gathered} \tag{3}$$

где через D^3u в (3) обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')'-q(x)u'$.

При исследовании задачи (1)–(3) мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- $p\in C^2[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x)>0$, $q\in C^1[\Gamma]$, $q\geqslant 0$ на Γ, $f\in C[\Gamma]$;
- $\alpha(\cdot)$, $\vartheta(\cdot)$, $\beta(\cdot)\geqslant 0$, $\vartheta(\cdot)+\beta(\cdot)\neq 0$;
- $\delta_i\geqslant 0$ для всех $i=\overline{1,n}$. Кроме того, для каждого $1\leqslant i\leqslant n$ мы допускаем равенство $\delta_i=+\infty$, подразумевая под этим предельный случай последнего из условий (3):

$$\lim_{\delta_i\to+\infty}\Big[\frac{D^3u(a_i-0)}{\delta_i}-\frac{D^3u(a_i+0)}{\delta_i}-u(a_i)\Big]=-u(a_i)=0.$$

Задача (1)–(3) описывает малые деформации цепочки жестко сочлененных стержней с упругими опорами (например, пружинами) в местах сочленения. При этом числа δ_i в условиях (3) задают коэффициенты упругости опор, а условия (2) охватывают все известные случаи закрепления концов стержней.

Как уже отмечалось выше, нас интересует вопрос о знакорегулярных свойствах функции Грина краевой задачи (1)–(3). Если во всех условиях (3) положить $\delta_i=+\infty$, то мы попадаем на случай изученной в работе [15] задачи, для которой функция Грина обладает осцилляционными свойствами после умножения на многочлен специального вида. Если же во всех условиях (3) $\delta_i=0$, то выполнено достаточное условие знакорегулярности соответствующей функции Грина [7], означающее ее оцилляционность. Поэтому для нас наиболее содержательным является случай когда $0<\delta_i<+\infty$ для всех i. Ниже будут даны необходимое и достаточное условия положительности и осцилляционности функции Грина.

2 Невырожденность и самосопряженность краевой задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима для любой правой части $f(x)\in C[\Gamma]$.*

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение однородной задачи (1)–(3). Умножим функцию $u(x)$ на $Lu(x)$ и проинтегрируем по Γ.

$$\int\limits_\Gamma Lu\cdot u\,dx=\int\limits_\Gamma (pu'')''u-(qu')'u\,dx.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{gathered} \int\limits_\Gamma Lu\cdot u\,dx=\big[uD^3u-pu''u'\big]_{x=a}^{x=b}+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\big[uD^3u-pu''u'\big]_{x=a_i+0}^{x=a_i-0}+\int\limits_\Gamma p(u'')^2+q(u')^2\,dx=0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Привлекая условия (2), (3), получим

$$0=\int\limits_{\Gamma} Lu\cdot u\,dx = u(b)D^3u(b)-u(a)D^3u(a)+p(a)u''(a)u'(a)-p(b)u''(b)u'(b)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} u(a_i)\big[D^3u(a_i-0)-D^3u(a_i+0)\big]+\int\limits_{\Gamma} p(u'')^2+q(u')^2\,dx=$$

$$=u(b)D^3u(b)-u(a)D^3u(a)+p(a)u''(a)u'(a)-p(b)u''(b)u'(b)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\delta_i[u(a_i)]^2+\int\limits_{\Gamma} p(u'')^2+q(u')^2\,dx.$$

В силу свойств коэффициентов уравнения (1) и условий (2), (3), все слагаемые справа неотрицательны, и, следовательно, равны нулю. Более того, из условия $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x)>0$ следует, что $u''\equiv 0$ на Γ, т. е. $u(x)$ – линейная функция на каждом интервале (a_i,a_{i+1}), $i=\overline{0,n}$, равная нулю в точках a и b. Тогда из условий (3) для первых производных следует, что функция $u(x)$ не может иметь в вершинах a_i, $i=\overline{1,n}$ нетривиальный экстремум, следовательно $u(x)\equiv 0$ на Γ. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Краевая задача (1)–(3) является самосопряженной.*

Доказательство. Пусть $u(x),w(x)$– две произвольные функции класса $C^4[\Gamma]$, удовлетворяющие условиям (2), (3). Умножим функцию $w(x)$ на $Lu(x)$ и проинтегрируем по Γ.

$$\int\limits_{\Gamma} Lu\cdot w\,dx=\int\limits_{\Gamma}(pu'')''w-(qu')'w\,dx.$$

Интегрируя по частям, и, привлекая условия (2), (3), имеем

$$\int\limits_{\Gamma} Lu\cdot w\,dx=\int\limits_{\Gamma} Lw\cdot u\,dx+w(b)D^3u(b)-w(a)D^3u(a)+$$

$$+p(a)u''(a)w'(a)-p(b)u''(b)w'(b)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i u(a_i)w(a_i)- \tag{2.2}$$

$$-\Big[u(b)D^3w(b)-u(a)D^3w(a)+p(a)w''(a)u'(a)-p(b)w''(b)u'(b)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i u(a_i)w(a_i)\Big].$$

Если в условиях (2) $\alpha(a)=0$ или $\vartheta(a)\beta(a)=0$, то соответствующие этой точке внеинтегральные слагаемые в (2.2) равны нулю. Если $\alpha(a)\neq 0$ или $\vartheta(a)\beta(a)\neq 0$, то, используя (2_a), получаем

$$u(a)D^3w(a)-w(a)D^3u(a)=-\alpha(a)D^3u(a)D^3w(a)+\alpha(a)D^3w(a)D^3u(a)=0,$$

$$p(a_i)u''(a)w'(a)-p(a)w''(a)u'(a)=p(a)\Big[\frac{w'(a)}{\beta(a)}\beta(a)u''(a)-w''(a)u'(a)\Big]=$$

$$=-\frac{p(a)u'(a)}{\beta(a)}[\vartheta(a)w'(a)-\beta(a)w''(a)]=0.$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для внеинтегральных слагаемых, соответствующих точке b. Следовательно, в любом случае получаем

$$\int_a^b Lu \cdot w\,dx = \int_a^b Lw \cdot u\,dx,$$

а значит, задача является самосопряженной. □

Замечание 1. 2.1 Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми если при некоторых $1 \leqslant i \leqslant n$ соответствующие коэффициенты $\delta_i = +\infty$.

3 Представление функции Грина

Из теоремы 1 сразу вытекает существование функции Грина краевой задачи (1)–(3). Более того, общие свойства функций Грина дифференциальных операторов разрывных краевых задач позволяют сформулировать следующие утверждения.

Лемма 1 ([5]). *Функция Грина задачи (1)–(3) обладает следующими свойствами:*

1) функция $G(x,s)$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников $[a_i,a_{i+1}] \times [a_j,a_{j+1}]$ $(i \neq j)$ и на каждом из треугольников, на которые диагональю $x = s$ разбиваются квадраты $[a_i,a_{i+1}] \times [a_i,a_{i+1}]$;

2) при каждом фиксированном $s \in \Gamma$, функция $G(x,s)$ по x удовлетворяет однородному уравнению (1) на $\Gamma \setminus \{s\}$;

3) при каждом фиксированном $s \in \Gamma$, функция $G(x,s)$ по x удовлетворяет условиям (2), (3);

4) функция $G(x,s)$ на диагонали $x = s \in \Gamma$ удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными $\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}$ и условию скачка третьей квазипроизводной по x

$$D^3G(s+0,s) - D^3G(s-0,s) = 1;$$

5) функция $G(x,s)$ условиями 1)—4) определяется однозначно.

Утверждения 2) и 3) леммы 1 описывают поведение функции Грина при каждом $s \in \Gamma$. Что касается свойств функции Грина задачи (1)-(3) при $s = a_i$, $i = \overline{0, n+1}$, то они даются в следующей лемме о предельных срезках. Напомним [5, Гл. 6], что предельными срезками функции Грина $G(x,s)$ мы называем ее пределы при $s \to a_i + 0$ или $s \to a_i - 0$, оставляя за ними обозначения $G(x, a_i \pm 0)$.

Лемма 2 ([5]). *Пусть $G(x,s)$ – функция Грина задачи (1)–(3). Тогда ее предельные срезки $G(x, a_i \pm 0)$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n$, удовлетворяют следующим условиям:*

1) они являются решениями однородного уравнения (1) на Γ;

2) они удовлетворяют краевым условиям (2), (3) в точках a_j, отличных от a_i;

3) $G(x, a_i - 0) \equiv G(x, a_i + 0)$ на Γ;

4) при $\delta_i < +\infty$ в точке a_i функция $G(x, a_i)$ удовлетворяет первым трем из условий (3), а также неоднородному условию

$$D^3G(a_i - 0, a_i) - D^3G(a_i + 0, a_i) - \delta_i G(a_i, a_i) = -1$$

5) при $\delta_i = +\infty$ предельная срезка $G(x, a_i)$ равна тождественно нулю.

Пусть $G_0(x,s)$ – функция Грина краевой задачи (1)–(3) в случае когда все коэффициенты δ_i в условиях (3) равны нулю. Не сложно проверить, что при $\delta_i = 0$, $i=\overline{1,n}$, выполнены достаточные условия знакорегулярности ядра $G_0(x,s)$, сформулированные в работе [7]. Поэтому справедливо следующее утверждение

Лемма 3. *Для любых наборов $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$ и $a < s_1 < s_2 < \ldots < s_k < b$ ассоциированные ядра*

$$G_0\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \end{array}\right) = det\|G_0(x_i,s_j)\|_{j,m=1}^k.$$

функции $G_0(x,s)$ неотрицательны, а в случае равенств $x_i = s_i$, $i=\overline{1,k}$ положительны.

Наша ближайшая цель – найти представление функции Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3), для случая когда все числа $\delta_i < +\infty$, через ассоциированные ядра функции $G_0(x,s)$. Для этого будем искать выражение для функции $G(x,s)$ в виде

$$G(x,s) = G_0(x,s) - \sum_{i=1}^n G_0(x,a_i)\psi_i(s), \tag{3.1}$$

где $\psi_i(s)$ –некоторые функции.

Очевидно, что правая часть (3.1) удовлетворяет условиям 1), 2) и 4) леммы 1. Подберем функции $\psi_i(s)$ так, чтоб $G(x,s)$ удовлетворяла и условию 3). Тогда из свойства 5) той же леммы будет следовать, что формула (3.1) действительно дает представление функции Грина краевой задачи (1)–(3).

Условия (2) для функции $G(\cdot,s)$ при $s\in\Gamma$ выполнены в силу свойств функции $G_0(x,s)$. Условия непрерывности для $u(x)$, $u'(x)$ и $(pu'')(x)$ в точках a_i выполнены по той же причине. Поэтому остается добиться выполнения условий с третьими квазипроизводными из (3). Подставляя правую часть (3.1) в эти условия, получим

$$D^3G_0(a_j-0,s) - D^3G_0(a_j+0,s) - \delta_j G_0(a_j,s) -$$
$$-\sum_{i=1}^n \big(D^3G_0(a_j-0,a_i) - D^3G_0(a_j+0,a_i) - \delta_j G_0(a_j,a_i)\big)\psi_i(s) = 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Используя свойства предельных срезок функции $G_0(x,s)$ (лемма 2), получим

$$\sum_{i=1}^n \big(\delta_j G_0(a_j,a_i) + \delta_{ij}\big)\psi_i(s) = \delta_j G_0(a_j,s), \quad j=\overline{1,n}, \tag{3.2}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Покажем, что система (3.2) однозначно разрешима относительно $\psi_i(s)$. Для этого рассмотрим определитель этой системы из коэффициентов при $\psi_i(s)$:

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccc} \delta_1 G_0(a_1,a_1)+1 & \delta_1 G_0(a_1,a_2) & \ldots & \delta_1 G_0(a_1,a_n) \\ \delta_2 G_0(a_2,a_1) & \delta_2 G_0(a_2,a_2)+1 & \ldots & \delta_2 G_0(a_2,a_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_n G_0(a_n,a_1) & \delta_n G_0(a_n,a_2) & \ldots & \delta_n G_0(a_n,a_n)+1 \end{array}\right|.$$

Используя известный результат из теории определителей (см., например, [3]), имеет место представление:

$$\Delta = 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\left(\begin{array}{cccc} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} \end{array}\right). \tag{3.3}$$

Из леммы 3 следует, что все ассоциированные ядра функции $G_0(x,s)$, входящие в (3.3), положительны, а, значит, $\Delta > 0$ и система (3.2) однозначно разрешима.

Обозначим через Δ_j^s определитель, получаемый из Δ заменой j – того столбца на столбец

$$\begin{pmatrix} \delta_1 G_0(a_1,s) \\ \dots \\ \delta_j G_0(a_j,s)+1 \\ \dots \\ \delta_n G_0(a_n,s) \end{pmatrix},$$

а через M_{jj} – минор определителя Δ, получаемый вычеркиванием из него j –той строки и j –того столбца. Тогда, с учетом (3.3), функции $\psi_j(s)$ могут быть вычислены по формулам

$$\psi_j(s) = \frac{\Delta_j^s - M_{jj}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\Bigg[1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}_j^s -$$

$$-1 - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n \\ j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Bigg[\sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}_j^s -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n \\ j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}\Bigg], \tag{3.4}$$

где

$$G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}_j^s = G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix},$$

если ни один из номеров $i_1,\ldots,i_k$ не равен j, и

$$G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}_j^s = G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_{m-1}} & a_j & a_{i_{m+1}} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_{m-1}} & s & a_{i_{m+1}} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

если $i_m = j$ при $1 \leqslant m \leqslant k$.

Подставляя (3.4) в правую часть (3.1) и, используя (3.3), получим

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta}\Bigg[G_0(x,s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix} G_0(x,s) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix}_j^s G_0(x,a_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n \\ j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k}\end{pmatrix} G_0(x,a_j)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Bigg[G_0(x,s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k}\end{pmatrix} G_0(x,s) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n \\ j\in\{i_1,\ldots,i_k\}}} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k}\end{pmatrix}_j^s G_0(x,a_j)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Bigg[G_0(x,s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} \Bigg(G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k}\end{pmatrix} G_0(x,s) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k}\end{pmatrix}_{i_j}^s G_0(x,a_j)\Bigg)\Bigg].$$

Меняя в ассоциированных ядрах, стоящих под знаком суммы по j, столбцы местами, с учетом (3.5), окончательно получим

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta}\Bigg[G_0(x,s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n \\ j\in\{i_1,\ldots,i_k\}}} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} \Bigg(G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k}\end{pmatrix} G_0(x,s) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} G_0(x,a_{i_j}) G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{j-1}} & a_{i_j} & \ldots & a_{i_{k-1}} & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{j-1}} & a_{i_{j+1}} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}\Bigg)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Bigg[G_0(x,s) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}\Bigg]. \tag{3.6}$$

4 Представление ассоциированных ядер функции Грина

Наша дальнейшая цель изучить знаковые свойства ассоциированных ядер функции Грина задачи (1)–(3). И для начала мы выведем формулы, выражающие ассоциированные ядра функции Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) через ассоциированные ядра функций Грина "упрощенных"задач.

Пусть, по–прежнему, $G_0(x,s)$ – функция Грина краевой задачи (1)–(3) в случае когда все коэффициенты δ_j в условиях (3) равны нулю. Через $G_i(x,s)$ обозначим функцию Грина задачи (1)–(3) для случая когда в условиях (3) все коэффициенты δ_j, кроме некоторого фиксированного δ_i, равны нулю. Аналогично, через $G_{i_1\ldots i_k}(x,s)$, $1\leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, будем обозначать функцию Грина задачи (1)–(3) для случая когда в условиях (3) коэффициенты $\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_k}$ отличны от нуля, а все остальные равны нулю. В частности, при $k=n$ получим, что функция $G_{1\ldots n}(x,s)$ совпадает с функцией Грина $G(x,s)$ исходной задачи.

Теорема 3. *Для ассоциированных ядер функции Грина $G_i(x,s)$ задачи (1)–(3) имеет место представление*

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i}\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \ldots & x_k \\ a_i & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}\right], \tag{4.1}$$

где $\Delta_i = 1+\delta_i G_0(a_i,a_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$, $k=1,2,3,\ldots$

Доказательство. При $k = 1$ утверждение теоремы следует из (3.6). Доказательство теоремы для $k \geqslant 2$ будем вести индукцией по k. Пусть $k = 2$. Из формулы (3.6) следует

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{\Delta_i^2}.$$

Раскладывая определитель, получаем

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i^2}\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix}\right]\left[G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix}\right] -$$
$$-\frac{1}{\Delta_i^2}\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix}\right]\left[G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix}\right].$$

Умножим обе части равенства на Δ_i^2 и раскроем скобки.

$$\Delta_i^2 \cdot G_i\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} - G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} +$$
$$+\delta_i G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} - \delta_i G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} +$$
$$+\delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} - \delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} +$$
$$+\delta_i^2\left[G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} - G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix}\right].$$

Сворачивая первые два слагаемых, и раскрывая третье и четвертое, получим

$$G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} +$$
$$+\delta_i\left[G_0\begin{pmatrix} a_i \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ a_i \end{pmatrix} + G_0\begin{pmatrix} a_i \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ a_i \end{pmatrix}\right] +$$
$$+\delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} - \delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} +$$
$$+\delta_i^2\left[G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} - G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_2 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix}\right].$$

Во второй строке выносим общий множитель и сворачиваем, а к четвертой строке применяем детерминантное тождество Сильвестра

$$G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}\left[1 + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix}\right] - \delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ a_i \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ s_2 & a_i \end{pmatrix} +$$
$$+\delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} - \delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} +$$
$$+\delta_i^2 G_0\begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & x_2 \\ a_i & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}\Delta_i + \delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ a_i \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix}$$

$$+\delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_2 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_1 \end{pmatrix} - \delta_i G_0\begin{pmatrix} x_2 \\ s_1 \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_2 \end{pmatrix} +$$

$$+\delta_i^2 G_0\begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & x_2 \\ a_i & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}\Delta_i + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & x_2 \\ a_i & s_1 & s_2 \end{pmatrix}\Delta_i.$$

Деля на Δ_i^2, окончательно получаем

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i}\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & x_2 \\ a_i & s_1 & s_2 \end{pmatrix}\right].$$

Предположим, что формула (4.1) верна для $k-1$ и рассмотрим ассоциированное ядро k–го порядка.

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = det\left\|\frac{1}{\Delta_i}\left(G_0\begin{pmatrix} x_m \\ s_j \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x_m \\ a_i & s_j \end{pmatrix}\right)\right\|_{m,j=1}^{k}.$$

Для упрощения записи через $G_0\begin{pmatrix} x\setminus x_m \\ s\setminus s_j \end{pmatrix}$ будем обозначать ассоциированное ядро, считаемое на наборах, получаемых из $x_1,\dots,x_k$ и $s_1,\dots,s_k$, вычеркиванием элементов x_m и s_j соответственно. Разложим определитель $G_i\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}$ по элементам первой строки и воспользуемся предположением индукции:

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i}G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} G\begin{pmatrix} x\setminus x_1 \\ s\setminus s_j \end{pmatrix} +$$

$$+\delta_i\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i}G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ a_1 & s_j \end{pmatrix} G\begin{pmatrix} x\setminus x_1 \\ s\setminus s_j \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix}\left[G_0\begin{pmatrix} x\setminus x_1 \\ s\setminus s_j \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x\setminus x_1 \\ a_i & s\setminus s_j \end{pmatrix}\right] +$$

$$+\delta_i\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_j \end{pmatrix}\left[G_0\begin{pmatrix} x\setminus x_1 \\ s\setminus s_j \end{pmatrix} + \delta_i G_0\begin{pmatrix} a_i & x\setminus x_1 \\ a_i & s\setminus s_j \end{pmatrix}\right].$$

Разделим каждую сумму на две. Тогда первую из получаемых четырех сумм можно свернуть, а во второй сумме каждое слагаемое разложить по первой строке и выделить первые слагаемые в отдельную сумму.

$$\frac{1}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \delta_i G_0(a_1,a_1)\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x\setminus x_1 \\ s\setminus s_j \end{pmatrix} +$$

$$+\delta_i\sum_{j=1}^{k}G_0\begin{pmatrix} x_1 \\ s_j \end{pmatrix}\sum_{m\neq j}\frac{(-1)^{j+m}}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i \\ s_m \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} & x\setminus x_1 \\ a_i & s\setminus s_j, s_m \end{pmatrix} +$$

$$+\delta_i\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} x\setminus x_1 \\ s\setminus s_j \end{pmatrix} +$$

$$+\delta_i^2\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 \\ a_i & s_j \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_i & x\setminus x_1 \\ a_i & s\setminus s_j \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} x_1\\ s_j\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} x\setminus x_1\\ s\setminus s_j\end{pmatrix}=G_0\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k\\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k}G_0\begin{pmatrix} x_1\\ s_j\end{pmatrix}\sum_{m\neq j}(-1)^{j+m}G_0\begin{pmatrix} a_i\\ s_m\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} & x\setminus x_1\\ a_i & s\setminus s_j, s_m\end{pmatrix}+$$
$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1\\ a_i & s_j\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} x\setminus x_1\\ s\setminus s_j\end{pmatrix}=G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \ldots & x_k\\ a_i & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix},$$

имеем далее

$$\frac{1}{\Delta_i}G_0\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k\\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}+\frac{\delta_i}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \ldots & x_k\\ a_i & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i\\ a_i\end{pmatrix}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}G_0\begin{pmatrix} x_1\\ s_j\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} a_i & x\setminus x_1\\ a_i & s\setminus s_j\end{pmatrix}-$$
$$-\frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}G_0\begin{pmatrix} x_1\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} a_i\\ s_j\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} a_i & x\setminus x_1\\ a_i & s\setminus s_j\end{pmatrix}.$$

Сворачивая последнюю сумму, приходим к равенству:

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k\\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_i}G_0\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k\\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}+\frac{\delta_i}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \ldots & x_k\\ a_i & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} a_i\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \ldots & x_k\\ a_i & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}+\frac{\delta_i^2}{\Delta_i^2}G_0\begin{pmatrix} x_1\\ a_i\end{pmatrix}G_0\begin{pmatrix} a_i & a_i & x_2 & \ldots & x_k\\ a_i & s_1 & s_2 & \ldots & s_k\end{pmatrix}.$$

Здесь последнее слагаемое равно нулю, поэтому окончательно получаем

$$G_i\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k\\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_i}G_0\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k\\ s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}+\frac{\delta_i}{\Delta_i}G_0\begin{pmatrix} a_i & x_1 & \ldots & x_k\\ a_i & s_1 & \ldots & s_k\end{pmatrix}.$$

Теорема доказана. □

Далее мы установим формулу, выражающую функцию Грина $G(x,s)$ через функции Грина $G_{i_1\ldots i_k}(x,s)$, $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$ "упрощенных"задач.

Рассмотрим функцию $G_j(x,s)$. Из формулы (4.1) следует, что

$$G_j\begin{pmatrix} x\\ s\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_j}G_0\begin{pmatrix} x\\ s\end{pmatrix}+\frac{\delta_j}{\Delta_j}G_0\begin{pmatrix} a_j & x\\ a_j & s\end{pmatrix},$$
$$G_j\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} & x\\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_j}G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} & x\\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}+\frac{\delta_j}{\Delta_j}G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} & a_j & x\\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_k} & a_j & s\end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $\Delta_j=1+\delta_j G_0(a_j,a_j)$.

Рассмотрим функцию Грина $G(x,s)$ исходной задачи и воспользуемся ее представлением (3.6) через функцию $G_0(x,s)$.

$$G(x,s)=\frac{1}{\Delta}\left[G_0(x,s)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k}G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & x\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}\right].$$

Раскроем сумму по k. Тогда, умножая правую часть последнего равенства на Δ, а затем, перегруппировывая слагаемые, получим

$$G_0\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} + \sum_{1\leqslant i_1\leqslant n} \delta_{i_1} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & x \\ a_{i_1} & s \end{pmatrix} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & s \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+ \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{n-1}\leqslant n} \delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-1}} G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-1}} & x \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-1}} & s \end{pmatrix} + \delta_1\ldots\delta_n G_0\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n & x \\ a_1 & \ldots & a_n & s \end{pmatrix} =$$

$$= \left[G_0\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} + \delta_1 G_0\begin{pmatrix} a_1 & x \\ a_1 & s \end{pmatrix}\right] + \sum_{2\leqslant i_1\leqslant n} \delta_{i_1}\left[G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & x \\ a_{i_1} & s \end{pmatrix} + \delta_1 G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_1 & x \\ a_{i_1} & a_1 & s \end{pmatrix}\right] +$$

$$+ \sum_{2\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\left[G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & s \end{pmatrix} + \delta_1 G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & a_1 & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & a_1 & s \end{pmatrix}\right] + \ldots$$

$$\sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_{n-2}\leqslant n} \delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-2}}\left[G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-2}} & x \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-2}} & s \end{pmatrix} + \delta_1 G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-2}} & a_1 & x \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-2}} & a_1 & s \end{pmatrix}\right] +$$

$$+\delta_2\ldots\delta_n\left[G_0\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_n & x \\ a_2 & \ldots & a_n & s \end{pmatrix} + \delta_1 G_0\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_n & a_1 & x \\ a_2 & \ldots & a_n & a_1 & s \end{pmatrix}\right].$$

Используя (4.2), окончательно получаем

$$G(x,s) = \frac{\Delta_1}{\Delta}\left[G_1\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} + \sum_{2\leqslant i_1\leqslant n} \delta_{i_1} G_1\begin{pmatrix} a_{i_1} & x \\ a_{i_1} & s \end{pmatrix} + \right.$$

$$+ \sum_{2\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2} G_1\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & s \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$\left.\sum_{2\leqslant i_1<\ldots<i_{n-2}\leqslant n} \delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-2}} G_1\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-2}} & x \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-2}} & s \end{pmatrix} + \delta_2\ldots\delta_n G_1\begin{pmatrix} a_2 & \ldots & a_n & x \\ a_2 & \ldots & a_n & s \end{pmatrix}\right].$$

С помощью аналогичных выкладок, но уже с функцией $G_1(x,s)$, получим

$$G(x,s) = \frac{\Delta_1\Delta_{12}}{\Delta}\left[G_{12}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} + \sum_{3\leqslant i_1\leqslant n} \delta_{i_1} G_{12}\begin{pmatrix} a_{i_1} & x \\ a_{i_1} & s \end{pmatrix} + \right.$$

$$+ \sum_{3\leqslant i_1<i_2\leqslant n} \delta_{i_1}\delta_{i_2} G_{12}\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & s \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$\left.\sum_{3\leqslant i_1<\ldots<i_{n-3}\leqslant n} \delta_{i_1}\ldots\delta_{i_{n-3}} G_{12}\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-3}} & x \\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{n-3}} & s \end{pmatrix} + \delta_3\ldots\delta_n G_{12}\begin{pmatrix} a_3 & \ldots & a_n & x \\ a_3 & \ldots & a_n & s \end{pmatrix}\right],$$

где $\Delta_{12} = 1 + \delta_2 G_1(a_2, a_2)$. Продолжая рассуждения, в итоге получим формулу

$$G(x,s) = \frac{\Delta_1\Delta_{12}\Delta_{23}\ldots\Delta_{n-2,n-1}}{\Delta}\left[G_{1\ldots n-1}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} + \delta_n G_{1\ldots n-1}\begin{pmatrix} a_{i_n} & x \\ a_{i_n} & s \end{pmatrix}\right], \tag{4.3}$$

в которой $\Delta_{j,j+1} = 1 + \delta_{j+1} G_{1\ldots j}(a_{j+1}, a_{j+1})$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$.

