Геометрический подход при изучении решений квазилинейного уравнения дорожного движения

Подорога А. В. (Москва, МГУ)
anastasiapodoroga@gmail.com

В работе Лайтхилла и Визема [1] (см. также [2]) предложен геометрический подход для изучения задач о движении транспортных потоков. При современном изложении этот подход можно интерпретировать как своеобразную модификацию метода характеристик для квазилинейного уравнения дорожного движения.

Ключевыми величинами при описании транспортных потоков является плотность $\rho = \rho(x,t)$ и интенсивность $q = q(x,t)$, вычисляемые в точке $x \in \mathbb{R}$ в момент времени $t > 0$ (см. [3]). Специфика задач дорожного движения заключается в предположении о зависимости $q = Q(\rho)$, называемой *фундаментальной диаграммой*. Возникает уравнение, аналогичное уравнению неразрывности из газовой динамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \qquad \rho = \rho(x,t). \tag{1}$$

Если предполагать, что начальное распределение автомобилей задано, то получаем условие Коши

$$\rho(x,0) = \mu(x).$$

Из теории квазилинейных уравнений (см. [4], [5]) решением такой системы является неявная функция

$$\rho = \mu(x - Q'(\rho)t). \tag{2}$$

За исключением некоторых специальных случаев восстановить явную запись функции $\rho = \rho(x,t)$ из формулы (2) проблематично. При этом можно находить решение ρ с помощью метода характеристик. Через каждую точку x_0 на интересующем нас интервале проводиться характеристика

$$x(t) = Q'(\mu(x_0))t + x_0. \tag{3}$$

Спецификой уравнения (1) является то, что характеристики будут являться линейными функциями, зависящими от вида фундаментальной диаграммы и начальных условий. Из-за возникновения сильных разрывов (ударных волн) аналитически выписывать все характеристики очень трудоемко. Характер таких ударных волн может быть достаточно сложным, например, после возникновения они могут двигаться с переменной скоростью, а так же сливаться.

Используя компьютерное моделирование можно последовательно отрисовывать характеристики и рассчитывая скорости разрывов при их пересечении. Таким образом, мы можем численно получить фазовую плоскость с характеристиками (3) для любой начально заданной функцией $\mu(x)$ и фундаментальной диаграммой $Q(\rho)$, как в [1].

Список литературы

1. **Lighthill M. J., Whitham G. B.** On KinematicWaves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1955. Vol. 229, № 1178. P. 317-345.
2. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. — М: Мир, 1977. — 638 с.
3. **Гасников А. В. и др.** Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / Под ред. А. В. Гасникова. Издание 2-е, испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2013. — 427 с.
4. **Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.** Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие). — М.: Мех-мат МГУ, 1999. — 96 с.
5. **Лакс П. Д.** Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — 296 с.