Теорема 4. *Для любого набора индексов $1 \leqslant j_1 \dots j_m \leqslant n$, $m < n$, имеет место формула*

$$G(x,s) = C\left[G_{j_1\dots j_m}(x,s) + \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n \\ i_l \notin \{j_1,\dots,j_m\}}} \delta_{i_1}\delta_{i_2}\dots\delta_{i_k} G_{j_1\dots j_m}\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & s \end{pmatrix}\right], \tag{4.4}$$

где C –положительная константа.

Формула (4.4) позволяет факторизовать формулу (3.6). Сначала, при помощи функции $G_0(x,s)$ мы можем построить, например, функцию $G_1(x,s)$ (или любую из функций $G_j(x,s)$, $1 \leqslant j \leqslant n$). Затем, с помощью уже построенной функции $G_1(x,s)$, строим функцию $G_{12}(x,s)$ (или любую из функций $G_{1j}(x,s)$, $1 \leqslant j \leqslant n$) и так далее. На последнем шаге мы окончательно применяем формулу (4.3). Это, в свою очередь, вместе с формулой (4.1) позволяет факторизовать формулу для ассоциированных ядер функции $G(x,s)$:

$$\begin{gathered} G_{j_1\dots j_m}\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = C_m\left[G_{j_1\dots j_{m-1}}\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \right. \\ \left. +\delta_{j_m} G_{j_1\dots j_{m-1}}\begin{pmatrix} a_{j_m} & x_1 & \dots & x_k \\ a_{j_m} & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}\right], \end{gathered} \tag{4.5}$$

в которой C_m – положительная константа.

5 Свойства функции Грина

Как следствие теорем 1 и 2 получается следующая

Теорема 5. *Функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) существует и удовлетворяет на $[a,b] \times [a,b]$ свойству симметричности $G(x,s) = G(s,x)$.*

Используя представление (3.6) и лемму 3 можно доказать следующее утверждение

Теорема 6. *Пусть $0 < \delta_i < +\infty$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) положительна на полузамкнутых диагональных квадратах $(a,a_1]\times(a,a_1]$, $[a_n,b) \times [a_n,b)$ и на всех замкнутых диагональных квадратах $[a_i,a_{i+1}] \times [a_i,a_{i+1}]$, $i = \overline{1,n-1}$.*

Доказательство. Из знакорегулярности ядра $G_0(x,s)$ следует его строгая положительность на $(a,b) \times (a,b)$, а из леммы 3 следует неотрицательность всех ассоциированных ядер в представлениях (3.3) и (3.6). Действительно, рассматривая ядро

$$G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & s \end{pmatrix},$$

при некотором m, $1 \leqslant m \leqslant k$ будем иметь $a_{i_m} \leqslant x, s \leqslant a_{i_{m+1}}$. Тогда

$$G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & s \end{pmatrix} = G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_m} & x & a_{i_{m+1}} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_m} & s & a_{i_{m+1}} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix},$$

так как определитель справа получается $k-m+1$ – кратной перестановкой местами строк и $k-m+1$ – кратной перестановкой столбцов определителя, стоящего слева.

Если x или s совпадают с одной из точек a_{i_m}, $a_{i_{m+1}}$, то рассматриваемое ассоциированное ядро равно нулю. Если же $x, s \in (a_{i_m}, a_{i_{m+1}})$, то это ядро положительно на основании леммы 3 результата из монографии [2], согласно которому, для положительности определителя $G_0 \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \\ s_1 & \ldots & s_k \end{pmatrix}$, необходимо и достаточно, что бы одновременно выполнялись неравентва $x_i < s_{i+2}$ и $s_i < x_{i+2}$ для всех $i = \overline{1, k-2}$.

Теперь справедливость утверждения теоремы очевидным образом следует из (3.3) и (3.6). $\square$

Следствие 1. *Пусть $0 < \delta_1 < +\infty$ и $\delta_i = 0$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n$. Тогда функция Грина $G_1(x,s)$ задачи (1)–(3) положительна на полузамкнутых диагональных квадратах $(a, a_1] \times (a, a_1]$, $[a_1, b) \times [a_1, b)$.*

Лемма 4. *Пусть $G(x,s)$ – функция Грина задачи (1)–(3). Если $\delta_i < +\infty$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то для любого $s \in (a,b)$ срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ не имеет на (a,b) кратных нулей.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x_0 \in (a, b]$ – кратный нуль функции $g_s(x)$. Из теоремы 6 следует $x_0 \neq s$. Пусть, для определенности, $x_0 < s$ и $a_i \leqslant x_0 \leqslant a_{i+1}$ при некотором i. Тогда на отрезке $[a, x_0]$ функция $g_s(x)$ является решением однородного уравнения (1), удовлетворяет условиям (2_a) и условиям (3) в точках a_j, $j = \overline{1, i}$, а в точке x_0 – условиям $g_s(x_0) = g_s'(x_0) = 0$. Согласно теореме 1, такая задача невырождена, поэтому $g_s(x) \equiv 0$ на $[a, x_0]$. Тогда из теоремы единственности Коши сначала легко следует тождество $g_s(x) \equiv 0$ на $[a, a_{i+1}]$, а затем из той же теоремы Коши и условий (3) уже легко получить тождество $g_s(x) \equiv 0$ на $[a_{i+1}, s]$, что противоречит утверждению теоремы 6. $\square$

Почти дословно повторяя доказательство леммы 4, легко получить следующее утверждение.

Следствие 2. *Если при некоторых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ в условиях (3) соответствующие коэффициенты $\delta_{i_j} = +\infty$ $(j = \overline{1, k})$, то для каждого $s \in (a,b) \setminus \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ не имеет на (a,b) кратных нулей.*

Таким образом, если при некотором $1 \leqslant i \leqslant n$ в условии (3) соответствующий коэффициент $\delta_i = +\infty$, то для каждого $s \in \Gamma$ срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ меняет знак при переходе через точку a_i.

Из результатов предыдущего параграфа следует, что задачу (1)-(3) с n точками a_i можно факторизовать и свести к n последовательным задачам типа (1)–(3) у которых все коэффициенты δ_i кроме одного равны нулю. Это позволяет связать свойства функции Грина $G(x,s)$ общей задачи (1)–(3) со свойствами функций Грина $G_i(x,s)$ "упрощенных"задач. Поэтому сначала мы установим условия положительности функции $G_1(x,s)$. В наших дальнейших рассуждениях нам понадобятся некоторые свойства решений однородного дифференциального уравнения вида (1) с непрерывными на отрезке $[\xi, \eta]$ коэффициентами. Прежде чем сформулировать эти свойства, введем обозначения.

Интервал (ξ, η) называется *промежутком знакопостоянства* функции, если на этом интервале функция сохраняет знак и не тождественна нулю.

Говорят, что функция $u(x) \in C[\xi, \eta]$, имеющая конечное число нулей, имеет k перемен знака и пишут $S(u) = k$, если $[\xi, \eta]$ может быть разбит на $k+1$ промежуток знакопостоянства функции так, что на соседних промежутках $u(x)$ имеет разный знак. Для $u(x) \equiv 0$ обычно считается $S(u) = -1$.

Через $S(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будем обозначать число перемен знака в наборе ненулевых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Пусть $u \in C[\xi, \eta]$ и имеет конечное число нулей на $[\xi, \eta]$. Через $\sigma u(x \pm 0)$ обозначим знак $u(x)$ справа (слева) от точки x.

Пусть $u_i(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (1) такая, что $u_i(\xi) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, 4}$, а $W_i(x)$ – вронскианы системы $u_i(x)$. Положим $1 = W_0(x)$ и представим дифференциальный оператор вида (1) на $[\xi, \eta]$ в факторизованном виде Фробениуса–Пойа [[23]]:

$$Lu \equiv \frac{W_4(x)}{W_3(x)} \frac{d}{dx} \frac{W_3^2(x)}{W_2(x)W_4(x)} \frac{d}{dx} \frac{W_2^2(x)}{W_1(x)W_3(x)} \frac{d}{dx} \frac{W_1^2(x)}{W_0(x)W_2(x)} \frac{d}{dx} \frac{u}{W_1(x)}.$$

Возможность такой факторизации, обосновывается неосцилляцией дифференциального оператора L и известным результатом Пойа [6, 23].

Введем обозначения

$$D^0 u = \frac{u}{W_1(x)}, \quad D^1 u = \frac{W_1^2(x)}{W_0(x)W_2(x)} \frac{d}{dx} \frac{u}{W_1(x)},$$

$$D^2 u = \frac{W_2^2(x)}{W_1(x)W_3(x)} \frac{d}{dx} \frac{W_1^2(x)}{W_0(x)W_2(x)} \frac{d}{dx} \frac{u}{W_1(x)}, \quad k = 1, 4.$$

Тогда, учитывая определение функций $u_i(x)$, все вронскианы $W_i(x)$ равны в точке ξ единице и

$$D^0 u(\xi) = u(\xi), \quad D^1 u(\xi) = u'(\xi), \quad D^2 u(\xi) = u''(\xi).$$

Последние равенства позволяют применить к уравнению (1) на отрезке $[\xi, \eta]$ результат работы [7], который мы сформулируем в следующем виде:

Лемма 5 ([7]). *Пусть $u(x)$ – решение однородного уравнения (1) на $[\xi, \eta]$ удовлетворяющее условию $S(\sigma u(\xi + 0), -\sigma u'(\xi + 0), \sigma u''(\xi + 0), -\sigma D^3 u(\xi + 0)) \geqslant 2$. Тогда $S(u) \leqslant 1$.*

Теорема 7. *Для того, чтобы функция Грина $G_1(x, s)$ задачи (1)–(3) была положительна на $(a, b) \times (a, b)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sigma G_1(b - 0, a + 0) > 0.$$

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\sigma G_1(b - 0, a + 0) > 0$. Покажем сначала, что в этом случае $\sigma G_1(x, a + 0) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Из следствия 1 следует, что $G_1(x, s) > 0$ при любых $x, s \in (a, a_1]$, а из условий теоремы следует, что если $\sigma G(x_0, a + 0) < 0$ при некотором $x_0 \in (a_1, b)$, то при s достаточно близких к a срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ имеет на отрезке (a_1, b) два различных нуля, т.е. $S(g_{a+0}) > 1$. Но из неравенства $\sigma G_1(b - 0, a + 0) > 0$ и из условий (2_b) следует соотношение $S(\sigma g_{a+0}(b + 0), -\sigma g'_{a+0}(b + 0), \sigma g''_{a+0}(b + 0), -\sigma D^3 g_{a+0}(b + 0)) \geqslant 2$, дающее, согласно лемме 5, $S(g_{a+0}) > 1$. Полученное противоречие показывает, что $\sigma G_1(x, a + 0) > 0$ при всех $x \in (a, b)$.

Теперь из симметричности функции $G_1(x, s)$ следует, что $\sigma G_1(a + 0, s) > 0$ при всех $s \in (a, b)$, а из следствия 1 следует $\sigma G_1(s - 0, s) > 0$ при тех же s.

Предположим теперь, что теорема не верна. Тогда из леммы 4 следует существование точки $(x_0, s_0) \in (a, b) \times (a, b)$ в которой функция $G_1(x, s)$ принимает отрицательное значение. В силу симметричности функции Грина и следствия 1, мы можем считать, что $a_1 < x_0 < s_0 < b$ и $G(x_0, s_0) = G(s_0, x_0) < 0$. Из непрерывности функции Грина на треугольнике $a < x < s < b$ и неравенств $\sigma G_1(a + 0, s) > 0$, $\sigma G_1(s - 0, s) > 0$ при $s \in (a, b)$ следует существование точки (ξ, η) из треугольника $a < x < s < b$ такой, что $G(\xi, \eta) = \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta) = 0$, что противоречит утверждению леммы 4. $\square$

Теорема 8. *Функция Грина $G_1(x,s)$ задачи (1)–(3) положительна на $(a,b)\times(a,b)$ тогда и только тогда, когда $\delta_1\in\Sigma_1=[0,\delta]$, где*

$$\delta^{-1}=\lim_{(x,s)\to(b-0,a+0)}\frac{G_0\begin{pmatrix}a_1 & x\\ s & a_1\end{pmatrix}}{G_0(x,s)}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Из формулы (4.1) при $k=1$ и положительности функции $G_0(x,s)$ на $(a,b)\times(a,b)$ следует, что функция Грина $G_1(x,s)$ задачи (1)–(3) положительна на $(a,b)\times(a,b)$ тогда и только тогда, когда для всех $(x,s)\in(a,b)\times(a,b)$ достаточно близких к точке (b,a) выполнено неравенство $\frac{G(x,s)}{G_0(x,s)}>0$. Используя представление (4.1) для функции $G_1(x,s)$, перейдем к пределу при $(x,s)\to(b-0,a+0)$. Тогда, предполагая существование предела в (4.1), получим неравенство, задающее множество Σ_1:

$$1-\delta_1\lim_{\substack{x\to b-0\\ s\to a+0}}\frac{G_0\begin{pmatrix}a_1 & x\\ s & a_1\end{pmatrix}}{G_0(x,s)}\geqslant 0.$$

Покажем, что предел в (5.1) существует и конечен. Для этого воспользуемся результатом работы [13](см. также [14]), согласно которому при $\tau\to+0$ и $\sigma\to+0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}G(x,a+\tau)&=\varphi_a(x)\frac{\tau^{\theta_a}}{\theta_a!}+o(\tau^{\theta_a}),\quad x\in(a+\tau,b),\\ G(x,b-\sigma)&=\varphi_b(x)\frac{\sigma^{\theta_b}}{\theta_b!}+o(\sigma^{\theta_b}),\quad s\in(a,b-\sigma),\\ G(b-\sigma,a+\tau)&=\varphi_b^{(\theta_a)}(a)\frac{\tau^{\theta_a}\sigma^{\theta_b}}{\theta_a!\theta_b!}+o(\sigma^{\theta_b}\tau^{\theta_a}).\end{aligned} \tag{5.2}$$

В формулах (5.2) считаем, что

$$\theta_{(\cdot)}=\begin{cases}0, & \alpha(\cdot)\neq 0;\\ 1, & \alpha(\cdot)=0,\ \beta(\cdot)\neq 0;\\ 2, & \alpha(\cdot)=\beta(\cdot)=0;\end{cases}$$

а функции $\varphi_a(x)$ и $\varphi_b(x)$ выбираются в зависимости от значений θ_a и θ_b из фундаментальной системы решений $v_j(x)$, $j=\overline{1,4}$, уравнения (1) на интервале (a,b), удовлетворяющей условиям $l_i(v_j)=\delta_{ij}$, где $l_i(\cdot)$ –функционалы определяющие граничные условия (2).

Имеем

$$\lim_{\substack{x\to b-0\\ s\to a+0}}\frac{G_0\begin{pmatrix}a_1 & x\\ s & a_1\end{pmatrix}}{G_0(x,s)}=\lim_{\substack{x_1\to b-0\\ s_1\to a+0}}\frac{G_0(a_1,s)G_0(x,a_1)}{G_0(x,s)}-G_0(a_1,a_1).$$

Согласно (5.2)

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\tau\to+0\\ \sigma\to+0}}&\frac{G_0(a_1,a+\sigma)G_0(b-\tau,a_1)}{G_0(b-\tau,a+\sigma)}-G_0(a_1,a_1)=\\ &=\lim_{\substack{\tau\to+0\\ \sigma\to+0}}\frac{\varphi_a(a_1)\sigma^{\theta_a}\varphi_b(a_1)\tau^{\theta_b}}{\theta_a!\varphi_b(s)\tau^{\theta_b}}-G_0(a_1,a_1).\end{aligned}$$

Раскладывая $\varphi_b(s)$ по формуле Тейлора окончательно получим

$$\delta^{-1} = \frac{\varphi_a(a_1)\varphi_b(a_1)}{\varphi_b^{(\theta_a)}(a)} - G_0(a_1, a_1) =: \mathfrak{d}(a_1).$$

При этом $\varphi_b^{(\theta_a)}(a) \neq 0$, так как в противном случае функция $\varphi_b(x)$ окажется решением невырожденной однородной краевой задачи, т. е. $\varphi_b(x) \equiv 0$. □

Пример 1. Рассмотрим оператор $Lu \equiv u^{IV}$ на $\Gamma = (0, 3.5) \setminus \{1\}$ ($n = 1$, $a_1 = 1$) с краевыми условиями $u(0) = u'(0) = 0$, $u(3.5) = u'(3.5) = 0$ и условиями (3) в точке $a_1 = 1$. В этом случе получаем, что $\Sigma_1 = [0, \delta]$, где $\delta \approx 16.464$. Т. е. при $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta$ функция Грина положительна на всем квадрате $0 < x, s < 3.5$, а при $\delta_1 > \delta$ функция Грина положительна на диагональных квадратах и меняет знак на прямоугольниках $0 < x < 1$, $1 < s < 3.5$ и $0 < s < 1$, $1 < x < 3.5$. При $\delta_1 \to +\infty$ кривая $\mathfrak{N}$, разделяющая области положительности и отрицательности функции Грина в нижнем прямоугольнике $1 \leqslant x \leqslant 3.5$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, начинает стремиться к сторонам $x = 1$ и $s = 1$ этого прямоугольника, сохраняя строгую монотонность как по x, так и по s, а в предельном случае $\delta = +\infty$ кривая $\mathfrak{N}$ совпадает с этими сторонами. Симметрично относительно диагонали ведет себя функция Грина и в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant s \leqslant 3.5$.

6 Условия осцилляционности функции Грина

В данном пункте будет доказано, что если функция Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) положительна, то она обладает осцилляционными свойствами. Для этого нам будет необходимо проанализировать знаки ассоциированных ядер функции $G(x, s)$, которые выражаются через ассоциированные ядра функций Грина "упрощенных"задач по формуле (4.5). А поскольку самой "простой"из них является задача когда все $\delta_i = 0$, то мы сначала изучим некоторые свойства ассоциированных ядер

$$G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} = det\|G_0(x_i, s_j)\|_{i,j=1}^k.$$

функции Грина $G_0(x, s)$. Как уже отмечалось выше функция $G_0(x, s)$ является осцилляционным ядром, следовательно, все ее ассоциированные ядра, соответствующие упорядоченным наборам переменных x и s, неотрицательны.

Для каждого натурального числа k определим множества

$$\Omega_k := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} : \begin{matrix} a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b; \\ a < s_1 < s_2 < \ldots < s_k < b; \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_i < s_{i+2}, \\ s_i < x_{i+2}, \end{matrix} \ i = \overline{1, k-2} \right\}.$$

Из результатов монографии [2] следует

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} \in \Omega_k \Longleftrightarrow G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} > 0.$$

Поэтому для любого набора $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant k$, $m \leqslant k$, справедлива импликация

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} \in \Omega_k \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_m} \\ s_{i_1} & s_{i_2} & \dots & s_{i_m} \end{pmatrix} \in \Omega_m$$

Пусть a_1 – фиксированная точка интервала (a,b). Обозначим через $\Omega_k(a_1;i)$ множество, состоящее из всех элементов $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} \in \Omega_k$, для которых

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix} \in \Omega_{k+1}$$

Лемма 6. *Отношение*

$$(-1)^{i-j+1}\frac{G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+2} & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+2} & \dots & s_k \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+2} & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+2} & \dots & s_k \end{pmatrix}}$$

монотонно возрастает на множестве $\Omega_k(a_1;i)$ *по переменной* x_j *при* $j>i$ *и монотонно убывает при* $j \leqslant i$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $j>i$.

Пусть $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{j-1} & x'_j & x_{j+1} & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{j-1} & x''_j & x_{j+1} & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}$ два произвольных элемента из $\Omega_k(a_1;i)$, причем $x'_j < x''_j$. В силу определения множества $\Omega_k(a_1;i)$

$$G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_{j-1} & x'_j & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{i-1} & a_1 & s_i & \dots & s_{j-2} & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Переставляя столбцы этого определителя местами, получим

$$G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_{j-1} & x'_j & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{i-1} & a_1 & s_i & \dots & s_{j-2} & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} =$$
$$(-1)^{i-j+1}G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x'_j & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}.$$

Применим к последнему определителю детерминантное тождество Сильвестра [1].

$$(-1)^{i-j+1}\frac{\begin{vmatrix} G\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x'_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} & G\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x'_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} \\ G\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} & G\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{G\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}.$$

В определителе второго порядка вынесем за знак определителя элементы первого столбца. Имеем

$$(-1)^{i-j+1}\frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x'_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}\times$$

$$\times\left(\frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x''_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}} - \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x'_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x'_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}\right),$$

Все три определителя, стоящие перед скобкой, положительны, поэтому справедливо неравенство

$$(-1)^{i-j+1}\left(\frac{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & x_j'' & x_{j+1} & \dots\\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots\end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & x_j'' & x_{j+1} & \dots\\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots\end{pmatrix}}-\frac{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & x_j' & x_{j+1} & \dots\\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots\end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & x_j' & x_{j+1} & \dots\\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots\end{pmatrix}}\right)\geqslant 0,$$

дающее вместе с $x_j' < x_j''$, утверждение леммы для рассматриваемого случая $j > i$.

Пусть теперь $j \leqslant i$. В этом случае для $\begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_{j-1} & x_j' & x_{j+1} & \dots & x_k\\ s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots & s_k\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_{j-1} & x_j'' & x_{j+1} & \dots & x_k\\ s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots & s_k\end{pmatrix}$ из $\Omega_k(a_1;i)$ $(x_j' < x_j'')$ мы рассматриваем определитель

$$G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & x_j' & x_j'' & x_{j+1} & \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots\\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & \dots & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

Переставляя местами столбцы, приводим его к виду

$$(-1)^{i-j}G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & x_j' & x_j'' & x_{j+1} & \dots & x_{i-1} & x_i & \dots\\ \dots & s_{j-1} & s_j & a_1 & s_{j+1} & \dots & s_{i-1} & x_i & \dots\end{pmatrix},$$

а далее повторяем те же рассуждения, что и в предыдущем случае. Лемма доказана. □

Поскольку функция $G_0(x,s)$ обладает свойством симметричности , то, меняя строки и столбцы местами и переобозначая переменные, получим следующее утверждение

Лемма 7. *Отношение*

$$(-1)^{i-j+1}\frac{G_0\begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+2} & \dots & x_k\\ s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+2} & \dots & s_k\end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix}x_1 & \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+2} & \dots & x_k\\ s_1 & \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+2} & \dots & s_k\end{pmatrix}}$$

монотонно возрастает на множестве $\Omega_k(a_1;i)$ *по переменной* s_j *при* $j > i$ *и монотонно убывает при* $j \leqslant i$.

Теорема 9. *Отношение*

$$\mathfrak{d}_i^k=\frac{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k\\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots & s_k\end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k\\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k\end{pmatrix}}$$

монотонно возрастает на множестве $\Omega_k(a_1;i)$ *по переменным* $x_i, x_{i+1}, \dots, x_k$ *и* $s_{i+1}, \dots, s_k$ *и монотонно убывает по переменным* $x_1, \dots, x_{i-1}$ *и* $s_1, \dots, s_i$.

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{d}_i^k$ монотонно возрастает на множестве $\Omega_k(a_1;i)$ по переменной x_j при $j \geqslant i$ и монотонно убывает при $j < i$.

Переставляя местами строки и столбцы в числителе $\mathfrak{d}_i^k$, имеем

$$\mathfrak{d}_i^k=\frac{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & x_{i+1} & \dots\\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots\end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots\\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots\end{pmatrix}}=\frac{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & a_1 & x_j & x_{j+1} & \dots\\ \dots & s_{j-1} & s_j & a_1 & s_{j+1} & \dots\end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix}\dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots\\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots\end{pmatrix}}.$$

Применяя детерминантное тождество Сильвестра, получим

$$\mathfrak{d}_i^k = \frac{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_j & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}. \tag{6.1}$$

Выносим элементы первого столбца определителя второго порядка и после сокращения получаем

$$\mathfrak{d}_i^k = \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}} \times$$

$$\times \left(\frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}} - \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}} \right). \tag{6.2}$$

Если $i = j$, то определители

$$G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}, \quad G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}$$

положительны. При этом они и не зависят от x_j. Дробь $\dfrac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-2} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-2} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}$ также от x_j не зависит. Поэтому, в силу леммы 6, выражение $\mathfrak{d}_i^k$ монотонно возрастает по переменной x_j.

Если же $i \neq j$, то, переставляя местами строки определителя $G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}$, стоящего в числителе дроби, перед скобкой с разностью в (6.2), получаем

$$\mathfrak{d}_i^k = \frac{(-1)^{i-j+1} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_{i+1} & \dots \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}} \times$$

$$\times \left(\frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}} - \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & a_1 & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{j-1} & a_1 & x_{j+1} & \dots \\ \dots & s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots \end{pmatrix}} \right).$$

И теперь утверждение теоремы относительно переменных x_j при $i \neq j$ также следует из леммы 6.

Доказательство монотонности по переменным s_j проводится аналогично, с той лишь разницей, что в (6.1) нужно вынести за знак определителя второго порядка элементы второй строки и воспользоваться леммой 7. $\square$

Следствие 3. *Для любого натурального числа k и любого $i \leqslant k$*

$$\sup_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k = \lim_{\mathfrak{B}} \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & x_{i+1} & \dots \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots \end{pmatrix}},$$

где база $\mathfrak{B}$ определяется системой предельных соотношений

$$x_1 \to a+0, \dots, x_{i-1} \to a+0, \qquad x_i \to b-0, \dots, x_k \to b-0,$$
$$s_1 \to a+0, \dots, s_i \to a+0, \qquad s_{i+1} \to b-0, \dots, s_k \to b-0,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} \in \Omega_k(a_1;i).$$

Если через $\Omega_k^*(a_1;i)$ обозначить множество всех элементов Ω_k, для которых

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{i-1} & x_i & a_1 & x_{i+1} & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_{i-1} & a_1 & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix} \in \Omega_{k+1},$$

то из симметричности функции Грина $G_0(x,s)$ следует следующее утверждение.

Следствие 4. *Для любого натурального числа k и любого $i \leqslant k$*

$$\sup_{\Omega_k^*(a_1;i)} \left(\mathfrak{d}_i^k\right)^* = \lim_{\mathfrak{B}^*} \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & a_1 & x_{i+1} & \dots \\ \dots & s_{i-1} & a_1 & s_i & s_{i+1} & \dots \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots \end{pmatrix}},$$

где база $\mathfrak{B}^*$ определяется системой предельных соотношений

$$x_1 \to a+0, \dots, x_i \to a+0, \qquad x_{i+1} \to b-0, \dots, x_k \to b-0,$$
$$s_1 \to a+0, \dots, s_{i-1} \to a+0, \qquad s_i \to b-0, \dots, s_k \to b-0,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} \in \Omega_k^*(a_1;i).$$

Далее мы покажем, что значения $\sup\limits_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k$. не зависят от k, i и, вообще, равны друг другу. Для этого рассмотрим сначала случай $k=i=1$. Имеем

$$\sup_{\Omega_1(a_1;1)} \mathfrak{d}_1^1 = \lim_{\substack{x_1 \to b-0 \\ s_1 \to a+0}} \frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ s_1 & a_1 \end{pmatrix}}{G_0(x_1,s_1)} = \lim_{\substack{x_1 \to b-0 \\ s_1 \to a+0}} \frac{G_0(a_1,s_1)G_0(x_1,a_1)}{G_0(x_1,s_1)} - G_0(a_1,a_1).$$

Согласно (4.3)

$$\sup_{\Omega_1(a_1;1)} \mathfrak{d}_1^1 = \lim_{\substack{\tau_1 \to +0 \\ \sigma_1 \to +0}} \frac{G_0(a_1,a+\sigma_1)G_0(b-\tau_1,a_1)}{G_0(b-\tau_1,a+\sigma_1)} - G_0(a_1,a_1) =$$
$$\lim_{\substack{\tau_1 \to +0 \\ \sigma_1 \to +0}} \frac{\varphi_a(a_1)\sigma_1^{\theta_a}\varphi_b(a_1)\tau_1^{\theta_b}}{\theta_a!\varphi_b(s_1)\tau_1^{\theta_b}} - G_0(a_1,a_1).$$

Раскладывая $\varphi_b(s_1)$ по формуле Тейлора окончательно получим

$$\sup_{\Omega_1(a_1;1)} \mathfrak{d}_1^1 = \frac{\varphi_a(a_1)\varphi_b(a_1)}{\varphi_b^{(\theta_a)}(a)} - G_0(a_1,a_1) =: \mathfrak{d}(a_1).$$

Теорема 10. *Для любого натурального числа k и любого $i \leqslant k$*

$$\sup_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k = \sup_{\Omega_k^*(a_1;i)} \left(\mathfrak{d}_i^k\right)^* = \mathfrak{d}(a_1) = \frac{\varphi_a(a_1)\varphi_b(a_1)}{\varphi_b^{(\theta_a)}(a)} - G_0(a_1, a_1). \tag{6.3}$$

Доказательство. Мы докажем равенство $\sup\limits_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k = \mathfrak{d}(a_1)$, а второе равенство будет следовать из симметричности функции $G_0(x, s)$.

Покажем справедливость утверждения теоремы для $k = 2$. Пусть, для определенности, $i = 1$ (случай $i = 2$ рассматривается аналогично). Рассмотрим

$$\sup_{\Omega_2(a_1;1)} \mathfrak{d}_1^2 = \lim_{\mathfrak{B}} \frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 & x_2 \\ s_1 & a_1 & s_2 \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}}.$$

Применяя детерминантное тождество Сильвестра, имеем

$$\sup_{\Omega_2(a_1;1)} \mathfrak{d}_1^2 = \lim_{\mathfrak{B}} \frac{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_2 \\ a_1 & s_2 \end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & s_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{G_0(x_2, s_2) G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}} =$$

$$= \lim_{\mathfrak{B}} \frac{\begin{vmatrix} \frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}}{G_0(x_2,s_2)} & \frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_2 \\ a_1 & s_2 \end{pmatrix}}{G_0(x_2,s_2)} \\ \frac{G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}}{G_0(x_2,s_2)} & \frac{G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & s_2 \end{pmatrix}}{G_0(x_2,s_2)} \end{vmatrix}}{\frac{G_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}}{G_0(x_2,s_2)}}. \tag{6.4}$$

Установим поведение элементов определителя, стоящего в числителе (6.4), когда числа x_j, s_j находятся вблизи соответствующих концов интервала (a, b).

$$\frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & b-\tau_2 \\ a+\sigma_1 & b-\sigma_2 \end{pmatrix}}{G_0(b-\tau_2, b-\sigma_2)} = G_0(a_1, a+\sigma_1) - \frac{G_0(a_1, b-\sigma_2)G_0(b-\tau_2, a+\sigma_1)}{G_0(b-\tau_2, b-\sigma_2)}.$$

Применяя формулы (5.2), а затем формуру Тейлора, получаем

$$\frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & b-\tau_2 \\ a+\sigma_1 & b-\sigma_2 \end{pmatrix}}{G_0(b-\tau_2, b-\sigma_2)} = \left(\varphi_a(a_1) + \varphi_b(a_1)\right)\frac{\sigma_1^{\theta_a}}{\theta_a!} + o(\sigma_1^{\theta_a}). \tag{6.5}$$

Аналогично

$$\frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & b-\tau_2 \\ a_1 & b-\sigma_2 \end{pmatrix}}{G_0(b-\tau_2, b-\sigma_2)} = G_0(a_1, a_1) + \frac{\varphi_b^2(a)}{\varphi_b^{(\theta_b)}(b)} + o(\sigma_1^{\theta_a}). \tag{6.6}$$

$$\frac{G_0\begin{pmatrix} b-\tau_1 & b-\tau_2 \\ a+\sigma_1 & b-\sigma_2 \end{pmatrix}}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)} = \frac{\varphi_b(a+\sigma_1)}{\theta_b!}\left(\tau_1^{\theta_b}+\tau_2^{\theta_b}\frac{G_0(b-\tau_1,b-\sigma_2)}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)}\right)+ \\ \frac{\varphi_b(a+\sigma_1)}{\theta_b!}o(\tau_1^{\theta_b})+\frac{G_0(b-\tau_1,b-\sigma_2)}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)}o(\tau_2^{\theta_b}) = \\ =\varphi_b^{(\theta_a)}(a)\left(\tau_1^{\theta_b}+\tau_2^{\theta_b}\frac{G_0(b-\tau_1,b-\sigma_2)}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)}\right)\frac{\sigma_1^{\theta_a}}{\theta_a!\theta_b!}+o(\sigma_1^{\theta_a}\tau_1^{\theta_b}). \tag{6.7}$$

$$\frac{G_0\begin{pmatrix} b-\tau_1 & b-\tau_2 \\ a_1 & b-\sigma_2 \end{pmatrix}}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)} = \frac{\varphi_b(a_1)}{\theta_b!}\left(\tau_1^{\theta_b}+\tau_2^{\theta_b}\frac{G_0(b-\tau_1,b-\sigma_2)}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)}\right)+o(\tau_1^{\theta_b}). \tag{6.8}$$

Подставляя соотношения (6.5)–(6.8) в (6.4), получим

$$\sup_{\Omega_2(a_1;1)}\mathfrak{d}_1^2 = \lim_{\substack{\tau_j\to+0\\ \sigma_j\to+0}} \frac{\frac{\big(\varphi_a(a_1)+\varphi_b(a_1)\big)\varphi_b(a_1)}{\theta_a!\theta_b!}\left(\tau_1^{\theta_b}+\tau_2^{\theta_b}\frac{G_0(b-\tau_1,b-\sigma_2)}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)}\right)\sigma_1^{\theta_a}}{\frac{\varphi_b^{(\theta_a)}(a)}{\theta_a!\theta_b!}\left(\tau_1^{\theta_b}+\tau_2^{\theta_b}\frac{G_0(b-\tau_1,b-\sigma_2)}{G_0(b-\tau_2,b-\sigma_2)}\right)\sigma_1^{\theta_a}} - \\ -G_0(a_1,a_1)-\frac{\varphi_b^2(a_1)}{\varphi_b^{(\theta_a)}(a)}+o(\sigma_1^{\theta_a}\tau_1^{\theta_b}) = \frac{\varphi_a(a_1)\varphi_b(a_1)}{\varphi_b^{(\theta_a)}(a)}-G_0(a_1,a_1) = \sup_{\Omega_1(a_1;1)}\mathfrak{d}_1^1.$$

Предположим теперь, что

$$\sup_{\Omega_{k-1}(a_1;i)}\mathfrak{d}_i^{k-1} = \mathfrak{d}(a_1)$$

для всех $i \leqslant k-1$. Тогда

$$\mathfrak{d}_i^k = \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_{k-1} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_{k-1} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_{k-2} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_{k-2} \end{pmatrix} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & \dots & x_{k-2} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & \dots & s_{k-2} \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_{k-2} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_{k-2} \end{pmatrix}} \times$$

$$\times \frac{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_{k-1} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_{k-1} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & \dots & x_{k-1} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & \dots & x_{k-1} \\ \dots & s_{i-1} & s_i & \dots & s_k \end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & \dots & s_k \end{pmatrix} \end{vmatrix}} =$$

Умножим и разделим каждый элемент определителя в числителе на элемент определителя в знаменателе, стоящий на том же месте. Тогда, в силу предположения индукции имеем

$$\sup_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k = \lim_{\mathfrak{B}} \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}} = \lim_{\mathfrak{B}} \frac{1}{\mathfrak{d}(a_1)+\varepsilon} \times$$

$$\times \frac{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_{k-1} \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_{k-1} \end{pmatrix}(\mathfrak{d}(a_1)+\varepsilon_{11}) & G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_{k-1} \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_k \end{pmatrix}(\mathfrak{d}(a_1)+\varepsilon_{12}) \\ G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_k \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_{k-1} \end{pmatrix}(\mathfrak{d}(a_1)+\varepsilon_{21}) & G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_k \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_k \end{pmatrix}(\mathfrak{d}(a_1)+\varepsilon_{22}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_{k-1} \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_{k-1} \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_k \end{pmatrix} \\ G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_k \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_{k-1} \end{pmatrix} & G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-2} & x_k \\ s_1 & \dots & s_{k-2} & s_k \end{pmatrix} \end{vmatrix}},$$

где $\varepsilon, \varepsilon_{jn}$– бесконечно малые по базе $\mathfrak{B}$ величины.

Переходя к пределу окончательно получаем

$$\sup_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k = \mathfrak{d}(a_1).$$

Теорема доказана. □

Теорема 11. *Функция Грина $G_1(x,s)$ является осцилляционным ядром тогда и только тогда, когда она положительна на $(a,b)\times(a,b)$.*

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только достаточность.

Пусть на $G_1(x,s) > 0$ на $(a,b)\times(a,b)$. Тогда из теоремы 8 следует, что

$$0 \leqslant 1 + \delta_1 \lim_{\substack{x_1\to b-0 \\ s_1\to a+0}} \frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ a_1 & s_1 \end{pmatrix}}{G_0(x_1,s_1)} = 1 - \delta_1 \lim_{\substack{x_1\to b-0 \\ s_1\to a+0}} \frac{G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ s_1 & a_1 \end{pmatrix}}{G_0(x_1,s_1)}$$

или

$$1 - \delta_1 \mathfrak{d}(a_1) \geqslant 0. \tag{6.9}$$

Рассмотрим теперь ассоциированное ядро функции $G_1(x,s)$ k–того порядка. Согласно (4.1)

$$sign\, G_1\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = sign\left[G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \delta_1 G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 & \dots & x_k \\ a_1 & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix}\right],$$

поэтому неравенство $G_1\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} \geqslant 0$ эквивалентно неравенству

$$G_0\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} + \delta_1 G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 & \dots & x_k \\ a_1 & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{6.10}$$

Если $G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 & \dots & x_k \\ a_1 & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} \geqslant 0$, то, в силу осцилляционности ядра $G_0(x,s)$, неравенство (6.10) выполнено. Следовательно, оно может быть нарушено лишь в случае когда

$G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 & \dots & x_k \\ a_1 & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} < 0$, что, в свою очередь, возможно лишь если $x_{i-1} < a_1 < x_i$ и $s_{j-1} < a_1 < s_j$ причем $i \neq j$. Если $i < j+2$ или $j < i+2$, то как следует из результата монографии [2] $G_0\begin{pmatrix} a_1 & x_1 & \dots & x_k \\ a_1 & s_1 & \dots & s_k \end{pmatrix} = 0$. Следовательно, нас интересуют только случаи когда при некотором $1 \leqslant i \leqslant k$ одновременно выполнены неравенства $x_{i-1} < a_1 < x_i$ и $s_i < a_1 < s_{i+1}$ или неравенства $x_i < a_1 < x_{i+1}$ и $s_{i-1} < a_1 < s_i$. В первом случае неравенство (6.10) очевидно будет выполняться, если для любого $1 \leqslant i \leqslant k$ выполнены неравенства

$$1 - \delta_1 \sup_{\Omega_k(a_1;i)} \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & a_1 & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & a_1 & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}} = 1 - \delta_1 \sup_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k \geqslant 0$$

и

$$1 - \delta_1 \sup_{\Omega_k(a_1;i)} \frac{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & a_1 & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & a_1 & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}}{G_0\begin{pmatrix} \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_k \\ \dots & s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots & s_k \end{pmatrix}} = 1 - \delta_1 \sup_{\Omega^*_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k \geqslant 0.$$

Но из теоремы 10 следуют равенства

$$\sup_{\Omega_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k = \sup_{\Omega^*_k(a_1;i)} \mathfrak{d}_i^k = \mathfrak{d}(a_1),$$

справедливые при любых $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant i \leqslant k$, которые вместе с (6.10) гарантируют неотрицательность всех ассоциированных ядер функции $G_1(x,s)$. Теорема доказана. □

Замечание 2. При доказательстве всех предыдущих утверждений этого параграфа мы использовали только свойства симметричности и осцилляционности ядра $G_0(x,s)$.

Теорема 12. *Функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) является осцилляционным ядром тогда и только тогда, когда она положительна на $(a,b)\times(a,b)$.*

Доказательство теоремы следует из теоремы 11, формулы (4.5) и замечания 2.

7 Положительности функции Грина в случае когда коэффициенты $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ в условиях (2) равны нулю

Мы по–прежнему рассматриваем задачу (1)–(3). Всюду в данном и последующем параграфах мы считаем, что в условиях (2) $\alpha(a) = \alpha(b) = 0$.

В наших дальнейших рассуждениях мы неоднократно будем ссылаться на следующий результат, касающийся поведения решений однородного уравнения (1) на отрезке.

Теорема 13. *[5] Справедливы следующие утверждения:*

1) Всякое решение однородного уравнения (1) на $[\xi,\eta]$, удовлетворяющее условиям

$$u'(\xi)u''(\xi) \geqslant 0, \quad u'(\eta)u''(\eta) \leqslant 0$$

либо постоянно, либо строго монотонно. При этом, решение строго возрастает (убывает или постоянно) тогда и только тогда, когда $D^3u < 0$ *(*> 0 *или* $= 0$*);*

2) Краевая задача для однородного уравнения (1) на $[\xi, \eta]$ *с условиями*

$$u'(\xi)u''(\xi) \geqslant 0, \quad u'(\eta)u''(\eta) \leqslant 0,$$
$$u(\xi) = 0, \quad u(\eta)D^3u(\eta) \geqslant 0$$

невырожденна и ее функция Грина положительна внутри квадрата $[\xi, \eta] \times [\xi, \eta]$.

Вернемся к рассмотрению задачи (1)–(3). Сначала мы сформулируем два свойства решений однородного уравнения (1) на Γ.

Лемма 8. *Пусть* $u(x)$ *– нетривиальное решение однородного уравнения (1) на* Γ*, удовлетворяющее условиям* (2_a) *и* (3)*. Тогда выражение* $uD^3u - pu''u'$ *неположительно при* $x = b - 0$.

Доказательство. Привлекая формулу (2.1) и условия (2_a), (3), получим

$$\int\limits_\Gamma Lu \cdot u\, dx = \left[uD^3u - pu''u'\right]_{x=b} - \left[uD^3u - pu''u'\right]_{x=a} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \delta_k [u(a_k)]^2 + \int\limits_\Gamma p(u'')^2 + q(u')^2\, dx = 0.$$

Величина $\left[uD^3u - pu''u'\right]_{x=a}$ неотрицательна в силу (2_a), а интеграл неотрицателен так как $p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$, следовательно $\left[uD^3u - pu''u'\right]_{x=b} \leqslant 0$. □

Лемма 9. *Пусть* $u(x)$ *– решение однородного уравнения (1) на* Γ*, удовлетворяющее условиям* (2_a)*,* (3) *и условиям* $\sigma u(b-0) > 0$*,* $\sigma u''(b-0) < 0$*. Если* $\delta_i < +\infty$ *при всех* $1 \leqslant i \leqslant n$*, то* $\sigma D^3u(b-0) < 0$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n. Пусть $n = 0$. Если $\sigma u'(b-0) \geqslant 0$, то утверждение следует из $\sigma u(b-0) > 0$ и теоремы 13. Если же $\sigma u'(b-0) < 0$, то на интервале (a, b) найдется точка ξ положительного максимума функции $u(x)$. Из теоремы 13 следует, что функция $u(x)$ строго возрастает на (a, ξ) и $D^3u(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Пусть лемма верна при всех $n \leqslant k$. Рассмотрим случай $n = k + 1$. Предположим, что $D^3u(b-0) \geqslant 0$. Тогда, как показывает лемма 8, $\sigma u'(b-0) < 0$ и функция убывает к точке b. Обозначим через ξ ближайшую к b точку максимума функции $u(x)$. Тогда $u(x) > 0$ на $[\xi, b)$, $\sigma u''(\xi - 0) < 0$. Если $\xi < a_{k+1}$, то как следует из условий (3) и предположения $D^3u(b-0) \geqslant 0$, на промежутке $[\xi, a_{k+1}]$ выполняется неравенство $D^3u(x) < 0$. В этом случае одновременно выполнены соотношения $u(\xi) > 0$, $\sigma u''(\xi - 0) < 0$ и $D^3u(\xi - 0) \geqslant 0$, противоречащие предположению индукции. Следовательно, возможен только вариант $\xi \in [a_{k+1}, b)$. Здесь также возможны два случая: а) $u(a_{k+1}) > 0$ и б) $u(a_{k+1}) \leqslant 0$.

Пусть $u(a_{k+1}) > 0$. Тогда из условия (3) следует неравенство $D^3u(a_{k+1} - 0) > 0$, влекущее вместе с индукционным предположением $u''(a_{k+1} - 0) > 0$, а значит и $u''(a_{k+1} + 0) > 0$. Но тогда на промежутке (a_{k+1}, ξ) найдется точка η такая, что $u''(\eta) = 0$ и $u'(x) > 0$ на (η, ξ). Из теоремы 13 следует неравенство $D^3u(x) < 0$, противоречащее предположению $D^3u(b-0) \geqslant 0$.

В случае б) на $[a_{k+1}, \xi)$ найдется точка η такая, что $u(\eta) = 0$ и $u(x) > 0$ на (η, ξ). Из леммы 8 следует, что $u''(\eta)u'(\eta) \geqslant 0$ и на промежутке (η, b) мы приходим к ситуации рассмотренной в случае $n = 0$. Лемма доказана. □

Доказанные выше утверждения позволяют сформулировать свойства функции Грина краевой задачи (1)–(3).

Лемма 10. *Пусть $G(x,s)$ – функция Грина задачи (1)–(3). Если $\delta_i < +\infty$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то для любого $s \in (a,b)$ и любого $i = \overline{0,n}$ срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot,s)$ имеет на $[a_i, a_{i+1}] \setminus \{a,b\}$ не более одного нуля.*

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[a_i, a_{i+1}]$ при некотором i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Если $s \in [a_i, a_{i+1}]$, то утверждение леммы следует из теоремы 6. Поэтому рассмотрим случай когда $a \leqslant a_i < a_{i+1} < s$ (случай $s < a_i < a_{i+1} \leqslant b$ рассматривается аналогично). Для $i = 0$ утверждение леммы следует из лемм 4 и 5.

Пусть $0 < i < n$. Сначала покажем, что $S(g_s) \leqslant 2$ на $[a_i, a_{i+1}]$. Пусть ξ – ближайший к концу a_i нуль функции $g_s(x)$ на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$, т. е. либо $\xi = a_i$, либо (a_i, ξ) – промежуток знакопостоянства функции $g_s(x)$. Тогда из леммы 8 следует, что выполнено неравенство $g_s'(\xi-0)g_s''(\xi-0) > 0$, а значит, и соотношение $S(\sigma D^0 g_s(\xi+0), -\sigma D^1 g_s(\xi+0), \sigma D^2 g_s(\xi+0)) = 2$. Из леммы 5 следует, что $S(g_s) \leqslant 1$ на (ξ, a_{i+1}) и значит, $S(g_s) \leqslant 2$ на $[a_i, a_{i+1}]$.

Предположим теперь, что утверждение леммы не верно. Тогда функция $g_s(x)$ имеет на $[a_i, a_{i+1}]$ два нуля $\xi_1 < \xi_2$. Пусть, для определенности, $g_s(x) < 0$ на (ξ_1, ξ_2). Тогда, во–первых, $\sigma g_s(\xi_1-0) > 0$, $\sigma g_s'(\xi_1-0) < 0$. Во–вторых, из леммы 8 следует, что $\sigma g_s''(\xi_1-0) < 0$. Ну и в–третьих, на (ξ_1, ξ_2) найдется точка η в которой $g_s'(\eta) = 0$ и, как следует из теоремы 13, $D^3 g_s(x) > 0$ на $[\xi_1, \eta]$, а значит, и $\sigma D^3 g_s(\xi_1 - 0) > 0$ (в случае $a_i = \xi_1$ последнее неравенство следует из условия для третьих производных в (3)). И мы получаем, что одновременно выполнены неравенства $\sigma g_s(\xi_1 - 0) > 0$, $\sigma g_s''(\xi_1 - 0) < 0$ и $\sigma D^3 g_s(\xi_1 - 0) > 0$, противоречащие утверждению леммы 9. □

Теорема 14. *Для того, чтобы функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) была положительна на $(a,b) \times (a,b)$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства*

$$\sigma G(b-0, a+0) > 0, \quad \sigma G(a_i, a+0) > 0, \quad i = \overline{2,n}.$$

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только достаточность. Пусть одновременно выполняются неравенства $\sigma G(b-0, a+0) > 0$ и $\sigma G(a_i, a+0) > 0$ при $i = \overline{2,n}$. Покажем сначала, что в этом случае $\sigma G(x, a+0) > 0$ при всех $x \in (a,b)$. Из теоремы 6 следует, что $G(x,s) > 0$ при любых $x, s \in (a, a_1]$, а из условий теоремы следует, что если $\sigma G(x_0, a+0) < 0$ при некотором $x_0 \in (a_i, a_{i+1})$, то при s достаточно близких к a срезка $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ имеет на отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ два различных нуля, что противоречит утверждению леммы 10.

Теперь из симметричности функции $G(x,s)$ следует, что $\sigma G(a+0, s) > 0$ при всех $s \in (a,b)$, а из теоремы 4 следует $\sigma G(s-0, s) > 0$ при тех же s.

Предположим теперь, что теорема не верна. Тогда из леммы 4 следует существование точки $(x_0, s_0) \in (a,b) \times (a,b)$ в которой функция $G(x,s)$ принимает отрицательное значение. В силу симметричности функции Грина и теоремы 6, мы можем считать, что $a_1 < x_0 < s_0 < b$ и $G(x_0, s_0) = G(s_0, x_0) < 0$. Из непрерывности функции Грина на треугольнике $a < x < s < b$ и неравенств $\sigma G(a+0, s) > 0$, $\sigma G(s-0, s) > 0$ при $s \in (a,b)$ следует существование точки (ξ, η) из треугольника $a < x < s < b$ такой, что $G(\xi, \eta) = \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta) = 0$, что противоречит утверждению леммы 4. □

Теорема 15. *Функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) положительна на $(a,b)\times(a,b)$ тогда и только тогда, когда $(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\Sigma$, где*

$$\Sigma=\Big\{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\mathbb{R}^n_+\Big|1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n\\ j\notin\{i_1,\ldots,i_k\}}} g^j_{i_1\ldots i_k}\delta_{i_1}\delta_{i_2}\ldots\delta_{i_k}\geqslant 0,\ j=\overline{2,n+1}\Big\}, \tag{7.1}$$

и

$$\begin{aligned} g^j_{i_1\ldots i_k}&=\lim_{s\to a+0}\frac{G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & a_j\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}}{G_0(a_j,s)},\quad j=\overline{2,n},\\ g^{n+1}_{i_1\ldots i_k}&=\lim_{(x,s)\to(b-0,a+0)}\frac{G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & x\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}}{G_0(x,s)}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Доказательство. Из теоремы 14 и положительности функции $G_0(x,s)$ на $(a,b)\times(a,b)$ следует, что функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) положительна на $(a,b)\times(a,b)$ тогда и только тогда, когда для всех $(x,s)\in(a,b)\times(a,b)$ достаточно близких к точке (b,a) выполнено неравенство $\frac{G(x,s)}{G_0(x,s)}>0$ и для всех $s\in(a,b)$ достаточно близких к a выполняются неравенства $\frac{G(a_j,s)}{G_0(a_j,s)}>0$, $j=\overline{2,n}$. Используя представление (3.6) для функции $G(x,s)$, перейдем к пределу при $(x,s)\to(b-0,a+0)$ в первом из этих неравенств и при $s\to a+0$ в последующих. Тогда, предполагая существование всех пределов в (7.2), получим неравенства, задающие множество Σ в (7.1).

Покажем, что пределы в (7.2) существуют и конечны. Если одно из чисел $i_1,\dots,i_k$ равно j, то минор в числителе равен нулю, а значит и соответствующий предел равен нулю. Для доказательства корректности определения чисел $g^j_{i_1\ldots i_k}$ при $j\notin\{i_1,\dots,i_k\}$ воспользуемся соотношениями (5.2). Тогда, раскладывая соответствующие миноры по элементам последнего столбца, для $j=\overline{2,n}$ получаем

$$\begin{aligned} g^j_{i_1\ldots i_k}&=\lim_{s\to a+0}\frac{G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & a_j\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k} & s\end{pmatrix}}{G_0(a_j,s)}=\\ &=G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k}\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k}\end{pmatrix}-\\ -\lim_{s\to a+0}&\frac{\sum\limits_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}G_0(a_{i_m},s)G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{m-1}} & a_{i_{m+1}} & \ldots & a_{i_k} & a_j\\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{m-1}} & a_{i_m} & \ldots & a_{i_{k-1}} & a_{i_k}\end{pmatrix}}{G_0(a_j,s)}=\\ &=G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k}\\ a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_k}\end{pmatrix}-\\ -\frac{1}{\varphi_a(a_j)}&\sum_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}\varphi_a(a_{i_m})G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \ldots & a_{i_{m-1}} & a_{i_{m+1}} & \ldots & a_{i_k} & a_j\\ a_{i_1} & \ldots & a_{i_{m-1}} & a_{i_m} & \ldots & a_{i_{k-1}} & a_{i_k}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

При этом, корректность правой части (7.3) обосновывается соотношением $\varphi_a(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$, вытекающим из определения функции $\varphi_a(x)$ и леммы 5.

Для доказательства существования предела при $j = n+1$ сначала раскладываем соответствующий минор по элементам последнего столбца

$$g^{n+1}_{i_1\dots i_k} = \lim_{(x,s)\to(b-0,a+0)} \frac{G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & s \end{pmatrix}}{G_0(x,s)} =$$

$$= \lim_{(x,s)\to(b-0,a+0)} \left[G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} G_0(a_{i_m}, s) G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_{m-1}} & a_{i_{m+1}} & \dots & a_{i_k} & x \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_{m-1}} & a_{i_m} & \dots & a_{i_{k-1}} & a_{i_k} \end{pmatrix}}{G_0(x,s)} \right].$$

Далее разложим каждый из миноров в числителе последней дроби по элементам последней строки и получим

$$g^{n+1}_{i_1\dots i_k} = G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix} -$$

$$- \lim_{(x,s)\to(b-0,a+0)} \frac{\sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^{k-m} G_0(a_{i_m}, s) \sum\limits_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} G_0(x, a_{i_r}) G_0^{mr}\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix}}{G_0(x,s)},$$

где через $G_0^{mr}\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix}$ обозначен минор определителя $G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix}$, получаемый вычеркиванием m–той строки и r–того столбца; при $k = 1$ по определению считаем $G_0^{mr}\begin{pmatrix} a_{i_1} \\ a_{i_1} \end{pmatrix} = 1$.

Используя симметричность функции $G_0(x, a_{i_r}) = G_0(a_{i_r}, x)$, и привлекая соотношения (5.2), окончательно получаем

$$g^{n+1}_{i_1\dots i_k} = G_0\begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix} -$$

$$- \sum_{m,r=1}^{k} (-1)^{m+r} \frac{\varphi_a(a_{i_m})\varphi_b(a_{i_r})}{\varphi_b^{(\theta_a)}(a)} G_0^{mr}\begin{pmatrix} a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \\ a_{i_1} & \dots & a_{i_k} \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

□

Хотелось бы обратить внимание на алгоритмическую эффективность соотношений (7.1), определяющих множество Σ. Так, например, при $n = 2$ для оператора $Lu \equiv u^{IV}$, заданного на $\Gamma = (0,7) \setminus \{2;4\}$ (случай $n = 2$), с краевыми условиями $u(0) = u'(0) = 0$, $u(7) = u'(7) = 0$ и условиями (3) в точках $a_1 = 2$ и $a_2 = 4$ соотношения (7.1) принимают вид

$$1 + g_1^2\,\delta_1 \geqslant 0,$$
$$1 + g_1^3\,\delta_1 + g_2^3\,\delta_2 + g_{12}^3\,\delta_1\delta_2 \geqslant 0,$$

где $g_1^2 \approx -0.04$, $g_1^3 \approx -0.486$, $g_2^3 \approx -0.84$ $g_{12}^3 \approx 0.14$ и задают множество Σ.

Теорема 16. *Функция Грина $G(x,s)$ задачи (1)–(3) является осцилляционным ядром тогда и только тогда, когда коэффициенты δ_i в условиях (3) принадлежат множеству Σ, которое определяется конечной системой неравенств (7.2).*

Замечание 3. Как следует из следствия 2 множество Σ ограничено в $\mathbb{R}^n_+$. Более того, неравенства (7.1) позволяют утверждать, что множество Σ не пусто и захватывает все точки из $\mathbb{R}^n_+$, попадающие в некоторый n–мерный шар положительного радиуса с центром в начале координат. Привлекая результаты предыдущих параграфов, можно более точно описать структуру множества Σ. Из неравенства (6.10) и формулы (6.3) следует, что множество Σ вложено в n–мерный параллелепипед $\Pi_n = \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) : 0 \leqslant \delta_i \leqslant \mathfrak{d}(a_i); i = \overline{1,n}\}$. Более точную картину дают следующие рассуждения.

Обозначим через Σ_i множество всех значений коэффициента $\delta_i \geqslant 0$ при которых соответствующая функция Грина $G_i(x,s)$ положительна на $(a,b)\times(a,b)$. Через $\Sigma_{i_1 i_2}$ – обозначим множество всех значений коэффициентов δ_{i_1} и δ_{i_2} при которых соответствующая функция Грина $G_{i_1 i_2}(x,s)$ положительна на $(a,b)\times(a,b)$ и т.д. Тогда множество $\Sigma_{i_1 i_2} \in \mathbb{R}^2_+$ ограничивается положительными полуосями $O\delta_{i_1}$, $O\delta_{i_2}$ и кривой второго порядка (гиперболой) (см. рис. 2). Причем проекции $\Sigma_{i_1 i_2}$ на координатные оси дают множества Σ_{i_1} и Σ_{i_2}. Аналогично, множество $\Sigma_{i_1 i_2 i_3} \in \mathbb{R}^3_+$ ограничивается координатными плоскостями $O\delta_{i_1}\delta_{i_2}$, $O\delta_{i_1}\delta_{i_3}$, $O\delta_{i_2}\delta_{i_3}$ и поверхностью третьего порядка. При этом проекция $\Sigma_{i_1 i_2 i_3} \in \mathbb{R}^3_+$ на плоскость $O\delta_{i_1}\delta_{i_2}$ совпадает с множеством $\Sigma_{i_1 i_2}$ (аналогично и другие проекции) и так далее.

8 Независимость знакопостоянства функции Грина от коэффициентов граничных условий

В этом параграфе будет показано, что множество Σ, определяемое в (7.3), не зависит от коэффициентов краевых условий (2). Сначала мы докажем независимость Σ_1 от коэффициентов условия (2_a), а затем, используя факторизацию, обобщим их на все множество Σ.

Пусть a_1 – фиксированная точка интервала (a,b). На Γ рассмотрим вспомогательную краевую задачу для дифференциального уравнения (1), дополненного краевыми условиями:

$$\begin{gathered} u(a) = u'(a) = u''(a) = 0, \\ u(b) = 0, \quad \beta(b)u''(b) + \vartheta(b)u'(b) = 0. \end{gathered} \tag{8.1}$$

и первыми тремя из условий (3) в точке a_1 и условиями (3) в точках $a_2, \ldots, a_n$ при $\delta_2 = \ldots = \delta_n = 0$.

Другими словами, мы заменяем в задаче (1)–(3) второе из граничных условий (2_a) и условие для третьих производных в точке a_1 на два граничных условия $u'(a) = u''(a) = 0$.

Сначала мы докажем невырожденность вспомогательной задачи которую для простоты назовем задачей (I).

Теорема 17. *Краевая задача* (I) *однозначно разрешима для любой правой части* $f(x) \in C[\Gamma]$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение соответствующей однородной задачи. Умножим функцию $u(x)$ на $Lu(x)$ и проинтегрируем по Γ. Тогда из краевых условий задачи (I) получаем

$$\begin{gathered} 0 = \int\limits_\Gamma Lu \cdot u\,dx = p(b)u''(b)u'(b) + \\ + u(a_1)\big[D^3u(a_1-0) - D^3u(a_1+0)\big] + \int\limits_\Gamma p(u'')^2 + q(u')^2\,dx. \end{gathered} \tag{8.2}$$

Предположим, что $u(a_1) > 0$. Тогда, в силу краевых условий (8.1) в точке a, $u'(a_1-0) > 0$, $u''(a_1-0) > 0$ и $D^3u(a_1-0) > 0$. И из условий (3) следуют неравенства $u'(a_1+0) > 0$ и $u''(a_1+0) > 0$. Применяя к функции $u(x)$ на промежутке (a_1, b) теорему 13, получим $D^3u(a_1+0) < 0$. Следовательно, сумма всех внеинтегральных членов в правой части (7.2) строго положительна, а сам интеграл неотрицателен. Получаем противоречие.

Невозможность неравенства $u(a_1) < 0$ устанавливается аналогично.

Следовательно, $u(a_1) = 0$. Но тогда из (8.2) следует, что $u(x)$ – линейная функция, равная нулю в точках a, a_1 и b, т. е. $u(x) \equiv 0$ на Γ. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 17 и результатов монографии [5] сразу получаем

Следствие 5. *Для задачи* (I) *функция Грина* $\widetilde{G}(x,s)$ *существует и обладает следующими свойствами:*

1) функция $\widetilde{G}(x,s)$ *вместе со своими производными по* x *до четвертого порядка непрерывна по совокупности переменных вплоть до границы на каждом из прямоугольников* $(a,a_1)\times(a_1,b)$ *и* $(a_1,b)\times(a,a_1)$*, а также на каждом из треугольников, на которые диагональю* $x = s$ *разбиваются квадраты* $(a,a_1)\times(a,a_1)$ *и* $(a_1,b)\times(a_1,b)$*;*

2) при каждом фиксированном $s \in \Gamma$*, функция* $\widetilde{G}(x,s)$ *по* x *удовлетворяет однородному уравнению*

$$(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = 0$$

при $x \in \Gamma$*;*

3) при каждом фиксированном $s \in \Gamma$*, функция* $\widetilde{G}(x,s)$ *по* x *удовлетворяет всем краевым условиям задачи;*

4) функция $\widetilde{G}(x,s)$ *на диагонали* $x = s$ *удовлетворяет условиям непрерывности вместе со своими производными* $\frac{\partial \widetilde{G}(x,s)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \widetilde{G}(x,s)}{\partial x^2}$ *и условию скачка третьей производной по* x

$$\frac{\partial^3 \widetilde{G}(s+0,s)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \widetilde{G}(s-0,s)}{\partial x^3} = \frac{1}{p(s)};$$

5) при $s = a$*,* $s = a_1$ *или* $s = b$ *функция* $\widetilde{G}(x,s)$ *тождественно равна нулю;*

6) функция $\widetilde{G}(x,s)$ *условиями 1)—4) определяется однозначно.*

При этом тождество $\widetilde{G}(x,a_1) \equiv 0$ в 5) следует из невырожденности задачи.

Лемма 11. *При каждом фиксированном* $s \in (a_1,b)$ *срезка* $g(x) = \widetilde{G}(x,s)$ *функции Грина задачи* (I) *удовлетворяет неравенствам* $g(a_1-0)D^3g(a_1-0) > 0$ *и* $g(a_1+0)D^3g(a_1+0) < 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что $g(a_1) \neq 0$. Рассуждаем от противного. Если $g(a_1) = 0$, то, в силу условий (8.1) $g(x) \equiv 0$, $x \in (a,a_1)$, и, ввиду (3), $g(a_1+0) = g'(a_1+0) = g''(a_1+0) = 0$. Обозначим через $z(x)$ решение уравнения (1), суженного на интервал (a_1,b), удовлетворяющее началльным условиям $z(a_1) = z'(a_1) = z''(a_1) = 0$, $D^3z(a_1) = 1$. Из неосцилляции уравнения (1) следует, что $z(x) > 0$ на (a_1,b). Тогда $g(x) \equiv Cz(x)$, $C = const$, на $(a_1,s) \in (a_1,b)$ и мы получаем, что $S(\sigma g(s-0), -\sigma g'(s-0), \sigma g''(s-0)) = 2$. Из свойств 2), 3) срезок функции Грина следует $S(\sigma g(s+0), \sigma g'(s+0), \sigma g''(s+0)) = 2$. При этом, из краевых условий в точке b следует $S(\sigma g(b-0), \sigma g'(b-0), \sigma g''(b-0)) = 2$. Применяя к функции $g(x)$ обобщенное правило Декарта на (s,b) [7], получим $S(g) \leqslant 3 - S(\sigma g(b-0), \sigma g'(b-0), \sigma g''_2(b-0)) - S(\sigma g(s+0), -\sigma g'(s+0), \sigma g''(s+0)) = -1$, т. е. $g(x) \equiv 0$, что противоречит свойствам функции $\widetilde{G}(x,s)$ из предыдущего следствия.

Итак, $g(a_1) \neq 0$. Тогда из краевых условий (8.1) в точке a следует $g(a_1)D^3g(a_1-0) > 0$. Покажем, что и $g(a_1)D^3g(a_1+0) < 0$. Рассуждая от противного, с учетом (3) и (8.1), в этом случае имеем $S(\sigma g(a_1+0), -\sigma g'(a_1+0), \sigma g''(a_1+0), -\sigma g'''(a_1+0)) = 3$. Применяя к функции $g(x)$ на $(a_1, s) \in (a_1, b)$ обобщенное правило Декарта, получим $S(\sigma g(s-0), \sigma g'(s-0), \sigma g''(s-0)) = 0$. А далее повторяются рассуждения предыдущего случая, приводящие к противоречию. □

Лемма 12. *Функция Грина* $\widetilde{G}(x,s)$ *задачи* (I) *положительна при* $x \in (a_1, b]$ *и* $s \in (a_1, b)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $s_0 \in (a_1, b)$ и рассмотрим срезку $g_{s_0}(x)$ функции $\widetilde{G}(x, s_0)$. Из леммы 11 следуют неравенства $g_{s_0}(a_1)D^3g_{s_0}(a_1 - 0) > 0$ и $g_{s_0}(a_1)D^3g_{s_0}(a_1+0) < 0$, а из утверждения 2) теоремы 17 следует, что при $x \in (a_1, b]$ будет выполнено неравенство $g_{s_0}(x) > 0$. □

Из краевых условий (8.1) в точке a и леммы 12 следует утверждение

Теорема 18. *Функция Грина задачи* (I) *положительна при* $x \in \Gamma$ *и* $s \in (a_1, b)$.

Далее мы изучим вопрос о связи поведения функции $G_1(x,s)$ вне диагональных квадратов с функцией $\widetilde{G}(x,s)$.

Учитывая симметричность функции Грина $G_1(x,s)$, мы рассмотрим лишь случай $x \in (a, a_1)$ и $s \in (a_1, b)$. Рассмотрим функцию Грина $\widetilde{G}(x,s)$ вспомогательной задачи (I). Для каждого $s \in (a_1, b)$ определим величину

$$\delta_1(s) = \frac{D^3\widetilde{g}_s(a_1-0) - D^3\widetilde{g}_s(a_1+0)}{\widetilde{g}_s(a_1)}, \tag{8.3}$$

где через $\widetilde{g}_s(x)$ обозначаем срезку функции $\widetilde{G}(x,s)$ при $s \in (a_1, b)$. Из теоремы 18 следует, что функция $\delta(s)$ определена при всех $s \in (a_1, b)$ и принимает положительные значения.

Лемма 13. *Пусть* $s \in (a_1, b)$. *Тогда срезка* $\widetilde{g}_s(x)$ *функции Грина* $\widetilde{G}(x,s)$ *вспомогательной задачи* (I) *совпадает на* Γ *со срезкой* $g_s(x)$ *функции Грина* $G(x,s)$ *задачи (1)–(3) у которой в условии (3)* $\delta_1 = \delta_1(s)$, *где* $\delta_1(s)$ *определяется формулой (8.3).*

Для доказательства леммы 13 нужно лишь заметить, что функции $g_s(x)$ и $\widetilde{g}_s(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям (2), (3) и воспользоваться невырожденностью задачи (1)–(3).

Лемма 14. *Не существует двух различных* $x_1, x_2 \in (a_1, b)$, *чтобы на прямоугольнике* $(x,s) \in (a_1, b) \times (a, a_1)$ *для функции Грина* $G(x,s)$ *задачи (1)–(3) одновременно выполнялись равенства*

$$\frac{\partial G}{\partial s}(x_j, a) = \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(x_j, a) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{8.4}$$

Доказательство. Обозначим через $G_a(x,s)$ функцию Грина краевой задачи для уравнения (1), суженного на интервал (a, a_1), с условиями (2_a) и условиям $u(a_1) = u'(a_1) = 0$. Далее мы будем рассматривать поведение функции $G_a(x,s)$ при $s \in (a, a_1)$ близких к концу a. Для этого воспользуемся формулами (5.2), согласно которым при $\tau \to +0$ имеет место равенство

$$G_a(x, a+\tau) = \varphi_a(x)\frac{\tau^{\theta_a}}{\theta_a!} + o(\tau^{\theta_a}), \quad x \in (a_i, b), \tag{8.5}$$

в котором $\theta_a = 1$ при $\beta(a) \neq 0$ и $\theta_a = 2$ при $\beta(a) = 0$; функция $\varphi_a(x)$ является решением уравнения (1) на интервале (a, a_1), удовлетворяющим в точке a условиям $\varphi_a(a) = 0$, $\beta(a)\varphi_a''(a) - \vartheta(a)\varphi_a'(a) = 1$, и условиям $u(a_1) = u'(a_1) = 0$.

Согласно результатам монографии [5], для функции Грина задачи (1)–(3) на прямоугольнике $(a_1, b) \times (a, a_1)$ имеет место представление

$$G(x, s) = -\phi_1(x)\psi_1(s) - \phi_2(x)\psi_2(s). \tag{8.6}$$

Здесь через $\phi_1(x)$ обозначено решение однородного уравнения $L\phi = 0$ на Γ, удовлетворяющее неоднородному условию

$$l_1(\phi_1) = p(a_1 - 0)\frac{d^2}{dx^2}\phi_1(a_1 - 0) - p(a_1 + 0)\frac{d^2}{dx^2}\phi_1(a_1 + 0) = 1$$

и всем оставшимся из условий (2), (3). А через $\phi_2(x)$ обозначено решение того же уравнения, удовлетворяющее неоднородному условию

$$l_2(\phi_2) = D^3\phi_2(a_1 - 0) - D^3\phi_2(a_1 + 0) - \delta_1\phi_2(a_1) = 1$$

и всем оставшимся из условий (2), (3). Функции $\psi_i(s)$, $i = 1, 2$, определяются равенствами $\psi_1(s) = p(a_a - 0)\frac{d^2}{dx^2}G_a(a_1 - 0, s)$, $\psi_2(s) = D^3G_a(a_1 - 0, s))$.

Предположим, что утверждение леммы не верно и рассмотрим поведение срезок $g_s(\cdot) = G(\cdot, s)$ в окрестностях точек x_j, $j = 1, 2$, при $s \to a + 0$. Согласно формулам (8.5) и (8.6) имеем

$$g_{a+\tau}(x_j) = -\phi_1(x_j)\psi_1(a + \tau) - \phi_2(x_j)\psi_2(a + \tau) =$$
$$= -\left[\phi_1(x_j)p(a_1)\varphi_a''(a_1) + \phi_2(x_j)D^3\varphi_a(a_1)\right]\frac{\tau^{\theta_a}}{\theta_a!} + o(\tau^{\theta_a}).$$

Величины $\varphi_a''(a_1)$ и $D^3\varphi_a(a_1)$ не равны нулю, так как в противном случае окажется, что $\varphi_{21}(x)$ является решением невырожденной однородной краевой задачи на (a, a_1), т. е. будет выполнено тождество $\varphi_a(x) \equiv 0$, противоречащее самому определению функции $\varphi_a(x)$. Поэтому одновременное выполнение равенств (8.4), с учетом $\theta_a \leqslant 2$, означает, что

$$\phi_1(x_j)p_2(a_1)\varphi_a''(a_1) + \phi_2(x_j)D^3\varphi_a(a_1) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим функцию $\phi(x) = \phi_1(x)p_2(a_1)\varphi_a''(a_1) + \phi_2(x)D^3\varphi_a(a_1)$. Она обладает следующими свойствами: 1) является решением уравнения (1) на Γ; 2) удовлетворяет условиям (2); 3) имеет внутри ребра (a_1, b) два нуля x_j. Из этих условий следует тождественное равенство $\phi(x) \equiv 0$ на (a_1, b). Но тогда функция $\phi(x)$ удовлетворяет в точке a условиям (2_a), а в точке a_1 - условиям $\phi(a_1) = \phi'(a_1) = 0$, т. е. $\phi_1(x)$ является решением невырожденной однородной краевой задачи на (a, a_1), а значит, $\phi(x) \equiv 0$ на всем Γ. Последнее означает линейную зависимость функций $\phi_i(x)$, что невозможно. □

Лемма 15. *Пусть s_1 и s_2 две различные точки интервала (a_1, b). Тогда $\delta_1(s_1) \neq \delta_1(s_2)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\delta_1(s_1) = \delta_1(s_2)$. Тогда из леммы 13 следует, что $g_{s_k}(x) \equiv \widetilde{g}_s(x)$ на Γ, где $g_{s_k}(x)$ – срезки $G(x, s_k)$, $k = 1, 2$, функции Грина краевой задачи (1)–(3) при $\delta_1 = \delta_1(s_1) = \delta_1(s_2)$. Но тогда получается, что для функции Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(3) при $\delta_1(s_1) = \delta_1(s_1)$ существуют две различные точки $s_1, s_2 \in (a_1, b)$ такие, что одновременно выполняются равенства

$$\frac{\partial G}{\partial x}(a, s_k) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a, s_k) = 0, \quad k = 1, 2,$$

что противоречит утверждению леммы 15. □

Лемма 16. *При $s \to a_1+0$ величина $\delta_1(s)$ неограниченно растет, т. е.* $\lim\limits_{s\to a_1+0} \delta(s) = +\infty$.

Доказательство. Рассмотрим формулу (8.3). Из условий (8.1) в точке a и определения функции $g_s(x)$ следует равенство

$$\delta(s) = \frac{1}{z(a_1-0)} - \frac{D^3\widetilde{g}_s(a_1+0)}{\widetilde{g}_s(a_1)}, \tag{8.7}$$

где $z(x)$ –решение уравнения (1), суженного на интервал (a, a_1), удовлетворяющее начальным условиям $z(a) = z'(a) = z''(a) = 0$, $D^3z(a) = 1$.

Используя свойства предельных срезок функции Грина (см. [5]), имеем

$$\lim_{s\to a_1+0} D^3\widetilde{g}_s(s) = D^3\big(\lim_{s\to a_1+0}\widetilde{g}_s(s)\big) - 1 = -1.$$

Из теоремы 18 следует, что при каждом $s \in (a_1, b)$ функция $\widetilde{g}_s(x)$ положительна на Γ, поэтому, с учетом свойства 5) следствия 5, окончательно получаем

$$\lim_{s\to a_1+0}\delta(s) = \frac{1}{z(a_1)} - \lim_{s\to a_1+0}\frac{D^3\widetilde{g}_s(s)}{\widetilde{g}_s(s)} = \frac{1}{z(a_1)} - \frac{1}{\lim\limits_{s\to a_1+0}\widetilde{g}_s(s)} = +\infty.$$

□

Из лемм 15 и 16 следует, что функция $\delta_1(s)$ строго убывает на (a_1, b) и, в силу (8.7) и леммы 11, ограничена снизу величиной $\frac{1}{z(a_1)}$. Поэтому имеет место

Следствие 6. *При $s \to b-0$ функция $\delta_1(s)$ имеет положительный предел* $\delta = \inf\limits_{s\in(a_1,b)} \delta_1(s)$.

Найдем величину δ. Для этого воспользуемся представлением функции Грина $\widetilde{G}(x,s)$ вспомогательной задачи (I). Согласно результатам [5], на диагональном квадрате $(a_1,b)\times(a_1,b)$ имеет место формула

$$\widetilde{G}(x,s) = G_b(x,s) - \chi(x)\psi(s), \quad x,s\in(a_1,b). \tag{8.8}$$

Здесь $G_b(x,s)$ функцию Грина краевой задачи для уравнения (1), суженного на интервал (a_1,b), с краевыми условиями $u(a_1) = u'(a_1) = 0$ и (2_b); $\psi(s) = p(a_1+0)\frac{\partial^2 G_b(a_1+0,s)}{\partial x^2}$. А через $\chi(x)$ обозначено решение однородного уравнения $L\chi(x) = 0$, $x\in\Gamma$, удовлетворяющее неоднородному условию

$$l_1(\chi) = p(a_1-0)\frac{d^2}{dx^2}\chi(a_1-0) - p(a_1+0)\frac{d^2}{dx^2}\chi(a_1+0) = 1,$$

однородным условиям (8.1), первым двум из условий (3) в точке a_1.

Из следствия 6, формул (8.7), (8.8) и тождества $G_2(b,s)\equiv 0$ получаем

$$\delta_0 = \lim_{s\to b-0}\delta_1(s) = \frac{1}{z(a_1)} - \lim_{s\to b-0}\frac{D^3G_b(a_1+0,s) - D^3\chi(a_1+0)\psi(s)}{G_b(a_1+0,s)-\chi(a_1+0)\psi(s)} =$$
$$= \frac{1}{z(a_1)} - \lim_{s\to b-0}\frac{D^3G_b(a_1+0,s) - D^3\chi(a_1+0)\psi(s)}{\chi(a_1+0)\psi(s)}.$$

Используя (5.2), получим

$$\begin{gathered} \delta_0 = \frac{1}{z(a_1)} - \lim_{\tau\to+0} \frac{D^3\varphi_b(a_1+0)\frac{\tau^{\theta_b}}{\theta_b!} + o(\tau^{\theta_b})}{\chi(a_1+0)p(a_1+0)\varphi_b''(a_1+0)\frac{\tau^{\theta_b}}{\theta_b!} + o(\tau^{\theta_b})} - \\ - \lim_{\tau\to+0} \frac{D^3\chi(a_1+0)}{\chi(a_1+0)} = \frac{1}{z_1(b)} - \frac{D^3\varphi_b(a_1+0)}{\chi(a_1+0)p(a_1+0)\varphi_b''(a_1+0)} - \frac{D^3\chi(a_1+0)}{\chi(a_1+0)}. \end{gathered} \tag{8.9}$$

Лемма 17. *Пусть функция Грина $G_1(x,s)$ задачи (1)–(3) не сохраняет знак на $\Gamma\times\Gamma$. Тогда найдется единственная точка $s_0\in(a,a_1)$ такая, что срезка $g_{s_0}(x) = G_1(x,s_0)$ совпадает на всем Γ со срезкой $\widetilde{g}_{s_0}(x) = \widetilde{G}(x,s_0)$.*

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что если функция $G_1(x,s)$ меняет знак, то она отрицательна вблизи угловой точки $x=b$, $s=a$ и положительна на Γ при $s=a_1$. Поэтому $\sigma\frac{\partial^{\theta_b}G_1}{\partial x^{\theta_b}}(b-0,a+0)<0$ и $\sigma\frac{\partial^{\theta_b}G_1}{\partial x^{\theta_b}}(b-0,a_1-0)>0$. Из непрерывности на $\Gamma\times\Gamma$ функции $G_1(x,s)$ и ее первых двух производных следует, что существует точка $s_0\in(a,a_1)$ такая, что $\frac{\partial G_1}{\partial x}(b-0,s_0) = \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(b-0,s_0) = 0$. Единственность же такой точки следует из леммы 14. □

Теперь мы можем сформулировать основной данного параграфа.

Теорема 19. *Функция Грина $G_1(x,s)$ задачи (1)–(3) строго положительна внутри $\Gamma\times\Gamma$ тогда и только тогда, когда коэффициент δ_1 из условия (3) удовлетворяет неравенству*

$$\delta_1 \leqslant \frac{1}{z_1(b)} - \frac{D^3\varphi_b(a_1+0)}{\chi(a_1+0)p(a_1+0)\varphi_b''(a_1+0)} - \frac{D^3\chi(a_1+0)}{\chi(a_1+0)}. \tag{8.10}$$

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что для положительности функции Грина $G(x,s)$ необходимо и достаточно, чтобы она была положительна на прямоугольнике $(a,a_1)\times(a_1,b)$. А далее доказательство следует из следствия 6, лемм 13, 16 и формулы (8.9). □

Замечание 4. Все рассуждения данного параграфа можно повторить поменяв ролями концы интервала (a,b). Если теперь заметить, что в определениях функций $z(z)$, $\xi(x)$ и $\varphi_b(x)$ не задействованы коэффициенты $\beta(a)$ и $\vartheta(a)$ из граничного условия (2_a), то можно утверждать, что правая часть неравенства (8.10), а значит, и величина δ вообще не зависят от коэффициентов краевых условий (2). Сопоставляя результаты этого параграфа с теоремой 13, получаем равенство $\delta = \frac{1}{\mathfrak{d}(a_1)}$, где $\mathfrak{d}(a_1)$ определяется по формуле (6.3), а δ по формуле (8.10). Это позволяет посчитать "критическое"значение коэффициента δ_1 в условии (3), при переходе через которое теряется положительность (а значит и осцилляционность) функции влияния, сразу для всех краевых задач, определяемых уравнением (1) на Γ с условиями (3) в точке a_1 и условиями вида (2) на краях интервала.

Список литературы

[1] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц.—М.: Наука, 1966.

[2] *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.

[3] *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.

[4] *Покорный Ю. В., Бахтина Ж.И., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.—М.: Физматлит, 2009.

[5] *Покорный Ю. В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В. , Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2007.

[6] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Ч. 2.

[7] *Боровских А.В.* Условия знакорегулярности разрывных краевых задач // Математические заметки. 2003. Т. 74, №5. С. 643–655.

[8] *Боровских А.В., Лазарев К.П., Покорный Ю.В.* Об осцилляционных спектральных свойствах разрывных краевых задач // Докл. РАН. 1994. Т. 335, №4. С. 409–412.

[9] *Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* О ядрах Келлога в разрывных задачах // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко, Тр. МИАН. 1995. Т. 211, С. 102–120.

[10] *Боровских А.В., Покорный Ю.В.* Системы Чебышева – Хаара в теории разрывных ядер Келлога // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49, №. 3. С. 3–42.

[11] *Гантмахер Ф. Р.* О несимметрических ядрах Келлога // ДАН СССР. 1936. Т. 10, №1. С. 3–5.

[12] *Левин А.Ю., Степанов Г.Д.* Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака, II. // Сиб. мат. журнал. 1976. Т. 17, № 3. С. 606–626, № 4. С. 813–830.

[13] *Покорный Ю. В.* О знакорегулярных функциях Грина некоторых неклассических задач // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36. №4. С. 205–206.

[14] *Покорный Ю. В.* О нулях функции Грина задачи Валле–Пуссена // Математический сборник. 2008. Т. 199, № 6. С. 105–136.

[15] *Покорный Ю.В., Лазарев К.П.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №. 4. С. 658–670.

[16] *Степанов Г.Д.* Критерий осцилляционности функции Грина двухточечной краевой задачи // ДАН СССР. 1973. Т. 213, №4. С. 793–794.

[17] *Степанов Г.Д.* Критерий знакорегулярности функции Грина двухточечной краевой задачи // ДАН СССР. 1977. Т. 234, №4. С. 765–767.

[18] *Степанов Г.Д.* Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функции Грина двухточечных задач // Математический сборник. 1997. Т.188, № 11. С. 121–159.

[19] *Karlin S.* Total positivity, interpolations by Splines and Green's functions for ordinary differential equations // J. Approx. Theory. 1971. V. 4. №1. P. 91–112.

[20] *Kellogg O. D.* The Oscillation of Functions of an Orthogonal Set // Amer. J.Math. 1916. V. 38. P. 1–5.

[21] *Kellogg O. D.* Orthogonal Function Sets Arising from Integral Equations // Amer. J. Math. 1918. -V. 40. P. 145–154.

[22] *Schoenberg I. J.* Uber variation svermindendern de lineare Transformationen // Vath. Z.—1930. №. 32. P. 321–328.

[23] *Polya G.* On the mean–value theorem corresponding to a given homogeneous differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. V. 24. P. 312–324.

Оптимальные стратегии рискочувствительного инвестирования на стохастическом рынке с учетом скачков цен

Лобсанова Т.Б.[1]

Решается простейшая задача оптимального рискочувствительного инвестирования на рынке ценных бумаг с изменением цен, описываемым броуновским и пуассоновским процессами. Ключевым моментом является нахождение точного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности распределения капитала портфеля, которое в данном случае является интегро-дифференциальным.

Известно, что основной функцией финансово-кредитной системы является регулирование финансовых потоков, и поэтому это быстро развивающаяся отрасль рыночной экономики. Способствует этому расширение и усложнение финансовых рынков. Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают сложные потоки платежей и движения цен. Ситуация отягощается и тем, что изменения процентных ставок и индексов на рынках стохастические, а в качестве математических моделей этих процессов необходимо использовать случайные процессы различных типов. Основная задача участников финансовых рынков — определение цен финансовых инструментов — может быть решена только с привлечением вероятностных методов. Одной из таких задач является нахождение оптимальной стратегии инвестирования.

Начало исследованиям подобного типа положили Ф. Блэк, М. Шоулс и Р. Мертон. В качестве модели изменения стоимости акции Ф. Блэк и М. Шоулс применяли диффузионный процесс, который является геометрическим броуновским движением:

$$dF(t) = \mu(t, F(t))dt + \sigma(t, F(t))dW(t), \tag{1}$$

где t — время, $\mu(t, F(t)), \quad \sigma(t, F(t))$ — заданные функции, $W(t)$ — броуновское движение.

В последующие годы модель обобщалась в различных направлениях путем применения разнообразных математических средств стохастического анализа и уравнений в частных производных. Одним из таких обобщений является попытка добавления в правой части возмущения в форме пуассоновского процесса для учета возможных скачкообразных изменений цен, продемонстрированная в данной работе.

[1]Лобсанова Татьяна Баировна, *lobsanova_tb@mail.ru*, студент, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

1.Постановка задачи

Пусть $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_t \geq 0, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ - вероятностное пространство. Обозначим через $S_i, i = 1,2,$ стоимости активов, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} &= \mu_i dt + \sigma_i dW_i(t) + a_i d\Gamma_i(t), \\ S_i(0) &= s_i > 0, i = 1,2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mu_i(t, S_i(t))$, $\sigma_i(t, S_i(t))$, $a_i(t, S_i(t))$ — заданные функции, $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ — двумерное броуновское движение с независимыми компонентами, $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$ — двумерный обобщенный пуассоновский процесс с независимыми компонентами.

Пусть $\mathcal{G}_t = \sigma\left(S(s), 0 \leq s \leq t\right)$, где $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$ является процессом стоимостей активов. Обозначим через $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ двумерный инвестиционный процесс, или стратегию инвестирования, где $h_i(t)$ — доля капитала, инвестированная в i-й актив в момент времени t.

Определение 1. Будем называть стратегию $h(t) = (h_1(t), ..., h_m(t))$ *допустимой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\sum\limits_{i=1}^{m} h_i(t) = 1$
2. $h(t)$ прогрессивно измерим по $\mathcal{G}_t$
3. $\mathbf{P}\left[\int\limits_0^t h^T(s)h(s)ds < \infty\right] = 1$ для всех конечных $t \geq 0$

Пусть $h(t)$ допустимая стратегия инвестирования. Тогда существует единственное, сильное, почти всегда положительное решение $V(t)$, удовлетворяющее СДУ

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{V(t)} &= h_1\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} + h_2\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = \\ &= h_1(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_1(t) + a_1 d\Gamma_1(t)) + \\ &+ h_2(\mu_2 dt + \sigma_2 dW_2(t) + a_2 d\Gamma_2(t)), \\ V(0) &= v > 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\dfrac{dS_i(t)}{S_i(t)}$ задаются уравнениями (2). Процесс $V(t)$ соответствует капиталу портфеля в момент времени t, где $h_i(t)$ — доля капитала, инвестированная в i-й актив.

Обозначим $\ln V(t) = F(t)$. Тогда согласно формуле Ито из (3) получим

$$\begin{aligned} dF(t) &= (h_1\mu_1 + h_2\mu_2 - \frac{1}{2}h_1^2\sigma_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2\sigma_2^2)dt + \\ &+ h_1\sigma_1 dW_1(t) + h_2\sigma_2 dW_2(t) + h_1 a_1 d\Gamma_1(t) + h_2 a_2 d\Gamma_2(t), \\ F(0) &= \ln V(0) = f. \end{aligned} \tag{4}$$

Зададим функционал $J(t,h)$ аналогичный первым двум членам разложения в ряд Тейлора по малому рискочувствительному параметру γ в модели Белецкого-Плиски, а именно

$$J(t,h) = \mathbf{E}(F) - \gamma\mathbf{D}(F),$$

где $\gamma \geq 0$ — коэффициент риска, $\mathbf{E}(F)$ и $\mathbf{D}(F)$ — математическое ожидание и дисперсия величины $F(t)$.

Мы решаем следующую задачу: при фиксированном t найти $\max\limits_{h=(h_1,\dots,h_m)} J(t,h)$ над классом допустимых стратегий инвестирования h, заданных в определении 1.

Определение 2. Будем называть стратегию $h(t) = (h_1(t), ..., h_m(t))$ *оптимальной*, если на ней реализуется максимум функционала $J(t,h)$ в заданный момент времени t.

Мы, отталкиваясь от модели Белецкого-Плиски, приведенной, например, в работе [5], строим рискочувствительную стратегию в любой выбранный момент времени. А именно, рассматриваем разницу между математическим ожиданием доходности капитала портфеля и величиной дисперсии этой доходности с коэффициентом, являющимся параметром риска, и максимизируем этот функционал над классом допустимых стратегий управления. Такой функционал аналогичен первым двум членам при разложении функционала Белецкого-Плиски в ряд Тейлора по малому рискочувствительному параметру.

Пример построения оптимальной стратегии таким образом для более простого случая приведен в [6].

2. Модель скачкообразной диффузии

Рассмотрим совместное воздействие на цену опциона гауссовского и пуассоновского шумов, как, например, в [2]. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), которому удовлетворяет цена, запишем в виде

$$\begin{aligned} dF(t) &= \mu dt + \sigma dW(t) + a d\Gamma(t), \\ F(0) &= f, \quad t \geq 0, \quad f \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{5}$$

где t — время, $\mu, \sigma > 0, a > 0$ — постоянные величины, $W(t)$ — броуновское движение, Γ — обобщенный пуассоновский процесс, порождающий скачки.

Плотность распределения $P(t,f)$ случайной величины F описывается дифференциально-интегральным уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) (см., например, [1] и [2]):

$$\frac{\partial P(t,f)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial P(t,f)}{\partial f} + \epsilon \frac{\partial^2 P(t,f)}{\partial f^2} + a \left(\int\limits_0^f P(f-z)\omega(z)dz - P(f) \right), \tag{6}$$

с начальными данными

$$P(0,f) = P_0(f) = \delta(f - f_0),$$

определенными начальным распределением F, где $\mu, \epsilon = \dfrac{\sigma^2}{2} > 0, a > 0$ - константы.

Отметим, что в отличие случая (1), в котором отсутствует пуассоновский процесс, в данном уравнении ФПК возникает интегральный член $a \left(\int\limits_0^f P(f-z)\omega(z)dz - P(f) \right)$.

Рассмотрим простой случай [3]

$$\omega(z) = k e^{-kz},$$

где $k > 0$ - константа. Получим уравнение

$$\frac{\partial P(t,f)}{\partial t} = -\mu \frac{\partial P(t,f)}{\partial f} + \epsilon \frac{\partial^2 P(t,f)}{\partial f^2} + a \left(\int\limits_0^f P(f-z) k e^{-kz} dz - P(f) \right), \tag{7}$$

$$P(0,f) = P_0(f) = \delta(f - f_0).$$

Если $P(t,f)$ известна, то можно найти математическое ожидание (среднее) величины F в момент времени t, определенное формулой

$$\mathbf{E}(F(t)) = \int\limits_{\mathbb{R}} f P(t,f)\, df. \tag{8}$$

Дисперсия величины F в момент времени t задается формулой

$$\mathbf{D}(F(t)) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^2 P(t,f)\, df - \mathbf{E}^2(F(t)). \tag{9}$$

Отметим, что иногда преобразование Фурье по переменной f функции $P(t,f)$ находится гораздо проще, чем сама эта функция. В этом случае математическое ожидание и дисперсию можно выразить в терминах преобразования Фурье.

3. Представления для математического ожидания и дисперсии случайной величины F

Лемма 1. *Предположим, что $\hat{P}(t,g)$ — преобразование Фурье по переменной f функции $P(t,f)$, являющейся решением задачи (7). Тогда величины $\boldsymbol{E}(F(t))$ и $\boldsymbol{D}(F(t))$ могут быть найдены следующим образом:*

$$\boldsymbol{E}(F(t)) = i \frac{\partial \hat{P}(t,0)}{\partial g}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{D}(F(t)) = \left(\frac{\partial \hat{P}(t,0)}{\partial g} \right)^2 - \frac{\partial^2 \hat{P}(t,0)}{\partial g^2}, \tag{11}$$

$$t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть под F_g^{-1} понимается обратное преобразование Фурье по переменной g, $(.,.)_g$ означает действие обобщенной функции на основную по переменной g.

Найдем $\int\limits_{\mathbb{R}} f P(t,f)\, df$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} f^2 P(t,f)\, df$.

$$\begin{gathered} \int\limits_{\mathbb{R}} f P(t,f)\, df = \int\limits_{\mathbb{R}} f F_g^{-1}[\hat{P}(t,g)]\, df = \\ = \left(F_f^{-1}[f](g), \hat{P}(t,g) \right)_g = -i \left(\delta'(g), \hat{P}(t,g) \right)_g = \\ = i \left(\delta(g), \frac{\partial \hat{P}(t,g)}{\partial g} \right)_g = i \frac{\partial \hat{P}(t,0)}{\partial g}. \end{gathered} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} f^2 P(t,f)\,df &= \int\limits_{\mathbb{R}} f^2 F_g^{-1}[\hat{P}(t,g)]\,df = \\
= \left(F_f^{-1}[f^2](g), \hat{P}(t,g)\right)_g &= -i\left(\delta''(g), \hat{P}(t,g)\right)_g = \\
= -i\left(\delta(g), \frac{\partial^2 \hat{P}(t,g)}{\partial g^2}\right)_g &= -i\frac{\partial^2 \hat{P}(t,0)}{\partial g^2}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Подставив полученные выражения (12), (13) в формулы (8), (9), убедимся в справедливости утверждения. Таким образом, лемма доказана. □

Данная лемма была сформулирована и доказана в случае условного математического ожидания и условной дисперсии величины F в [4].

Из уравнения ФПК (7) найдем $\hat{P}(t,g)$ - преобразование Фурье по переменной f функции $P(t,f)$.

Выполняя замену переменных

$$
y(t,f) = \int\limits_0^f P(f-z)e^{-kz}dz, \tag{14}
$$

переходим к линейному уранению 3-его порядка относительно $y(t,f)$

$$
\frac{d^2}{dtdf}y(t,f) + \frac{d}{dt}y(t,f) = \epsilon\frac{d^3}{df^3}y(t,f) + (\epsilon k - \mu)\frac{d^2}{df^2}y(t,f) + (-k\mu - a)\frac{d}{df}y(t,f), \tag{15}
$$

с начальным условием

$$
y(0,f) = y_0(f) = \delta(f). \tag{16}
$$

Тогда решение $P(t,f)$ уравнения (7) выражается через новую переменную $y(t,f)$ следующим образом

$$
P(t,f) = \frac{\partial}{\partial f}y(t,f) + ky(t,f). \tag{17}
$$

Выполним преобразование Фурье функции $y(t,f)$ по переменной f. Тогда уравнения (15) и (16) примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
(k+gi)\frac{\partial}{\partial t}\hat{y}(t,g) &= g(-g\epsilon k + g\mu + (\epsilon g^2 - \mu k - a)i)\hat{y}(t,g), \\
\hat{y}(0,g) &= 1,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $\hat{y}(t,g)$ — преобразование Фурье функции $y(t,f)$ по переменной f.

Решением задачи (18) является функция

$$
\hat{y}(t,g) = e^{-\frac{(g^3\epsilon + ag + \epsilon k^2 g + (g^2\mu + k(\mu k + a))i)gt}{k^2+g^2}}. \tag{19}
$$

Далее, зная $\hat{y}(t,g)$ найдем $\hat{P}(t,g)$. Для этого применим преобразование Фурье по переменной f к обеим частям уравнения (17). Тогда

$$
\hat{P}(t,g) = (k+ig)\hat{y}(t,g), \tag{20}
$$

где $\hat{P}(t,g)$ и $\hat{y}(t,g)$ - преобразования Фурье функций $P(t,f)$ и $y(t,f)$ по переменной f соответственно. Таким образом, из (19), (20) и начального условия

$$\hat{P}(0,g) = e^{-if_0 g}$$

получим

$$\hat{P}(t,g) = e^{-if_0 g} e^{-\frac{(g^3\epsilon + ag + \epsilon k^2 g + (g^2\mu + k(\mu k + a))i)gt}{k^2+g^2}}. \tag{21}$$

Далее воспользуемся формулами (10), (11) для математического ожидания $\mathbf{E}(F(t))$ и дисперсии $\mathbf{D}(F(t))$ случайной величины F в терминах преобразования Фурье от $P(t,f)$.

Эти величины оказываются соответственно равными

$$\mathbf{E}(F(t)) = f_0 + \left(\mu + \frac{a}{k}\right) t, \tag{22}$$

$$\mathbf{D}(F(t)) = \left(\sigma^2 + \frac{2a}{k^2}\right) t, \tag{23}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что эти результаты могут быть получены непосредственно из свойств гауссовского и экпоненциального распределений. Однако наш подход позволяет описать задачу другим языком и допускает возможность обобщений, в том числе и на случай, когда стоимости активов зависят от случайного фактора (например, [6]).

4. Пример эффективного портфеля из двух активов, зависящих от процентной ставки

Итак, пусть портфель состоит из двух активов, рискового актива (например, это может быть биржевой индекс), и банковского счета. Доходности активов описываются СДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} &= (A_1 + \alpha_1 R)dt + \sigma_1 dW(t) + a_1 d\Gamma(t), \\ S_1(0) &= s > 0, \\ \frac{dS_2(t)}{S_2(t)} &= Rdt, \\ S_2(0) &= 1, \end{aligned} \tag{24}$$

где R - постоянная процентная ставка, $A_1, \alpha_1, \sigma_1, a_1$ — заданные константы, W — броуновское движение, Γ — пуассоновский процесс. Тренды активов линейным образом зависят от процентной ставки R.

Данная модель неоднократно исследовалась в работах Белецкого и Плиски, в том числе в [5], но без слагаемого с пуассоновским процессом и для линейной процентной ставки. В нашей работе включено это слагаемое, а процентная ставка R считается постоянной.

Будем считать, что инвестор может занять длинную или короткую позицию по отношению к биржевому индексу, а также занимать или одалживать деньги с непрерывным процентным начислением по действующей ставке.

Запишем уравнение для капитала инвестора в момент времени t

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{V(t)} &= (h_1 A_1 + (h_1\alpha_1 + h_2)R)dt + h_1\sigma_1 dW(t) + h_1 a_1 d\Gamma(t), \\ V(0) &= v > 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку мы рассматриваем портфель из двух активов, то стратегию инвестирования удобно описывать следующим образом: $h_1 = h$ — доля капитала, инвестированная в биржевой индекс, и соответственно $h_2 = 1 - h$ — доля капитала, размещенная на банковском счете.

Пусть $\ln V(t) = F(t)$. Тогда согласно формуле Ито

$$\begin{aligned} dF(t) &= \left(hA_1 - \frac{h^2\sigma_1^2}{2} + (h\alpha_1 + 1 - h)R\right)dt + h\sigma_1 dW(t) + ha_1 d\Gamma(t), \\ F(0) &= \ln V(0) = f. \end{aligned} \tag{26}$$

Для системы (26) справедливы формулы математического ожидания и дисперсии (22), (23) при подстановке в них значений

$$\mu = hA_1 - \frac{h^2\sigma_1^2}{2} + (h\alpha_1 + 1 - h)R,$$

$$\sigma = h\sigma_1, \quad a = ha_1$$

Теперь можем записать функцию $J(t,h)$ в явном виде, это будет квадратичная функция по h

$$\begin{aligned} J(t,h) &= f_0 + \left(hA_1 - \frac{h^2\sigma_1^2}{2} + (h\alpha_1 + 1 - h)R + \frac{ha_1}{k}\right)t - \gamma\left(h^2\sigma_1^2 + \frac{2ha_1}{k^2}\right)t = \\ &= -\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)\sigma_1^2 t h^2 + \left(A_1 + (\alpha_1 - 1)R + \frac{a_1}{k} - \gamma\frac{2a_1}{k^2}\right)th + f_0 + t, \end{aligned}$$

где $\gamma \geq 0$.

Для отыскания экстремума функции $J(t,h)$ найдем ее частную производную по h и приравняем к нулю. Поскольку старший коэффициент $-\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)\sigma_1^2 t$ квадратичной по h функции $J(t,h)$ отрицателен при $t > 0$, то ее максимум достигается в единственной точке экстремума

$$\bar{H}_\gamma = \frac{(A_1 + R(\alpha_1 - 1)k^2 + a_1 k - 2\gamma a_1)}{\sigma_1^2 k^2 (1 + 2\gamma)}.$$

Таким образом, в любой выбранный момент времени инвестор может максимизировать доход от инвестиций, применив оптимальную стратегию инвестирования: вложить долю капитала, равную $\bar{H}_\gamma$, в рискованный актив и разместив остаток капитала $1 - \bar{H}_\gamma$ на банковском счете.

Список литературы

[1] *Оксендаль Б.*, Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.

[2] *Ван Кампен Н.Г.*, Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.

[3] *N. Friedman, L.Cai, X.S. Xie,* Linking stochastic dynamics to population distribution: an analytical framework of gene expression // Phys. Rev. Lett, 97, 168302 (2006)

[4] *Martynov M.A., Rozanova O.S.* On dependence of the implied volatility on returns for stochastic volatility models // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes 2012. **83**, DOI: 10.1080/17442508.2012.673616.

[5] *Bielecki T., Pliska S.* Risk sensitive dynamic asset management // J. Appl. Math. and Optim. 1999. **37**. 337–360.

[6] *Камбарбаева Г.С.*, Математическое моделирование оптимальных стратегий инвестирования в линейной модели рынка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук./МГУ им. М. В. Ломоносова. М.,2011

Феномен буферности: механизмы его возникновения и проявление в математических моделях

Розов Н.Х.[1]

Эффективным инструментом познания разнообразных конкретных объектов и явлений окружающего нас мира служит теоретическое и численное исследование их математических моделей. В то же время именно обстоятельный анализ таких моделей часто приводил к постановке новых чисто математических задач и побуждал разработку новых математических методов.

Важным примером такого взаимно обогащающего взаимодействия теоретического исследования математической модели реального явления и глубокого проникновения в суть этого явления служит так называемый *феномен буферности*. Он лишь сравнительно недавно начал изучаться всесторонне и в полном объёме. Но подробное исследование этого феномена позволило внести новые элементы в трактовку понятия «нелинейного мира», яснее понять возможные механизмы сложнейших отношений порядка и хаоса в природе.

Хорошо известна та исключительная роль, которую играют всевозможные колебательные процессы в механике, физике, технике, химии, биологии, экономике и т.д. Важным аспектом их изучения является теоретический анализ математических моделей конкретных колебательных систем.

При исследовании *колебательных объектов с сосредоточенными параметрами* (или, короче, *сосредоточенных колебательных систем*), описываемых автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, ключевым является понятие *устойчивого предельного цикла* такой системы. Напомним, что это понятие было введено А. Пуанкаре чисто умозрительно в 80-х годах XIX века. Но лишь в 20-х годах XX века выдающийся советский физик А.А. Андронов установил, что устойчивый предельный цикл адекватное математическое отражение (описание) реального стационарного колебательного процесса (установившегося периодического режима) в системах с сосредоточенными параметрами.

Совершенно ясно, что, в зависимости от специфики прикладной проблемы, в одной ситуации принципиально важно наличие лишь единственного такого цикла, а в другой, наоборот, желательно, чтобы их было несколько или даже «много». Поскольку система обыкновенных дифференциальных уравнений, являющаяся адекватной математической моделью некоторого реального объекта или явления, всегда содержит *параметры* (отражающие конкретные характеристики исследуемого объекта или явления), то при различных значениях этих параметров, вообще говоря, существует разное количество устойчивых предельных циклов (или не существует ни одного). Не составляет особого труда

[1]Розов Николай Христович, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

привести примеры систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых соответствующим выбором значений параметров можно обеспечить существование любого конечного *a priori* заданного числа устойчивых предельных циклов.

В разнообразных областях науки, новой техники и современных технологий часто встречаются *колебательные объекты с распределенными параметрами* (или, короче, *распределенные колебательные системы*), состояние которых зависит и от времени, и от пространственных переменных: состояние объекта в каждой точке пространства периодически меняется во времени. Иначе говоря, в таких объектах наблюдаются периодические (по времени) *автоколебания*, или *автоволновые процессы* (термин Р.В.Хохлова).

Динамика подобных объектов моделируется, как правило, системами дифференциальных уравнений с частными производными, дополненными краевыми условиями. Автоколебательному режиму отвечает *устойчивый цикл* (или просто *цикл*), то есть стационарное в пространстве и периодическое по времени решение системы уравнений с частными производными, удовлетворяющее краевым условиям.

Такая *краевая задача*, конечно, содержит и *параметры*, которые характеризуют свойства реального объекта или явления. Если параметры фиксированы, то краевая задача может допускать один или несколько циклов (или не иметь ни одного). Установление их числа весьма важно, поскольку на практике означает выяснение количества сосуществующих в реальности автоколебательных режимов. Естественно, число таких циклов, вообще говоря, различно при разных значениях параметров. А потому возникает чисто математическая проблема исследования *зависимости числа устойчивых циклов от параметров* в краевой задаче для системы дифференциальных уравнений (или уравнения) с частными производными.

Говорят, что в математической модели распределенной колебательной системы наблюдается феномен *буферности*, если у рассматриваемой краевой задачи для данной системы дифференциальных уравнений с частными производными при надлежащем выборе значений входящих в неё параметров может существовать любое конечное заранее фиксированное количество различных устойчивых циклов. Другими словами, буферность означает теоретическую возможность для любого натурального N так подобрать характеристики объекта, чтобы в нем реализовывалось N разных автоволновых режимов.

В общем случае под феномен буферности динамической системы, зависящей от параметров, понимается следующее свойство: в её фазовом пространстве, при надлежащем выборе параметров, существует любое *a priori* выбранное конечное число однотипных аттракторов (устойчивых состояний равновесия, устойчивых периодических по времени решений, торов и т.д.).

Задачу об исследовании периодических по времени режимов в колебательных объектах с распределенными параметрами, по-видимому, впервые поставил советский физик А.А. Витт [1]. Имя и труды этого замечательного нашего ученого, к сожалению, мало известны, кроме, пожалуй, его работы [2]. Между тем, Александр Адольфович Витт, сотрудник и коллега А.А. Андронова, один из ярких представителей советской школы теории колебаний, выполнивший ряд оригинальных и перспективных исследований, соавтор классической монографии «Теория колебаний». А.А. Витт был репрессирован (и погиб в 1937 году), его публикации цитировались редко, а его фамилия среди авторов книги [3] не значилась и была восстановлена лишь через много лет [4]. А.А. Витт высказал гипотезу о том, что в так называемом «автогенераторе с отрезком длинной двухпроводной линии в цепи обратной связи» могут сосуществовать сразу несколько устойчивых циклов. Позже факт увеличения числа автоколебательных режимов при изменении параметра реального автогенератора был установлен физиками экспериментально [5]. Математическое же исследование феномена буферности было инициировано Ю.С. Колесовым, изучавшим его сначала численными методами в параболических системах типа реакция-диффузия [6], а затем теоретически в гиперболических уравнениях [7]. Ему же принадлежит и сам термин «буферность».

Подробное изложение строгой математической теории явления буферности можно найти в статьях и монографиях [8–12]. Рассматриваемые математические модели представляют собой нелинейные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического или параболического типа, а сценарий возрастания числа, например, их устойчивых периодических по времени решений (циклов) обычно разворачивается при увеличении некоторого параметра, отвечающего за энергию системы. (В качестве такового во многих радиофизических приложениях выступает коэффициент усиления.) Существенно, что сам феномен буферности специфичен для бифуркационного процесса, в ходе развития которого и происходит неограниченный рост количества сосуществующих устойчивых аттракторов.

Проведенные исследования показали, что явление буферности «типично» для весьма широкого класса математических моделей, которые адекватно описывают многие нелинейные колебательные процессы в естествознании (в радиофизике [13, 14], механике [15], оптике [16], теории горения [17], экологии [18], нейродинамике [19]). Помимо этого, удалось проследить связь феномена буферности с такими нетривиальными явлениями, как турбулентность и динамический хаос [20–22].

Доказательства соответствующих математических утверждений связаны с преодолением серьезных аналитических трудностей. Основным среди математических инструментов, использованных для анализа феномена буферности, является метод бесконечномерной нормализации, представляющий собой специальный вариант асимптотического метода Крылова — Боголюбова — Митропольского — Самойленко и смыкающийся в алгоритмическом плане с методом квазинормальных форм Ю.С.Колесова [23].

Как было отмечено, буферность представляет собой универсальное нелинейное явление, возникающее в математических моделях из различных областей естествознания. Поэтому весьма актуальна проблема изучения типовых сценариев накапливания аттракторов в различных динамических системах. К настоящему времени удалось выявить четыре таких сценария: в первую очередь это сценарий Витта, являющийся наиболее распространенным, а также тьюрингский, гамильтонов и гомоклинический механизмы накапливания аттракторов.

Ситуация, в которой реализуется *механизм Витта* (названный нами в память о А.А. Витте), характерна для широкого класса физических процессов, описывающихся гиперболическими уравнениями (например, для автоколебательных процессов в распределенных электрических и механических системах), и заключается в следующем.

Предположим, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия некоторой гиперболической системы имеет место критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении входящих в эту систему параметров происходит последовательное смещение части точек спектра в правую комплексную полуплоскость. Тогда, при отсутствии определенных резонансных соотношений между собственными частотами системы, в такой системе наблюдается феномен буферности в простейшем его варианте: происходит неограниченное накапливание квазигармонических (то есть близких к гармоническим по времени) устойчивых циклов, причем каждый отдельно взятый цикл рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивым, а затем обретает устойчивость, подрастая по амплитуде [9, 11, 13, 14].

Тьюрингский механизм отличается от механизма Витта по существу лишь тем, что каждый индивидуальный цикл (или состояние равновесия) при изменении управляющих параметров сначала обретает устойчивость, а затем снова ее теряет. Таким образом, хотя общее число аттракторов и увеличивается, но их состав постоянно обновляется.

Как показано в [12], данная ситуация реализуется главным образом в системах типа реакция-диффузия при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии, но может возникать и в системах с запаздыванием при неограниченном увеличении времени запаздывания. В частности, с ней мы сталкиваемся при рассмотрении хорошо известной модели «брюсселятор», изучавшейся ещё А. Тьюрингом (отсюда и название — тьюрингский механизм).

Описанные сценарии накапливания аттракторов характерны, естественно, только для систем с бесконечномерным фазовым пространством. Что же касается конечномерных систем, то в них простейшим механизмом возникновения буферности является, по всей видимости, так называемый *гамильтонов сценарий*, проиллюстрированный в [24, 25] на ряде двумерных отображений из механики и на системах обыкновенных дифференциальных уравнений, близких к двумерным гамильтоновым. Суть этого сценария состоит в следующем.

Рассмотрим сначала некоторую гамильтонову или консервативную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (физики такие системы часто называют обратимыми, так как они не меняются при обращении времени) с полутора или более степенями свободы. Согласно выработанным к настоящему времени общим представлениям о динамике таких систем, хаотические движения в них сосуществуют со счетным числом так называемых *островков устойчивости*, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. Это означает, что внешние хаотические траектории не могут попасть внутрь упомянутых островков, и наоборот, любая траектория из островка, которая в простейшем случае является периодической или квазипериодической, остается в нем при всех $t \in \mathbb{R}$.

Предположим, далее, что наша система возмущена малыми добавками, обеспечивающими ее диссипативность. Тогда некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми, на месте островков устойчивости возникают аттракторы и, что самое главное, количество последних может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю. А это как раз и означает, что в рассматриваемой системе наблюдается явление буферности, механизм которого уместно назвать гамильтоновым.

Следует заметить, что гамильтонов механизм, несмотря на его простоту, до сих пор оставался наименее изученным, хотя он подкреплён целым рядом содержательных примеров — скажем, уравнениями маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками [26] (в физической литературе такого типа уравнения принято называть системами с *полутора степенями свободы*).

В случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений существуют и другие, значительно более сложные механизмы накапливания устойчивых циклов, которые обусловлены наличием в системах так называемых гомоклинических касаний; с некоторой долей условности такие механизмы можно назвать *гомоклиническими*. Среди большого количества результатов, полученных для систем с гомоклиническими структурами, остановимся лишь на трех, имеющих непосредственное отношение к нашей тематике.

Первый результат можно сформулировать для C^r-гладкой ($r \geq 4$) системы обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ в предположении, что у нее существует изолированное состояние равновесия O с характеристическими корнями

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\omega, \gamma > 0, \omega \neq 0, \lambda_3 > 0.$$

Пусть, далее, имеется гомоклиническая к O траектория Г. Тогда, как установлено И.М. Овсянниковым и Л.П. Шильниковым, при

$$\sigma_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_1 + \lambda_3 > 0, \sigma_2 = 2\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \lambda_3 < 0$$

в классе таких систем плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений.

Второй результат, аналогичный только что описанному, принадлежит Ньюхаусу. Пусть p — гиперболическая седловая неподвижная точка C^r-диффеоморфизма f в $\mathbb{R}^2$, для которого $\det f'(p) < 1$, и пусть устойчивое и неустойчивое многообразия точки p касаются друг друга в некоторой точке p_0. Тогда в сколь угодно малой C^r-окрестности f существует диффеоморфизм $\widetilde{f}$, имеющий бесконечно много устойчивых периодических орбит.

Третий результат, принадлежащий Н.К. Гаврилову и Л.П. Шильникову, состоит в том, что появлению или исчезновению точки гомоклинического касания предшествуют каскады бифуркаций типа седло-узел. При этих бифуркациях рождаются пары циклов — устойчивый и неустойчивый, причем количество устойчивых периодических движений за счет подходящего выбора бифуркационных параметров может быть сделано сколь угодно большим. Конкретные примеры, в которых реализуется указанный сценарий возникновения буферности, хорошо известны (уравнение Дуффинга с малой диссипацией и малым периодическим внешним воздействием, уравнение колебаний маятника с малым затуханием и вибрирующей точкой подвеса).

Отметим, что реализуемость феномена буферности в автогенераторах с отрезком длинной линии в цепи обратной связи была подтверждена экспериментально [8, 14].

Литература

1. Витт А.А. Распределенные автоколебательные системы // Журнал технической физики. 1934. Т. 4. №1. С. 144-157.

2. Витт А.А. К теории скрипичной струны // Журнал технической физики. 1936. Т. 6. №9. С. 1459-1479.

3. Андронов А.А., Хайкин С.З. Теория колебаний. М., 1937.

4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., 1959, 1981.

5. Азьян Ю.М., Мигулин В.В. Об автоколебаниях в системах с запаздывающей обратной связью // Радиотехника и электроника. 1956. Т. 1. №4. С. 126-130.

6. Захаров А.А., Колесов Ю.С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник – жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль, 1984. С. 3-15.

7. Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнений // ДАН СССР. 1990. Т. 315. №2. С. 281-283.

8. Колесов А.Ю, Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Труды МИАН. 1998. Т. 222. С. 1-192. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. Asymptotic methods of investigation of periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations // Proc. Steklov Inst. Math. 1998. V. 222. 188 p.

9. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений // Успехи математических наук. 2000. Т. 55. №2. С. 95-120. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. The buffer property in resonance systems of non-linear hyperbolic equations // Rus. Math. Surv. 2000. V. 55. №2. P. 297-312.

10. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. К вопросу о теоретическом объяснении явления диффузионной буферности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. №11. С. 2020-2040. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. On theoretical explanation of the diffusion buffer phenomenon // Comput. Math. Math. Phys. 2004. V. 44. № 11. P. 1922-1941.

11. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Феномен буферности в нелинейной физике // Труды МИАН. 2005. Т. 250. С. 112-182. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. Buffer phenomenon in nonlinear physics // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. V. 250. P. 102-168.

12. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2010.

13. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Асимптотическая теория колебаний в системе Витта // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. 1999. Т. 67. М., ВИНИТИ. С. 5-68. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Asymptotic theory of oscillations in Vitt systems // J. Math. Sci. 2001. V. 105. №1. P. 1697-1737.

14. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Труды МИАН. 2001. Т. 233. С. 152-206. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The buffer phenomenon in an RCLG-oscillator: theoretical analysis and experimental results // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. V. 233. P. 143-196.

15. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в распределенных механических системах // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. №2. С. 183-198. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The bufferness phenomenon in distributed mechanical systems // J. Appl. Math. Mech. 2001. V. 65. №2. P. 179-193.

16. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Оптическая буферность и механизмы её возникновения // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 140. №1. С. 14-28. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Optical buffering and mechanisms for its occurrence // Theor. Math. Phys. 2004. V. 140. № 1. P. 905-917.

17. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в теории горения // Доклады АН (Россия). 2004. Т. 396. №2. С. 170-173. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The buffer phenomenon in combustion theory // Dokl. Math. 2004. V. 69. №3. P. 469-472.

18. Колесов А.Ю., Розов Н.Х.. Диффузионная буферность в одной математической модели биологии // Известия РАН. Серия математическая. 1998. Т. 62. №5. С. 135-164. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The diffusion-buffer phenomenon in a mathematical model of biology // Izvestiya. Math. V. 62. №5. P. 985-1012.

19. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в нейродинамике // Доклады АН (Россия). 2012. Т. 443. №2. С. 168-172. Англ. перевод: Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Buffer phenomenon in neurodynamics // Dokl. Math. 2012. V. 85. №2. P. 297-300.

20. Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. Жизнь на кромке хаоса // Труды семинара имени И.Г.Петровского. 2003. Вып. 23. С. 219-266. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh., Sadovnichiy V.A. Life on the edge of chaos // J. Math. Sci. 2004. V. 120. №3. P. 1372-1398.

21. Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау // Успехи математических наук. 2008. Т. 63. №2. С. 21-84. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh., Sadovnichii V.A. Mathematical aspects of the theory of development of turbulence in sense of Landau // Rus. Math. Surv. 2008. V. 63. №2. P. 1-62.

22. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Лики хаоса. М.: Физматлит, 2013.

23. Колесов Ю.С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Математический сборник. 1995. Т. 186. №10. С. 57-72.

24. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2006. Т. 12. №1. С. 103-141. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. Buffer phenomenon in systems close to two-dimensional Hamiltonian ones // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. V. 253. Suppl. 1. P. S117-S150.

25. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. О природе явления буферности в слабо диссипативных системах // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146. №3. С. 447-466. Англ. перевод: Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The nature of the bufferness phenomenon in weakly dissipative systems // Theor. Math. Phys. 2006. V. 146. № 3. P. 376-392.

26. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в системах с полутора степенями свободы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. №9. С. 1582-1593. Англ. перевод: Glyzin S.D., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Buffer phenomenon in systems with one and a half degrees of freedom // Comput. Math. Math. Phys. 2006. V. 46. №9. P. 1503-1514.

Асимптотическое поведение решений уравнений пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды

Самохин В.Н.[1], Фадеева Г.М.[2], Чечкин Г.А.[3]

В работе исследуется качественное поведение решения системы уравнений пограничного слоя для обобщенно ньютоновской модели сплошной среды, предложенной О. А. Ладыженской. Доказана теорема о непрерывной зависимости продольной составляющей скорости среды в пограничном слое от начального профиля скоростей. Выведено обыкновенное дифференциальное уравнение, решения которого применяются для построения автомодельных решений рассматриваемой системы пограничного слоя. Доказано, что при определенных условиях решения уравнений пограничного слоя асимптотически стремятся к автомодельному.

Введение. Поведение пограничных слоёв жидкости привлекает внимание учёных на протяжении многих десятилетий. Идея Прандтля о разделении жидкости на основной поток и пограничный слой стала активно использоваться в математической теории гидродинамики с начала XX-го века. Прандтль вывел систему уравнений пограничного слоя для ньютоновских жидкостей, но те же идеи позже были использованы для выведения системы уравнений пограничного слоя для неньютоновских жидкостей, в частности, псевдопластических, дилатантных (см. [1]), модифицированной жидкости О.А.Ладыженской (см. [2, 3, 4, 5]) и т.п. Также были исследованы некоторые вопросы асимптотического поведения решений системы пограничного слоя типа Прандтля (см. [6, 7, 8, 9]). В работах [10, 11, 12, 13, 14] изучена непрерывная зависимость решений системы уравнений пограничного слоя от начального профиля скоростей в случае ньютоновской и дилатантной жидкостей.

В статье авторов [2] рассмотрена система уравнений двумерного пограничного слоя для модели мало вязкой сплошной среды, предложенной О.А. Ладыженской. Система уравнений рассмотрена в форме Р.Мизеса, то есть сведена к одному квазилинейному уравнению. Доказаны существование и единственность решения задачи продолжения пограничного слоя.

[1]Самохин Вячеслав Николаевич, vnsamokhin@mtu-net.ru, профессор, Московский государственный университет печати им. Ивана Федорова.

[2]Фадеева Галина Михайловна, ownletters@mail.ru, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Чечкин Григорий Александрович, chechkin@mech.math.msu.su, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

В настоящей статье будет доказана непрерывная зависимость продольной составляющей скорости жидкости в пограничном слое от начального профиля скоростей и асимптотическое поведение этой составляющей при неограниченном удалении вниз по потоку от точки задания начального профиля.

Оценка разности двух решений. Изучаемая система уравнений пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды имеет вид

$$\begin{cases} \nu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{1}$$

и рассматривается в области $D=\{0<x<X, \quad 0<y<+\infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(0,y)=u_0(y), \quad u(x,0)=0, \quad v(x,0)=v_0(x), \\ &u(x,y)\to U(x) \quad \text{при } y\to+\infty, \end{aligned} \tag{2}$$

где $U(x)$ и $p(x)$ связаны уравнением Бернулли $\rho U^2(x)+2p(x)=\text{const}$.

Далее для простоты плотность жидкости ρ считается равной единице. Предполагается, что k — малая положительная постоянная. Напомним, что в [15], где обсуждается данная модель движения сплошной среды, дано обоснование того, что $k\ll 1$. Отметим также, что обоснование возможности применения уравнения вида (1) для описания динамики неньютоновской среды в пограничном слое, дано при выводе уравнения (2.3) в работе [5].

Систему уравнений (1) рассмотрим в форме Р.Мизеса, то есть сведем (см. [2]) к одному квазилинейному уравнению вида

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0(x)\frac{\partial w}{\partial \psi}=2\frac{dp}{dx} \tag{3}$$

в области $G=\{0<x<+\infty, \quad 0<\psi<+\infty\}$ с условиями

$$w(0,\psi)=w_0(\psi); w(x,0)=0; w(x,\psi)\to U^2(x); \text{при } \psi\to+\infty. \tag{4}$$

Здесь $w(x,\psi)=u^2(x,y)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. . *Пусть* $\dfrac{dp}{dx}\le 0$; $w_1(x,\psi)$, $w_2(x,\psi)$ *— такие решения задачи* (3), (4), *что*

$$w_1(0,\psi)=w_{10}(\psi), \quad w_2(0,\psi)=w_{20}(\psi), \tag{5}$$

причем

$$\int\limits_0^{+\infty}|\sqrt{w_{10}(\psi)}-\sqrt{w_{20}(\psi)}|d\psi<+\infty.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty}|\sqrt{w_1(x,\psi)}-\sqrt{w_2(x,\psi)}|d\psi\le$$

$$\leq \left(\frac{P(0)}{P(x)}\right)^{1/2} \int\limits_0^{+\infty} |\sqrt{w_{10}(\psi)} - \sqrt{w_{20}(\psi)}| d\psi,$$

где

$$P(x) = p(0) - p(x) + \frac{1}{2} \max_{0<\psi<\infty} \{w_{10}(\psi), w_{20}(\psi)\}.$$

Доказательство. Заметим, что функции $w_i(x,\psi)$, $i = 1, 2$, непрерывны в замыкании области G и имеют непрерывные производные w_x, w_ψ, $w_{\psi\psi}$ в G; кроме того, $w_i(x,\psi)$ положительны при $\psi > 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\nu \frac{\partial^2 (w_1 - w_2)}{\partial \psi^2} + \nu \frac{3}{4} k \left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\right)^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} \right) -$$

$$-2 \frac{\partial(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})}{\partial x} - 2 v_0(x) \frac{\partial(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})}{\partial \psi} -$$

$$-2 \frac{dp}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{1}{\sqrt{w_2}} \right) = 0.$$

Умножим его на гладкую функцию $\Phi(x,\psi)$ такую, что $\Phi(x,\varepsilon) = 0$, $\Phi(x, 1/\varepsilon) = 0$, и проинтегрируем по области $G^\varepsilon = \{0 < x < X, \quad \varepsilon < \psi < 1/\varepsilon\}$, где ε — некоторое положительное число. Преобразуя некоторые слагаемые интегрированием по частям, получим равенство

$$\int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} \int\limits_0^X \nu \frac{\partial^2 (w_1 - w_2)}{\partial \psi^2} \Phi(x,\psi) dx d\psi +$$

$$+ \frac{3}{4} \nu k \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} \int\limits_0^X \left(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\right)^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \psi^2} \Phi(x,\psi) dx d\psi -$$

$$- \frac{3}{4} \nu k \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} \int\limits_0^X \left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} \Phi(x,\psi) dx d\psi -$$

$$-2 \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} \int\limits_0^X \frac{\partial(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})}{\partial x} \Phi(x,\psi) dx d\psi -$$

$$-2 \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} \int\limits_0^X v_0(x) \frac{\partial(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})}{\partial x} \Phi(x,\psi) dx d\psi -$$

$$-2 \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} \int\limits_0^X \frac{dp}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{w_1}} - \frac{1}{\sqrt{w_2}} \right) \Phi(x,\psi) dx d\psi =$$

$$= \nu \int\limits_0^X \frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial \psi} \Phi(x,\psi) \Bigg|_\varepsilon^{1/\varepsilon} dx -$$

$$-\nu \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} \frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial\psi} \frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial\psi} dx d\psi +$$

$$+\frac{3}{4}\nu k \int_0^X \frac{1}{3}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^3 \Phi(x,\psi)\Bigg|_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx -$$

$$-\frac{1}{4}\nu k \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} \left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^3 \frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial\psi} dx d\psi -$$

$$-\frac{3}{4}\nu k \int_0^X \frac{1}{3}\left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^3 \Phi(x,\psi)\Bigg|_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx +$$

$$+\frac{1}{4}\nu k \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} \left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^3 \frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial\psi} dx d\psi -$$

$$-2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} (\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})\Phi(x,\psi)\Bigg|_0^X d\psi +$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} (\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2}) \frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial x} dx d\psi -$$

$$-2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} (\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2}) v_0(x)\Phi(x,\psi)\Bigg|_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx +$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} v_0(x)(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2}) \frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial\psi} dx d\psi +$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} \frac{dp}{dx}\left(\frac{\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1}\sqrt{w_2}}\right)\Phi(x,\psi) dx d\psi =$$

$$= -\nu \int_0^X (w_1 - w_2)\frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial\psi}\Bigg|_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx +$$

$$+\nu \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} (w_1 - w_2) \frac{\partial^2\Phi(x,\psi)}{\partial\psi^2} dx d\psi -$$

$$-\frac{\nu k}{4} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \int_{0}^{X} \left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^3 - \left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^3\right) \frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial\psi} dx d\psi +$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\int_{0}^{X}(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial x}dxd\psi+$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\int_{0}^{X}v_0(x)(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\frac{\partial\Phi(x,\psi)}{\partial\psi}dxd\psi+$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\int_{0}^{X}\frac{dp}{dx}\left(\frac{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1}\sqrt{w_2}}\right)\Phi(x,\psi)dxd\psi-$$

$$-2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\Big|_0^X(\Phi(X,\psi)-\Phi(0,\psi))d\psi=0.$$

отсюда приходим к уравнению

$$\int_{G_\varepsilon}\left(\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}(w_1-w_2)+2(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\frac{\partial\Phi}{\partial x}+2v_0(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}+\right.$$

$$\left.+2\Phi\frac{dp}{dx}\left(\frac{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1}\sqrt{w_2}}\right)\right)dxd\psi+$$

$$+2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\Phi(0,\psi)\left.(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\right|_{x=0}d\psi- \tag{6}$$

$$-2\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\Phi(X,\psi)\left.(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\right|_{x=X}d\psi+$$

$$+\nu\int_{0}^{X}\frac{\partial\Phi(x,\varepsilon)}{\partial\psi}(w_1-w_2)\left.\right|_{\psi=\varepsilon}dx-$$

$$-\nu\int_{0}^{X}\frac{\partial\Phi(x,1/\varepsilon)}{\partial\psi}(w_1-w_2)\left.\right|_{\psi=1/\varepsilon}dx-$$

$$-\frac{\nu k}{4}\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\int_{0}^{X}\left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^3-\left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^3\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}d\psi dx=0.$$

Пусть функция $\Phi(x,\psi)$ удовлетворяет в области G^ε уравнению

$$M(\Phi)\equiv\nu(\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2})\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}+2\frac{\partial\Phi}{\partial x}+2v_0\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}- \tag{7}$$

$$-\frac{\nu k}{4}\frac{\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^3-\left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^3}{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}+\frac{2}{\sqrt{w_1}\sqrt{w_2}}\frac{dp}{dx}\Phi=0$$

с условиями $\Phi(x,\varepsilon)=0$, $\Phi(x,\varepsilon^{-1})=0$ и

$$\Phi(X,\psi)=\Phi_0(\psi). \tag{8}$$

Оценим решение задачи (7)–(8) при $x=0$. Заметим, что $w_i(x,\psi)-2P(x)\le 0$ при $x=0$ и $\psi=0$; $i=1,2$ (при $x=0$: $w_i(0,\psi)=w_{i0}(\psi)\le 2P(0)=\max\limits_{\psi}\{w_{10}(\psi),w_{20}(\psi)\}$; при $\psi=0$: $w_i(x,0)=0\le 2P(x)=2p(0)-2p(x)+\max\limits_{\psi}\{w_{10}(\psi),w_{20}(\psi)\}$. Далее, функции $\varphi_i(x,\psi)=w_i(x,\psi)-2P(x)$ удовлетворяют в области G уравнению

$$\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_i}{\partial\psi}\right)^2\right)\nu\sqrt{w_i}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\psi^2}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}-v_0\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi}=0;$$

они ограничены в G (см. теорему 1 в [1]), следовательно, по принципу максимума, получаем, что $\varphi_i(0)\le 0$ в области G, то есть $\sqrt{w_i}\le\sqrt{2P(x)}$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dF}{dx}+\frac{1}{2P(x)}\frac{dp}{dx}F=0$$

с условием $F(X)=\max\limits_{\psi}|\Phi_0(\psi)|$. Его решение имеет вид $F(x)=\max\limits_{\psi}|\Phi_0(\psi)|\sqrt{\dfrac{P(x)}{P(X)}}$. Применим оператор M к функциям $F\pm\Phi$:

$$M(F\pm\Phi)\equiv M(F)\pm M(\Phi)=2\frac{dF}{dx}+\frac{2}{\sqrt{w_1}\sqrt{w_2}}\frac{dp}{dx}F=$$

$$=\left(-\frac{1}{P(x)}\frac{dp}{dx}+\frac{2}{\sqrt{w_1}\sqrt{w_2}}\frac{dp}{dx}\right)F\le 0,$$

так как $\sqrt{w_1}\sqrt{w_2}\le(\sqrt{2P(x)})^2$; $\dfrac{dp}{dx}\le 0$; $F(x)>0$.

При $x=X$: $F(X)\pm\Phi(X,\psi)\ge 0$, поскольку $F(X)=\max|\Phi_0(\psi)|$. При $\psi=\varepsilon$, $\psi=1/\varepsilon$: $F(x)\pm\Phi(x,\varepsilon)\ge 0$; $F(x)\pm\Phi(x,1/\varepsilon)\ge 0$ (так как $\Phi(x,\varepsilon)=\Phi(x,1/\varepsilon)=0$). Следовательно, функции $F\pm\Phi\ge 0$ в области G^ε (снова применяем принцип максимума); отсюда $|\Phi|\le F$ в G^ε.

Возьмем в уравнении (6) в качестве функции Φ решение уравнения (7) с условиями $\Phi(x,\varepsilon)=0$, $\Phi(x,1/\varepsilon)=0$, $\Phi(X,\psi)=\Phi_0(\psi)$. Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}2\Phi_0(\psi)(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\Big|_{x=X}d\psi=\int\limits_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}2\Phi(0,\psi)(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})\Big|_{x=0}d\psi+$$

$$+\nu\int\limits_0^X\frac{\partial\Phi(x,\varepsilon)}{\partial\psi}(w_1-w_2)\Big|_{\psi=\varepsilon}dx-\nu\int\limits_0^X\frac{\partial\Phi(x,1/\varepsilon)}{\partial\psi}(w_1-w_2)\Big|_{\psi=1/\varepsilon}dx. \tag{9}$$

Нужно показать, что выражение $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial\psi}\right|$ при $\psi=\varepsilon$ и $\psi=1/\varepsilon$ ограничено постоянной, независящей от ε. Это можно сделать с помощью метода барьеров. Оценки при $\psi=\varepsilon$ проводится также, как при доказательстве леммы 2 в [2], а при $\psi=1/\varepsilon$ аналогично тому, как это сделано в лемме 2.1.9 работы [1]. Тогда (в силу того, что $(w_1-w_2)\,|_{\psi=1/\varepsilon}\to$

$U^2(x) - U^2(x) = 0$ при $\varepsilon \to 0$; $(w_1 - w_2)\,|_{\psi=\varepsilon} \to 0 - 0 = 0$ при $\varepsilon \to 0$) получим, что два последних интеграла в (9) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} \Phi_0(\psi)(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})\Big|_{x=X} d\psi \right| \le \int\limits_0^{+\infty} F(X)(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})\Big|_{x=0} d\psi.$$

Взяв в качестве $\Phi_0(x)$ гладкие функции, аппроксимирующие при $\varepsilon \to 0$ функцию $\operatorname{sgn}\left(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\right)$, получим утверждение теоремы. □

Об асимптотике решений на бесконечности. В этом разделе мы докажем теорему о поведении функции $w(x,\psi)$ при $x \to \infty$. Будет показано, что при некоторых условиях решение задачи выходит на автомодельный режим. Для этого сначала выведем уравнение автомодельных решений задачи (1),(2). Автомодельные задачи играют важную роль в теории пограничного слоя (см. [16]), а также в других разделах математической физики, так как дают возможность получить простейшие решения математических моделей и изучать их качественное поведение.

Перепишем систему уравнений (1) в виде

$$\begin{cases} Pu \equiv u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \\ -\nu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(1 + k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - U(x)U'(x) = 0, \\ v(x,y) = v_0(x,y) - \int\limits_0^y \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}dt. \end{cases} \tag{10}$$

Будем искать такие решения системы (10) с условиями (2), компонента $u(x,y)$ которых допускает представление

$$u(x,y) = U(x)f'_\eta(\eta, \lambda(x)), \tag{11}$$

где $\eta = y/\delta(x)$, а функции $\delta(x)$ и $\lambda(x)$ будут определены ниже. Из граничных условий (2) следует, что при всех значениях λ

$$f'(0,\lambda) = 0, \quad f'(\eta,\lambda) \to 1,\ \eta \to +\infty. \tag{12}$$

Обозначим $f_0 = f(0,\lambda)$. Всюду в дальнейшем штрих будет обозначать дифференцирование по η.

Из (1) и (12) находим, что $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{U(x)}{\delta(x)}f''(\eta,\lambda(x))$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{U(x)}{\delta^2(x)}f'''(\eta,\lambda(x))$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{dx}f' + U(x)\frac{\partial f'}{\partial \lambda}\frac{d\lambda(x)}{dx} - \frac{U(x)}{\delta(x)}f''\eta\frac{d\delta(x)}{dx},$$

$$v(x,y) = v_0(x) - \delta(x)\frac{dU(x)}{dx}(f - f_0) - U(x)\delta(x)\frac{d\lambda(x)}{dx}\frac{\partial(f - f_0)}{\partial\lambda} +$$
$$+U(x)\eta f'\frac{d\delta(x)}{dx} - U(x)(f - f_0)\frac{d\delta(x)}{dx}.$$

Подставив эти выражения в (10), получим уравнение

$$Pu \equiv -\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1 + k\left(\frac{U(x)}{\delta(x)}f''\right)^2\right)\frac{U(x)}{\delta(x)}f''\right) +$$

$$+U(x)f'\left(U'(x)f' + U(x)\frac{\partial f'}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dx} - \frac{U(x)}{\delta}f''\eta\frac{\partial\delta}{dx}\right)+$$

$$+\left(v_0 - \delta U'(x)(f-f_0) - U(x)\delta\frac{d\lambda}{dx}\frac{\partial(f-f_0)}{\partial\lambda} + U(x)\eta f'\frac{d\delta}{dx} -\right.$$

$$\left. -U(x)(f-f_0)\frac{d\delta}{dx}\right)\frac{U(x)}{\delta}f'' - -U(x)U'(x) = 0$$

или

$$-\nu\frac{U}{\delta^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+k\left(\frac{U}{\delta^2}\right)^2\right)\delta f''\right)\right) + v_0\frac{U}{\delta}f'' -$$

$$-U(x)U'(x)f''(f-f_0) - \frac{U^2}{\delta}f''(f-f_0)\delta'(x) + \frac{\delta^2 U'(x)}{\nu}(1-(f')^2)+$$

$$+U^2(x)\left(f'\frac{\partial f'}{\partial\lambda} - \frac{\partial(f-f_0)}{\partial\lambda}f''\right)\lambda'(x) = 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+k\left(\frac{U}{\delta^2}\right)^2\right)\delta f''\right) =$$

$$= 2k\left(\frac{U(x)}{\delta}f''\right)\frac{U(x)}{\delta^2}f'''\delta f'' + \left(1+k\left(\frac{U}{\delta}f''\right)^2\right)\frac{\delta f'''}{\delta} =$$

$$= \left(2k\frac{U^2(x)}{\delta^2}(f'')^2 + 1 + k\left(\frac{U9x)}{\delta}f''\right)^2\right)f''' =$$

$$= \left(1+3k\left(\frac{U(x)f''}{\delta}\right)^2\right)f''',$$

то

$$Pu = -\nu\frac{U}{\delta^2}\left(\left(1+3k\left(\frac{U(x)f''}{\delta}\right)^2\right)f''' +\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{\nu}(\delta U)'_x\left(f - f_0 - \frac{v_0}{(\delta U)'_x}\right)f'' + \frac{\delta U'_x}{\nu}(1-(f')^2)\right)+$$

$$+U^2(x)\left(f'\frac{\partial f'}{\partial\lambda} - \frac{\partial(f-f_0)}{\partial\lambda}f''\right)\frac{d\lambda(x)}{dx} = 0. \qquad (13)$$

Положим теперь

$$\frac{\delta(x)}{\nu}(\delta(x)U(x))' = 1, \qquad (14)$$

$$f_0 = -\frac{v_0(x)}{(\delta(x)U(x))'}, \quad \beta(x) = \frac{\delta^2(x)U'(x)}{\nu}.$$

Уравнение (14) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $\delta(x)$. Его можно привести к виду

$$\delta(x)U(x)(\delta(x)U(x))' = \nu U(x),$$

откуда находим:

$$\delta^2(x)U^2(x) - \delta^2(0)U^2(0) = 2\nu \int\limits_0^x U(t)dt.$$

Следовательно,

$$\delta(x) = \frac{1}{U(x)} \left(\delta^2(0)U^2(0) + 2\nu \int\limits_0^x U(t)dt \right)^{1/2},$$

$$f_0 = f(0, \lambda) = -\frac{v_0(x)}{\nu}\delta(x), \tag{15}$$

$$\beta(x) = \frac{\delta^2(0)U^2(0)U'(x)}{\nu U^2(x)} + \frac{2U'(x)}{U^2(x)} \int\limits_0^x U(t)dt.$$

Подставляя (15) в (14), получим

$$-\frac{\nu U}{\delta^2} \left(\left(1 + 3k \left(\frac{Uf''}{\delta} \right)^2 \right) f''' + ff'' + \beta(1 - (f')^2) \right) +$$

$$+U^2 \left(f'\frac{\partial f'}{\partial \lambda} - \frac{\partial (f - f_0)}{\partial \lambda} f'' \right) \frac{d\lambda}{dx} = 0.$$

Выберем $\lambda(x) \equiv \delta(x)$. Из (15) следует, что для того, чтобы функции $u(x, y) = U(x)f'(\eta, \beta(x))$ и $v(x, y) = v_0(x) - \int\limits_0^y \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt$ были решениями системы (1), (2), достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$U^2(x) \left(f'\frac{\partial f'}{\partial \beta} - f''\frac{\partial (f - f_0)}{\partial \beta} \right) \frac{d\beta(x)}{dx} \equiv 0,$$

а функция $f(\eta, \beta(x))$ при любом фиксированном x была решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(1 + 3k \left(\frac{Uf''}{\delta} \right)^2 \right) f''' + ff'' + \beta(1 - (f')^2) = 0$$

с граничными условиями

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\eta) \to 1,\ \eta \to +\infty.$$

Это уравнение является обобщением известного уравнения Фолкнера–Скэн. Если $\beta(x) = \mathrm{const}$, то $U'(x)\delta^2(x) = \mathrm{const} = = \dfrac{U'(x)}{U^2(x)} \left(\delta^2(0)U^2(0) + 2\nu \int\limits_0^x U(t)dt \right)^{1/2}$.

Теорема 2. *Пусть $U(x) \equiv U_1 = const$; $w_1(x, \psi)$, $w_2(x, \psi)$ — два решения задачи (3), (4) с начальными условиями $w_1(0, \psi) = w_{10}(\psi)$, $w_2(0, \psi) = w_{20}(\psi)$. Если*

$$\int\limits_0^{+\infty} |\sqrt{w_{10}(\psi)} - \sqrt{w_{20}(\psi)}| d\psi < +\infty,$$

то

$$(\sqrt{w_1(x, \psi)} - \sqrt{w_2(x, \psi)})^2 \le C(1 + x)^{-1/4}$$

при $0 < \psi_0 \le \psi \le \psi_1 < +\infty$, где выбор постоянной C зависит от ψ_0 и ψ_1.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \nu \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

в области $D = \{0 < x < X, \quad 0 < y < +\infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,u) = u_0(y),\ u(x,0) = 0,\ v(x,0) = v_0(x),$$

$$u(x,y) \to U_1,\ \text{при}\ y \to +\infty.$$

Автомодельное решение этой системы имеет вид

$$\overline{u}(x,y) = U_1 f'(\eta), \quad \overline{v}(x,y) = v_0(x) + \int\limits_0^y \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} dt, \tag{17}$$

где $\eta = y\sqrt{\dfrac{U_1}{2\nu(1+x)}} = y\sqrt{\dfrac{U_1}{2\nu}}(1+x)^{-1/2}$, а функция $f(\eta)$ удовлетворяет аналогу уравнения Блазиуса (частный случай уравнения Фолкнера–Скэн):

$$\left(1 + \frac{3kU_1^3}{2\nu(1+x)}(f'')^2\right) f''' + ff'' = 0$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\eta) \to 1, \quad \eta \to +\infty.$$

Решение системы (16), задаваемое формулами (17), соответствует решению $\overline{w}(x,\psi)$ уравнения (3) с условиями

$$\overline{w}(x,0) = 0, \quad \overline{w}(0,\psi) \geq 0, \quad \overline{w}(x,\psi) \to U_1^2, \quad \psi \to +\infty.$$

Поскольку $\overline{u} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = U_1 f'(\eta)$, то

$$\psi = U_1 \int\limits_0^y f'(\eta(t))dt = U_1 \int\limits_0^y \frac{f'(\eta(t))\eta'(t)}{\sqrt{U_1/(2\nu)}(1+x)^{-1/2}} dt =$$

$$= \sqrt{2\nu U_1}(1+x)^{1/2} f(\eta);$$

следовательно, $\eta = f^{-1}\left(\dfrac{\psi}{\sqrt{2\nu U_1}}(1+x)^{-1/2}\right)$, то есть

$$\overline{w}(x,\psi) = \overline{u}^2(x,\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2\nu U_1}(1+x)^{1/2} f'(\eta)\sqrt{\frac{U_1}{2\nu}}(1+x)^{-1/2}\right)^2 =$$

$$= U_1^2(f'(\eta))^2 = U_1^2\left(f'\left(f^{-1}\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\nu U_1}}(1+x)^{-1/2}\right)\right)\right)^2.$$

Из результатов работы [5] следует, что $f'' > 0$. Тогда $f(\eta) = O(\eta^2)$ при $\eta \to 0$ (поскольку $f(0) = f'(0) = 0$), значит, $f'(\eta) = O(\eta)$, $\eta \to 0$, то есть $f^{-1}(\zeta) = O(\sqrt{\zeta})$, $\zeta \to 0$. Отсюда получаем, что при больших значениях x и малых ψ функция $\overline{w}(x,\psi)$ удовлетворяет двойному неравенству:

$$C_1\psi(1+x)^{-1/2} \le \overline{w}(x,\psi) \le C_2\psi(1+x)^{-1/2}. \tag{18}$$

Выше нами была получена оценка

$$\int\limits_0^{+\infty} |\sqrt{w_1(x\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}|d\psi \le$$

$$\le \left(\frac{P(0)}{P(x)}\right)^{1/2} \int\limits_0^{+\infty} |\sqrt{w_{10}(\psi)} - \sqrt{w_{20}(\psi)}|d\psi,$$

где $P(x) = p(0) - p(x) + \dfrac{1}{2}\max\limits_{0<\psi<+\infty}(w_{10}(\psi), w_{20}(\psi))$. Поскольку по условию теоремы $U(x) \equiv U_1$, а функции $U(x)$ и $p(x)$ связаны соотношением $2p(x)+U^2(x) = const$, то в нашем случае $P(x) = const$, следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} |\sqrt{w_1(x\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}|d\psi \le P_1 = const.$$

Отсюда получаем, что при $\psi \ge \psi_0 > 0$

$$\left(\sqrt{w_1(X,\psi_0)} - \sqrt{w_2(X,\psi_0)}\right)^2 =$$

$$= -\int\limits_{\psi_0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\right)^2\Big|_{x=X} d\psi \le$$

$$\le \max_{x=X,\psi\ge\psi_0}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_1(x,\psi)}{\partial\psi}\right| +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{w_2(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_2(x,\psi)}{\partial\psi}\right|\right) \int\limits_{\psi_0}^{+\infty} |\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}|d\psi \le$$

$$\le P_1 \cdot \max_{\psi\ge\psi_0}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_1(x,\psi)}{\partial\psi}\right| + \frac{1}{\sqrt{w_2(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_2(x,\psi)}{\partial\psi}\right|\right). \tag{19}$$

В силу оценок (18) имеем: $\left|\dfrac{\partial w_1}{\partial\psi}\right| \le C_3(1+x)^{-1/2}$ при $\psi \ge \psi_0 > 0$. Отсюда и из (19) Получаем, что при $\psi \ge \psi_0$

$$\left(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\right)^2 \le P_1\left(\frac{(1+x)^{1/4}}{\sqrt{C_1\psi_0}}C_3(1+x)^{-1/2} +\right.$$

$$\left. + \frac{(1+x)^{1/4}}{\sqrt{C_2\psi_0}}C_3(1+x)^{-1/2}\right) \le C(1+x)^{-1/4}.$$

□

В теореме 2 приведён простейший случай асимптотического поведения функции $w(x, \psi$ при $x \to \infty$. Автомодельные задачи не исчерпываются случаем $U(x) \equiv \text{const}$ и дальнейшее их изучение может привести к решениям уравнений пограничного слоя с иной асимптотикой продольной составляющей скорости среды. Это является предметом наших дальнейших исследований.

Благодарности

Работа написана при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00445)

Список литературы

[1] *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. - М.: Наука. Физматлит. 1997.

[2] *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье-Стокса и теория пограничного слоя // Вестник МГУП. - 2009.- No 5. - с. 127–143.

[3] *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. Т. 4. 2010. С. 64–71.

[4] *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Асимптотика решений уравнений пограничного слоя обобщённо ньютоновской среды при внешнем течении, близком к симметричному // Проблемы математического анализа. Т. 59. 2011. С. 123–128.

[5] *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Труды семинара им. И.Г.Петровского. Вып. 28. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 329–361.

[6] *Amirat Y., Chechkin G.A., Romanov M.S.* On Multiscale Homogenization Problems in Boundary Layer Theory // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.- 2012.- v. 63.- p. 475–502.

[7] *Bayada G., Chambat M.* Homogenezation of the Stokes system in a thin film with rapidly varying thickness. // Model. Math. et Anal. Number. (M^2AN). T.23, №2. 1989. P. 205–234.

[8] *Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле // Доклады РАН. Т. 426, №4. 2009. С. 450–456.

[9] *Романов М.С.* Об усреднении пограничного слоя псевдопластической жидкости в присутствии быстроосциллирующих внешних сил // Труды семинара им. И.Г.Петровского. Вып. 28. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 300–328.

[10] *Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* О пограничном слое ньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду // Уфимский математический журнал.- 2011. т. 3, №3. - с. 93–104.

[11] *Спиридонов С.В.* О теореме усреднения для стратифицированной магнитной жидкости с микронеоднородными магнитным полем и граничным условием. // Проблемы Мат. Анализа. Т. 44. 2010. С. 133–143;

[12] *Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* Просачивание пограничного слоя ньютоновской жидкости через перфорированную преграду // Проблемы Мат. Анализа. Т. 45. 2010. С. 93–102.

[13] *Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Ратью Т.С., Чечкин Г.А.* О тонком слое неньютоновской жидкости на шероховатой поверхности, протекающей через перфорированную преграду // Проблемы математического анализа.- 2013.- т. 68. - с. 173–182.

[14] *Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* Усреднение стратифицированной дилатантной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления.- 2013.- т. 48.- с. 75–83.

[15] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука. Физматлит, 1970.

[16] *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. - М.: Физматгиз, 1962.

Вычисление в уме экспоненты двумерной матрицы методом Филиппова

Сергеев И.Н.[1]

Рассказано о том, как профессор А.Ф. Филиппов находил в уме экспоненту от произвольной двумерной матрицы. Его метод основан на глубокой внутренней связи между двумерными матрицами и их комплексными собственными числами.

Вычислим собственные значения двумерной действительной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

по формуле корней квадратного трехчлена, каковым является ее характеристический многочлен. Они автоматически окажутся представленными в виде

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta, \tag{2}$$

где

$$\alpha \equiv \operatorname{tr} A/2, \quad \beta \equiv \sqrt{\alpha^2 - \det A}. \tag{3}$$

По матрице A определим дополнительно матрицу

$$B \equiv A - \alpha E. \tag{4}$$

и пару коэффициентов

$$(p(\beta),\, q(\beta)) \equiv \begin{cases} (\operatorname{ch}\beta,\, \operatorname{sh}\beta/\beta), & \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ (\cos\gamma,\, \sin\gamma/\gamma), & \beta = i\gamma \notin \mathbb{R}; \\ (1,\, 1), & \beta = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 1. *Экспонента матрицы A (1) с собственными значениями (2) представима в виде линейной комбинации*

$$e^A = e^\alpha \big(p(\beta)E + q(\beta)B\big) \tag{6}$$

матриц E и B (4) с коэффициентами $e^\alpha \cdot p(\beta)$ и $e^\alpha \cdot q(\beta)$ (5) соответственно.

[1]Сергеев Игорь Николаевич, igniserg@gmail.com, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

Заметим, что:

- коэффициенты линейной комбинации (6) полностью задаются двумя инвариантами α и β (3) матрицы A и никак не учитывают ее конкретного вида;
- в формулах (5) первую строку можно считать основной, поскольку две остальные строки получаются из нее подстановкой $\beta = i\gamma$ и, соответственно, предельным переходом при $\beta \to 0$.

Доказательство.

1. Прежде всего, искомая экспонента представляется в виде

$$e^A = e^{\alpha E + B} = e^{\alpha E} \cdot e^B = e^\alpha \cdot e^B,$$

где матрица B (4) имеет *нулевой след*, поэтому ее собственные значения взаимно противоположны и равны следующим числам

$$\pm\sqrt{-\det B} = \pm\sqrt{-(a_{11}-\alpha)(a_{22}-\alpha) + a_{12}a_{21}} =$$
$$= \pm\sqrt{-\alpha^2 + (a_{11}+a_{22})\alpha - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}} = \pm\sqrt{-\alpha^2 + 2\alpha\cdot\alpha - \det A} = \pm\beta.$$

2. Теперь для доказательства формулы (6) остается только установить справедливость равенства

$$e^B = p(\beta)E + q(\beta)B.$$

Заметим далее, что матрица B принадлежит к одному из следующих трех простейших типов:

- либо матрица $B \equiv \beta J$ имеет ненулевые *действительные* собственные значения $\pm\beta$, тогда матрица $J = B/\beta$ имеет собственные значения ± 1 и ее жорданова форма диагональна, поэтому справедливы равенства (которые после перехода к жордановой форме легко проверяются, а при возвращении к исходному базису уже не меняются)

$$J^2 = E, \quad J^3 = J, \quad J^4 = E, \quad \ldots,$$

  а из них получаем требуемое

$$e^B = E + \frac{\beta J}{1!} + \frac{\beta^2 E}{2!} + \frac{\beta^3 J}{3!} + \frac{\beta^4 E}{4!} + \ldots =$$
$$= \left(1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \ldots\right)E + \left(\frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^3}{3!} + \ldots\right)J = \operatorname{ch}\beta\cdot E + \operatorname{sh}\beta\cdot\frac{B}{\beta};$$

- либо матрица $B \equiv \gamma I$ имеет ненулевые *чисто мнимые* собственные значения $\pm i\gamma$ и ее жорданова форма также диагональна, тогда матрица $I = B/\gamma$ имеет собственные значения $\pm i$ и ее жорданова форма также диагональна, поэтому справедливы равенства

$$I^2 = -E, \quad I^3 = -I, \quad I^4 = E, \quad \ldots,$$

  а из них опять получаем требуемое

$$e^B = E + \frac{\gamma I}{1!} - \frac{\gamma^2 E}{2!} - \frac{\gamma^3 I}{3!} + \frac{\gamma^4 E}{4!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \ldots\right)E + \left(\frac{\gamma}{1!} - \frac{\gamma^3}{3!} + \ldots\right)I = \cos\gamma\cdot E + \sin\gamma\cdot\frac{B}{\gamma};$$

- либо матрица $B \equiv N$ имеет *нулевые* собственные значения и ее жорданова форма — или чисто нулевая, или содержит единственный ненулевой элемент (единицу) в правом верхнем углу, но тогда в обоих случаях $N^2 = 0$ и поэтому сразу же получаем требуемое
$$e^B = E + N = 1 \cdot E + 1 \cdot B.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Пример. Для вычисления экспоненты матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

рассматриваемым методом достаточно найти ее характеристический многочлен $l^2 - 2l + 5$, а затем определить и все остальные параметры (2)–(5), упомянутые в теореме 1:

$$l_{1,2} = 1 \pm 2i, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2i, \quad \gamma = 2,$$
$$p(\beta) = \cos 2, \quad q(\beta) = \sin 2/2, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$e^A = e^1 \left(\cos 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin 2}{2} \cdot 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= e \begin{pmatrix} \cos 2 - \sin 2 & 2 \sin 2 \\ -\sin 2 & \cos 2 + \sin 2 \end{pmatrix}.$$

О том, насколько легко эти выкладки проделываются в уме, судить читателю.

Спектральные свойства эллиптических операторов и стабилизация. Сингулярно возмущенные спектральные задачи.

Филиновский А.В.[1]

Для взвешенного оператора Лапласа с граничным условием Дирихле в неограниченных областях изучались расположение и структура спектра в зависимости от скорости роста весовой функции на бесконечности и скорости расширения области. Исследовалась также скорость сгущения дискретного спектра оператора при переходе к непрерывному спектру. Установлены равномерные по спектральному параметру оценки резольвенты в верхней полуплоскости. С использованием полученных оценок резольвенты исследовано рассеяние энергии на бесконечность при больших значениях времени в первой смешанной задаче для гиперболического уравнения, эллиптический оператор в котором является взвешенным оператором Лапласа. Получены оценки скорости убывания локальной энергии решения. Для сингулярно возмущенных спектральных задач с параметром в краевом условии получены оценки и асимптотические разложения собственных значений по параметру.

1 Взвешенный оператор Лапласа в неограниченных областях

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, неограниченная область, замыкание которой не содержит начало координат, с границей Γ. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -r^s \, \Delta u, \quad r = |x|, \quad s \geq 0. \tag{1}$$

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве $L_{2,s}(\Omega)$ с нормой $\|u\|^2_{L_{2,s}(\Omega)} = \int_\Omega r^{-s}|u|^2 dx$ неотрицательный самосопряженный оператор L с граничным условием Дирихле: $u|_\Gamma = 0$. Изучались свойства спектра оператора L (расположение, плотность спектра на некоторых множествах, структура спектра) в зависимости от параметра s.

Пусть $S_\eta = \Omega \cap \{r = \eta\}$, $\eta > 0$, и Σ_η – множество точек на x на единичной сфере Σ, таких, что $\eta x \in S_\eta$. Будем рассматривать области Ω, удовлетворяющие условию

$$\Sigma_{\eta_1} \subset \Sigma_{\eta_2}, \quad \eta_1 < \eta_2, \tag{2}$$

[1]Филиновский Алексей Владиславович, flnv@yandex.ru, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

(условие звездности множества $R^n\setminus\Omega$ по отношению к началу координат). Обозначим $\hat\lambda(\eta)$ модуль первого собственного значения оператора Лапласа –Бельтрами в Σ_η с нулевым условием Дирихле на $\partial\Sigma_\eta$. В силу (2) $\hat\lambda(\eta)$ – убывающая неотрицательная функция на $[\inf\limits_{x\in\Omega} r, +\infty)$. Пусть $\Lambda = \lim\limits_{\eta\to\infty} \hat\lambda(\eta)$. Предположим, что $\ln r > 1$ в Ω.

Вначале исследуем расположение $\sigma(L)$.

Теорема 1.1. ([1], [2]). *Спектр оператора L имеет следующее расположение:*
i) при $0 \le s < 2$ имеем $\sigma(L) = [0, +\infty)$;
ii) при $s = 2$ имеем $\sigma(L) = [(n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty)$;
iii) при $s > 2$ имеем $\sigma(L) \subset ((n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty)$.

Следующее утверждение показывает, что существует критическое значение показателя s, выше которого спектр оператора L становится дискретным.

Теорема 1.2. ([1], [2]). *Спектр оператора L имеет следующие свойства:*
i) при $0 \le s \le 2$ и $\Gamma \in C^2$ спектр L непрерывен;
ii) при $s > 2$ спектр оператора L дискретен.

Естественно ожидать, что дискретный спектр сгущается на полуоси $[(n-2)^2/4+\Lambda, +\infty)$ при $s \to 2+0$. В следующей теореме устанавливается скорость этого сгущения.

Теорема 1.3. ([1], [2]). *Для всех $\lambda \in [(n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty)$ существуют $C > 0$ и $s_0 > 2$, такие, что для всех $s \in (2, s_0]$ выполнено соотношение*

$$\sigma(L) \cap (\lambda - \delta(s), \lambda + \delta(s)) \neq \emptyset, \tag{3}$$

$$\delta(s) = \hat\lambda(\ln\ln(1/(s-2))) - \Lambda + C\,\frac{\ln\ln\ln(1/(s-2))}{\ln\ln(1/(s-2))}.$$

2 Гиперболические уравнения с растущими коэффициентами и рассеяние энергии на бесконечность

Исследование распространения волн в неоднородной изотропной среде приводит к изучению свойств решений смешанных задач для взвешенного волнового уравнения $u_{tt}+Lu = 0$, где $Lu = -\rho\Delta u$ — мультипликативное возмущение оператора Лапласа, $\rho(x)$ — положительная функция.

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$, — неограниченная область, замыкание которой не содержит начало координат, с гладкой границей Γ. Рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt} + Lu = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

где $Lu = -r^s\Delta u$, $r = |x|$, $s \ge 0$. Начальные функции f, g предполагаются вещественнозначными, гладкими в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, согласованными с граничным условием (6) и имеющими ограниченный носитель. Для решения задачи (4) – (6) в области Ω произвольной геометрии выполняется энергетическое тождество

$$\mathcal{E}(t) = \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|r^{-s/2}u_t\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathcal{E}(0), \quad t > 0. \tag{7}$$

Изучалось распределение плотности энергии $|\nabla u|^2 + r^{-s}u_t^2$ решения задачи (4) – (6) в полубесконечном цилиндре $Q = (t > 0) \times \Omega$. Будем рассматривать области с границами, удовлетворяющими условию звездности относительно начала координат

$$(\nu, x) \le 0, \quad x \in \Gamma, \tag{8}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ. Без ограничения общности будем полагать $\ln r > 1$ в Ω.

Теорема 2.1. ([3]). *Пусть $n \ge 2$ и $0 \le s < 2$. Тогда для каждой области $\Omega \subset R^n$, удовлетворяющей условию (8), для решения задачи (4) – (6) справедлива оценка*

$$\|r^{-s/2}u_t + u_r\|_{L_2(Q)} + \|r^{-1}|\nabla_\Theta u|\,\|_{L_2(Q)} \le C, \tag{9}$$

где $r^{-2}|\nabla_\Theta u|^2 = |\nabla u|^2 - |u_r|^2$, постоянная C зависит от f, g и s.

Из энергетического тождества (7) следует, что $\|r^{-s/2}u_t\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} + \|u_r\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} + \|r^{-1}|\nabla_\Theta u|\,\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} = \infty$ при всех $T > 0$, $Q_T = (0 < t < T) \times \Omega$. Поскольку $\|r^{-s/2}u_t - u_r\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} + \|r^{-s/2}u_t + u_r\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} \ge \|r^{-s/2}u_t\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} + \|u_r\|_{L_2(Q\setminus Q_T)}$, то для всех $T > 0$

$$\|r^{-s/2}u_t - u_r\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} = \infty. \tag{10}$$

Из (9), (10) следует, что энергия рассеивается на бесконечность с переменной скоростью по радиальному направлению, обратная волна и угловые возмущения при больших значениях времени затухают: $\|r^{-s/2}u_t + u_r\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} + \|r^{-1}|\nabla_\Theta u|\,\|_{L_2(Q\setminus Q_T)} \to 0$, $T \to \infty$.

Определим гильбертово пространство интегрируемых функций $L_{2,s}(\Omega)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,s}(\Omega)} = \left\|r^{-s/2}u\right\|_{L_2(\Omega)}$. Определим также пространство функций $H_s^1(\Omega) = \left\{u:\ u \in L_{2,s}(\Omega), u_{x_j} \in L_2(\Omega),\ j = 1, \ldots, n\right\}$ с нормой $\|u\|^2_{H_s^1(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_{2,s}(\Omega)}$. Будем также использовать обозначение $\overset{o}{H}{}_s^1(\Omega)$ для подпространства $H_s^1(\Omega)$, представляющего собой замыкание множества функций $u \in H_s^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности границы Γ.

Выражению $-r^s\Delta u$ в пространстве $L_{2,s}(\Omega)$ можно поставить в соответствие самосопряженный оператор первой краевой задачи. Как следует из результатов ([1] – [2]), для звездных поверхностей Γ при $0 \le s \le 2$ спектр оператора L представляет собой полуось $\sigma(L) = [\lambda_0, \infty)$, где $\lambda_0(\Omega) \ge 0$ при $s = 2$ и $\lambda_0 = 0$ при $0 \le s < 2$. Кроме того, спектр оператора L непрерывен при $s = 2$ и абсолютно непрерывен при $0 \le s < 2$.

Рассмотрим первую краевую задачу для взвешенного уравнения Гельмгольца

$$(L - k^2)v = h, \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$v|_\Gamma = 0. \tag{12}$$

Для любой функции $h \in L_{2,s}(\Omega)$ при всех $k = \omega + i\mu \in \{\operatorname{Im} k > 0\}$ задача (11), (12) имеет единственное решение $v(x,k) \in \overset{o}{H}{}_s^1(\Omega)$. Доказательство теоремы 2.1 основано на свойствах решения задачи (11), (12) в полуплоскости $\{\operatorname{Im} k > 0\}$, которые сформулированы в теореме 2.2.

Теорема 2.2. ([3]). *Пусть область Ω удовлетворяет условию (8) и $0 \le s < 2$. Тогда для всех $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$, для решения задачи (11) – (12) справедливы оценки*

$$(2-s)^{-1/2}\||(\nu,x)|^{1/2}|\nabla v|\|_{L_2(\Gamma)} + \|v_r - i\omega r^{-s/2}v\|_{L_2(\Omega)} + \|r^{-1}|\nabla_\Theta v|\,\|_{L_2(\Omega)}$$
$$+ \|r^{-1}(\ln r)^{-q}\,v\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{C}{2-s}\|r^{1-s}(\ln r)^q\,h\|_{L_2(\Omega)}, \tag{13}$$

$$\|r^{(s/2)-1}(\ln r)^{-q}\,|\nabla v|\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{C(|\omega|+1)}{2-s}\|r^{1-s}(\ln r)^q\,h\|_{L_2(\Omega)}. \tag{14}$$

Теорема 2.3. ([3]). *Пусть область Ω удовлетворяет условию (8) и $0 \le s < 2$. Тогда для всех $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$, справедлива оценка*

$$\left\| r^{(s/2)-2-\delta} \frac{du}{dk} \right\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{C(|\omega|+1)}{(2-s)^2|k|} \| r^{2-(3s/2)+\delta} f \|_{L_2(\Omega)}, \tag{15}$$

где $\delta = 0$ при $n \ge 3$ и $\delta > 0$ при $n = 2$.

Теорема 2.4. ([4]). *Пусть $n \ge 2$, $0 \le s < 2$ и область $\Omega \subset R^n$ удовлетворяет условию (8). Тогда для решения задачи (4) – (6) справедлива оценка*

$$\int_0^\infty \| r^{-1} \ln^{-q} r\, u \|^2_{L_2(\Omega)}\, dt \le C,$$

где $q = 1$ при $n = 2$, $q = 0$ при $n \ge 3$, постоянная C зависит от f и g.

3 Сингулярно возмущенные спектральные задачи

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$ – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^3$. Рассмотрим краевую задачу Робена на собственные значения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{17}$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Γ, α – вещественный параметр. Обозначим через $\{\lambda_k(\alpha)\}_{k=1}^\infty$ последовательность собственных значений задачи (16), (17) занумерованных в соответствии с их кратностями. Рассмотрим также последовательность собственных значений $\{\lambda_k^D\}_{k=1}^\infty$ задачи Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{18}$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{19}$$

Известно, что собственные значения задач (16), (17) и (18), (19) образуют неубывающие последовательности, такие что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(\alpha) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k^D = +\infty$. При этом первые собственные значения $\lambda_1(\alpha)$ и λ_1^D являются простыми, соответствующие собственные функции можно выбрать неотрицательными и $\lambda_1^D > 0$.

В работах [5], [6] установлены оценки всех собственных значений задачи (16), (17):

$$\lambda_k^D - C_1 \frac{\left(\lambda_k^D\right)^2}{\sqrt{\alpha}} \le \lambda_k(\alpha) \le \lambda_k^D, \quad \alpha > \alpha_1 > 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Оценки (20) были улучшены в [7], а именно, было показано, что собственные значения $\lambda_k(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_k^D - C_1 \frac{\left(\lambda_k^D\right)^2}{\alpha} \le \lambda_k(\alpha) \le \lambda_k^D, \quad \alpha > \alpha_1 > 0, \tag{21}$$

с постоянными C_1 и α_1, не зависящими от k.

В [8], [9] для $n \geq 2$ было получено асимптотическое разложение:

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda_1^D - \frac{\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds}{\int_\Omega \left(u_1^D\right)^2 dx} \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right), \quad \alpha \to +\infty, \tag{22}$$

где u_1^D – первая собственная функция задачи Дирихле (18), (19). Заметим, что в силу свойств первой собственной функции

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu}\right)^2 ds > 0. \tag{23}$$

Из (22), (23) следует, что оценки (21) являются неулучшаемыми по параметру: первую степень α в знаменателе (21) нельзя заменить на $\alpha^{1+\delta}$ с произвольным $\delta > 0$.

Теорема 3.1. ([10]). *Пусть λ_k^D – простое собственное значение. Тогда существует число $\alpha_k \in R$, такое, что при всех $\alpha > \alpha_k$ собственное значение $\lambda_k(\alpha)$ также простое и справедливо равенство*

$$\lambda_k'(\alpha) = \frac{\int_\Gamma u_{k,\alpha}^2 ds}{\int_\Omega u_{k,\alpha}^2 dx} > 0, \tag{24}$$

где $u_{k,\alpha}(x)$ – соответствующая $\lambda_k(\alpha)$ собственная функция задачи (16), (17).

Теорема 3.2. ([10]). *Пусть λ_k^D – простое собственное значение. Тогда справедливо асимптотическое разложение*

$$\lambda_k(\alpha) = \lambda_k^D - \frac{\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_k^D}{\partial \nu}\right)^2 ds}{\int_\Omega (u_k^D)^2 dx} \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right), \quad \alpha \to +\infty, \tag{25}$$

где $u_k^D(x)$ – соответствующая λ_k^D собственная функция задачи (18), (19).

Список литературы

[1] Филиновский А.В. О спектре взвешенного оператора Лапласа в неограниченных областях // Доклады РАН. 2011. Т. 436. no. 3. С. 311 – 315.

[2] Filinovskiy A.V. Spectrum of the weighted Laplace operator in unbounded domains // Math. Bohem. 2011. V. 136. no. 4. P. 415 – 427.

[3] Filinovskiy A.V. Hyperbolic equations with growing coefficients in unbounded domains // J. Math. Sci. 2014. V. 197. no. 3. P. 435 – 446.

[4] Filinovskiy A.V. Stabilization of Solutions of Hyperbolic Equation with Growing Coefficient in Unbounded Domains // Funct. Differ. Equ. 2012. V. 19. no. 1-2. P. 107 – 119.

[5] Filinovskiy A.V. On the eigenvalues of a Robin problem with a large parameter // Math. Bohem., 2014, V. 139, no. 2, P. 341 – 352.

[6] Filinovskiy A.V. Estimates of eigenvalues of a boundary value problem with a parameter // Math. Commun., 2014, V. 19, no. 3, P. 531 – 543.

[7] Filinovskiy A.V. On the estimates of eigenvalues of the boundary value problem with large parameter // Tatra Mt. Math. Publ., 2015, V. 63, P. 101 – 113.

[8] Филиновский А.В. Асимптотическое поведение первого собственного значения задачи Робена // *Дифф. уравнения.* 2011. Т. 47. no. 11. С. 1659 – 1660.

[9] Filinovskiy A.V. On the asymptotic behaviour of the first eigenvalue of Robin problem with large parameter // *J. Elliptic and Parabolic Equ.* 2015. V. 1, no. 1, P. 123 – 135.

[10] Филиновский А.В. Об асимптотическом поведение собственных значений краевой задачи с параметром // *Вестник. Самарского гос. университета.* 2015. no. 6. С. 135 – 140.

Abstracts

The Department of Differential Equations

Kozlov V.V., professor, real member of the Russian Academy of Sciences, the head of the department,
Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: kozlov@pran.ru
Chechkin G.A., professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: chechkin@mech.math.msu.su

The history of the Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University, has begun at the end of 1935. Here we briefly outline the history of the department, we write about the people who worked in the department, telling about the affairs of the department.

State of Rest Perturbed by Steklov–Type Boundary Condition

Abdulazade N.N., student,
Baku Branch of M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: n-abdu@mail.ru
Chechkin G.A., professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: chechkin@mech.math.msu.su

In the paper we consider problem in a fixed 2D domain with Steklov type boundary condition on small part of the boundary. We study the question of disapearance of spectrum (convergence of eigenvalues to infinity) to such a problem as the length of the small part of the boundary tends to zero.

Students' olympiads on differential equations at Mechanics and Mathematics Department of Moscow University

Astashova I.V., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: iastashova@mesi.ru
Kapustina T.O., assistant professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: kapustina-tatiana@yandex.ru
Shamaev A.S., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: sham@rambler.ru

Chair of Differential Equations presents its experience in organizing olympiads on differential equations for the students of Mechanics and Mathematics Department of Moscow University.

The Bair's class of dimension of the vector spaces defined Lyapunov exponents of linear differential systems

Vetokhin A.N., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: vetokhin@front.ru

It is proved that the dimension of the space of solutions of the Lyapunov's characteristics of which is less than the given real number, considered as a functional on the space of linear differential systems with uniform topology, belongs exactly to second Bair's class. And the dimension of the space of solutions of the Lyapunov's characteristics which does not exceed a given real number, considered as a functional on the space of linear differential systems with uniform topology, belongs to exactly to third Bair's class.

Spectral analysis and representations of the solutions of integrodifferential equations in Hilbert space

Vlasov V.V., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: vikmont@yandex.ru
Rautian N.A., associated professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: nrautian@mail.ru
Shamaev A.S., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: sham@rambler.ru

We study the spectra of the operator-valued functions which are the symbols of the abstract integrodifferential equations in a Hilbert space. We analyze the integrodifferential equations arising in applications (Gurtin-Pipkin type equations describing the process of heat propagation in media with memory, integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity). We study the representations of the solutions of these equations as a series, obtained on the base of structure and asymptotic of spectra of operator-valued functions mentioned above.

On oscillation of solutions to the second-order differential equations of Emden–Fowler type

Dulina K.M., post-graduate, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: sun-ksi@mail.ru
Korchemkina T.A., student, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: krtaalex@gmail.com

Consider Emden–Fowler type second-order differential equation

$$y'' + p(x,\, y,\, y')\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 1,$$

with positive, continuous in x and Lipschitz continuous in y_0, y_1 function $p(x, y_0, y_1)$ satisfying inequalities

$$0 < m \le p(x,\, y,\, y') \le M < +\infty.$$

It is proved that all non-extensible solutions to the equation above are oscillating. The behavior of non-extensible solutions near domain boundaries is obtained.

The oscillation theorem for a multipoint boundary value problem for the equation of the fourth order

Kulaev R.Ch., PhD., Ass. Prof, South Mathematical Institute VSC RAS, NOSU
e-mail: kulaev@smath.ru

In work necessary and sufficient conditions of positivity of function of Green of a multipoint boundary value problem for the equation of the fourth order. In these conditions the set of values of coefficients at which function of Green is positive in the range of definition and out of which it loses property of a positivity is defined. Is shown that positivity of function of Green is equivalent to its oscillation and doesn't depend on boundary conditions.

Optimal strategies of risk sensitive investment on a stochastic market taking into account the jumps of the securities prices

Lobsanova T.B., graduate student, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: *lobsanova_tb@mail.ru*

We solve a simplest problem of the risk sensitive optimal investment on the market of securities with the prices involving Brownian and Poissonian processes. The key point is to find an exact solution to the Fokker-Planck-Kolmogorov equation for the density distribution of the capital of portfolio, which is integro-differential in this case.

Asymptotic Behavior of Solutions to Equations of Boundary Layer for Generalized Newtonian Medium

Samokhin V.N., professor, Ivan Fedorov Moscow State University of Printing Arts
e-mail: vnsamokhin@mtu-net.ru
Fadeeva G.M., graduate student, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: ownletters@mail.ru
Chechkin G.A., professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: chechkin@mech.math.msu.su

In the paper we study a qualitative behavior of a solution to the system of equations of boundary layer for generalized newtonian model of continuous medium suggested by O.A.Ladyzhenskaya. We prove the theorem on continuous dependence of tangential component of the velocity of the medium in the boundary layer of the initial profile of velocities. We derive an ordinary differential equation, which solutions we use for constructing similar solutions to considered system of boundary layer. We prove, that under special conditions the solutions to equations of boundary layer converge asymptotically to the similar solution.

Calculation in the mind the exponent of a two-dimensional matrix by Filippov method

Sergeev I.N., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: igniserg@gmail.com

There is told about how prof. A.F. Filippov found in his mind the exponent of an arbitrary two-dimensional matrix. His method was based on a deep inner connection between two-dimensional matrices and their complex eigenvalues.

Spectral properties of elliptic boundary value problem and stabilization. Singularly perturbed spectral problems.

Filinovskii A.V., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: flnv@yandex.ru

We study the location and structure of spectrum of the weighted Laplace operator with Dirichlet boundary condition. Also we investigate the dependence of the location and structure of spectrum from growth rate of the weight function at infinity and rate of expansion of the domain. We study rate of condensation of the discrete spectrum under transition to continuous. We establish the uniform resolvent estimates in the upper half-plane. Applying this estimates we study scattering to the infinity of energy and local energy decay for solution of the first mixed problem for hyperbolic equation with weighted Laplace operator. We obtain estimates and asymptotic expansions to the eigenvalues of the singularly perturbed elliptic boundary value problem with a parameter in boundary condition.

СОДЕРЖАНИЕ

Предыдущие выпуски серии «Современные проблемы математики и механики»

Том I. Прикладные исследования

Выпуск 1. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.
Выпуск 2. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.

Том II. Механика

Выпуск 1. Под редакцией Г.Г. Черного, В.П. Карликова.
Выпуск 2. Под редакцией Б.Е. Победри, Е.В. Ломакина.

Том III. Математика

Выпуск 1. Под редакцией Т.П. Лукашенко, В.Н. Чубарикова.
Выпуск 2. Геометрия и топология. Под редакцией А.Т. Фоменко.
Выпуск 3. Дискретная математика. Под редакцией О.М. Касим-Заде.

Том IV. Математика

Выпуск 1. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева.

Выпуск 2. Динамические системы. Под редакцией А.Т. Фоменко, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. Алгебра и теория чисел. Под редакцией В.А. Артамонова, В.Н. Латышева, Ю.В. Нестеренко.

Том V. Математика

Выпуск 1. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.Н. Сергеева, А.С. Шамаева.

Выпуск 2. Прикладная математика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева, Г.М. Кобелькова.

Выпуск 3. Математическая кибернетика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева.

Том VI. Математика

Выпуск 1. К 105-летию С.М. Никольского. Под редакцией М.К. Потапова, И.Н. Сергеева, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 2. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Том VII. Математика. Механика

Выпуск 1. К 190-летию со дня рождения П.Л. Чебышева. Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева, В.М. Федорова и А.С. Кулешова.

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Под редакцией Е.И. Кугушева и Т.В. Поповой.

Том VIII. Математика

Выпуск 1. К 80-летию А.Г. Костюченко. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. В.В. Власов, Д.А. Медведев, Н.А. Раутиан

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ, к 130-летию Н.Н. Лузина, к 85-летию П.Л. Ульянова. Под редакцией А.Н. Бахвалова.

Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и 110-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева и А.В. Лебедева

Том IX. Математика

Выпуск 1. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Маломерная топология и комбинаторика в оригинальных задачах. Д.П. Ильютко, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Исследования по математическому анализу. Под редакцией Т.П. Лукашенко и Т.В. Родионова

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том IX. Математика

Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.В. Асташовой и И.Н. Сергеева

Подготовка оригинал-макета: ???В.М. Федоров

Подписано в печать ???21.11.2011
Формат 60 x 90 /8 Бумага офс. №1. Усл. печ. л. 10,5.
Заказ 2 Тираж 100 экз.

Издательство Попечительского совета при Механико-математическом факультете Московского университета

119991, Москва, Воробьевы Горы, д. 1.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета

119991, Москва, Воробьевы Горы.